République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de

La Recherche Scientifique

Université Djilali Bounaâma-Khemis Miliana

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude

En vue de l'obtention d'un diplôme de

Master en mathématiques

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Présenté par :

BENZINA RIM

Thème

Existence et unicité de la solution pour une équation différentielle fractionnaire de Caputo-Hadamard

---

Devant le jury composé de :

Examinateur 1 :	**Mr.M.BEZZIOU**	Université Khemis Miliana.
Examinateur 2 :	**Mme.F.CHITA**	Université Khemis Miliana.
Encadreur :	**Mr. M. HOUAS.**	Université Khemis Miliana.
Co-Encadreur :	**Mr. M. BOUDERBALA.**	Université Khemis Miliana.

Année universitaire 2019/2020

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions Dieu le tout puissant, de nous avoir donné le courage, la santé et la patience durant tout le temps que nous avons consacré à la réalisation de ce travail .

Nous tenons à adresser nos sincères remerciements à notre encadreur monsieur" **HOUAS Mohamed**" pour son encouragement, son aide, son soutien aux moments difficiles et son suivi pour terminer ce travail.

Mes remerciements les plus sincères sont adressés à mes enseignants, qui ont contribué durant mes études.

Enfin, nous n'oublions pas d'adresser nos vifs remerciements à toute nos familles, qui nous a accompagné tout au long de nos études par leurs amours inconditionnels et leur soutien constant.

TABLE DES MATIÈRES

INDEX DES NOTATIONS

$\mathbb{R}$	: Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	: Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{C}$	: Ensemble des nombres complexes.
$\mid . \mid$	: Valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.
$\Gamma(.)$	: Fonction Gamma d'Euler.
$\beta(.,.)$	: La fonction Bêta.
$\parallel . \parallel$	: norme infinie
Br	: la boule fermée de centre 0 et rayon r
$L^p[a,b]$	: Espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [0, +\infty)$intégrables.
$AC[a,b] ou AC^1[a,b]$	: Espace des fonctions absolument continues sur$[a,b]$.
$I_a^\alpha y$	: Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.
${}_hI_a^\alpha y$	: Intégrale fractionnaire au sens de Hadamard d'ordre $\alpha > 0$.
${}^hD^\alpha y$	: Dérivée fractionnaire au sens de Hadamard d'ordre $\alpha > 0$.
${}^cD^\alpha y$	: Dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$.
${}_h^cD^\alpha y$	: Dérivée fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard d'ordre $\alpha > 0$.

Résumé :

Dans cette mémoire ,on abordera la question d'existence et d'unicité de la solution d'un problème fractionnaire avec une seule dérivée fractionnaire et avec deux dérivées fractionnaires au sens de Caputo-Hadamard dans un espace de Banach .les résultats obtenus dans ce travail sont basés sur les théorèmes du point fixe de Banach ,krasnoselski et théorème de scheafer.

INTRODUCTION

La dérivée fractionnaire au sens Caputo-Hadamard est due à Jarad en 2012 [10], sa formule est obtenue à partir de la définition de la dérivation de Hadamard, en permutant l'opérateur d'intégration et celui de la dérivation. La différence entre l'approche de Caputo-Hadamard et celle de Hadamard est que la dérivée d'une constante par la première définition est zéro. L'avantage le plus important de la dérivée de Caputo-Hadamard est qu'elle peut être appliquée à des systèmes avec n'importes quelles conditions initiales, contrairement à celle de Hadamard qui impose la présence de la condition initiale nulle au point 1.
La théorie des équations différentielles fractionnaires est l'un des plus importants champs d'applications de la théorie du calcul fractionnaire, en effet de nombreux phénomènes se modélisent par des équations différentielles fractionnaires.
Dans ce mémoire, on va étudier l'existence et l'unicité de solutions pour un problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire de type Caputo-Hadamard, et cela en utilisant des différentes techniques du point fixe.
Notre mémoire est organisé en trois chapitres :

Le premier chapitre c'est un rappel de quelques définitions, notions de base , résultats sur la dérivation fractionnaire et quelque théorèmes de point fixe utilisés dans ce travail.

Le deuxième chapitre,on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions du problème fractionnaire avec une seule dérivées fractionnaires au sens de Caputo-Hadamard suivant :

$$\begin{cases} {}_{H}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}x(t) = f(t,x(t)) +_{H} \mathcal{I}^{\beta}g(t,x(t)), \quad t\in[1,T], \quad 0<\alpha\leq 1, \quad \beta>0 \\ \\ ax(1)+bx(T)=c \end{cases} \tag{1}$$

Le troisième chapitre de notre travail, sera consacré à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour un problème fractionnaire avec deux dérivées fractionnaires au sens de Caputo-Hadamard suivant :

$$\begin{cases} {}_{H}^{C}\mathcal{D}^{\beta}({}_{H}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}+\lambda)x(t) = f(t,x(t)), \quad t\in[1,e], \quad 0\leq\alpha, \quad \beta\leq 1 \quad ,\lambda\in\mathbb{R} \\ \\ x(1)+x(e)=\eta, \quad {}_{H}^{C}\mathcal{D}^{\beta}x(1)=\Theta, \quad \eta,\Theta\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre on rappelle quelques définitions, notions, propriétés et résultats sur les différentes approches de la dérivation fractionnaire.
Dans ce qui suit ,on s'intéresse particulièrement à définir des notions fondamentales et à rappeler quelques théorèmes importants dans la théorie du points fixe, notamment le principe de contraction de Banach , le théorème de Schaefer , le théorème de krasnosselski , le théorème de Arzela-Ascoli. [1, 2, 3, 4, 6]

1.1 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Dans ce paragraphe nous introduisons les fonctions Gamma et Bêta, qui seront utilisées ultérieurement. Ces deux fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

la Fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est tout simplement la généralisation de la notion de factoriel d'un entier à tous les nombres réels ou complexes.

Définition 1.1.

L'une des fonctions de base de calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler définie par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad , \alpha \in \mathbb{C} \quad et \quad Re(\alpha) > 0. \tag{1.1}$$

Propriétés 1. *On a les propriétés suivantes :*

1.$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha), \quad \mathrm{Re}(\alpha)\geq 0.$

2.$\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$ *et* $\Gamma(-m)=+\infty$ *pour tout* $m\in\mathbb{N}.$

3.$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi} \quad ,\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{2n!\sqrt{\pi}}{4^n n!}.$

4.$\Gamma(n+1)=n!, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$

Ce qui permet de dire que la fonction Gamma généralise la notion de factoriel.

La fonction Bêta

Définition 1.2.

On appelle fonction Bêta la fonction définie par :

$$\beta(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt, \qquad \mathrm{Re}(p)>0, \quad \mathrm{Re}(q)>0, \tag{1.2}$$

Propriétés 2. 1.$\beta(p,q)=\beta(q,p)$.

La relation entre la fonction Gamma et Bêta

Définition 1.3.
La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \mathrm{Re}(p)>0, \quad \mathrm{Re}(q)>0, \tag{1.3}$$

1.2 Intégration Fractionnaire

1.2.1 Intégration Fractionnaire au Sens de Hadamard

Définition 1.4.
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec $0<a\leq b\leq\infty$ *et* $\alpha>0$.
L'intégrale fractionnaire d'ordre α au sens de Hadamard de f définie par :

$$I_a^\alpha=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (log\frac{x}{t})^{\alpha-1}\frac{f(t)}{t}dt, \quad a<x<b, \tag{1.4}$$

où : Γ est la fonction Gamma d'Euler.

Quelques propriétés :

Proposition 1. *[5] (La linéarité)*

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha > 0$ on a :

$$I_a^\alpha(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) = \lambda_1 I_a^\alpha f(x) + \lambda_2 I_a^\alpha g(x).$$

Pour la preuve on utilisant la linéarité de l'intégrale classique.

Proposition 2. *[5](Propriété de semi groupe)*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue,$f \in L_p([a,b]) \forall \alpha, \quad \beta \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} I_a^\alpha I_a^\beta f(x) &= I_a^{\alpha+\beta} f(x) \\ &= I_a^\beta I_a^\alpha f(x). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Preuve : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t \left(log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} f(s)\frac{ds}{s}\frac{dt}{t}, \tag{1.6}$$

on remarque que :

$$a \leq t \leq x \ .$$

et

$$a \leq s \leq t.$$

Donc on prend $s \leq t \leq x$. puis on pose le changement de variable :

$$y = \frac{log\frac{t}{s}}{log\frac{x}{t}}. \tag{1.7}$$

On obtient alors :

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \left[\int_s^t \left(log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} f(s)\frac{dt}{t}\right] \frac{ds}{s}. \tag{1.8}$$

On remplace (1.10)dans (1.11) ,on obtient :

$$\int_a^x \left[\int_s^t \left(log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} f(s)\frac{dt}{t}\right] = \int_0^1 \left[logx - ylog\frac{x}{s} - logs\right]^{\alpha-1} \left[ylog\frac{x}{s} + logs - logs\right]^{\beta-1} log(\frac{x}{s})dy.$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 ((1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} \left(log\frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} dy \\
&= B(\alpha,\beta)\left(log\frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(log\frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}.
\end{aligned}$$

Égalité (1.9) devient :

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha I_a^\beta f(x) &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \left(log\frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \frac{f(s)}{s} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x \left(log\frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \frac{f(s)}{s} ds \\
&= I_a^{\alpha+\beta} f(x).
\end{aligned}$$

De la même manière, on trouve :

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x).$$

D'où la résultat.

Exemple 1.1. *soit* $\alpha > 0, \beta > 0$ *et* $f(t) = \left(log(\frac{t}{a})\right]^{\beta-1}$

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(log(\frac{t}{a})\right]^{\alpha+\beta-1}, \tag{1.9}$$

en effet ,

$$I_a^\alpha \left(log(\frac{t}{a})\right)^{\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^a \left(log(\frac{t}{s})\right)^{\alpha-1}\left(log(\frac{s}{a})\right)^{\beta-1}\frac{ds}{s}. \tag{1.10}$$

Effectuant le changement de variable

$$u = \frac{\left(log\frac{s}{a}\right)}{\left(log\frac{t}{a}\right)}. \tag{1.11}$$

Alors (1.13)devient

$$I_a^\alpha \left(log(\frac{t}{a})\right)^{\beta-1} = \frac{\left(log(\frac{t}{a})\right)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}. \tag{1.12}$$

En utilisant la définition (1.4) et la propriété (1.1) on aboutit à :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(t) &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)}\left(log(\frac{t}{a})\right)^{\alpha+\beta-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(log(\frac{t}{a})\right)^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

1.3 Dérivation fractionnaire

1.3.1 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 1.5.

Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$, la dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α de f définie par :

$$\begin{aligned} \forall t \in [a,b], \quad \left({}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f\right)(t) &= \left(I_{a^+}^{n-\alpha} f^{(n)}\right)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Définissons aussi son analogue à droit .

La dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α de f définie par :

$$\begin{aligned} \forall t \in [a,b], \quad \left({}^C\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f\right)(t) &= \left(I_{b^-}^{n-\alpha} f^{(n)}\right)(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_t^b (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Remarque 1. *Par contre , de telles définitions ne se recollent pas correctement aux dérivé classique :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} {}^C\mathcal{D}_{a^+}^n f(t) = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a) \\ {}^C\mathcal{D}_{b^-}^n f(t) = (-1)^n(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)) \end{cases} \tag{1.15}$$

Le résultat suivant montre qu'elles approchent les dérivées classique par limites inférieure .

