*République Algérienne Démocratique et Populaire*
*Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*


**Université Djilali Bounâama Khemis Miliana**

**FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE**
*Département de Mathématiques et Informatique*


## *Mémoire de fin d'étude*

---

*En vue de l'obtention d'un diplome de* ***Master*** *Mathématiques*
*Filière : Mathématiques*
*Spécialité : Analyse Mathématique et Applications*

## *Thème*

# *Problèmes aux limites pour les équation différentielles d'ordre arbitraire : Existence et stabilité*


*Présenté par : BOUYEKHF NADJET*


*Devant le jury composé de :*

| | | |
|---|---|---|
| Examinateur 1 : | Mr M. Bouderala MAA | Univ. Djilali Bounâama. |
| Examinateur 2 : | Mr M. Bezziou MAA | Univ. Djilali Bounâama. |
| Encadreur | Mr M. Houass MCA | Univ. Djilali Bounâama. |

**Année Universitaire : 2020/2021**

# Dédicace

C’est avec plaisir que je présente mes meilleurs vœux et sentiments et à

toute mes **chers professeurs** et à

toute **ma famille**, en particulier

**mes parents**.

**mon mari Sid Ahmed**.

Je dédie ce travail à tous mes

**chers amis**

sans exception

# Remerciement

*En premier lieu, je remercie "**ALLAH**" le tout puissant qui m'a donné la force, la volonté et le courage pour accomplir ce modeste travail.*

*Je remercie **Dr.Mohamed HOUASS**, ma encadrant de mémoire de fin d'étude, pour ses précieux conseils et son orientation ficelée tout au long de notre recherche.*

*Je veux exprimer mes remerciements les plus dévoués aux membres de jury qui m'ont honorées en acceptant d'évaluer ce travail.*

*mes remerciements s'étendent également à tous mes enseignants durant les années des études.*

*A mes familles et mes amis qui par leurs prières et leur encouragements, on a pu surmonter tous les obstacles.*

*Je profite l'occasion ainsi à adresser mes remerciements à mes collègues de lissance.*

*Je remercie toute personne qui a participé et contribué de prés ou de loin à l'exécution de ce modeste travail.*

Merci

# Résumé

L'étude des équations différentielles d'ordre fractionnaire joue un rôle important dans la modélisation de nombreux processus physiques, technologiques et biologiques. Depuis quelques années, une attention particulière a été focalisée à l'étude de l'existence et l'unicité de solutions des équations différentielles fractionnaires. De plus, une attention considérable a été accordée récemment à l'étude de la stabilité au sens de Ulam-Hyers. Dans ce mémoire, on traitera la question d'existence, d'unicité et la stabilité au sens de Ulam- Hyers da la solution d'une équation différentielle fractionnaire avec deux dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

# Notaions Utilisées

Pour facilité la lecture, on commence par introduire les différentes notations utilisées tout au long de ce travail.

$\diamondsuit.\mathbb{N}$ : Ensemble des nombres entiers naturels.
$\diamondsuit.\mathbb{R}$ : Ensemble des nombres réels.
$\diamondsuit.\mathbb{C}$ : Ensemble des nombres complexes.
$\diamondsuit.C([0,T],\mathbb{R})$ : Espace des fonctions continues sur $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$\diamondsuit.Re(\alpha)$ : La partie réels de nombre $\alpha \in C$.
$\diamondsuit.\Gamma(.)$ : La fonction Gamma.
$\diamondsuit.\beta(.,.)$ : La fonction Bêta.
$\diamondsuit.B_r$ : La boule fermé de centre $0$ et de rayon $r$.
$\diamondsuit. \| \, . \, \|_\infty$ : Norme infinie.
$\diamondsuit. \| \, . \, \|_X$ : Norme de l'espace $X$.
$\diamondsuit.D^n(ou \ \frac{d^n}{dt})$ : Dérivée d'ordre $n$.
$\diamondsuit.f^{(n)}$ : Dérivée n-iéme de $f$ .
$\diamondsuit.I_a^\alpha f$ : Intégrale fractionnair de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$
$\diamondsuit.{}^cD_a^\alpha f$ : Dérivée fractonnair au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$
Dans le cas où $a = 0$, les opérateurs : $I_a^\alpha, {}^c D_a^\alpha$ sont notés : $I^\alpha, {}^c D^\alpha$.

# Table des matières

# Introduction

La théorie des équations différentielles fractionnaires est l'un des plus importants champs d'applications de la théorie du calcul fractionnaire. Depuis quelques années, une attention considérable a été focalisée à l'étude de l'existence et l'unicité de solutions des équations différentielles d'odore arbitraire. De plus, une attention particulière a été accordée récemment à l'étude de la stabilité au sens de Ulam-Hyers pour telles équations différentielles fractionnaires. Dans ce mémoire, on s'intéresse a l'étude de l'existence, l'unicité et la stabilité au sens de Ulam-Hyers da la solution d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire avec deux dérivée fractionnaire au sens de Caputo.Ce mémoire décompose en trois chapitres :

**chapitre 1 :**

C'est un rappel de quelque définitions, notions de base, résultats sur la dérivation fractionnaire et quelque théorèmes de point fixe utilisés dans ce travail.

**chapitre 2 :**

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité des solution pour le problème fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}({}^cD^{\beta}+\lambda)x(t) = f(t,x(t)), \quad t=[0,1], \\ x(0) = \int_0^1 g(x)x(s)ds, \\ I^p x(1) = I^p x(\eta), \end{cases} \tag{1}$$

L'idée est que transforme ce problème en un problème du point fixe et le point fixe déterminé est considéré soit comme une solution unique pour le problème, soit l'une de ses solution.On donne deux résultats, Le premier est un résultat d'unicité obtenu par utilisation du théorème de point fixe de Banach. Le deuxième est un résultat d'existence basés respectivement sur le théorème de Krasnoselskii. On terminera chaque résultat par un exemple illustratif.

**chapitre 3 :**

L'objet du ce chapitre est l'étude de la stabilité au sens de Ulam-Hyers du problème traité dans le chapitre 2.
On terminera par une conclusion qui rassemble tout ce qui était fait.

Chapitre 1

# Préliminaires sur le calcul fractionnaire.

Dans ce chapitre, on introduit les notions nécessaires qu'on va utiliser dans ce travail.[5, 6, 9, 11, 12]

## 1 Calcul fractionnaire

### 1.1 Fonction de base

**Fonction Gamma d'Euler**

la fonction Gamma d'Euler est tout simplement la généralisation de la notion de factoriel d'un entier à tous les nombres réels ou complexes.

**Définition 1.** Pour tout nombre complexe $\alpha$, de partie réelle positive, la fonction Gamma est définie par l'intégrale suivant :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \tag{1.1}$$

Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive.

**Propriétés 1.** On a la relation suivante :

$-\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad Re(\alpha) \geqslant 0.$
$-\Gamma(n+1) = n! \;\; et \;\; \Gamma(1) = 1.$ Ceci est due à $\Gamma(.)$ est la généralisation de la factorielle.
$-\Gamma(\alpha+n+1) = \prod_{i=0}^{n}(\alpha+i)\Gamma(\alpha).$

**Fonction Bêta d'Euler**

**Définition 2.** On appelle fonction Bêta d'Euler la fonction donnée par :

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt, \;\; Re(p) > 0, \;\; Re(q) > 0. \tag{1.2}$$

**La relation entre la fonction Gamma et Bêta**

**Définition 3.** La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$\beta(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\quad Re(p)>0,\quad Re(q)>0. \tag{1.3}$$

## 1.2 Intégration Fractionnaire

**Intégrale de Riemann-Liouville**

**Défiition 4.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable, on appelle intégrale de Riemanne-Liouville de $f$ l'intégrale suivante :

$$(I_a^\alpha f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt,\ \ x\in[a,b],\quad \alpha>0. \tag{1.4}$$

Où $\Gamma$ est la fonction Gamma d'Euler.

**Exemple 1 :** On considère la fonction $f$ définie par :

$$f(x)=x^\beta,\ \ x\in[a,b],\quad \beta\in\mathbb{R}. \tag{1.5}$$

On va calculer l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de $f$ d'ordre $\alpha$ ($\alpha$ réel strictement positive).

$$I_a^\alpha(x^\beta)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}(t^\beta)dt.$$

Alors

$$\begin{aligned} I^\alpha x^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x(1-\frac{t}{x}))^{\alpha-1}(\frac{t}{x})^\beta x^\beta dt.\\ &= \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (1-\frac{t}{x})^{\alpha-1}(\frac{t}{x})^\beta dt. \end{aligned}$$

à l'aide de changement de variable $y=\frac{t}{x}$ on obtient :

$$\begin{aligned} dy=\frac{dt}{x} &\Rightarrow dt=xdy.\\ t=0 &\Rightarrow y=0.\\ t=x &\Rightarrow y=1. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} I^\alpha(x^\beta) &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}y^\beta dy.\\ &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\beta(\alpha,\beta+1)\\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)}x^{\alpha+\beta}\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}x^{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

D'où

$$I^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta} \tag{1.6}$$

Cas particulier où $\alpha = 1$ d'aprés (1.6) on déduit que :

$$I^\alpha x^\beta = \frac{1}{\beta+1} x^{1+\beta}$$

Cas particulier où $\beta = 0$, on a dans ce cas :

$$(I^\alpha 1)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha.$$

**Proposition 1.** Soit $f \in C([a,b])$, pour $\alpha, \beta$ des nombres complexes, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville posséde la propriété de semi-groupe suivante :

$$I_a^\alpha \left( I_a^\beta f(x) \right) = I_a^{\alpha+\beta} f(x) \;\; \textit{pour} \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \tag{1.7}$$