Lemme 1.1. *[9] Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{N}$et $n = [\alpha] + 1$.si $f \in AC^n([a,b])$,alors*

$$\lim_{\alpha\to n} \mathcal{D}_{a^+}^n f(t) = f^{(n)}(t). \tag{1.16}$$

$$\lim_{\alpha\to n} \mathcal{D}_{b^-}^n f(t) = (-1)^n f^{(n)}(t). \tag{1.17}$$

Proposition 3. *[9] Pour $\alpha \geq 0, \beta > 0$ on a*

$$\begin{aligned} 1. \quad \left({}^c\mathcal{D}^n_{a^+}(t-a)^{\beta-1}\right)(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}, \beta > \alpha \\ 2. \quad \left({}^c\mathcal{D}^n_{b^-}(b-t)^{\beta-1}\right)(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-t)^{\beta-\alpha-1}, \beta > \alpha. \end{aligned}$$

Preuve :

1. Posons $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$, d'après la définition et proposition on a :

$$({}^c\mathcal{D}^n_{a^+}f)(t) = \mathcal{I}^{n-\alpha}_{a^+}f^n(t) = \tfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(\tau)d\tau.$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^n(t-a)^{\beta-1} &= (\beta-1)(\beta-2)...(\beta-1-(n-1))(t-a)^{\beta-1-n}. \\ &= (\beta-1)(\beta-2)...(\beta-n)(t-a)^{\beta-n-1}. \end{aligned}$$

D'où

$$({}^c\mathcal{D}^n_{a^+}f)(t) = \frac{(\beta-1)(\beta-2)...(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-n-1}.$$

Posons $\tau - a = s(t-a)$

$$\begin{aligned} &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)...(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta-n-1}ds \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)...(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}B(n-\alpha,\beta-n) \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)...(\beta-n)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)}(t-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \left|B(n-\alpha,\beta-n) = \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\right| \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned}$$

2. De même manière

Remarque 2. *Pour $\lambda = \beta - 1, a = 0$ on a :*

$${}^C\mathcal{D}^\alpha_0 t^\lambda(t) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}t^{\lambda-\alpha}, si \quad \lambda \notin \{0,1,2,...,n-1\}, \lambda > -1 \\ 0 \qquad si \quad \lambda \in \{0,1,2,...,n-1\}. \end{cases}$$

C-à-d

$$^{C}\mathcal{D}_0^{\alpha} t^m(t) = 0, m \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}.$$

1.3.2 Dérivées fractionnaires au sens de Hadamard

Soit $[a, b]$une intervalle de $\mathbb{R}$,et on a la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\delta = t\frac{d}{dt}$ et

$$AC_{\delta}^{n}[a, b] = \left\{ f : [a, b] \to C : \delta^{n-1} f(t) \in AC[a, b], \delta = t\frac{d}{dt} \right\}$$

.

Définition 1.6.

Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$ Les dérives fractionnaires de Hadamard à gauche et à droite d'ordre α de f sont définies par :

$$\begin{aligned}\left({}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) &= (\delta)^n \left(\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} f\right)(t) \\ &= \left(t\frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha+1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau, \quad (t > a),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left({}^{H}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f\right)(t) &= (-\delta)^n \left(\mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha} f\right)(t) \\ &= \left(-t\frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \left(\log \frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha+1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau, \quad (t < b).\end{aligned}$$

Proposition 4. *[3] Si $\alpha > 0$, $\beta > 0$ alors*

1. $\left({}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \left(log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \left(log\frac{t}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}, \beta > \alpha.$
2. $\left({}^{H}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} \left(log\frac{b}{t}\right)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \left(log\frac{b}{t}\right)^{\beta-\alpha-1}, \beta > \alpha.$

En particulaire , si $\beta = 1$, on a

1. $\left({}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} 1\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\alpha)} \left(log\frac{t}{a}\right)^{-\alpha}.$
2. $\left({}^{H}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} 1\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\alpha)} \left(log\frac{b}{t}\right)^{-\alpha}.$

Lemme 1.2. *[8] Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, si $f \in AC_{\delta}^{n}[a, b]$, alors*

$$\left({}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\delta^k f)(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}\left(log\frac{t}{a}\right)^{k-\alpha}+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t\left(log\frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha-1}(\delta^n f)(\tau)d\tau,$$

et

$$\left({}^{H}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}f\right)(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^n(\delta^k f)(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}\left(log\frac{b}{t}\right)^{k-\alpha}+\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_b^t\left(log\frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha-1}(\delta^n f)(\tau)d\tau.$$

En particulier ,si $0<\alpha<1$ *,alors pour* $f\in AC[a,b]$,

$$\left({}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)(t)=\frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(log\frac{t}{a}\right)^{-\alpha}+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t\left(log\frac{t}{a}\right)^{-\alpha}\frac{f'(\tau)}{\tau}d\tau$$

.

Et

$$\left({}^{H}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}f\right)(t)=\frac{f(b)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(log\frac{b}{t}\right)^{-\alpha}-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_t^b\left(log\frac{\tau}{a}\right)^{-\alpha}\frac{f'(\tau)}{\tau}d\tau$$

.

Proposition 5. *[3] Soit* $\alpha>0$*,et* $\beta>0$ *:*

si $1\leq p\leq\infty$*,alors ,pour* $f\in L^p(a,b)$

$${}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\beta}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f=\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha-\beta}f\quad et\quad {}^{H}\mathcal{D}_{b^-}^{\beta}\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}f=\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha-\beta}f.$$

En particulier ,$\beta=m\in\mathbb{N}$ *, alors*

$${}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{m}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f=\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha-m}f\ \ et\quad {}^{H}\mathcal{D}_{b^-}^{m}\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}f=\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha-m}f.$$

Proposition 6. *[3] Soit* $\alpha>0$*et ,*$1\leq p\leq\infty$*,alors ,pour* $f\in L^p(a,b)$*.*

$${}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f=f\quad(c\leq 0).$$

$${}^{H}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}f=f\quad(c\leq 0).$$

1.3.3 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo-Hadamard

On définie les modification du type Caputo des dérivés fractionnaire de Hadamard comme suite :

Définition 1.7.

Soit $\alpha \geq 0$ *et* $n = [\alpha] + 1$, *si* $f \in AC_{\sigma}^{m}$. *Les dérivées fractionnaires de Caputo-Hadamard à gauche et à droite d'ordre* α *de* f *sont définies par :*

$$\begin{aligned} \left({}_{H}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) &= \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \delta^n f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left(log\frac{t}{\tau}\right)^{n-\alpha+1} \left(\tau\frac{d}{d\tau}\right)^n f(\tau)\frac{d\tau}{\tau} \quad ,(t > a), \end{aligned} \tag{1.18}$$

tel que $\delta = t\frac{d}{dt}$ *et* $\delta^0 f(t) = f(t)$,

et

$$\begin{aligned} \left({}_{H}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f\right)(t) &= (-1)^n I_{b^-}^{n-\alpha} \delta^n f(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \left(log\frac{t}{\tau}\right)^{n-\alpha+1} \left(\tau\frac{d}{d\tau}\right)^n f(\tau)\frac{d\tau}{\tau} \quad ,(t < b),. \end{aligned} \tag{1.19}$$

si $\alpha \in \mathbb{N}$,*alors*

$$\left({}_{H}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = \delta^n f(t) \quad et \quad \left({}_{H}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f\right)(t) = (-1)^n \delta^n f(t).$$

Exemple 1.2. *On considère la fonction f définie par*

$$f : t \to \left(log\tfrac{t}{a}\right)^{\beta}.$$

On a alors

$${}_{H}^{C}\mathcal{D}_{a}^{\alpha}\left(log\frac{t}{a}\right)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left(log\frac{t}{a}\right)^{n-\alpha-1} \delta^n \left(log\frac{s}{a}\right)^{\beta} \frac{ds}{s}$$

.

Si on prend $\beta = \frac{3}{2}, \alpha = \frac{1}{2}$ *et* $n = 1$ *alors*

$$\delta^n \left(log\tfrac{s}{a}\right)^{\beta} = \delta^1 \left(log\tfrac{s}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = \tfrac{3}{2}\left(log\tfrac{s}{a}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et

$${}_{H}^{C}\mathcal{D}_{a}^{\frac{1}{2}}\left(log\frac{t}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_a^t \left(log\frac{t}{a}\right)^{1-\frac{1}{2}-1} \left(log\frac{s}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{s}$$

.

Par changement de variable $\upsilon = \dfrac{log\frac{s}{a}}{log\frac{t}{a}}$*,on obtient :*

$$\begin{aligned}
{}_{H}^{C}\mathcal{D}_{a}^{\frac{1}{2}}\big(log\frac{t}{a}\big)^{\frac{3}{2}} &= \frac{\frac{3}{2}\big(log\frac{t}{a}\big)}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_{1}^{1}\upsilon^{\frac{3}{2}}(1-\upsilon)^{\frac{1}{2}}d\upsilon \\
&= \frac{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})\big(log\frac{t}{a}\big)}{\Gamma(2)} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\big(log\frac{t}{a}\big).
\end{aligned}$$

Dans la suite ,on donne une relation reliant la dérivée de Hadamard à celle de Caputo-Hadamard.

Théorème 1.3.1. *[1] Soit* $\alpha \geq 0$ *et* $n = [\alpha]+1$ *,si* $f \in AC_{\delta}^{m}$*.Alors*

$$\big({}_{H}^{C}\mathcal{D}_{a^{+}}^{\alpha}f\big)(t) = {}^{H}\mathcal{D}_{a^{+}}^{\alpha}\Big[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta^{k}f(a)}{k!}\Big(log\frac{t}{a}\Big)\Big]^{k}(t).$$

Et

$$\big({}_{H}^{C}\mathcal{D}_{b^{-}}^{\alpha}f\big)(t) = {}^{H}\mathcal{D}_{b^{-}}^{\alpha}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k}\delta^{k}f(b)}{k!}\Big(log\frac{b}{t}\Big)\right]^{k}(t).$$

En particulier, si $0 < \alpha < 1$,on a

$$\begin{aligned}
\big({}^{C}\mathcal{D}_{a^{+}}^{\alpha}f\big)(t) &= {}^{H}\mathcal{D}_{a^{+}}^{\alpha}\big[f(t)-f(a)\big](t) \\
\big({}^{C}\mathcal{D}_{b^{-}}^{\alpha}f\big)(t) &= {}^{H}\mathcal{D}_{b^{-}}^{\alpha}\big[f(t)-f(b)\big](t).
\end{aligned}$$

Lemme 1.3. *Soit* $\alpha > 0$ *,* $n = [\alpha]+1$ *et* $f \in C[a,b]$

(i) Si $\alpha \neq 0$ *ou* $\alpha \in \mathbb{N}$ *alors*

$${}_{H}^{C}\mathcal{D}_{a^{+}}^{\alpha}\big(\mathcal{I}_{a^{+}}^{\alpha}f\big)(t) = f(t), \quad {}_{H}^{C}\mathcal{D}_{b^{-}}^{\alpha}\big(\mathcal{I}_{b^{-}}^{\alpha}f\big)(t) = f(t).$$

(ii) Si $\alpha \in \mathbb{N}$ *et* $\alpha \neq 0$*, alors*

$${}^{C}\mathcal{D}_{a^{+}}^{\alpha}\big(\mathcal{I}_{a^{+}}^{\alpha}f\big)(t) = f(t) - \frac{\mathcal{I}_{a^{+}}^{(\alpha+1-n)}f(a)}{\Gamma(n-\alpha)}\big(log\tfrac{t}{a}\big)^{n-\alpha}.$$

$${}^{C}\mathcal{D}_{b^{-}}^{\alpha}\big(\mathcal{I}_{b^{-}}^{\alpha}f\big)(t) = f(t) - \frac{\mathcal{I}_{b^{-}}^{(\alpha+1-n)}f(b)}{\Gamma(n-\alpha)}\big(log\tfrac{b}{t}\big)^{n-\alpha}.$$