Et pour $Re(\alpha) > 1$ on a :

$$\frac{d}{dx} I_a^\alpha f = I_a^{\alpha-1} f. \tag{1.8}$$

**Linéarité :** Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues, définies sur $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
$\forall \lambda, \rho \in \mathbb{R}$, on a :

$$I_a^\alpha (\lambda f(t) + \rho g(t)) = \lambda I_a^\alpha f(t) + \rho I_a^\alpha g(t), \quad \alpha > 0.$$

## 1.3 Dérivation Fractionnaire

### Dérivées fractionnaire au sens de Caputo

**Définition 5.** Soit $\alpha \in ]m-1, m[\,, (m \in \mathbb{N}^*)$ et suppose que $f \in C^m([a,b], \mathbb{R})$, on appelle dérivée de $f$ au sens de Caputo la fonction définie par :

$$\left( {}^c D_a^\alpha f \right)(t) \;\; = \;\; \left( I_a^{m-\alpha} f^{(m)} \right)(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(s) ds. \tag{1.9}$$

**Exemple 2.** Soit $f(x) = (x-a)^\beta, x \in [a,b]$, on a :

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha (x-a)^\beta &= I_a^{m-\alpha} \left[ \left( \frac{d}{dx} \right)^m (x-a)^\beta \right] \\ &= I_a^{m-\alpha} \left( \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-m)} (x-a)^{\beta-m} \right) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-m)} I_a^{m-\alpha} (x-a)^{\beta-m} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-m)} \frac{\Gamma(\beta+1-m)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Alors

$$ {}^c D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha}. \tag{1.10}$$

**Remarque 1.** La dérivée d' ordre fractionnaire au sens de Caputo d'une constante est nulle . D'aprés (1.9 ), on a :

$$ {}^{c}D_{a}^{\alpha}C = I_{a}^{m-\alpha}(0) = 0. \tag{1.11} $$

**Quelques propriétés**

$*$ La dérivation fractionnaire au sens de Caputo est une opération linéaire,

$$ {}^{c}D^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda^{c}D^{\alpha}f(t) + \mu^{c}D^{\alpha}g(t). $$

$*^{c}D^{\alpha}({}^{c}D^{\beta}f(t)) =^{c} D^{\alpha+\beta}f(t) =^{c} D^{\beta}({}^{c}D^{\alpha}f(t))$ où $f \in C^{1}([0,T],\mathbb{R}), \quad 0 < \alpha, \beta < 1 \ \ et$ $0 < \alpha + \beta < 1.$

$*Si^{c}D_{0}^{\alpha}f(x) = 0$ alors $f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_{j}x^{j}, \ \ x \in [0,b].$

$*I_{0}^{\alpha}\left[{}^{c}D_{0}^{\alpha}f\right] = f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x)^{j}}{\Gamma(j+1)}f^{(j)}(0), \ \ x \in [0,b].$

$*^{c}D^{\alpha}(I^{\alpha}f(t)) = f(t).$

## 1.4 Quelques théorémes du point fixe

Les équations différentielles fractionnaires sont considérés comme des équations différentielles non-linéaires, alors plusieurs théorèmes ont été utilisés pour résoudre ce type d'équation. L'un des méthodes les plus utilisées : les théorèmes du point fixe. En effet, ces théorèmes accordent des conditions suffisantes pour assurer l'existence d'un point fixe pour une fonction donnée.
Dans le cas des EDPs, on transforme un problème donné en un problème du point fixe . Lespoint fixe du problème transformé sont ainsi les solution du problème donné.
Dans cette secton , on étudie quelques théorémes du point fixe de Banach, Schaefer, Leray-Schauder et Krasnoselskii.

**Définitions**

**Définition 6.** Soit $E$ un espace vectoriel sur le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou sur le corps des nombres complexes $C$. On appelle norme sur $E$ une application de $E$ dans $\mathbb{R}_+$ notée $x \to \| x \|$ satisfaisant les condition suivantes :

**1.** $\forall x \in E : \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E, \quad \forall x \in E.$

**2.** $\forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : \| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|$ .

**3.**$\forall x, y \in E : \| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$ .

**Définition 7.** Soient $(E, \| \ . \ \|_E)$ et $(F, \| \ . \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur le même corps $K$, alors l'espace produit $E \times F = (x, y)/x \in E \quad et \quad y \in F$ est un espace vectoriel normé sur $K$ par l'une des normes suivantes :

**1.** $\| (x, y) \|_1 = \| x \|_E + \| y \|_F$ .

**2.**$\| (x, y) \|_p = (\| x \|_E^p + \| y \|_F^p)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$

**3.** $\| (x, y) \|_\infty = max \{ \| x \|_E, \| y \|_F \}$ .

**Définition 8.** On dit qu' un espace vectoriel normé $(E, \| \ . \ \|_E)$ est **complet** ( ou que c'est un espace de Banach ) si toute suite de Cauchy dans $E$ est convergente.

**Définition 9.** On dit que $A$ est une partie **compact** de$(E, \| \ . \ \|_E)$ si de toute suite de points de $A$ on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de $A$.

**Définition 10.** Une partie $A$ de $(E, \| \ . \ \|_E)$ est dite **relativement compact** si son adhérence est compact.

**Définition 11.** Soient $E$ et $F$ deux espace de Banach, et $A : E \to F$ une application linéaire. On dit que $A$ est **borné** si elle envoie les parties bornées de $E$ sur des parties bornées de $F$ .

**Définition 12.** Soit $A$ un sous ensemble de $C([0, T], \mathbb{R})$, $A$ est **uniformément borné.** i, e ; il existe une constante $K > 0$ tel que : $\| f(x) \| \leqslant K$, pour tout $x \in [0, T]$ et tout $f \in A$.

**Définition 13.** Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach et $f$ une application définie de $E$ à valeurs dans $F$ . On dit que $f$ est **complétement continue** si elle est continue et transforme tout **borné** de $E$ en une ensemble **relativement compact** dans $F$ . $f$ est dite compact si $f(E)$ est relativement compact dans $F$ .

**Définition 14.** Soit $A$ un sous ensemble de $C([0,T],\mathbb{R})$, l'ensemble $A$ est **equicontinue**. i.e ; pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $t_1, t_2 \in [0,T]$ et tout $f \in A$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\mid t_1 - t_2 \mid < \delta \Rightarrow \parallel f(t_1) - f(t_2) \parallel \leqslant \epsilon.$$

**Définition 15.** Soit$(X, \parallel . \parallel)$ un espace vectorielle normé, une application $A : X \mapsto X$ est dite **contractante**, s'il existe un nombre positif $K \in ]0,1[$ tel que $\forall x, y \in X$, on a :

$$\parallel Ax - Ay \parallel \leqslant K \parallel x - y \parallel .$$

**Définition 16.** Soit $(X, \parallel . \parallel)$ un espace vectorielle normé et $A : X \mapsto X$ une application. On appelle **point fixe** de $A$ tout point $x \in X$ tel que : $Ax = x$.

**Théoréme d'Ascoli-Arzela**

**Théoréme 1.**[8] Soit $A$ un sous ensemble de $C([0,T],\mathbb{R})$, $A$ est relativement compact dans $C([0,T],\mathbb{R})$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

**1.** L'ensemble $A$ est uniformément borné.i. e il existe une constante $K > 0$ telle que :

$$\parallel f(x) \parallel \leqslant K \;\; pour \;\; tout \;\; x \in j \;\; et \;\; tout \;\; f \in A$$

**2.** L'ensemble $A$ est equicontinue.  i. e pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\mid t_1 - t_2 \mid < \delta \Rightarrow \parallel f(t_1) - f(t_2) \parallel \leqslant \epsilon \quad pour \;\; tout \;\; t_1, t_2 \in j \;\; et \;\; tout \;\; f \in A.$$

**3.** Pour tout $x \in [0,T]$ l'ensemble $\{f(t), f \in A\} \subset E$ est relativement compact.

**Théoréme de point fixe de Banach**

**Théoréme 2.**[7] Soit $X$ un espace de Banach, et $A : X \mapsto X$ un opérateur contractant . Alors $A$ admet un point fixe unique. i. e ; $\exists x \in X$ tel que $Ax = x$.

**Théoréme de point fixe de schauder**

**Théoréme 3.** Soit $X$ un espace de Banach et $M$ un convexe fermé borné de $X$ et $A : M \mapsto M$ un opérateur continue et compact alors $A$ admet au moins un point fixe .

**L'alternative non linéaire de Leray-Schauder**

**Théoréme 4.** Soit $E$ un espace de Banach, $C$ un sous-ensemble convexe fermé de $E, U$ un sous-ensemble ouvert de $C$ et $0 \in U$. l'opérateur $\phi : \overline{U} \to C$ est continue et compact (c'est-à-dire que

$\phi(\overline{U})$ est un sous-ensemble relativement compact de $C$ ). Alors, ou bien

**1.**L'application $\phi$ admet un point fixe dans $\overline{U}$, sinon

**2.** Il existe $x \in \partial U$ et $\sigma \in [0, 1]$ avec, $x = \sigma T x$.

**Théoréme de point fixe de Krasnosselski**

**Théoréme 5.**[5] Soit $X$ un espace de Banach et $M$ un ensemble fermé borné et convexe de $X$ . On suppose que $A_1, A_2$ sont deux opérateur de $X$ satisfaisants :

**1.** $A_1 x + A_2 y \in M, \quad \forall x, y \in M.$

**2.** $A_1$ est compacte et continue.

**3.**$A_2$ est contractante.

Alors il existe au moins un élément $z \in M$ tel que :$A_1 z + A_2 z = z.$

**Théoréme de point fixe de Schaefer**

**Théoréme 6.**[7, 8] Soit $X$ un espace de Banach et $A : X \mapsto X$ un opérateur complétement continue si :

$$\Omega = \{x \in X : x = \lambda A x, \forall \lambda \in ]0, 1[\}$$

est borné, alors $A$ posséde au moins une point fixe.

**Remarque 1.** Soit $(x_n)$ une suite de $E$ . Alors $(x_n)$ converge vers $x$ dans $(E, \| \ . \ \|)$ si et seulement si :

$$lim_{n \to \infty} \| x_n - x \|_E = 0.$$

Chapitre 2

# Problème fractionnaire avec deux dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour un problème fractionnaire avec dérivées fractionnaires au sens de Caputo.

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}({}^cD^{\beta}+\lambda)x(t) = f(t,x(t)), \quad t=[0,1], \\ \\ x(0) = \int_0^1 g(x)x(s)ds, \\ \\ I^p x(1) = I^p x(\eta), \end{cases} \tag{2.1}$$

Où $0 < \alpha, \beta < 1, 1 < \alpha+\beta \leqslant 2, ^c D^{\alpha} et ^c D^{\beta}$ sont des dérivées fractionnaires au sens de Caputo d'ordre $\alpha$ et $\beta$ respectivement, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f : [0,1]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est aussi une fonction continue.
On va étudier l'existence et l'unicité de la solution à l'aide de principe de contraction de Banach. Puis, on montre l'existence de solutions pour le problème(2,1). est montre par utilisation du théorème de point fixe de Krasnoselskii.

L'existence et unicité d'une solution est établit par la transformation de ce problème à une équation intégrale équivalente, dont la solution est identifiée à un point fixe d'un opérateur .

## 0.1 Lemmes auxiliaires :

**Lemme 1.** [9]Si $\beta \geq \alpha > 0$ et la dérivée fractionnaire ${}^cD_a^{\beta-\alpha}$ existe, alors on a :

$$^cD^\beta I^\beta f(t) =^c D^{\beta-\alpha} f(t), \ \ t \in [0, T].$$

Pour $\alpha > 0 \ \ et \ \ \beta > 0 \ \ avec \ \ \beta < \alpha$, on a :

$$^cD^\beta I^\alpha f(t) = I^{\alpha-\beta} f(t), \ \ t \in [0, T].$$

**Lemme 2.**[9] Soit $h \in C^m([0, T], \mathbb{R}), m \in \mathbb{N}^*$, pour $\alpha \in ]m-1, m[$, la solution générale de l'équation différentielle ${}^cD^\alpha h(t) = 0$ est donnée par :

$$h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{m-1} t^{m-1}. \tag{2.2}$$

où $c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \cdots m-1, \quad m = [\alpha] + 1$.

**Preuve.** Soit $h \in C^m([0, T], \mathbb{R}), m \in \mathbb{N}^*$, pour $\alpha \in ]m-1, m[$ , on a par la définition de la dérivée fractionnaire de Caputo

$$^cD^\alpha h(t) = 0 \Rightarrow I^{m-\alpha} D^m h(t) = 0.$$

En appliquant $D^{m-\alpha}$, on trouve :

$$D^m h(t) = 0.$$

Donc, $h$ est un polynôme de degré $\leqslant m-1$ :

$$\begin{aligned} h(t) &= \sum_{i=0}^{m-1} c_i t^i \\ &= c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{m-1} t^{m-1}. \end{aligned}$$

**Lemme 3.**[9] Soit $h \in C^m([0, T], \mathbb{R}), m \in \mathbb{N}^*$, pour $\alpha \in ]m-1, m[$ , on a :

$$I^\alpha({}^cD^\alpha h(t)) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{m-1} t^{m-1}. \tag{2.3}$$

Pour tout $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \cdots m-1, m = [\alpha] + 1$.

**Prouve.** Soit $h \in C^m([0,T],\mathbb{R}), m \in \mathbb{N}^*$, pour $\alpha \in ]m-1,m[$ , on obtient ;

$$\begin{array}{rcl} I^\alpha({}^cD^\alpha h(t)) & = & I^\alpha I^{m-\alpha} D^m h(t) \\ & = & I^{\alpha+m-\alpha} D^m h(t) \\ & = & I^m D^m h(t) \\ & = & h(t) + \sum_{i=0}^{m-1} c_i t^i \\ & = & h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{m-1} t^{m-1}. \end{array}$$

**Lemme 4.**[3, 4] Soit $h \in C([0,1],\mathbb{R})$, alors la solution du problème fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha({}^cD^\beta + \lambda)x(t) = h(t) \quad t = [0,1], \quad 0 < \alpha, \quad \beta \leqslant 1 \\ x(0) = \int_0^1 g(x)x(s)ds \\ I^p x(1) = I^p x(\eta) \end{cases} \tag{2.4}$$

est donné par :

$$\begin{aligned} x(t) = & I^{\alpha+\beta} h(t) - \lambda I^\beta x(t) \\ & + t^\beta \frac{\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})} I^{\alpha+\beta+p} \\ & - t^\beta \frac{\lambda\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})} I^{\beta+p} x(\eta) \\ & - t^\beta \frac{\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})} I^{\alpha+\beta+1} h(1) \\ & + \frac{t^\beta \lambda\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})} I^{\beta+p} x(1) \\ & + \left[ \frac{t^\beta \Gamma(\beta+p+1)(\eta^p-1)}{(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+1)\Gamma(p+1)} + 1 \right] \int_0^1 g(s)x(s)ds. \end{aligned} \tag{2.5}$$

**Preuve.** Soit l'équation :

$${}^cD^\alpha({}^cD^\beta + \lambda)x(t) = h(t). \tag{2.6}$$

En prenant l'intégrale de Riemann-Liouville fractionnaire d'ordre $\alpha$ pour (2.4), on obtient :

$$I^\alpha \left[ {}^cD^\alpha({}^cD^\beta + \lambda)x(t) \right] = I^\alpha h(t).$$

Par lemme 3, on trouve :

$$({}^cD^\alpha + \lambda)x(t) + c_0 = I^\alpha h(t).$$

Alors :

$${}^cD^\beta x(t) = I^\alpha h(t) - \lambda x(t) + c_0 \tag{2.7}$$

En prenant l'intégrale de Riemann-Liouville fractionnaire d'ordre $\beta$ pour (2.5), on obtient :

$$I^{\beta}({}^{c}D^{\beta})x(t) = I^{\alpha} + \beta h(t) - \lambda I^{\beta}x(t) + c_0\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}$$

Par lemme 3, on trouve :

$$x(t) + c_1 = I^{\alpha+\beta}h(t) - \lambda I^{\beta}x(t) + c_0\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}$$

Alors, la solution générale du problème (2.2) est exprimée sous la forme de l'équation intégrale suivante :

$$x(t) = I^{\alpha+\beta}h(t) - \lambda I^{\beta}x(t) + c_0\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} + c_1. \tag{2.8}$$

où $c_0$ et $c_1$ sont des constants arbitraire. Maintenant, on cherche les constantes $c_0 \ \ et \ \ c_1$. D'après la condition $x(0) = \int_0^1 g(s)x(s)ds$, on peut écrire :

$$x(0) = c_1 = \int_0^1 g(s)x(s)ds$$

Ce qui donne :

$$c_1 = \int_0^1 g(s)x(s)ds$$

Alors (2.6) devient :

$$x(t) = I^{\alpha+\beta}h(t) - \lambda I^{\beta}x(t) + c_0\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} + \int_0^1 g(s)x(s)ds$$

On utilise la condition $I^{p}x(1) = I^{p}x(\eta)$, on trouve :

$$I^{p}x(t) = I^{\alpha+\beta+P}h(t) - \lambda I^{\beta+P}x(t) + c_0\frac{t^{\beta+p}}{\Gamma(\beta+P+1)} + c_1\frac{t^{p}}{\Gamma(p+1)}$$

Alors :

$$I^{p}x(1) = I^{\alpha+\beta+P}h(1) - \lambda I^{\beta+P}x(1) + \frac{c_0}{\Gamma(\beta+P+1)} + \frac{c_1}{\Gamma(p+1)}$$

Et

$$I^{p}x(\eta) = I^{\alpha+\beta+P}h(\eta) - \lambda I^{\beta+P}x(\eta) + c_0\frac{\eta^{\beta+p}}{\Gamma(\beta+P+1)} + c_1\frac{\eta^{p}}{\Gamma(p+1)}$$

Donc :

$$c_0 = \frac{\Gamma(\beta+p+1)}{1-\eta^{\beta+p}}\left[I^{\alpha+\beta+p}h(\eta) - \lambda I^{\beta+p}x(\eta) - I^{\alpha+\beta+1}h(1) + \lambda I^{\beta+p}x(t) + c_1\frac{\eta^{p}-1}{\Gamma(p+1)}\right]$$

Substituant $c_0 \ \ et \ \ c_1$ en (2.6), on obtient la solution (2.3).

## 0.2 Problème du Point fixe

Avant tout, on introduit l'espace de Banach suivant :

$$X = \left\{x : x(t) \in C^{1}([0,1],\mathbb{R})\right\}$$

Meni de la norme

$$\| x \|= \sup_{t\in[0,1]} \{| x(t) |, t \in [0,1]\}$$

Maintenant, on définit l'opérateur

$$\begin{aligned} A : X &\longrightarrow X. \\ x(t) &\longrightarrow Ax(t). \end{aligned}$$

Tell que :$\forall t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} Ax(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s,x(s))ds \\ &- \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} x(s)ds \\ &+ t^\beta \frac{\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+p)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+p-1} f(s,x(s))ds \\ &- t^\beta \frac{\lambda\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\beta+P-1} x(s)dS \\ &- t^\beta \frac{\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta} f(s,x(s))ds \\ &+ t^\beta \frac{\lambda\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p)} \int_0^1 (1-s)^{\beta+p-1} x(s)ds \\ &+ \left[ t^\beta \frac{\Gamma(\beta+p+1)(\eta^p-1)}{(1-\eta^{\beta+p}\Gamma(\beta+1)\Gamma(p+1)} + 1 \right] \int_0^1 g(s)x(s)ds. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Il convient de noter que le problème (2.1) a des solution si et seulement si l'opérateur $A$ a des points fixes.