Lemme 1.4. *Soit* $\alpha > 0$*,et* $f \in AC_{\delta}^{n}[a,b]$ *ou* $C_{\delta}^{m}[a,b]$*. Alors*

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}\big({}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-}f\big)(t) &= f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta^k f(a)}{k!}\Big(log\frac{t}{a}\Big)^k \\
\mathcal{I}^{\alpha}_{b^-}\big({}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-}f\big)(t) &= f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\delta^k f(b)}{k!}\Big(log\frac{b}{t}\Big)^k.
\end{aligned}$$

Proposition 7. *Soit* $\alpha \geq 0, n = [\alpha]+1$ *et* $\beta > 0$.*Alors*

$$\begin{aligned}
{}^{C}_{H}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\left(log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(log\frac{t}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}, \beta>\alpha \\
{}^{C}_{H}\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-}\left(log\frac{b}{t}\right)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(log\frac{b}{t}\right)^{\beta-\alpha-1}, \beta>\alpha,
\end{aligned}$$

et

$${}^{C}_{H}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\left(log\tfrac{t}{a}\right)^{k}=0 \quad et \quad {}^{C}_{H}\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-}\left(log\tfrac{b}{t}\right)^{k}=0\ , \quad (k=0,1,...,n-1).$$

Les dérivés fractionnaire de type Caputo-Hadamard peut être définie sur le demi-axe positif $\mathbb{R}^+$ on remplaçant a par 0 dans la formule (1.19) et b par 1 dans la formule (1.20) à condition que $f(t) \in AC^n_\delta(\mathbb{R}^+)$ ou $f(t) \in C^n_\delta(\mathbb{R}^+)$,on a

$$\begin{aligned}
{}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t\left(log\frac{t}{\tau}\right)^{n-\alpha-1}\delta^n\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau \\
{}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{-1}f(t) &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_t^{\infty}\left(log\frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha-1}\delta^n\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau.
\end{aligned}$$

1.4 Notations et définitions

Dans cette sections, nous présentons les notations et définitions et quelques propriétés préliminaires qui sont utilisées dans ce mémoire.
Soit $\mathbf{J} = [1, T], T > 0$, notons $\mathrm{C}(\mathbf{J}, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues définies de $\mathbf{J}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme

$$\| y \|_\infty = \sup\{|y(t)| \quad /t \in \mathbf{J}\} \ ,$$

où $|.|$ est une norme sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.8. *Soit E un espace vectoriel sur le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. On appelle norme sur E une application de E dans $\mathbb{R}_+$ notée $x \to \| x \|$ satisfaisant les conditions suivantes :*

1. $\forall x \in E : \| x \| = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E, \forall x \in E,$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : \| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|,$
3. $\forall x, y \in E : \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|.$

Définition 1.9. *On appelle boule **ouverte** de centre a et de rayon r, l'ensemble noté $B(a; r)$ telle que,*

$$B(a, r) = \{x \in E / \| x - a \| < r\}.$$

Définition 1.10. *On appelle boule **fermée** de centre a et de rayon r, l'ensemble noté $\overline{B}(a, r)$ telle que,*

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in E / \| x - a \| \leq r\}.$$

Définition 1.11. *Soient $(E, \| \cdot \|_E)$ et $(F, \| \, . \, \|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur le même corps $\mathbb{K}$, alors l'espace produit $E \times F = \{(x, y)/x \in E \text{ et } y \in F\}$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ par l'une des normes suivantes :*

1. $\| (x, y) \|_1 = \| x \|_E + \| y \|_F,$
1. $\| (x, y) \|_p = (\| x \|_E^p + \| y \|_F^p)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p \leq \infty,$
1. $\| (x, y) \|_\infty = \max\{\| x \|_E, \| y \|_F\}.$

Définition 1.12. *On dit qu'un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|_E)$ est **complet**, ou que c'est un espace de **Banach**, si toute suite de Cauchy dans E est convergente.*

Définition 1.13. *On dit que A est une partie **compact** de $(E, \| \cdot \|_E)$ si de toute suite de points de A on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de A .*

Définition 1.14. *Une partie A de $(E, \|\cdot\|_E)$ est dite **relativement compact** si son adhérence est compact.*

Définition 1.15. *Soient E et F deux espace de Banach, et $A : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On dit que A est **borné** si elle envoie les parties bornées de E sur des parties bornées de F.*

Définition 1.16. *Soit A un sous ensemble de $\mathrm{C}(\mathbf{J}, \mathbb{R})$, A est **uniformément borné**.i,e ; il existe une constante $k > 0$ telle que : $\| f(x) \| \leq k$ pour tout $x \in J$ et tout $f \in A$.*

Définition 1.17. *Soient E et F deux espaces de Banach. on appelle opérateur **borné** toute application linéaire continue de E dans F.*

Définition 1.18. *Soient E et F deux espaces de Banach et f une application définie de E à valeurs dans F. On dit que f est **complètement continue** si elle est continue et transforme tout borné de E en une ensemble relativement compact dans F. f est dite compact si $f(E)$ est relativement compact dans F.*

Définition 1.19. *Soit A un sous ensemble de $\mathrm{C}(\mathbf{J}, \mathbb{R})$, L'ensemble A est **équicontinue**. i.e ; pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $t_1, t_2 \in \mathbf{J}$ et tout $f \in A$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$| t_1 - t_2 | < \delta \Longrightarrow \| f(t_1) - f(t_2) \| \leq \varepsilon.$$

Définition 1.20. *Soit $(X, \| \,.\, \|)$ un espace vectorielle normé, une application $A : X \longmapsto X$ est dite **contractante**, s'il existe un nombre positif $\boldsymbol{k} \in$ [0. 1] telle que $\forall x, y \in X$, on a :*

$$\|Ax - Ay\| \leq \boldsymbol{k}\|x - y\|.$$

Définition 1.21. *Soit $(X, \| \,.\, \|)$ un espace vectorielle normé et $A : X \longmapsto X$ une application. On appelle **point fixe** de A tout point $x \in X$ tell que : $Ax = x$.*

1.5 Théorème d'existence et d'unicité

Dans cette section nous rappelons les théorèmes célèbres du point fixe que nous allons utiliser pour obtenir des résultats d'existence variés.

1.5.1 Théorème de point fixe de Banach

Théorème 1.5.1. *Soit X un espace de Banach, et $A : X \longmapsto X$ un opérateur contractant. Alors A admet un point fixe unique.i.e ; $\exists! x \in X$ tel que $Ax = x$.*

1.5.2 Théorème de point fixe de Schaefer

Théorème 1.5.2. *Soit X un espace de Banach et $A : X \longmapsto X$ un opérateur complètement continue.*
Si

$$\Omega = \{x \in X : x = \lambda Ax, \forall\lambda \in]0, 1[\}$$

est borné, alors A possède au moins une point fixe.

1.5.3 Théorème de point fixe de schauder

Théorème 1.5.3. *Soit X un espace de Banach et M un convexe fermé borné de X et $A : M \longmapsto M$ un opérateur continue et compact alors A admet au moins un point fixe.*

1.5.4 L'alternative non linéaire de Leray-Schauder

Théorème 1.5.4. *Soit E un espace de Banach, C un sous-ensemble convexe fermé de E, U un sous-ensemble ouvert de C et $0 \in U$. l'opérateur $\phi : \overline{U} \to C$ est continue et compact (c'est-à-dire que $\phi(\overline{U})$ est un sous-ensemble relativement compact de C). Alors :*

1. *l'application ϕ admet un point fixe dans $\overline{U}$, ou bien*
2. *Il existe $x \in \partial U$ et $\sigma \in]0, 1[$ avec , $x = \sigma Tx$.*

1.5.5 Théorème de point fixe de krasnosselski

Théorème 1.5.5. *Soit X un espace de Banach et M un sous ensemble fermé borné et convexe de X.On suppose que A_1, A_2 sont deux opérateur de X dans X satisfaisants :*

1. *$A_1x + A_2y \in M, \forall x, y \in M$,*
2. *A_1 est complètement continue ,*
3. *A_2 est contractante.*

Alors il existe au moins un élément $z \in M$ tel que : $A_1z + A_2z = z$.

1.5.6 Théorème de Arzela-Ascoli

Théorème 1.5.6. *Soit A un sous ensemble de $\mathrm{C}(\mathbf{J}, \mathbb{R})$, A est relativement compact dans $\mathrm{C}(\mathbf{J}, \mathbb{R})$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *L'ensemble A est uniformément borné.*

2. *L'ensemble A est équicontinue.*

3. *Pour tout $x \in J$ l'ensemble $\{f(x), f \in A\} \subset E$ est relativement compact.*

CHAPITRE 2

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE FRACTIONNAIRE AVEC UNE SEULE DÉRIVÉE FRACTIONNAIRE AU SENS DE CAPUTO-HADAMARD

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour un problème fractionnaire avec une seule dérivée au sens de Caputo-Hadamard.[5, 7, 8, 9]
Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^{C}_{H}\mathcal{D}^{\alpha}x(t) = f(t, x(t)) +_{H} \mathcal{I}^{\beta}g(t, x(t)), \quad t \in [1, T], \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad \beta > 0 \\ \\ ax(1) + bx(T) = c. \end{cases} \tag{2.1}$$

On donne deux résultats, le premier est un résultat d'unicité basé sur le théorème de Banach, le deuxième est le résultat d'existence basé respectivement sur le théorème de schaefer.

Lemmes :

Lemme 2.1. *Soit $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$, si $\varphi(t) \in AC^{n}_{\delta}[a, b]$ alors l'équation différentielle fractionnaire de Caputo-Hadamard :*

$${}^{C}_{H}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\varphi(t) = 0, \tag{2.2}$$

admet une solution

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \left(log\frac{t}{a}\right)^k . \tag{2.3}$$

Et la formule suivante

$${}_H\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}\left({}^C_H\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\varphi(t)\right) = \varphi(t) + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \left(log\frac{t}{a}\right)^k . \tag{2.4}$$

pour tout $C_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, .., n-1$.

Lemme 2.2. *Soit* $\varphi \in C([1,T],\mathbb{R})$ *alors la solution du problème fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} {}^C_H\mathcal{D}^{\alpha}x(t) = f(t,x(t)) +_H \mathcal{I}^{\beta}g(t,x(t)), \quad t \in [1,T], \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad \beta > 0 \\ \\ ax(1) + bx(T) = c. \end{cases} \tag{2.5}$$

Est donné par :

$$\begin{aligned} x(t) &= I^{\alpha}\varphi(t) + \frac{c - bI^{\alpha}\varphi(T)}{a+b} \\ &= I^{\alpha}\varphi(t) + \frac{c}{a+b} - \frac{bI^{\alpha}\varphi(T)}{a+b}. \end{aligned}$$

Preuve : Soit l'équation : $\varphi(t) = f(t,x(t)) +_H \mathcal{I}^{\beta}g(t,x(t))$.