## 0.3 Existence et unicité

On va donner l'unicité de la solution du problème fractionnaire (2.1), en utilisant le théorème de contraction de Banach.

**Théorème 7 :** [3, 4] Soit $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. On suppose que :

**(H1)** : Il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$| f(t,x) - f(t,y) | \leq k \mid x - y \mid,$$

pour tout $t \in [0,1], \quad et \quad x, y \in \mathbb{R}$
**(H2)** : La fonction $g$ est continue sur $[0,1]$ et $| g(t) | \leqslant M_g$.
**(H3)** : $M < 1$ , où $M$ définies par :

$$\begin{aligned} M &= \frac{K}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta+1)} \\ &+ \frac{K\Gamma(\beta+p+1)\eta^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+p+1)} + \frac{|\lambda| \eta^{\beta+p}}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})} \\ &+ \frac{K\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+2)} + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})} \\ &+ \left[ \frac{\Gamma(\beta+p+1)(\eta^p-1)}{(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+1)\Gamma(p+1)} + 1 \right] M_g. \end{aligned}$$

Alors, il existe une solution unique pour le problème (2.1).

**Preuve.** Le théoréme de contraction de Banach appui sur le fait que si $A$ est un opérateur contractant, alors il existe un point fixe pour $A$. De là vient l'idée de chercher l'existence d'une constante $M > 0$ .
pour tout $x, y \in X$et $t \in [0,1]$, alors on montre qu'il existe M tel que :

$$\| A(x) - A(y) \| < M \| x - y \|_X \qquad avec \quad M < 1.$$

soient $x, y \in X$ Alors :

$$\begin{aligned}
| Ax(t) - Ay(t) | &= \Big| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) ds \\
&- \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} x(s) ds \\
&+ t^\beta \frac{\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+p)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+p-1} f(s, x(s)) ds \\
&- t^\beta \frac{\lambda\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\beta+P-1} x(s) dS \\
&- t^\beta \frac{\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta} f(s, x(s)) ds \\
&+ t^\beta \frac{\lambda\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p)} \int_0^1 (1-s)^{\beta+p-1} x(s) ds \\
&+ \left[ t^\beta \frac{\Gamma(\beta+p+1)(\eta^p-1)}{(1-\eta^{\beta+p}\Gamma(\beta+1)\Gamma(p+1)} + 1 \right] \int_0^1 g(s) x(s) ds \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, y(s)) ds \\
&+ \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} y(s) ds + t^\beta \frac{\lambda\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})} \frac{1}{\Gamma(\beta+p)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\beta+P-1} y(s) ds \\
&+ t^\beta \frac{\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})} \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta} f(s, y(s)) ds \\
&- t^\beta \frac{\lambda\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p)} \int_0^1 (1-s)^{\beta+p-1} y(s) ds \\
&- \left[ t^\beta \frac{\Gamma(\beta+p+1)(\eta^p-1)}{(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+1)\Gamma(p+1)} + 1 \right] \int_0^1 g(s) y(s) ds \Big|.
\end{aligned}$$

D'où,

$$
\begin{aligned}
| Ax(t) - Ay(t) | \leqslant & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \mid f(s,x(s)) - f(s,y(s)) \mid ds \\
& + \frac{\mid \lambda \mid}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \mid x(s) - y(s) \mid ds \\
& + t^{\beta} \frac{\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+p)} \int_0^{\eta} (\eta-s)^{\alpha+\beta+p-1} \mid f(s,x(s)) - f(s,y(s)) \mid ds \\
& + t^{\beta} \frac{\mid \lambda \mid \Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p)} \int_0^{\eta} (\eta-s)^{\beta+P-1} \mid x(s) - y(s) \mid ds \\
& + t^{\beta} \frac{\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta} \mid f(s,x(s)) - f(s,y(s)) \mid ds \\
& + t^{\beta} \frac{\mid \lambda \mid \Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p)} \int_0^1 (1-s)^{\beta+p-1} \mid x(s) - y(s) \mid ds \\
& + \left[ t^{\beta} \frac{\Gamma(\beta+p+1)(\eta^p - 1)}{(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+1)\Gamma(p+1)} + 1 \right] \int_0^1 g(s) \mid x(s) - y(s) \mid ds.
\end{aligned}
$$

En utilisant les hypothèses (**H1**) et (**H2**), on obtient :

$$
\begin{aligned}
| Ax(t) - Ay(t) | \leqslant & \frac{K}{\Gamma(\alpha+\beta)} \sup_{t\in[0,1]} \mid x(t) - y(t) \mid \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} ds \\
& + \frac{\mid \lambda \mid}{\Gamma(\beta)} \sup_{t\in[0,1]} \mid x(s) - y(s) \mid \int_0^t (t-s)^{\beta-1} ds \\
& + t^{\beta} \frac{K\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+p)} \sup_{t\in[0,1]} \mid x(t) - y(t) \mid \int_0^{\eta} (\eta-s)^{\alpha+\beta+p-1} ds \\
& + t^{\beta} \frac{\mid \lambda \mid \Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p)} \sup_{t\in[0,1]} \mid x(s) - y(s) \mid \int_0^{\eta} (\eta-s)^{\beta+P-1} ds \\
& + t^{\beta} \frac{K\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+1)} \sup_{t\in[0,1]} \mid x(t) - y(t) \mid \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta} ds \\
& + t^{\beta} \frac{\mid \lambda \mid \Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p)} \sup_{t\in[0,1]} \mid x(s) - y(s) \mid \int_0^1 (1-s)^{\beta+p-1} ds \\
& + \left[ t^{\beta} \frac{\Gamma(\beta+p+1)(\eta^p - 1)}{(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+1)\Gamma(p+1)} + 1 \right] \sup_{t\in[0,1]} \mid x(s) - y(s) \mid \int_0^1 \mid g(s) \mid ds.
\end{aligned}
$$

Par calcule simple, on trouve que :

$$\begin{aligned}
| Ax(t) - Ay(t) | \leqslant & \frac{Kt^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \sup_{t\in[0,1]} | x(t) - y(t) | \\
& + \frac{t^{\beta} | \lambda |}{\Gamma(\beta+1)} \sup_{t\in[0,1]} | x(s) - y(s) | \\
& + t^{\beta} \frac{K\Gamma(\beta+p+1)\eta^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})} \sup_{t\in[0,1]} | x(t) - y(t) | \\
& + t^{\beta} \frac{| \lambda | \eta^{\beta+p}}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p)} \sup_{t\in[0,1]} | x(s) - y(s) | \\
& + t^{\beta} \frac{K\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+2)} \sup_{t\in[0,1]} | x(s) - y(s) | \\
& + t^{\beta} \frac{| \lambda |}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})} \sup_{t\in[0,1]} | x(s) - y(s) | \\
& + \left[ t^{\beta} \frac{\Gamma(\beta+p+1)(\eta^{p}-1)}{(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+1)\Gamma(p+1)} + 1 \right] \sup_{t\in[0,1]} | x(s) - y(s) | M_g.
\end{aligned}$$

En passant à la norme, on trouve :

$$\begin{aligned}
\| Ax - Ay \| \leqslant & \frac{Kt^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \| x - y \| \\
& + \frac{t^{\beta} | \lambda |}{\Gamma(\beta+1)} \| x - y \| \\
& + t^{\beta} \frac{K\Gamma(\beta+p+1)\eta^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+p+1)} \| x - y \| \\
& + t^{\beta} \frac{| \lambda | \eta^{\beta+p}}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})} \| x - y \| \\
& + t^{\beta} \frac{K\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+2)} \| x - y \| + t^{\beta} \frac{| \lambda |}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})} \| x - y \| \\
& + \left[ t^{\beta} \frac{\Gamma(\beta+p+1)(\eta^{p}-1)}{(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+1)\Gamma(p+1)} + 1 \right] M_g \| x - y \| .
\end{aligned}$$

Donc comme $t \in [0, 1]$ on à :

$$\begin{aligned}
\| Ax - Ay \| \leqslant & [\frac{K}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\
& + \frac{| \lambda |}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{K\Gamma(\beta+p+1)\eta^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+p+1)} \\
& + \frac{| \lambda | \eta^{\beta+p}}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})} + \frac{K\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+2)} + \frac{| \lambda |}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})} \\
& + \left[ \frac{\Gamma(\beta+p+1)(\eta^{p}-1)}{(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+1)\Gamma(p+1)} + 1 \right] M_g] \| x - y \|_X .
\end{aligned}$$

D'où :

$$\| Ax - Ay \| \leqslant M \| x - y \| \tag{2.10}$$

tel que :

$$
\begin{aligned}
M = &\frac{K}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{\mid \lambda \mid}{\Gamma(\beta+1)} \\
&+ \frac{K\Gamma(\beta+p+1)\eta^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+p+1)} + \frac{\mid \lambda \mid \eta^{\beta+p}}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})} \\
&+ \frac{K\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+2)} + \frac{\mid \lambda \mid}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})} \\
&+ \left[\frac{\Gamma(\beta+p+1)(\eta^{p}-1)}{(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+1)\Gamma(p+1)} + 1\right] M_g.
\end{aligned}
$$

D'aprés (**H3**) l'opérateur A est contractante, par conséquent le probléme (2.1) admet une seule solution.

**Exemple.**

On considére le problème suivante :

$$
\begin{cases}
{}^cD^{\frac{3}{4}}({}^cD^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{10})x(t) = f(t, x(t)), \quad t = [0,1], \\
x(0) = \int_0^1 \frac{1}{19+2t} x(s)ds, \\
I^p x(1) = 1,
\end{cases}
\tag{2.11}
$$

**où** :

$$
f(t, x(t)) = \frac{x(t)}{\sqrt{t} + 100} + cost
$$

**on a :**

$$
\begin{aligned}
\Big| f(t, x(t)) - f(t, y(t)) \Big| \quad &\leqslant \quad \frac{1}{\sqrt{t}+100} \mid x(t) - y(t) \mid \\
&\leqslant \quad \frac{1}{10} \mid x(t) - y(t) \mid
\end{aligned}
$$

Donc $(\mathbf{H}_1)$ est satisfaite avec $K = \frac{1}{10}$

Aussi on a :

$$
\left| \tfrac{1}{19+2t} \right| \leqslant \tfrac{1}{20}
$$

Donc $(\mathbf{H}_2)$ est satisfaite avec $M_g = \frac{1}{20}$.

Par suite :

$$
\begin{aligned}
M = &\frac{0,5}{\Gamma(0,75+0,5+1)} + \frac{\mid 0,1 \mid}{\Gamma(0,5+1)} \\
&+ \frac{0,1\Gamma(0,5+0,5+1)(0,6)^{0,75+0,5+0,5}}{\Gamma(0,5+1)(1-(0,6)^{0,5+0,1})\Gamma(0,75+0,5+0,5+1)} + \frac{\mid 0,1 \mid (0,6)^{0,5+0,5}}{\Gamma(0,5+1)(1-0,6^{0,5+0,5})} \\
&+ \frac{0,1\Gamma(0,5+0,1+1)}{\Gamma(0,5+1)(1-0,6^{0,5+0,1})\Gamma(0,75+0,5+2)} + \frac{\mid 0,1 \mid}{\Gamma(0,5+1)(1-0,6^{0,5+0,1})} \\
&+ \left[\frac{\Gamma(0,5+0,5+1)(0,6^{0,5}-1)}{(1-0,6^{0,5+0,5})\Gamma(0,5+1)\Gamma(0,5+1)} + 1\right] 0,05 \approx 0,2321.
\end{aligned}
$$

Ainsi toutes les hypothèses du Théorème7 sont satisfaites, par conséquent le problème (2.11 ) possède une unique solution.

## 0.4 Existence

## 0.5 Résulta d'existence via le théoréme du point fixe de Krasnoselskii

**Théorème 8.**[3, 4] Soit $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, on suppose que **(H1)**, **(H2)** et les hypothèses suivantes sont satisfaites :

**(H4)** : Il existe une constante $M > 0$ telle que :$\mid f(t, x(t)) \mid \leq M$, pour tout $t \in [0,1] \ \ et \ \ x \in \mathbb{R}$
**(H5)** : $S < 1$, où :

$$\begin{aligned} S = & \frac{K\Gamma(\beta+p+1)\eta^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+p+1)} + \frac{\mid \lambda \mid \eta^{\beta+p}}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})} \\ & + \frac{K\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+2)} + \frac{\mid \lambda \mid \Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p+1)} \\ & + \left[ \frac{\Gamma(\beta+p+1)(\eta^p-1)}{(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+1)\Gamma(p+1)} + 1 \right] M_g. \end{aligned}$$

Alors, le probléme admet au moins une solution.

**Preuve :** Pour montrer l'existence de la solution du (2.1), il suffit de vérifier les condition du théorème du point fixe de Krasnoselskii ( théorème 5).
On fixe : $r \geq L$, où :

$$\begin{aligned} L = & \frac{M}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{\mid \lambda \mid r}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{\Gamma(\beta+p+1)M\eta^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+p+1)} \\ & + \frac{\mid \lambda \mid \eta^{\beta+p} r}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p)} + \frac{\Gamma(\beta+p+1)r}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ & + \frac{\mid \lambda \mid r}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})} + \left[ \frac{\Gamma(\beta+p+1)(\eta^p-1)}{(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+1)\Gamma(p+1)} + 1 \right] rM_g. \end{aligned}$$

On considère l'ensemble suivant :

$$B_r = \{x \in X :\parallel x \parallel_X \leqslant r\}$$

On définit deux opérateur $A_1 \ \ et \ \ A_2$ sur $B_r$ comme suite

$$A_1 x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} x(s) ds.$$

Et :

$$\begin{aligned}
A_2x(t) &= t^{\beta}\frac{\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+p)}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha+\beta+p-1}f(s,x(s))ds\\
&- t^{\beta}\frac{\lambda\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p)}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\beta+P-1}x(s)dS\\
&- t^{\beta}\frac{\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+1)}\int_0^{1}(1-s)^{\alpha+\beta}f(s,x(s))ds\\
&+ t^{\beta}\frac{\lambda\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p)}\int_0^{1}(1-s)^{\beta+p-1}x(s)ds\\
&+ \left[t^{\beta}\frac{\Gamma(\beta+p+1)(\eta^{p}-1)}{(1-\eta^{\beta+p}\Gamma(\beta+1)\Gamma(p+1)}+1\right]\int_0^{1}g(s)x(s)ds.
\end{aligned}$$

**Etape 1** :

On montrer que si $x, y \in B_r \Rightarrow A_1x(t)+A_2y(t)\in B_r$, c'est a dire :

$$\parallel A_1x + A_2y \parallel_X \leqslant r.$$

Soit $x, y \in B_r \;\; et \;\; t\in[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\mid A_1x(t)+A_2y(t)\mid =\mid &\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^{t}(t-s)^{\alpha+\beta-1}f(s,x(s))ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t}(t-s)^{\beta-1}x(s)ds\\
&+ t^{\beta}\frac{\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+p)}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha+\beta+p-1}f(s,y(s))ds\\
&- t^{\beta}\frac{\lambda\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p)}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\beta+P-1}y(s)dS\\
&- t^{\beta}\frac{\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+1)}\int_0^{1}(1-s)^{\alpha+\beta}f(s,y(s))ds\\
&+ t^{\beta}\frac{\lambda\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p)}\int_0^{1}(1-s)^{\beta+p-1}y(s)ds\\
&+ \left[t^{\beta}\frac{\Gamma(\beta+p+1)(\eta^{p}-1)}{(1-\eta^{\beta+p}\Gamma(\beta+1)\Gamma(p+1)}+1\right]\int_0^{1}g(s)y(s)ds.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\mid A_1x(t)+A_2y(t)\mid \leqslant &\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^{t}(t-s)^{\alpha+\beta-1}\mid f(s,x(s))\mid ds + \frac{\mid\lambda\mid}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t}(t-s)^{\beta-1}\mid x(s)\mid ds\\
&+ t^{\beta}\frac{\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+p)}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha+\beta+p-1}\mid f(s,y(s))\mid ds\\
&+ t^{\beta}\frac{\mid\lambda\mid\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p)}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\beta+P-1}\mid y(s)\mid dS\\
&+ t^{\beta}\frac{\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+1)}\int_0^{1}(1-s)^{\alpha+\beta}\mid f(s,y(s))\mid ds\\
&+ t^{\beta}\frac{\mid\lambda\mid\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p)}\int_0^{1}(1-s)^{\beta+p-1}\mid y(s)\mid ds\\
&+ \left[t^{\beta}\frac{\Gamma(\beta+p+1)(\eta^{p}-1)}{(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+1)\Gamma(p+1)}+1\right]\int_0^{1}\mid g(s)\mid\mid y(s)\mid ds.
\end{aligned}$$

En appliquant les hypothèses **(H2)** et **(H4)**, on trouve :

$$
\begin{aligned}
\mid A_1x(t)+A_2y(t)\mid \leqslant{}& \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\sup_{t\in[0,1]}\mid f(s,x(s))\mid \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1}ds\\
&+\frac{\mid\lambda\mid}{\Gamma(\beta)}\sup_{t\in[0,1]}\mid x(s)\mid \int_0^t (t-s)^{\beta-1}ds\\
&+t^{\beta}\frac{\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+p)}\sup_{t\in[0,1]}\mid f(s,y(s))\mid \int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha+\beta+p-1}ds\\
&+t^{\beta}\frac{\mid\lambda\mid\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p)}\sup_{t\in[0,1]}\mid y(s)\mid \int_0^{\eta}(\eta-s)^{\beta+P-1}dS\\
&+t^{\beta}\frac{\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+1)}\sup_{t\in[0,1]}\mid f(s,y(s))\mid \int_0^{1}(1-s)^{\alpha+\beta}ds\\
&+t^{\beta}\frac{\mid\lambda\mid\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p)}\sup_{t\in[0,1]}\mid y(s)\mid \int_0^{1}(1-s)^{\beta+p-1}ds\\
&+\left[t^{\beta}\frac{\Gamma(\beta+p+1)(\eta^{p}-1)}{(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+1)\Gamma(p+1)}+1\right]\sup_{t\in[0,1]}\mid y(s)\mid \int_0^{1}\mid g(s)\mid ds.
\end{aligned}
$$

Par suite :

$$
\begin{aligned}
\parallel A_1x+A_2y\parallel \leqslant{}& \frac{MT^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{\mid\lambda\mid T^{\beta}r}{\Gamma(\beta+1)}+T^{\beta}\frac{\Gamma(\beta+p+1)M\eta^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+p+1)}\\
&+T^{\beta}\frac{\mid\lambda\mid\eta^{\beta+p}r}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p)}+T^{\beta}\frac{\Gamma(\beta+p+1)r}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+1)}\\
&+T^{\beta}\frac{\mid\lambda\mid r}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})}+\left[T^{\beta}\frac{\Gamma(\beta+p+1)(\eta^{p}-1)}{(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+1)\Gamma(p+1)}+1\right]rM_g.
\end{aligned}
$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
\parallel A_1x+A_2y\parallel \leqslant{}& \frac{M}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{\mid\lambda\mid r}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{\Gamma(\beta+p+1)M\eta^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+p+1)}\\
&+\frac{\mid\lambda\mid\eta^{\beta+p}r}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p)}+\frac{\Gamma(\beta+p+1)r}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta+1)}\\
&+\frac{\mid\lambda\mid r}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})}+\left[\frac{\Gamma(\beta+p+1)(\eta^{p}-1)}{(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+1)\Gamma(p+1)}+1\right]rM_g:=L.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Alors pour tout $x,y\in[0,1]$, on trouve $A_1x(t)+A_2y(t)\in B_r$.