Alors

$$\begin{cases} {}^c_hD^{\alpha}x(t) = \varphi(t), \\ ax(1) + bx(T) = c. \end{cases} \tag{2.6}$$

En prenant l'intégrale de Hadamard fractionnaire d'ordre α pour 2.6 , on obtient :

$$I^{\alpha}({}^c_hD^{\alpha}x(t)) = I^{\alpha}(\varphi(t)) \Leftrightarrow x(t) = I^{\alpha}\varphi(t) + d.$$

Par lemme(2.1), on trouve :

pour $t = 1 \quad alors \quad x(1) = I^{\alpha}\varphi(1) + d = I^{\alpha}(f(t,x(1)) +_h I^{\beta}g(t,x(1)) + d,$

$$\text{donc } x(1) = d, \quad ax(1) = ad.$$

pour $t = T \quad alors \quad x(T) = I^{\alpha}\varphi(T) + d, bx(T) = bI^{\alpha}\varphi(T) + bd.$

Alors

$$ax(1) + bx(T) = c \Leftrightarrow ad + bI^{\alpha}\varphi(T) + bd = c.$$

Donc $d = \frac{c - bI^{\alpha}\varphi(T)}{a+b}$.

On remplace d , on trouve :

$$\begin{aligned} x(t) &= I^{\alpha}\varphi(t) + \frac{c - bI^{\alpha}\varphi(T)}{a+b} \\ &= I^{\alpha}\varphi(t) + \frac{c}{a+b} - \frac{bI^{\alpha}\varphi(T)}{a+b}. \end{aligned}$$

2.1 Existence et unicité :

On introduit l'espace de Banach suivant :

$$\mathcal{X} = \left\{ x : x(t) \in C^1([1,T], \mathbb{R}) \right\}, \tag{2.7}$$

muni de la norme :

$$\| x \|_{\infty} = \sup_{t \in [1,T]} |x(t)|.$$

Maintenant on définie $\mathcal{A}$ par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathcal{X} &\longmapsto \mathcal{X} \\ x(t) &\longmapsto \mathcal{A}x(t), \end{aligned}$$

tel que, $\forall t \in [1,T]$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}x(t) = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha-1} f(s,x(s)) \frac{ds}{s} \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} g(s,x(s)) \frac{ds}{s} \\ & - \frac{b}{\Gamma(\alpha)(a+b)} \int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha-1} f(s,x(s)) \frac{ds}{s} \\ & - \frac{b}{(a+b)\Gamma((\alpha+\beta)} \int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1} g(s,x(s)) \frac{ds}{s} + \frac{c}{a+b}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Il convient de noter que le problème **(2.1)** a des solutions si et seulement si l'opérateur $\mathcal{A}$ a des points fixes.

2.1.1 Unicité de la solution

Théorème 2.1.1. *Soient les fonctions $f, g : [1,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. on suppose que :*
(H_1) : Il existe deux constantes $k_1, k_2 > 0$ telles que :

$$| f(t,x) - f(t,y) | \leq k_1 \mid x - y \mid \quad pourtout \quad t \in [1,T], et \quad x, y \in \mathbb{R}$$
$$| g(t,x) - g(t,y) | \leq k_2 \mid x - y \mid \quad pourtout \quad t \in [1,T], et \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

si

$$\left[\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha+1)|a+b|}\right] logT^{\alpha} k_1 + \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha+\beta+1)}\right] logT^{\alpha+\beta} k_2\right] < 1.$$

Alors, il existe une solution unique pour le problème (2.1).

Preuve : Le théorème de contraction de Banach appui sur le fait que si $\mathcal{A}$ est un opérateur contractant, alors il existe un unique point fixe pour $\mathcal{A}$. De là vient l'idée de chercher l'existence d'une constante $M > 0$ tel que :
Pour tout $x, y \in \mathcal{X}$ et $t \in [1,T]$,on a :

$$\| \mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(y) \|_{\mathcal{X}} < M \| x - y \|_{\mathcal{X}}, \text{ avec } M < 1.$$

Soient $x, y \in \mathcal{X}$ Alors :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}x(t) - \mathcal{A}y(t)| = \Bigg| & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha-1} f(s,x(s))\frac{ds}{s} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} g(s,x(s))\frac{ds}{s} \\
& - \frac{b}{\Gamma(\alpha)(a+b)} \int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha-1} f(s,x(s))\frac{ds}{ds} \\
& - \frac{b}{(a+b)\Gamma((\alpha+\beta)} \int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1} g(s,x(s))\frac{ds}{s} + \frac{c}{a+b} \\
& - \Bigg[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha-1} f(s,y(s))\frac{ds}{s} \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} g(s,y(s))\frac{ds}{s} \\
& - \frac{b}{\Gamma(\alpha)(a+b)} \int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha-1} f(s,y(s))\frac{ds}{s} \\
& - \frac{b}{(a+b)\Gamma((\alpha+\beta)} \int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1} g(s,y(s))\frac{ds}{s} + \frac{c}{a+b}\Bigg]\Bigg|.
\end{aligned}$$

D'où ,

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{A}x(t)-\mathcal{A}y(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha-1}\Big|f(s,x(s))-f(s,y(s))\Big|\frac{ds}{s}\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1}\Big|g(s,x(s)-g(s,y(s))\Big|\frac{ds}{s}\\
&+\frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha-1}\Big|f(s,x(s))-f(s,y(s))\Big|\frac{ds}{s}\\
&+\frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1}\Big|g(s,y(s))-g(s,x(s))\Big|\frac{ds}{s}.
\end{aligned}
$$

En utilisant l'hypothèse (H_1),on obtient :

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{A}x(t)-\mathcal{A}y(t)| \leq & \frac{k_1}{\Gamma(\alpha)}\sup_{t\in[1,T]}\Big|x(t)-y(t)\Big|\int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{ds}{s}\\
&+\frac{k_2}{\Gamma(\alpha+\beta)}\sup_{t\in[1,T]}\Big|x(t)-y(t)\Big|\int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s}\\
&+\frac{k_1|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\sup_{t\in[1,T]}\Big|x(t)-y(t)\Big|\int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha-1}\frac{ds}{s}\\
&+\frac{k_2|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha+\beta)}\sup_{t\in[1,T]}\Big|x(t)-y(t)\Big|\int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s}.
\end{aligned}
$$

Par calcule simple , on trouve que :

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{A}x(t)-\mathcal{A}y(t)| \leq & k_1\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{|b|}{\Gamma(\alpha+1)|a+b|}\right]logT^{\alpha}\sup_{t\in[1,T]}\Big|x(t)-y(t)\Big|\\
&+k_2\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha+\beta+1)}\right]logT^{\alpha+\beta}\sup_{t\in[1,T]}\Big|x(t)-y(t)\Big|.
\end{aligned}
$$

En passant à la norme, on trouve :

$$
\begin{aligned}
\parallel \mathcal{A}x-\mathcal{A}y \parallel_\infty \leq & k_1\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{|b|}{\Gamma(\alpha+1)|a+b|}\right]\parallel x-y \parallel_\infty\\
&+k_2\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha+\beta+1)}\right]\parallel x-y \parallel_\infty .
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\parallel \mathcal{A}x-\mathcal{A}y \parallel_\infty \leq & \Bigg[k_1\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{|b|}{\Gamma(\alpha+1)|a+b|}\right]logT^{\alpha}\\
&+k_2\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha+\beta+1)}\right]logT^{\alpha+\beta}\Bigg]\parallel x-y \parallel_\infty .
\end{aligned}
$$

D'où

$$\| \mathcal{A}x - \mathcal{A}y \|_\infty \leq M \| x - y \|_\infty .$$

tel que :

$M = \left[k_1 \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha+1)|a+b|} \right] logT^\alpha + k_2 \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha+\beta+1)} \right] logT^{\alpha+\beta} \right] < 1.$

Donc l'opérateur $\mathcal{A}$ est contractante, par conséquence le problème (2.1) admet une seule solution.

Exemple :

On considéré le problème suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{\frac{2}{3}}x(t) = \dfrac{sin^2 t}{(e^{-t}+2)^3|x(t)|} + \mathcal{I}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{cos^2 t}{(e^{-t}+4)^2|x(t)|} \right], t \in [1, e], \\ \\ 2x(1) + \frac{1}{2}x(e) = \frac{1}{3}. \end{cases} \tag{2.9}$$

alors $\alpha = \frac{2}{3}, \quad T = e, a = 2, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{3}$

On a :$f(t, x(t)) = \dfrac{sin^2 t}{(e^{-t}+2)^3|x(t)|} \quad , g(t, x(t)) = \left[\frac{cos^2 t}{(e^{-t}+4)^2|x(t)|} \right].$

Alors

$$\begin{aligned} |f(t,x)| &= \left| \frac{sin^2 t}{(e^{-t}+2)^3|x(t)|} \right| \\ &\leq \frac{1}{8}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} |g(t,x)| &= \left| \frac{cos^2 t}{(e^{-t}+4)^2|x(t)|} \right| \\ &\leq \frac{1}{16}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Donc (H_1) est satisfaite avec $k_1 = \frac{1}{8}$ et $k_2 = \frac{1}{16}$

Par suit $M = \frac{1}{8} \left[\dfrac{1}{\Gamma(\frac{5}{3})} + \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}\Gamma(\frac{2}{3})} \right] + \frac{1}{16} \left[\dfrac{1}{\Gamma(\frac{13}{6})} + \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}\Gamma(\frac{13}{6})} \right] \simeq 0,21 < 1.$

Ainsi l'hypothèse du théorème **(2.1.1)** par conséquent le problème **(2.9)** possède une solution unique sur $[1, e]$

2.1.2 Existence de solutions :

Théorème 2.1.2. *Soient les fonctions* $f, g : [1, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sont des fonctions continues,on suppose que* (H_1) *et l'hypothèse suivante sont satisfaites :*
(H_2)*il existe deux constantes* $M_1, M_2 > 0$ *telles que :*

$$\mid f(t,x) \mid \leq M_1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad et \quad t \in [1, T].$$

$$\mid g(t,x) \mid \leq M_2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad et \quad t \in [1, T].$$

Alors, le problème (2.1) admet au moins une solution sur $[1, T]$.

Preuve : On utilise le théorème du point fixe de scheafer pour prouver que $\mathcal{A}$ définie par **(2.8)** a un point fixe ,la preuve sera donnée en plusieurs étapes :

Étape 1 :On montre que $\mathcal{A}$ est continue

Soit $x_n \in \mathcal{X}$ telle que $x_n \to x$
$\big(\lim\limits_{n\to\infty} \parallel x_n - x \parallel = 0\big)$ il faut montre que $\lim\limits_{n\to\infty} \parallel \mathcal{A}x_n - \mathcal{A}x \parallel_\infty = 0.$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}x_n(t) = &\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha-1} f(s, x_n(s)) \frac{d}{ds} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} g(s, x_n(s)) \frac{ds}{s} \\
&- \frac{b}{\Gamma(\alpha)(a+b)} \int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha-1} f(s, x_n(s)) \frac{ds}{s} \\
&- \frac{b}{(a+b)\Gamma((\alpha+\beta)} \int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1} g(s, x_n(s)) \frac{ds}{s} + \frac{c}{a+b}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha-1} f(s,x(s))\frac{ds}{s} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} g(s,x(s))\frac{ds}{s} \\
&- \frac{b}{\Gamma(\alpha)(a+b)}\int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha-1} f(s,x(s))\frac{ds}{s} \\
&- \frac{b}{(a+b)\Gamma((\alpha+\beta)}\int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1} g(s,x(s))\frac{ds}{s} + \frac{c}{a+b},
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\big|\mathcal{A}x_n(t) - \mathcal{A}x(t)\big| = \Bigg| &\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha-1}(f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))\frac{ds}{s} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1}(g(s,x_n(s)) - g(s,x(s))\frac{ds}{s} \\
&- \frac{b}{\Gamma(\alpha)(a+b)}\int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha-1}(f(s,x_n(s)) - f(s,x(s)))\frac{ds}{s} \\
&- \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1}(g(s,x_n(s)) - g(s,x(s))\frac{ds}{s}\Bigg|.
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\big|\mathcal{A}x_n(t) - \mathcal{A}x(t)\big| \leq &\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha-1}\big|f(s,x_n(s)) - f(s,x(s)\big|\frac{ds}{s} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1}\big|g(s,x_n(s)) - g(s,x(s)\big|\frac{ds}{s} \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha-1}\big|f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))\big|\frac{ds}{s} \\
&+ \frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1}\big|g(s,x_n(s)) - g(s,x(s)\big|\frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