**Etape 2 :**

**1**. On montre que $A_1$ est continue.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ une suite telle que : $\quad x_n\to x\;\; dans\;\; X$. Alors pour tout $t\in[0,1]$, on a :

$$
\begin{aligned}
\mid A_1(x_n(t)-A_1(x)(t)\mid \;=\;& \Big|\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1}f(s,x_n(s))ds\\
-\;& \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}x_n(s)ds-\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1}f(s,x(s))ds\\
+\;& \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}x(s)ds.\Big|
\end{aligned}
$$

Ce qui donne :

$$\begin{array}{rcl} \mid A_1(x)_n(t) - A_1(x)(t) \mid & = & \dfrac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \Big| f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)) \Big| ds \\ & - & \dfrac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\beta-1} \Big| x_n(s) - x(s) ds. \Big| \end{array}$$

Comme $f$ est une fonction continue, alors :

$$\| A_1(x_n) - A_1(x) \|_\infty \to 0 \qquad quand \quad n \to \infty \tag{2.13}$$

D'où, $A_1$ est continue sur $X$

**2.** On montre que $A_1$ est compact.
Pour établir la compacité de l'opérateur $A_1$, il suffit de prouver que $A_1(B_r)$est relativement compacte en utilisant le théoréme d'Ascoli-Arzela.

**a)** $A_1(B_r)$ est borné.
Il suffit de montrer que pour tout $r > 0$, il exixte une constante positive $\rho$ tel que pour tout $t \in [0,1]$ et $x \in B_r$, avec $B_r = \{x \in X : \| x \|_x \leqslant r\}$, on trouve : $\| A_1(x) \|_x \leqslant \rho$.
On a :

$$\begin{array}{rcl} \mid A_1 x(t) \mid & = & \Big| \dfrac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) ds \\ & - & \dfrac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\beta-1} x(s) ds \Big| \\ & \leqslant & \dfrac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \Big| f(s, x(s)) \Big| ds \\ & + & \dfrac{\mid \lambda \mid}{\Gamma(\beta)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\beta-1} \Big| x(s) \Big| ds. \end{array}$$

En appliquant l'hypothése (H4), on trouve :

$$\mid A_1 x(t) \mid = \frac{M}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} + \frac{\mid \lambda \mid}{\Gamma(\beta)} \sup_{t \in [0,1]} \mid x(t) \mid \int_0^t (t-s)^{\beta-1} ds.$$

Par suite :

$$\| A_1 x \| = \frac{M t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{r \mid \lambda \mid t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} := \rho \tag{2.14}$$

De (2.11), ona :

$$\| A_1 x \| \leqslant \rho$$

Donc $A_1(B_r)$ est uniformément borné.

**b)** $A_1(B_r)$ est équicontinue.
Soit $x \in B_r$, pour tout $t_1, t_2 \in [0,1], t_1 < t_2$ :

$$\begin{array}{rcl} \mid A_1(x)(t_2) - A_1(x)(t_1) \mid & = & \Big| \dfrac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \displaystyle\int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) ds \\ & - & \dfrac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \displaystyle\int_0^{t_2} (t_2-s)^{\beta-1} x(s) ds \\ & - & \dfrac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \displaystyle\int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) \\ & + & \dfrac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \displaystyle\int_0^{t_1} (t_1-s)^{\beta-1} x(s) ds \Big|. \end{array}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
\mid A_1(x)(t_2) - A_1(x)(t_1) \mid &= \Big| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left[ \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) ds \right] \\
&- \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \left[ \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\beta-1} x(s) ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\beta-1} x(s) ds \right] \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) \\
&+ \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\beta-1} x(s) ds \Big|.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\mid A_1(x)(t_2) - A_1(x)(t_1) \mid &= \Big| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left[ \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} - (t_1 - s)^{\alpha+\beta-1} \right] f(s, x(s)) ds \\
&+ \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \left[ \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\beta-1} - (t_2 - s)^{\beta-1} x(s) \right] ds \\
&- \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\beta-1} x(s) ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) ds \Big|.
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\mid A_1(x)(t_2) - A_1(x)(t_1) \mid &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^{t_1} \left[ (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} - (t_1 - s)^{\alpha+\beta-1} \right] \Big| f(s, x(s)) \Big| ds \\
&+ \frac{\mid \lambda \mid}{\Gamma(\beta)} \left[ \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\beta-1} - (t_2 - s)^{\beta-1} \right] \Big| x(s) \Big| ds \\
&- \frac{\mid \lambda \mid}{\Gamma(\beta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\beta-1} \Big| x(s) \Big| ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} \Big| f(s, x(s)) \Big| ds.
\end{aligned}$$

On appliquant l'hypothése **(H4)**, on trouvé :

$$\begin{aligned}
\mid A_1(x)(t_2) - A_1(x)(t_1) \mid \leqslant & \frac{M}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^{t_1} \left[ (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} - (t_1 - s)^{\alpha+\beta-1} \right] ds \\
&+ \frac{r \mid \lambda \mid}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_1} \left[ (t_1 - s)^{\beta-1} - (t_2 - s)^{\beta-1} \right] \\
&- \frac{r \mid \lambda \mid}{\Gamma(\beta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\beta-1} ds \\
&+ \frac{M}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} ds.
\end{aligned}$$

On a :

$$\int_{t_0}^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} ds = -\frac{(t_2 - t_1)^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta} + \frac{t_2^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}.$$

$$\int_{t_0}^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha+\beta-1} ds = \frac{t_1^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}(t_1-s)^{\beta-1}ds=\frac{t_1^\beta}{\beta}$$
$$\int_{t_0}^{t_1}(t_2-s)^{\beta-1}ds=-\frac{(t_2-t_1)^\beta}{\beta}+\frac{t_2^\beta}{\beta}$$
$$\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\beta-1}ds=\frac{(t_2-t_1)^\beta}{\beta}$$
$$\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta-1}ds=\frac{(t_2-t_1)^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\parallel A_1(x)(t_2)-A_1(x)(t_1)\parallel \leqslant & \frac{M}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\left[-(t_2-t_1)^{\alpha+\beta}+t_2^{\alpha+\beta}-t_1^{\alpha+\beta}\right]\\ &+\frac{r\mid\lambda\mid}{\Gamma(\beta+1)}\left[t_1^\beta-t_2^\beta-(t_2-t_1)^\beta\right]\\ &-\frac{r\mid\lambda\mid}{\Gamma(\beta)}\left[(t_2-t_1)^\beta\right]\\ &+\frac{M}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\left[(t_2-t_1)^{\alpha+\beta}\right].\end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\parallel A_1(x)(t_2)-A_1(x)(t_1)\parallel_\infty \leqslant & \frac{M}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\left[t_2^{\alpha+\beta}-t_1^{\alpha+\beta}+(t_2-t_1)^{\alpha+\beta}\right]\\ &+\frac{r\mid\lambda\mid}{\Gamma(\beta+1)}\left[t_1^\beta-t_2^\beta-(t_2-t_1)^\beta\right]\\ &-\frac{r\mid\lambda\mid}{\Gamma(\beta)}\left[(t_2-t_1)^\beta\right].\end{aligned}\tag{2.15}$$

Alors pour $t_1\to t_2$, on va avoir :

$$\parallel A_1(x)(t_2)-A_1(x)(t_1)\parallel_\infty\to 0.\tag{2.16}$$

Donc, $A_1(B_r)$ est équicontinue.
D'où d"aprés (a) et (b) et le théoréme d'Ascoli- Arzelà, $A_1$ est relativement compact sur $B_r$.
**Etape 3 :**

On montre que $A_2$ est contractante.
Soient $x,y\in B_r,t\in[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}\mid A_2x(t)-A_2y(t)\mid =\,& t^\beta\frac{\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+p)}\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha+\beta+p-1}\Big|f(s,x(s))-f(s,y(s))\Big|ds\\ &+t^\beta\frac{\mid\lambda\mid\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p)}\int_0^\eta(\eta-s)^{\beta+P-1}\Big|x(s)-y(t)\Big|dS\\ &+t^\beta\frac{\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+1)}\int_0^1(1-s)^{\alpha+\beta}\Big|f(s,x(s))-f(s,y(s))\Big|ds\\ &+t^\beta\frac{\mid\lambda\mid\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p)}\int_0^1(1-s)^{\beta+p-1}\Big|x(s)-y(s)\Big|ds\\ &+\left[t^\beta\frac{\Gamma(\beta+p+1)(\eta^p-1)}{(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+1)\Gamma(p+1)}+1\right]\int_0^1 g(s)\Big|x(s)-y(t)\Big|ds.\end{aligned}$$

En utilisant les hypothéses **(H1)** et **(H2)**, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mid A_2x(t)-A_2y(t)\mid \leqslant\ & t^{\beta}\frac{K\parallel x-y\parallel\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+p)}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha+\beta+p-1}ds\\
&+t^{\beta}\frac{\parallel x-y\parallel\mid\lambda\mid\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p)}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\beta+P-1}dS\\
&+t^{\beta}\frac{K\parallel x-y\parallel\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+1)}\int_0^{1}(1-s)^{\alpha+\beta}ds\\
&+t^{\beta}\frac{\parallel x-y\parallel\mid\lambda\mid\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p)}\int_0^{1}(1-s)^{\beta+p-1}ds\\
&+\left[t^{\beta}\frac{\Gamma(\beta+p+1)(\eta^{p}-1)}{(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+1)\Gamma(p+1)}+1\right]M_g\parallel x-y\parallel\int_0^{1}1ds.
\end{aligned}$$

Par calcule simple, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mid A_2x(t)-A_2y(t)\mid \leqslant\ & t^{\beta}\frac{K\Gamma(\beta+p+1)\eta^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+p+1)}\parallel x-y\parallel\\
&+t^{\beta}\frac{\mid\lambda\mid\eta^{\beta+p}}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})}\parallel x-y\parallel\\
&+t^{\beta}\frac{K\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+2)}\parallel x-y\parallel\\
&+t^{\beta}\frac{\mid\lambda\mid\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p+1)}\parallel x-y\parallel\\
&+\left[t^{\beta}\frac{\Gamma(\beta+p+1)(\eta^{p}-1)}{(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+1)\Gamma(p+1)}+1\right]M_g\parallel x-y\parallel.
\end{aligned}$$

Et comme $t\in[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\parallel A_2x-A_2y\parallel_{\infty} \leqslant\ & \frac{K\Gamma(\beta+p+1)\eta^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+p+1)}\parallel x-y\parallel\\
&+\frac{\mid\lambda\mid\eta^{\beta+p}}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})}\parallel x-y\parallel\\
&+\frac{K\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+2)}\parallel x-y\parallel\\
&+\frac{\mid\lambda\mid\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p+1)}\parallel x-y\parallel\\
&+\left[\frac{\Gamma(\beta+p+1)(\eta^{p}-1)}{(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+1)\Gamma(p+1)}+1\right]M_g\parallel x-y\parallel.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\parallel A_2x-A_2y\parallel_{\infty}\leqslant S\parallel x-y\parallel. \tag{2.17}$$

Tel que :

$$
\begin{aligned}
S = & \frac{K\Gamma(\beta+p+1)\eta^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+p+1)} + \frac{\mid \lambda \mid \eta^{\beta+p}}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})} \\
& + \frac{K\Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha+\beta+2)} + \frac{\mid \lambda \mid \Gamma(\beta+p+1)}{\Gamma(\beta+1)(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+p+1)} \\
& + \left[\frac{\Gamma(\beta+p+1)(\eta^p-1)}{(1-\eta^{\beta+p})\Gamma(\beta+1)\Gamma(p+1)} + 1\right] M_g.
\end{aligned}
$$

Donc, l'opérateur $A$ est contractante.

Graces aux étapes 1, 2, 3, et d'aprés le théoréme du point fixe de krasnosselski, on déduit que le probléme (2.1) admet au moins une solution.

**Exemple.**

Soit le problème fractionnaire suivante :

$$
\begin{cases}
{}^cD^{\frac{7}{8}}({}^cD^{\frac{5}{6}} + \frac{1}{14})x(t) = f(t, x(t), {}^c D^{\frac{1}{3}}x(t)), \quad t = [0,1], \\
x(0) = \int_0^1 \frac{cos(t)}{\sqrt{2t+144}} x(s)ds, \\
x(1) = \frac{1}{10},
\end{cases}
\tag{2.18}
$$

**où** :

$$
f(t, x(t), {}^c D^{\frac{1}{2}}x(t)) = \frac{x(t)}{3e^t+7} + \frac{{}^cD^{\frac{1}{2}}x(t)}{e^{2t}+9} + \frac{sin(t)}{10+t^2}
$$

**on a :**

$$
\begin{aligned}
\left| f(t, x(t), {}^c D^{\frac{1}{2}}x(t)) - f(t, y(t), {}^c D^{\frac{1}{2}}y(t)) \right| & \leqslant \frac{1}{3e^t+7} \mid x(t) - y(t) \mid + \frac{1}{e^{2t}+9} \mid {}^c D^{\frac{1}{2}}x(t) - {}^c D^{\frac{1}{2}}y(t) \mid \\
& \leqslant \frac{1}{10}(\mid x(t) - y(t) \mid + \mid {}^c D^{\frac{1}{2}}x(t) - {}^c D^{\frac{1}{2}}y(t) \mid)
\end{aligned}
$$

Donc $(\mathbf{H}_1)$ est satisfaite avec $K = \frac{1}{10}$

Aussi on a :

$$
\left| \frac{cos(t)}{\sqrt{2t+144}} \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2t+144}} \leqslant \frac{1}{12}.
$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
S = & \frac{0,1\Gamma(0,83+0,1+1)(0,6)^{0,87+0,83+0,1}}{\Gamma(0,83+1)(1-(0,6)^{0,83+0,1})\Gamma(0,87+0,83+0,1+1)} + \frac{\mid 0,1 \mid (0,6)^{0,83+0,1}}{\Gamma(0,83+1)(1-(0,6)^{0,83+0,1})} \\
& + \frac{0,1\Gamma(0,83+0,1+1)}{\Gamma(0,83+1)(1-(0,6)^{0,83+0,1})\Gamma(0,87+0,83+2)} + \frac{\mid 0,1 \mid \Gamma(0,83+0,1+1)}{\Gamma(0,83+1)(1-(0,6)^{0,83+0,1})\Gamma(0,83+0,1+1)} \\
& + \left[\frac{\Gamma(0,83+0,1+1)((0,6)^{0,1}-1)}{(1-(0,6)^{0,83+0,1})\Gamma(0,83+1)\Gamma(0,1+1)} + 1\right] 0,083 \approx 0,65821.
\end{aligned}
$$

Ainsi toutes les hypothèses du Théorème8 sont satisfaites, par conséquent le problème (2.18 ) poossède une unique solution.

# Chapitre 3

# Stabilité au sens de Ulam-Hyers

La stabilité des équations fonctionnelles a été soulevée par Ulam en 1940 dans un discours prononcé à l'Université du Wisconsin [16]. La première réponse au problème posé par Ulam a été donnée par Hyers en 1941 dans [17]. Par la suite, ce type de stabilité est appelée la stabilité au sens d'Ulam-Hyers. En 1978, Rassias [18] a fourni une généralisation remarquable de la stabilité au sens d'Ulam-Hyers. Une attention considérable a été accordée à l'étude de la stabilité au sens d'Ulam-Hyers et au sens d'Ulam-Hyers-Rassias d'équations différentielles, pour plus de détails, voir [?, ?]. Dans ce chapitre, on traite la stabilité du problème traité dans le chapitre 2. [1, 2]

## 1 Stabilité d'une équation différentielles avec deux dérive fractionnaire au sens de Caputo.

On concidére le méme probléme traitè dans le chapitre 2 :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha({}^cD^\beta + \lambda)x(t) = f(t, x(t)), \quad t = [0, 1], \\ x(0) = \int_0^1 g(x)x(s)ds, \\ I^p x(1) = I^p x(\eta), \end{cases} \tag{3.1}$$

**Définition 2.1.5** On dit que l'équation (3.1) est stable au sens à Ulam-Hyers s'il existe une constante positive $d_\varphi > 0$ tel que quelque soit $\sigma > 0$ et pour toute solution $v \in W$ qui satisfait :

$$|{}^c D^\alpha({}^cD^\beta + \lambda)v(t) - f(t, v(t))| \leqslant \sigma, \qquad t \in [0, 1], \quad 0 < \alpha < 1 \tag{3.2}$$

Il existe une solution $u \in W$ qui satisfait :

$$| v(t) - u(t) | \leqslant d_\varphi \sigma, \quad t \in [0, 1] \tag{3.3}$$

## 1.1 Stabilité au sens de Ulam-Hyers généralisé

**Définition 2.1.6** On dit que l'équation (3. 1) est stable au sens d'Ulam-Hyerss généralisé s'il existe une fonction $h_\varphi \in c(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ tel que quelque soit, $w_\varphi(0) = 0$ et pour tout solution $v \in W$ qui satisfait

$$|^c D^\alpha({}^cD^\beta + \lambda)v(t) - f(t, v(t)) | \leqslant \sigma, \qquad t \in [0,1], \quad 0 < \alpha < 1 \tag{3.4}$$

il existe une solution $u \in W$ qui satisfait

$$| v(t) - u(t) | \leqslant h_\varphi(\sigma) \quad , t \in [0,1] \tag{3.5}$$

## 1.2 Stabilité au sens de Ulam-Hyers Rassias

**Définition 2.1.6** On dit que l'équation (3.1) est stable au sens Ulam-Hyers Rassias par rapport à $g \in W$ s'il existe un nombre réel $d_\varphi > 0$ tel que quelque soit $\sigma > 0$ et pour toute solution $v \in W$ qui satisfait :

$$|^c D^\alpha({}^cD^\beta + \lambda)v(t) - f(t, v(t)) | \leqslant \sigma g(t), \qquad t \in [0,1] \tag{3.6}$$

il existe une solution $u \in W$ qui satisfait

$$| v(t) - u(t) | \leqslant d_\varphi \sigma g(t), \quad t \in [0,1] \tag{3.7}$$

## 1.3 Stabilité au sens de Ulam-Hyers Rassias généralisé

**Définition 2.1.6**

On dit que l'équation (3.1) est stable au sens d'Ulam-Hyers Rassias généralisé par rapport à $g \in W$ s'il existe un nombre réel $d_{\varphi,g} > 0$ , tel que pour tout solution $v \in W$ qui satisfait :

$$|^c D^\alpha({}^cD^\beta + \lambda)v(t) - f(t, v(t)) | \leqslant g(t), \qquad t \in [0,1]. \tag{3.8}$$

Il existe une solution $u \in W$ qui satisfait :

$$| v(t) - u(t) | \leqslant d_{\varphi,g} g(t), \quad t \in [0,1] \tag{3.9}$$

**Remarque :** Une fonction $v \in W$est une solution de l'inégalité (3. 2) si et seulement il existe une fonction : $[0,1] \to \mathbb{R}$ telle que
(1) : $| (t) | \leqslant \sigma, t \in [0,1]$.
(2) : ${}^cD^\alpha({}^cD^\beta + \lambda)v(t) = f(t, v(t)) + (t), \qquad t \in [0,1]$.