Par calcule simple , on trouve que :

$$\begin{aligned}
\big|\mathcal{A}x_n(t) - \mathcal{A}x(t)\big| \leq &\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}logT^{\alpha} + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha+1)|a+b|}logT^{\alpha}\right] \parallel f(s,x_n(s)) - f(s,x(s)) \parallel_\infty \\
&+ \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}logT^{\alpha+\beta} + \frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha+\beta+1)}logT^{\alpha+\beta}\right] \parallel g(s,x_n(s)) - g(s,x(s)) \parallel_\infty .
\end{aligned}$$

Donc

$$\| \mathcal{A}x_n - \mathcal{A}x \|_\infty \leq logT^\alpha \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha+1)|a+b|} \right] \| f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)) \|_\infty$$
$$+ logT^{\alpha+\beta} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha+\beta+1)} \right] \| g(s, x_n(s)) - g(s, x(s)) \|_\infty .$$

Puisque f et g sont continues , on a :

$\lim\limits_{n\to\infty} \| \mathcal{A}x_n(t) - \mathcal{A}x(t) \| = 0 \quad (\mathcal{A}x_n(t) \to \mathcal{A}x(t))$, d'où $\mathcal{A}$ est continue.

Étape 2 : On montre que $\mathcal{A}$ est borné.

Soit $x \in \mathcal{X}, t \in [1, T]$.

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{A}x(t)\right| &= \Bigg| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha-1} f(s, x(s)) \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} g(s, x(s)) \frac{ds}{s} \\
&- \frac{b}{\Gamma(\alpha)(a+b)} \int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha-1} f(s, x(s)) \frac{ds}{s} \\
&- \frac{b}{(a+b)\Gamma((\alpha+\beta)} \int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1} g(s, x(s)) \frac{ds}{s} + \frac{c}{a+b} \Bigg| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha-1} |f(s, x(s))| \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} |g(s, x(s))| \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha-1} |f(s, x(s))| \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{|b|}{|a+b|\Gamma((\alpha+\beta)} \int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1} |g(s, x(s))| \frac{ds}{s} + \frac{|c|}{|a+b|}.
\end{aligned}$$

On prend la norme, pour $t \in [1, T]$

$$\| \mathcal{A}x \|_\infty \leq \frac{M_1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha-1} \frac{ds}{s} + \frac{M_2}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} \frac{ds}{s}$$
$$+ \frac{M_1|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha-1} \frac{ds}{s} + \frac{M_2|b|}{|a+b|\Gamma((\alpha+\beta)} \int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1} \frac{d}{ds} + \frac{|c|}{|a+b|}.$$

Par calcule simple , on trouve que :

$$\begin{aligned}\| \mathcal{A}x \|_\infty &\leq M_1\Big[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{|b|}{\Gamma(\alpha+1)|a+b|}\Big](logT)^\alpha \\ &+ M_2\Big[\frac{|b|}{|a+b|\Gamma((\alpha+\beta+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\Big](logT)^{\alpha+\beta}+\frac{|c|}{|a+b|}=L.\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \| \mathcal{A}x(t) \|_\infty \leq L\ .$$

D'où $\mathcal{A}$ est borné .

Étape 3 : On montre que $\mathcal{A}$ est équicontinue

Soit $x\in B_r \quad et \quad t_1,t_2\in[1,T] \quad ,t_1<t_2$, alors

$$\begin{aligned}\Big|\mathcal{A}x(t_2)-\mathcal{A}x(t_1)\Big| &= \Big|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{t_2}(log\frac{t_2}{s})^{\alpha-1}f(s,x(s))\frac{ds}{s}+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^{t_2}(log\frac{t_2}{s})^{\alpha+\beta-1}g(s,x(s))\frac{ds}{s} \\ &- \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{t_1}(log\frac{t_1}{s})^{\alpha-1}f(s,x(s))\frac{ds}{s}-\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^{t_1}(log\frac{t_1}{s})^{\alpha+\beta-1}g(s,x(s))\frac{ds}{s}\Big|.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Big|\mathcal{A}x(t_2)-\mathcal{A}x(t_1)\Big| &= \Big|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{t_1}\Big[(log\frac{t_2}{s})^{\alpha-1}-(log\frac{t_1}{s})^{\alpha-1}\Big]f(s,x(s))\frac{ds}{s} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^{t_2}\Big[(log\frac{t_2}{s})^{\alpha+\beta-1}-(log\frac{t_1}{s})^{\alpha+\beta-1}\Big]g(s,x(s))\frac{ds}{s} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(log\frac{t_2}{s})^{\alpha-1}f(s,x(s))\frac{ds}{s}+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_{t_1}^{t_2}(log\frac{t_2}{s})^{\alpha+\beta-1}g(s,x(s))\frac{ds}{s}\Big|.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Big|\mathcal{A}x(t_2)-\mathcal{A}x(t_1)\Big| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{t_1}\Big[(log\frac{t_2}{s})^{\alpha-1}-(log\frac{t_1}{s})^{\alpha-1}\Big]\big|f(s,x(s))\big|\frac{ds}{s} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^{t_2}\Big[(log\frac{t_2}{s})^{\alpha+\beta-1}-(log\frac{t_1}{s})^{\alpha+\beta-1}\Big]\big|g(s,x(s))\big|\frac{ds}{s} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(log\frac{t_2}{s})^{\alpha-1}\big|f(s,x(s))\big|\frac{ds}{s}+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_{t_1}^{t_2}(log\frac{t_2}{s})^{\alpha+\beta-1}\big|g(s,x(s))\big|\frac{ds}{s}.\end{aligned}$$

En appliquant l'hypothèse (H_2), on obtient :

$$\begin{aligned}\Big|\mathcal{A}x(t_2)-\mathcal{A}x(t_1)\Big| &\leq \frac{M_1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{t_1}\Big[(log\frac{t_2}{s})^{\alpha-1}-(log\frac{t_1}{s})^{\alpha-1}\Big]\frac{ds}{s} \\ &+ \frac{M_2}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^{t_1}\Big[(log\frac{t_2}{s})^{\alpha+\beta-1}-(log\frac{t_1}{s})^{\alpha+\beta-1}\Big]\frac{ds}{s} \\ &+ \frac{M_1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\Big[(log\frac{t_2}{s})^{\alpha-1}\Big]\frac{ds}{s}+\frac{M_2}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_{t_1}^{t_2}\Big[(log\frac{t_2}{s})^{\alpha+\beta-1}\Big]\frac{ds}{s}.\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\int_1^{t_1}(log\frac{t_1}{s})^{\alpha-1}\frac{ds}{s} &= \frac{(logt_1)^\alpha}{\alpha}\\
\int_1^{t_1}(log\frac{t_2}{s})^{\alpha-1}\frac{ds}{s} &= \frac{(logt_1)^\alpha}{\alpha}\\
\int_1^{t_1}(log\frac{t_1}{s})^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s} &= \frac{(logt_1)^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}\\
\int_1^{t_1}(log\frac{t_2}{s})^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s} &= \frac{(logt_1)^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2}(log\frac{t_2}{s})^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s} &= \left[\frac{(logt_2)^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}-\frac{(logt_1)^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}\right]\\
\int_{t_1}^{t_2}(log\frac{t_2}{s})^{\alpha-1}\frac{ds}{s} &= \left[\frac{(logt_2)^{\alpha}}{\alpha}-\frac{(logt_1)^{\alpha}}{\alpha}\right].
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{A}x(t_2)-\mathcal{A}x(t_1)\right| &\leq \frac{M_2}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\left[(logt_2)^{\alpha+\beta}-(logt_1)^{\alpha+\beta}\right]\\
&+ \frac{M_1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[(logt_2)^{\alpha}-(logt_1)^{\alpha}\right].
\end{aligned}$$

En passant à la norme $\| \,.\, \|_\infty$, l'inégalité devient

$$\begin{aligned}
\| \mathcal{A}x(t_2)-\mathcal{A}x(t_1) \|_\infty &\leq \frac{M_2}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\left[(logt_2)^{\alpha+\beta}-(logt_1)^{\alpha+\beta}\right]\\
&+ \frac{M_1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[(logt_2)^{\alpha}-(logt_1)^{\alpha}\right].
\end{aligned}$$

Alors pour $t_1 \to t_2$, on trouve :

$$\| \mathcal{A}x(t_2)-\mathcal{A}x(t_1) \| \to 0. \tag{2.12}$$

Donc $(\mathcal{A}B_r)$ équicontinue.

D'où d'après les étapes (2) et (3), on a $\mathcal{A}$ est complètement continue.

Étape 4 :

Maintenant il reste à montrer que l'ensemble suivant :

$$\Omega = \{x \in X, \quad x = \lambda \mathcal{A}x, \quad 0 < \lambda < 1\} \text{ est bornée .}$$

Soit $x \in \Omega, \quad x = \lambda \mathcal{A}x$, pour tout $t \in [1, T]$, on a $x(t) = \lambda \mathcal{A}x(t)$.

$$\begin{aligned}
\Big|x(t)\Big| = \Big|\lambda \mathcal{A}x(t)\Big| = &\Bigg| \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha-1} f(s, x(s)) \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} g(s, x(s)) \frac{ds}{s} \\
&- \frac{\lambda b}{\Gamma(\alpha)(a+b)} \int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha-1} f(s, x(s)) \frac{ds}{s} \\
&- \frac{\lambda b}{(a+b)\Gamma((\alpha+\beta)} \int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1} g(s, x(s)) \frac{ds}{s} + \frac{\lambda c}{a+b} \Bigg| \\
&\leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha-1} |f(s, x(s))| \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} |g(s, x(s))| \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{\lambda |b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha-1} |f(s, x(s))| \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{\lambda |b|}{|a+b|\Gamma((\alpha+\beta)} \int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1} |g(s, x(s))| \frac{ds}{s} + \frac{\lambda |c|}{|a+b|}.
\end{aligned}$$

Par suit

$$\begin{aligned}
\Big|\lambda \mathcal{A}x(t)\Big| \leq &\frac{M_1 \lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha-1} \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{M_2 \lambda}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{M_1 \lambda |b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha-1} \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{M_2 \lambda}{|a+b|\Gamma((\alpha+\beta)} \int_1^T (log\frac{T}{s})^{\alpha+\beta-1} \frac{ds}{s} + \frac{\lambda |c|}{|a+b|}.
\end{aligned}$$

Par calcule simple , on trouve :

$$\begin{aligned}
\Big|\lambda \mathcal{A}x(t)\Big| &\leq \lambda M_1 \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha+1)|a+b|} \right] (logT)^{\alpha} \\
&+ \lambda M_2 \left[\frac{|b|}{|a+b|\Gamma((\alpha+\beta+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \right] (logT)^{\alpha+\beta} + \frac{\lambda |c|}{|a+b|} \\
&\leq M_1 \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha+1)|a+b|} \right] (logT)^{\alpha} \\
&+ M_2 \left[\frac{|b|}{|a+b|\Gamma((\alpha+\beta+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \right] (logT)^{\alpha+\beta} + \frac{|c|}{|a+b|} = L'.
\end{aligned}$$

$$\text{Alors } \| x \| \leq L'.$$

Donc est borné .

D'où d'après théorème de scheafer l'opérateur $\mathcal{A}$ admet au moins un point fixe par conséquent le problème **(2.1)** admet au moins une solution .

CHAPITRE 3

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE FRACTIONNAIRE AVEC DEUX DÉRIVÉES FRACTIONNAIRES AU SENS DE CAPUTO-HADAMARD

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour un problème fractionnaire avec deux dérivées fractionnaires au sens de Caputo-Hadamard.

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} {}_H^C\mathcal{D}^{\alpha}({}_H^C\mathcal{D}^{\beta}+\lambda)x(t)=f(t,x(t)), \quad t\in[1,e], \quad 0\leq\alpha, \quad \beta\leq 1 \quad ,\lambda\in\mathbb{R}, \\ \\ x(1)+x(e)=\eta, \quad {}_H^C\mathcal{D}^{\beta}x(1)=\Theta, \quad \eta,\Theta\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Où ${}_H^C\mathcal{D}^{\alpha}, {}_H^C\mathcal{D}^{\beta}$ sont les dérivées fractionnaires au sens de Caputo-Hadamard d'ordre α et β respectivement, Θ est une constante positive, $f:[1,e]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est une fonction continue.

On donne deux résultats, le premier est un résultat d'unicité basé sur le théorème de Banach, le deuxième est un résultat d'existence basé respectivement sur le théorème de Krasnoselski .

3.1 Problème Intégral

Lemme 3.1. *Soit $h\in C([1,T],\mathbb{R})$, alors la solution du problème fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} {}_H^C\mathcal{D}^{\alpha}({}_H^C\mathcal{D}^{\beta}+\lambda)x(t)=h(t), \quad t\in[1,e], \quad 0\leq\alpha, \quad \beta\leq 1 \quad ,\lambda\in\mathbb{R} \\ \\ x(1)+x(e)=\eta, \quad {}_H^C\mathcal{D}^{\beta}x(1)=\Theta, \quad \eta,\Theta\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Est donné par :

$$\begin{aligned} x(t) &= I^{\alpha+\beta}f(t,x(t)) - \lambda I^{\beta}x(t) + (logt)^{\beta}\left[\frac{\Theta}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{\lambda}{2\Gamma(\beta+1)+\lambda}\big(\eta - I^{\beta+1}f(e,x(e)) + \lambda I^{\beta}x(e)\big)\right] \\ &+ \frac{\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\beta+1)+\lambda}\big(\eta - I^{\alpha+\beta}f(e,x(e)) + \lambda I^{\beta}x(e)\big). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Preuve : On pose $f(t,x(t)) = h(t)$, alors :

$${}_{H}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}({}_{H}^{C}\mathcal{D}^{\beta} + \lambda)x(t) = h(t).$$

En appliquant l'intégrale de Hadamard d'ordre α , on trouve :

$${}_{H}^{C}\mathcal{D}^{\beta}x(t) = I^{\alpha}h(t) - \lambda x(t) + c_0. \tag{3.4}$$

Maintenant ,l'intégrale de Hadamard d'ordre β , on trouve :

$$I^{\beta}({}_{H}^{C}\mathcal{D}^{\beta}x(t)) = I^{\beta}(I^{\alpha}h(t) - \lambda x(t) + c_0). \tag{3.5}$$

Par lemme(2.1), on trouve :

$$x(t) = I^{\alpha+\beta}h(t) - \lambda I^{\beta}x(t) + c_0\frac{(logt)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} + d_0, \tag{3.6}$$

pour $t = 1$, on a $x(1) = d_0$.
pour $t = e$, on a $x(e) = I^{\alpha+\beta}h(e) - \lambda I^{\alpha}x(e) + c_0\frac{1}{\Gamma(\beta+1)} + d_0$. Alors

$$x(1) + x(e) = I^{\alpha+\beta}h(e) - \lambda I^{\beta}x(e) + c_0\frac{1}{\Gamma(\beta+1)} + 2d_0 = \eta. \tag{3.7}$$

Et comme

$${}_{H}^{C}\mathcal{D}^{\beta}x(1) = I^{\alpha}h(1) - \lambda x(1) + c_0 = \Theta.$$

Alors

$$c_0 = \Theta + \lambda d_0.$$

On remplace c_0 dans (3.6), on trouve :

$$d_0 = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)+2\lambda}\left[\eta - I^{\alpha+\beta}h(e) - \lambda I^{\beta}x(e) - \frac{\Theta}{\Gamma(\beta+1)}\right].$$

Maintenant , on remplace c_0 et d_0 dans **(3.6)** , on trouve **(3.3)**.

3.2 Problème du Point fixe

On introduit l'espace de Banach suivant :

$$\mathcal{X} = \left\{ x : x(t) \in C^1([1,e],\mathbb{R}) \right\}. \tag{3.8}$$

muni de la norme :

$$\| x \|_\infty = \sup_{t\in[1,e]} |x(t)|,$$

On définie un opérateur$\mathcal{A}$ par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathcal{X} &\longmapsto \mathcal{X} \\ x(t) &\longmapsto \mathcal{A}x(t), \end{aligned}$$

tel que, $\forall t \in [1,e]$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s,x(s))\frac{ds}{s} - \lambda \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\beta-1} x(s)\frac{ds}{s} \\ &+ (logt)^{\beta} \Bigg[\frac{\Theta}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{\lambda}{2\Gamma(\beta+1)+\lambda} \Bigg(\eta - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s,x(s))\frac{ds}{s} \\ &+ \lambda \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\beta-1} x(s)\frac{ds}{s} \Bigg) \Bigg] \\ &+ \frac{\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\beta+1)+\lambda} \Bigg(\eta - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s,x(s))\frac{ds}{s} \\ &+ \lambda \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\beta-1} x(s)\frac{ds}{s} \Bigg). \end{aligned}$$

Il convient de noter que le problème **(3.1)** a des solutions si et seulement si l'opérateur $\mathcal{A}$ a des points fixes.

3.3 Existence et unicité :

Dans cette section on étudiée l'existence et l'unicité de solution du problème (3.1).

3.3.1 Unicité de la solution :

On utilisant le théorème contraction de Banach pour l'unicité de la solution du problème (3.1).

Théorème 3.3.1. *Soit $f : [1, e] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue ,on suppose que*
(H_1) : Il existe une constante $k > 0$, telle que :
$| f(t, x) - f(t, y) | \leq k | x - y |$ *pourtout* $t \in [1, e], et \quad x, y \in \mathbb{R}$. *Si*

$$M < 1, \tag{3.9}$$

tel que :

$$\begin{aligned} M = \Bigg[& \frac{k}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta+1)} \\ & + \left[\frac{k|\lambda|}{\Gamma(\beta+\alpha+1)(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)} + \frac{|\lambda|^2}{\Gamma(\beta+1)(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)} \right] \\ & + \frac{k\Gamma(\beta+1)}{(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)\Gamma(\beta+\alpha+1)} + \frac{|\lambda|\Gamma(\beta+1)}{(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)\Gamma(\beta+1)} \Bigg]. \end{aligned}$$

Alors le problème(3.1)admet une solution unique .

Preuve : Le théorème de contraction de Banach s'appuie sur le fait que si $\mathcal{A}$ est un opérateur contractant, alors il existe un unique point fixe pour $\mathcal{A}$.
De là vient l'idée de chercher l'existence d'une constante $M > 0$ telle que :

$$\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\|_X \leq M \parallel x - y \parallel_X \text{ avec } M < 1.$$

Soient $x, y \in X$ et pour tout $t \in [1, e]$ alors :

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{A}x(t) - \mathcal{A}y(t)| = \Bigg| & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) \frac{ds}{s} - \lambda \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\beta-1} x(s) \frac{ds}{s} \\
& + (logt)^{\beta} \Bigg[\frac{\Theta}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{\lambda}{2\Gamma(\beta+1)+\lambda} \Bigg(\eta - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) \frac{ds}{s} \\
& + \lambda \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\beta-1} x(s) \frac{ds}{s} \Bigg) \Bigg] \\
& + \frac{\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\beta+1)+\lambda} \Bigg(\eta - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) \frac{ds}{s} \\
& + \lambda \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\beta-1} x(s) \frac{ds}{s} \Bigg) \\
& - \Bigg[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, y(s)) \frac{ds}{s} - \lambda \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\beta-1} y(s) \frac{ds}{s} \\
& + (logt)^{\beta} \Bigg[\frac{\Theta}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{\lambda}{2\Gamma(\beta+1)+\lambda} \Bigg(\eta - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, y(s)) \frac{ds}{s} \\
& + \lambda \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\beta-1} y(s) \frac{ds}{s} \Bigg) \Bigg] \\
& + \frac{\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\beta+1)+\lambda} \Bigg(\eta - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, y(s)) \frac{ds}{s} \\
& + \lambda \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\beta-1} y(s) \frac{ds}{s} \Bigg) \Bigg] \Bigg|.
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{A}x(t) - \mathcal{A}y(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} \big| f(s, x(s)) - f(s, y(s)) \big| \frac{ds}{s} \\
& + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\beta-1} \big| x(s) - y(s) \big| \frac{ds}{s} \\
& + (logt)^{\beta} \Bigg[\frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta+\alpha)(2\Gamma(1+\beta)+|\lambda|)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1} \big| f(s, x(s)) - f(s, y(s)) \big| \frac{ds}{s} \\
& + \frac{|\lambda|^2}{\Gamma(\beta)(2\Gamma(\beta+\alpha)+|\lambda|)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\beta-1} \big| x(s) - y(s) \big| \frac{ds}{s} \Bigg] \\
& + \frac{\Gamma(\beta+1)}{(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)\Gamma(\beta+\alpha)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1} \big| f(s, x(s)) - f(s, y(s)) \big| \frac{ds}{s} \\
& + \frac{|\lambda|\Gamma(\beta+1)}{(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)\Gamma(\beta)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\beta-1} \big| x(s) - y(s) \big| \frac{ds}{s}.
\end{aligned}
$$

En utilisant l'hypothèse (H_1), on obtient :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}x(t)-\mathcal{A}y(t)| &\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha+\beta)}\sup_{t\in[1,e]}|x(t)-y(t)|\int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s}\\
&+\frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\sup_{t\in[1,e]}|x(t)-y(t)|\int_1^t (log\frac{t}{s})^{\beta-1}\frac{ds}{s}\\
&+(logt)^{\beta}\Bigg[\frac{k|\lambda|}{\Gamma(\beta+\alpha)(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)}\sup_{t\in[1,e]}|x(t)-y(t)|\int_1^e (log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s}\\
&+\frac{|\lambda|^2}{\Gamma(\beta)(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)}\sup_{t\in[1,e]}|x(t)-y(t)|\int_1^e (log\frac{e}{s})^{\beta-1}\frac{ds}{s}\Bigg]\\
&+\frac{k\Gamma(\beta+1)}{(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)\Gamma(\beta+\alpha)}\sup_{t\in[1,e]}|x(t)-y(t)|\int_1^e (log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s}\\
&+\frac{|\lambda|\Gamma(\beta+1)}{(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)\Gamma(\beta)}\sup_{t\in[1,e]}|x(t)-y(t)|\int_1^e (log\frac{e}{s})^{\beta-1}\frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