## 1.4 Étude de la Stabilité

**Théorème.** Supposons que : $\varphi : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue satisfaisant $(H_1)$. Si

$$\frac{\omega T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \mid \lambda \mid \frac{T^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} \leqslant 1. \tag{3.10}$$

Alors (3.1) est stable au sens Ulam-Hyers et par conséquent, est stable au sens Ulam-Hyers généralisé.
**Prouve.** Soit $\sigma > 0$ et soit $v \in W$ qui satisfait l'inégalité :

$$|^{c} D^{\alpha}({}^{c}D^{\beta} + \lambda)v(t) - f(t, v(t)) \,| \leqslant \sigma, \qquad t \in [0,1]. \tag{3.11}$$

Et notons $u \in W$ l'unique solution du problème

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha}({}^{c}D^{\beta} + \lambda)x(t) = f(t, x(t)), \quad t = [0,1], \ \ 0 < \alpha, \beta < 1 \\ \\ u(0) = v(0), \\ \\ I^{p}u(1) = I^{p}v(1), \qquad\qquad I^{p}u(\eta) = I^{p}v(\eta), \end{cases}$$

En utilisant le Lemme 3, on a :

$$u(t) = I^{\alpha+\beta}h(t) - \lambda I^{\beta}x(t) + c_0 \frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} + c_1.$$

Et par intégration de l'inégalité (3.2), on obtient

$$\begin{aligned} \left| v(t) - I^{\alpha+\beta}h_v(t) - \lambda I^{\beta}v(t) + b_0 \frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} + b_1 \right| &\leqslant \frac{\sigma t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &\leqslant \frac{\sigma T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}. \end{aligned}$$

Par contre, si $U(0) = v(0)$ et $I^{p}U(1) = I^{p}v(1)$ et $I^{p}U(\eta) = I^{p}v(\eta)$, alors
$c_0 = b_0$ et $c_1 = b_1$.
Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} v(t) - u(t) &= v(t) - I^{\alpha+\beta}h_u(t) - \lambda I^{\beta}u(t) + b_0 \frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} + b_1 \\ &+ I^{\alpha+\beta}(h_v(t) - h_u(t)) - \lambda I^{\beta}(v(t) - u(t)). \end{aligned}$$

Tel que

$h_u(t) = f(t, u(t))$ et $h_v(t) = f(t, u(t))$

Alors

$$\begin{aligned} I^{\alpha+\beta}(h_v(t) - h_u(t)) &= I^{\alpha+\beta}\left[f(t, u(t)) - f(t, v(t))\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \left[f(s, u(s)) - f(t, v(t))\right].ds \end{aligned}$$

En utilisant $(H_1)$, on obtient

$$\left|I^{\alpha+\beta}(h_v(t)-h_u(t))\right| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \parallel u(s)-v(t) \parallel_W ds.$$

Cela donne

$$\begin{aligned}\left|v(t)-u(t)\right| &= \left|v(t)-I^{\alpha+\beta}h_u(t)-\lambda I^{\beta}u(t)+b_0\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}+b_1\right| \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \parallel u(s)-v(t) \parallel_W ds. \\ &+ \frac{\mid \lambda \mid}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \parallel u(s)-v(t) \parallel_W ds.\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\left|v(t)-u(t)\right| \leqslant \frac{\epsilon T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \left[\frac{\omega T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{\mid \lambda \mid T^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right] \parallel u(s)-v(t) \parallel_W .$$

Par conséquent

$$\parallel u(s)-v(t) \parallel_W \left(1-\left[\frac{\omega T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{\mid \lambda \mid T^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right]\right) \leqslant \frac{\sigma T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$$

Alors, pour chaque $t \in [0,1]$

$$\left|v(t)-u(t)\right| \leqslant \frac{T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\left(1-\left[\frac{\omega T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{|\lambda| T^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right]\right)\Gamma(\alpha+\beta+1)}\sigma := d\sigma.$$

Par conséquent, le problème de la valeur limite fractionnaire (3.1) est stable à Ulam-Hyers. Par prendre $h(\sigma) = d\sigma$, $h(0) = 0$ donne que le problème de la valeur limite fractionnaire (3.1) stable Ulam-Hyers généralisée.

**Théorème.** Soit $\varphi : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et supposons que $(H_1)$ et $(3.4)$ sont satisfaites. De plus, l'hypothèse suivante est satisfaite
$(H2)$ : Il existe une fonction $g \in C([0,1], \mathbb{R}_+)$ et il existe $\eta_g > 0$ tel que pour tout $t \in [0,1]$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} g(s)ds \leqslant \eta_g g(t). \tag{3.12}$$

Alors le problème de la valeur limite fractionnaire (3.1) est Ulam-Hyers-Rassias stable.
**Preuve**
Soit$v \in W$ une solution de l'inégalité (3.5), i.e.

$$|^{c} D^{\alpha}(^{c}D^{\beta}+\lambda)v(t) - f(t,v(t)) \mid \leqslant g(t), \qquad t \in [0,1]. \tag{3.13}$$

Soit $u \in W$ l'unique solution du problème

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}({}^cD^{\beta} + \lambda)u(t) = f(t, x(t)), \quad t = [0,1], \;\; 0 < \alpha, \beta < 1 \\ \qquad\qquad u(0) = v(0), \\ \qquad I^p u(1) = I^p v(1), \qquad\qquad I^p u(\eta) = I^p v(\eta), \end{cases}$$

En utilisant le Lemme 3, on trouve

$$u(t) = I^{\alpha+\beta}h(t) - \lambda I^{\beta}x(t) + c_0 \frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} + c_1.$$

Et par intégration de l'inégalité (3.2), on obtient

$$\left| v(t) - I^{\alpha+\beta}h_v(t) - \lambda I^{\beta}v(t) + b_0 \frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} + b_1 \right| \leqslant \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} g(s)ds \leqslant \sigma\eta_g g(t).$$

En utilisant (H1), on a

$$\begin{aligned} \left| v(t) - u(t) \right| &= \left| v(t) - I^{\alpha+\beta}h_u(t) - \lambda I^{\beta}u(t) + b_0 \frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} + b_1 \right| \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \parallel u(s) - v(t) \parallel_W ds. \\ &+ \frac{\mid \lambda \mid}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \parallel u(s) - v(t) \parallel_W ds. \end{aligned}$$

En utilisant (H2), on peut écrire

$$\left| v(t) - u(t) \right| \leqslant \left[ \frac{\omega T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{\mid \lambda \mid T^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} \right] \parallel v(s) - u(t) \parallel_W .$$

Ce qui implique que

$$\parallel v(t) - u(t) \parallel \leqslant \left( - \left[ \frac{\omega T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{\mid \lambda \mid T^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} \right] \right) \leqslant \sigma\eta_g g(t).$$

Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\left| v(t) - u(t) \right| \leqslant \left( \frac{\eta_g}{1 - \left[ \frac{\omega T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\lambda| T^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} \right]} \right) \sigma_{g(t)} : d_{\sigma} g(t). \tag{3.14}$$

Ensuite, le problème de la valeur limite fractionnaire (3.1) est Ulam-Hyers-Rassias stable.

# Bibliographie


[1] **M. Benchohra, J. E, Lazreg,** Existence and Ulam stability for nonlinearimplicit fractional differential equations with Hadamard derivative. Stud. Univ. Babes-Bolyai Math. 62 (1) (2017), 27-38.

[2] **M. Feckan, J. Wang and Y. Zhou.** Ulam's type stability of impulsive ordinary differential equations. J. Math. Anal. Appl. 395, (2012), pp. 258– 264.

[3] **M. Houas,** Existence of solutions for fractional differential equations involving two Riemann-Liouville fractional orders. Anal. Theory Appl. $34(3), (2018), 253 - 274$.

[4] **M. Houas, M.Bezziou** . Existence and stability results for fractional differential equations with two Caputo fractional derivatives. Facta Univ. Ser. Math. Inform.$34(2), (2019), 341 - 357$.

[5] **A.A., S.A. Marzan.** Nonlinear differential equation with the Caputofraction derivative in the space of continuously differentiable functions. Differ. Equ.$41(1), (2005), pp.84 - 89$.

[6] **A.A., O. Marichev, S.G. Samko.** Fractional integral and derivatives (Theory and Application). . Gordon and Breach, Switzerland1993.

[7] **A. Granas and J. Dugundji,** fixed point theory, Springer-Verlas, New York. 2003.

[8] **J. K. Hale and S. V. Lunel,** Introduction to functional differntial equaction, Applied Mathematical Sciences,99,Springer-Verlag, New York. 1993

[9] **A. A Kilbas and S. A. Mazran,** Nonlinear differential equation with Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable function, Differential Equations. 4152005?84689;

[10] **V. Lakshmikantham and A. S. Vatsala,** Basic theory of fractional differential equations, Nonlinear Anal. $69$, $(2008)$, no. $8, 2677 - 2682$.

[11] **F. Mainardi,** Fractional calculus : Some basic problems in continuum and statistical mechanics, in "Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics" (A. Carpinteri and F. Mainaedi, Eds), Spinger-Verlag, Wien.$(1997), 291 - 348$.

[12] **K. B. Olddham and J. Spanier,** the Fractional Calculs, Acadimic Press,New York. 1974

[13] **I. Podlubny,** Fractional differential equation, Academic Press, San Diego. 1999

[14] **S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marchev,** Fractional integrals and derivatives. Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon. 1993.

[15] **S.M. Ulam** : A Collection Of Mathematical Problems, Interscience Publishers., New York, (1968)
.

[16] **D.H. Hyers** : On The Stability Of The Linear Functional Equation, Proc. Nat. Acad, Sci.,27, (1941), *pp*.222.224.

[17] **Th.M. Rassias** : On The Stability Of Linear Mappings In Banach Spaces, Proc. Amer. Math. Soc.,72, (1978), *pp*.297.300.

[18] **D.H. Hyers, G. Isac and Th. M. Rassias** : Stability Of Functional Equations In Several Variables, Birkh Auser., Basel,(1998).

[19] **S.M. Jung** : Hyers-Ulam-Rassias Stability of Functional Equations, In Nonlinear Analysis., Springer, New York, (2011).