Maintenant,en passant à la norme,on trouve :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}x-\mathcal{A}y\|_\infty &\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha+\beta)}\|x-y\|_\infty\int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s}\\
&+\frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\|x-y\|_\infty\int_1^t (log\frac{t}{s})^{\beta-1}\frac{ds}{s}\\
&+(logt)^{\beta}\Bigg[\frac{k|\lambda|}{\Gamma(\beta+\alpha)(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)}\|x-y\|_\infty\int_1^e (log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s}\\
&+\frac{|\lambda|^2}{\Gamma(\beta)(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)}\|x-y\|_\infty\int_1^e (log\frac{e}{s})^{\beta-1}\frac{ds}{s}\Bigg]\\
&+\frac{k\Gamma(\beta+1)}{(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)\Gamma(\beta+\alpha)}\|x-y\|_\infty\int_1^e (log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s}\\
&+\frac{|\lambda|\Gamma(\beta+1)}{(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)\Gamma(\beta)}\|x-y\|_\infty\int_1^e (log\frac{e}{s})^{\beta-1}\frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

En calculant les intégrales$\int_1^e (log\frac{e}{s})^{\beta-1}\frac{ds}{s}$ et $\int_1^e (log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s}$,on trouve :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}x-\mathcal{A}y\|_\infty \leq \|x-y\|_\infty\Bigg[&\frac{k}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta+1)}\\
&+\left[\frac{k|\lambda|}{\Gamma(\beta+\alpha+1)(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)}+\frac{|\lambda|^2}{\Gamma(\beta+1)(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)}\right]\\
&+\frac{k\Gamma(\beta+1)}{(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)\Gamma(\beta+\alpha+1)}+\frac{|\lambda|\Gamma(\beta+1)}{(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)\Gamma(\beta+1)}\Bigg].
\end{aligned}$$

D'où,

$$\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\|_\infty \leq M \parallel x - y \parallel_\infty.$$

Donc l'opérateur $\mathcal{A}$ est contractante, par conséquence le problème **(3.1)** admet une seule solution.

Exemple :

On considéré le problème suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{\frac{3}{2}}\big(\mathcal{D}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\big)x(t) = \dfrac{2x(t)}{e^t + 9}, \quad t \in [1, e], \\ \\ x(1) + x(e) = 2, \quad {}^C_H\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}x(1) = 1 \end{cases} \tag{3.10}$$

Alors $\alpha = \frac{3}{2}, \beta = \frac{1}{2}$ et $\Theta = 1, \eta = 2$
Où :

$$f(t, x(t)) = \frac{x(t)}{e^t + 9}.$$

On a

$$\begin{aligned} \big|f(t, x(t)) - f(t, y(t))\big| &= \left|\frac{x(t)}{e^t + 9} - \frac{y(t)}{e^t + 9}\right| \\ &\leq \frac{1}{5}\big|x(t) - y(t)\big|. \end{aligned}$$

Donc (H_1)est satisfaite avec $k = \frac{1}{5}$.
Par suite :

$$M \simeq 0,58 < 1.$$

Ainsi l'hypothèse du théorème **(3.3.1)** par conséquent le problème **(3.10)** possède une solution unique sur $[1, e]$.

3.3.2 Existence de solutions

Théorème 3.3.2. *Soit $f : [1, e] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue ,On suppose que(H_2)est vérifiée et les hypothèses suivantes sont satisfaites :*
(H_2) $|f(t, x) \leq N$, *pour tout $t \in [1, e]$et $x \in \mathbb{R}$,*

(H_3) $\quad S < 1, \quad$ *où :*

$$S = \frac{k|\lambda|}{\Gamma(\beta+\alpha+1)(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)} + \frac{k\Gamma(\beta+1)}{(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)\Gamma(\beta+\alpha+1)}$$
$$+ \frac{k\Gamma(\beta+1)}{(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)\Gamma(\beta+\alpha+1)} + \frac{|\lambda|\Gamma(\beta+1)}{(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)\Gamma(\beta+1)}.$$

Alors le problème (3.1)admet au moins une solution sur $[1, e]$.

Preuve : Pour montrer l'existence d'une solution pour le problème (3.1),il suffit de vérifier les conditions du théorème du point fixe de krasnosselski . On fixé : $\quad r \geq L$,où :

$$L = \frac{N}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\lambda|r}{\Gamma(\beta+1)} + \left[\frac{\Theta}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{|\lambda|}{2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|}\left(\eta + \frac{N}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\right.\right.$$
$$\left.\left.+ \frac{|\lambda|r}{\Gamma(\beta+1)}\right)\right] + \frac{\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|}\left[\eta + \frac{N}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\lambda|r}{\Gamma(\beta+1)}\right].$$

On considère l'ensemble suivant :

$$B_r = \{x \in X, \|x\|_X \leq r\}.$$

On définie deux opérateur $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$sur B_r comme suite :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 x(t) &= I^{\alpha+\beta} f(t, x(t)) - \lambda I^{\beta} x(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s))\frac{ds}{s} - \lambda \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\beta-1} x(s)\frac{ds}{s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_2 x(t) &= (logt)^{\beta}\left[\frac{\Theta}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{\lambda}{2\Gamma(\beta+1)+\lambda}\big(\eta - I^{\beta+1} f(e, x(e)) + \lambda I^{\beta} x(e)\big)\right] \\
&+ \frac{\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\beta+1)+\lambda}\big(\eta - I^{\alpha+\beta} f(e, x(e)) + \lambda I^{\beta} x(e)\big) \\
&= (logt)^{\beta}\left[\frac{\Theta}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{\lambda}{2\Gamma(\beta+1)+\lambda}\left(\eta - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s))\frac{ds}{s}\right.\right. \\
&\left.\left.+ \lambda \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\beta-1} x(s)\frac{ds}{s}\right)\right] \\
&+ \frac{\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\beta+1)+\lambda}\left(\eta - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s))\frac{ds}{s}\right. \\
&\left.+ \lambda \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\beta-1} x(s)\frac{ds}{s}\right).
\end{aligned}$$

Étape 1 :

On montre que si $x, y \in B_r \Rightarrow \mathcal{A}_1 x(t) + \mathcal{A}_2 y(t) \in B_r$,

C'est a dire :

$$\|\mathcal{A}_1 x + \mathcal{A}_2 y\|_{\mathcal{X}} \leq r.$$

Soit $x, y \in B_r$ et $t \in [1, e]$, on a :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}_1 x(t) + \mathcal{A}_2 y(t)| \quad = \quad & \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) \frac{ds}{s} - \lambda \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\beta-1} x(s) \frac{ds}{s} \right. \\
& + (logt)^{\beta} \left[\frac{\Theta}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{\lambda}{2\Gamma(\beta+1)+\lambda} \left(\eta - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, y(s)) \frac{ds}{s} \right. \right. \\
& \left. \left. + \lambda \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\beta-1} y(s) \frac{ds}{s} \right) \right] \\
& + \frac{\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\beta+1)+\lambda} \left(\eta - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, y(s)) \frac{ds}{s} \right. \\
& \left. \left. + \lambda \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\beta-1} y(s) \frac{ds}{s} \right) \right|.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}_1 x(t) + \mathcal{A}_2 y(t)| \quad \leq \quad & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} |f(s, x(s))| \frac{ds}{s} + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\beta-1} |x(s)| \frac{ds}{s} \\
& + (logt)^{\beta} \left[\frac{\Theta}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{|\lambda|}{2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|} \left(\eta + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1} |f(s, y(s))| \frac{ds}{s} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\beta-1} |y(s)| \frac{ds}{s} \right) \right] \\
& + \frac{\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|} \left(\eta + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1} |f(s, y(s))| \frac{ds}{s} \right. \\
& \left. + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_1^e (log\frac{e}{s})^{\beta-1} |y(s)| \frac{ds}{s} \right).
\end{aligned}$$

En appliquant l'hypothèse (H_2) , on trouve :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}_1x(t)+\mathcal{A}_2y(t)| \quad &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\sup_{t\in[1,e]}|f(s,x(s))|\int_1^t(log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s} \\
&+\frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\sup_{t\in[1,e]}|x(s)|\int_1^t(log\frac{t}{s})^{\beta-1}\frac{ds}{s}+(logt)^{\beta}\Bigg[\frac{\Theta}{\Gamma(\beta+1)} \\
&+\frac{|\lambda|}{2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|}\Bigg(\eta+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\sup_{t\in[1,e]}|f(s,x(s))|\int_1^e(log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s} \\
&+\frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\sup_{t\in[1,e]}|y(s)|\int_1^e(log\frac{e}{s})^{\beta-1}\frac{ds}{s}\Bigg)\Bigg] \\
&+\frac{\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|}\Bigg(\eta+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\sup_{t\in[1,e]}|f(s,y(s))|\int_1^e(log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s} \\
&+\frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\sup_{t\in[1,e]}|y(s)|\int_1^e(log\frac{e}{s})^{\beta-1}\frac{ds}{s}\Bigg).
\end{aligned}$$

En passant à la norme, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}_1x+\mathcal{A}_2y\|_{\infty} \quad &\leq \quad \frac{N}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{|\lambda|r}{\Gamma(\beta+1)} \\
&+\Bigg[\frac{\Theta}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{|\lambda|}{2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|}\Bigg(\eta+\frac{N}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\
&+\frac{|\lambda|r}{\Gamma(\beta+1)}\Bigg)\Bigg]+\frac{\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|}\Bigg[\eta+\frac{N}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{|\lambda|r}{\Gamma(\beta+1)}\Bigg]=L.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

D'où

$$\|\mathcal{A}_1x+\mathcal{A}_2y\|_X \quad \leq L\leq r.$$

Alors pour tout $x,y\in B_r$ et $t\in[1,e]$,on trouve $\mathcal{A}_1x(t)+\mathcal{A}_2y(t)\in B_r$.

Étape 2 :

On montre que A_1 est complètement continue :

1.**On Montre que A_1 est continue.**

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{X}$ une suite telle que : $x_n\longrightarrow x$ dans $\mathcal{X}$. Alors pour tout $t\in[1,e]$, on a :

$$\begin{aligned}
|A_1(x_n)(t)-A_1(x)(t)| = \quad &\Bigg|\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t(log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1}f(s,x_n(s))\frac{ds}{s}-\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_1^t(log\frac{t}{s})^{\beta-1}x_n(s)\frac{ds}{s} \\
&-\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t(log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1}f(s,x(s))\frac{ds}{s}+\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_1^t(log\frac{t}{s})^{\beta-1}x(s)\frac{ds}{s}\Bigg|.
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
|A_1(x_n)(t) - A_1(x)(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} \big| f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)) \big| \frac{ds}{s} \\
& + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\beta-1} |x_n(s) - x(s)| \frac{ds}{s}.
\end{aligned}
$$

Comme f est une fonction continue, alors :

$$
\|A_1(x_n) - A_1(x)\|_X \to 0 \text{ quand } n \to \infty \quad . \tag{3.12}
$$

D'où, A_1 est continue sur $\mathcal{X}$.

2.**On montre que A_1 est compact**.

Pour établir la compacité de l'opérateur,A_1il suffit de prouver que $A_1(B_r)$est relativement compacte en utilisant le théorème d'Ascoli-Arzela :

a)$A_1(B_r)$**est borné**

Pour cela, il suffit t de montrer que pour tout $r > 0$, il existe une constante positive ρ tel que pour tout $t \in [1, e]$et $x \in B_r$ avec $B_r = \{x \in \mathcal{X} : \|x\|_{\mathcal{X}} \leq r\}$, on a : $\|A_1(x)\|_{\mathcal{X}} \leq \rho$.

On a

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{A}_1(x)(t)| = & \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) \frac{ds}{s} - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\beta-1} x(s) \frac{ds}{s} \right| \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} \Big| f(s, x(s)) \Big| \frac{ds}{s} + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\beta-1} |x(s)| \frac{ds}{s}.
\end{aligned}
$$

En appliquant l' hypothèse (H_2) , on trouve :

$$
|\mathcal{A}_1(x)(t)| \leq \frac{N}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1} \frac{ds}{s} + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \sup_{t \in [1,e]} |x(t)| \int_1^t (log\frac{t}{s})^{\beta-1} \frac{ds}{s}.
$$

Par suite

$$
\|\mathcal{A}_1(x)\|_\infty \leq \frac{N}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\lambda| \, r}{\Gamma(\beta+1)} = \rho.
$$

Donc :

$$\|\mathcal{A}_1(x)\|_X \leq \quad \rho.$$

D'où : $A_1(B_r)$ est uniformément borné.

b) $A_1(B_r)$ **est équicontinue** :

Soit $x \in B_r$, Pour tout $t_1, t_2 \in [1, e], t_1 < t_2$

$$\begin{aligned}|A_1(x)(t_2) - A_1(x)(t_1)| = & \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^{t_2} (log\frac{t_2}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) \frac{ds}{s} - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_1^{t_2} (log\frac{t_2}{s})^{\beta-1} x(s) \frac{ds}{s} \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^{t_1} (log\frac{t_1}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) \frac{ds}{s} + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_1^{t_1} (log\frac{t_1}{s})^{\beta-1} x(s) \frac{ds}{s} \right|.\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}|A_1(x)(t_2) - A_1(x)(t_1)| = & \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left[\int_1^{t_1} (log\frac{t_2}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) \frac{ds}{s} + \int_{t_1}^{t_2} (log\frac{t_2}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) \frac{ds}{s} \right] \right. \\ & - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \left[\int_1^{t_1} (log\frac{t_2}{s})^{\beta-1} x(s) \frac{ds}{s} + \int_{t_1}^{t_2} (log\frac{t_2}{s})^{\beta-1} x(s) \frac{ds}{s} \right] \\ & \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^{t_1} (log\frac{t_1}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) \frac{ds}{s} + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_1^{t_1} (log\frac{t_1}{s})^{\beta-1} x(s) \frac{ds}{s} \right|.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}|A_1(x)(t_2) - A_1(x)(t_1)| = & \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^{t_1} \left[(log\frac{t_2}{s})^{\alpha+\beta-1} - (log\frac{t_1}{s})^{\alpha+\beta-1} \right] f(s, x(s)) \frac{ds}{s} \right. \\ & + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_1^{t_1} \left[(log\frac{t_1}{s})^{\beta-1} - (log\frac{t_2}{s})^{\beta-1} \right] x(s) \frac{ds}{s} \\ & \left. - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_{t_1}^{t_2} (log\frac{t_2}{s})^{\beta-1} x(s) \frac{ds}{s} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{t_1}^{t_2} (log\frac{t_2}{s})^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) \frac{ds}{s} \right|.\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}|A_1(x)(t_2)-A_1(x)(t_1)| \leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^{t_1}\left[(log\frac{t_2}{s})^{\alpha+\beta-1}-(log\frac{t_1}{s})^{\alpha+\beta-1}\right]\left|f(s,x(s))\right|\frac{ds}{s}\\ &+\frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\int_1^{t_1}\left[(log\frac{t_1}{s})^{\beta-1}-(log\frac{t_2}{s})^{\beta-1}\right]|x(s)|\frac{ds}{s}\\ &+\frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\int_{t_1}^{t_2}(log\frac{t_2}{s})^{\beta-1}|x(s)|\frac{ds}{s}+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_{t_1}^{t_2}(log\frac{t_2}{s})^{\alpha+\beta-1}\left|f(s,x(s))\right|\frac{ds}{s}.\end{aligned}$$

En appliquant les hypothèses (H_2), on obtient :

$$\begin{aligned}|A_1(x)(t_2)-A_1(x)(t_1)| \leq\ & \frac{N}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^{t_1}\left[(log\frac{t_2}{s})^{\alpha+\beta-1}-(log\frac{t_1}{s})^{\alpha+\beta-1}\right]\frac{ds}{s}\\ &+\frac{|\lambda|r}{\Gamma(\beta)}\int_1^{t_1}\left[(log\frac{t_1}{s})^{\beta-1}-(log\frac{t_2}{s})^{\beta-1}\right]\frac{ds}{s}\\ &+\frac{|\lambda|r}{\Gamma(\beta)}\int_{t_1}^{t_2}(log\frac{t_2}{s})^{\beta-1}\frac{ds}{s}+\frac{N}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_{t_1}^{t_2}(log\frac{t_2}{s})^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s}.\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}\int_1^{t_1}(log\tfrac{t_1}{s})^{\alpha+\beta-1}\tfrac{ds}{s} &= \tfrac{(logt_1)^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}.\\ \int_1^{t_1}(log\tfrac{t_2}{s})^{\alpha+\beta-1}\tfrac{ds}{s} &= \tfrac{(logt_2)^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}-\tfrac{(logt_2-logt_1)^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}.\\ \int_1^{t_1}(log\tfrac{t_1}{s})^{\beta-1}\tfrac{ds}{s} &= \tfrac{(logt_1)^{\beta}}{\beta}.\\ \int_1^{t_1}(log\tfrac{t_2}{s})^{\beta-1}\tfrac{ds}{s} &= \tfrac{(logt_2)^{\beta}}{\beta}-\tfrac{(logt_2-logt_1)^{\beta}}{\beta}.\\ \int_{t_1}^{t_2}(log\tfrac{t_2}{s})^{\beta-1}\tfrac{ds}{s} &= \tfrac{(logt_2-logt_1)^{\beta}}{\beta}.\\ \int_{t_1}^{t_2}(log\tfrac{t_2}{s})^{\alpha+\beta-1}\tfrac{ds}{s} &= \tfrac{(logt_2-logt_1)^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}.\end{aligned}$$

Alors,l'inégalité devient :

$$\begin{aligned}\|A_1(x)(t_2)-A_1(x)(t_1)\| \leq\ & \frac{N}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\left[(logt_2)^{\alpha+\beta}-(logt_1)^{\alpha+\beta}\right]\\ &+\frac{|\lambda|r}{\Gamma(\beta+1)}\left[(logt_2)^{\beta}-(logt_1)^{\beta}+2(logt_2-logt_1)^{\beta}\right].\end{aligned}$$

Alors $t_1 \to t_2$,on trouve :

$$\|A_1(x)(t_2)-A_1(x)(t_1)\| \to 0.$$

Donc, $A_1(B_r)$ est équicontinue.

D'où d'après (a) et (b), $A_1(B_r)$ est relativement compact, et d'après le théorème d'Arzelá-Ascoli, A_1 est compact sur B_r.

Étape 3 :

On montre que A_2 est contractante :

Soient $x, y \in B_r$, $t \in [1,e]$, alors :

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{A}_2x(t)-\mathcal{A}_2y(t)| = \Bigg| & (logt)^{\beta}\Bigg[\frac{\Theta}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{\lambda}{2\Gamma(\beta+1)+\lambda}\Bigg(\eta-\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^e(log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1}f(s,x(s))\frac{ds}{s} \\
&+\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_1^e(log\frac{e}{s})^{\beta-1}x(s)\frac{ds}{s}\Bigg)\Bigg] \\
&+\frac{\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\beta+1)+\lambda}\Bigg(\eta-\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^e(log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1}f(s,x(s))\frac{ds}{s} \\
&+\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_1^e(log\frac{e}{s})^{\beta-1}x(s)\frac{ds}{s}\Bigg) \\
&-\Bigg[(logt)^{\beta}\Bigg[\frac{\Theta}{\Gamma(\beta+1)}+\frac{\lambda}{2\Gamma(\beta+1)+\lambda}\Bigg(\eta-\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^e(log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1}f(s,y(s))\frac{ds}{s} \\
&+\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_1^e(log\frac{e}{s})^{\beta-1}y(s)\frac{ds}{s}\Bigg)\Bigg] \\
&+\frac{\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\beta+1)+\lambda}\Bigg(\eta-\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^e(log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1}f(s,y(s))\frac{ds}{s} \\
&+\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_1^e(log\frac{e}{s})^{\beta-1}y(s)\frac{ds}{s}\Bigg)\Bigg]\Bigg|.
\end{aligned}
$$

Par suite

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{A}_2x(t)-\mathcal{A}_2y(t)| \leq (logt)^{\beta} & \Bigg[\frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta+\alpha)(2\Gamma(1+\beta)+|\lambda|)}\int_1^e(log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1}\big|f(s,x(s))-f(s,y(s))\big|\frac{ds}{s} \\
&+\frac{|\lambda|^2}{\Gamma(\beta)(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)}\int_1^e(log\frac{e}{s})^{\beta-1}\big|x(s)-y(s)\big|\frac{ds}{s}\Bigg] \\
&+\frac{\Gamma(\beta+1)}{(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)\Gamma(\beta+\alpha)}\int_1^e(log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1}\big|f(s,x(s))-f(s,y(s))\big|\frac{ds}{s} \\
&+\frac{|\lambda|\Gamma(\beta+1)}{(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)\Gamma(\beta)}\int_1^e(log\frac{e}{s})^{\beta-1}\big|x(s))-y(s)\big|\frac{ds}{s}.
\end{aligned}
$$

En utilisant l'hypothèse (H_1), on obtient :

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{A}_2x(t)-\mathcal{A}_2y(t)| \leq (logt)^{\beta}\Bigg[&\frac{k|\lambda|}{\Gamma(\beta+\alpha)(2\Gamma(1+\beta)+|\lambda|)}\sup_{t\in[1,e]}\big|x(t)-y(t)\big|\int_1^e (log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s}\\
&+\frac{|\lambda|^2}{\Gamma(\beta)(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)}\sup_{t\in[1,e]}\big|x(t)-y(t)\big|\int_1^e (log\frac{e}{s})^{\beta-1}\frac{ds}{s}\Bigg]\\
&+\frac{k\Gamma(\beta+1)}{(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)\Gamma(\beta+\alpha)}\sup_{t\in[1,e]}\big|x(t)-y(t)\big|\int_1^e (log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s}\\
&+\frac{|\lambda|\Gamma(\beta+1)}{(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)\Gamma(\beta)}\sup_{t\in[1,e]}\big|x(t)-y(t)\big|\int_1^e (log\frac{e}{s})^{\beta-1}\frac{ds}{s}
\end{aligned}
$$

En passant à la norme, on trouve :

$$
\begin{aligned}
\parallel \mathcal{A}_2x-\mathcal{A}_2y \parallel \leq (logt)^{\beta}\Bigg[&\frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta+\alpha)(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)}k\|x-y\|\int_1^e (log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s}\\
&+\frac{|\lambda|^2}{\Gamma(\beta)(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)}\|x-y\|\int_1^e (log\frac{e}{s})^{\beta-1}\frac{ds}{s}\Bigg]\\
&+\frac{\Gamma(\beta+1)}{(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)\Gamma(\beta+\alpha)}k\|x-y\|\int_1^e (log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s}\\
&+\frac{|\lambda|\Gamma(\beta+1)}{(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)\Gamma(\beta)}\|x-y\|\int_1^e (log\frac{e}{s})^{\beta-1}\frac{ds}{s}.
\end{aligned}
$$

En calculant les intégrales$\int_1^e(log\frac{e}{s})^{\beta-1}\frac{ds}{s}$ et $\int_1^e(log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1}\frac{ds}{s}$,on trouve :

$$
\begin{aligned}
\parallel \mathcal{A}_2x-\mathcal{A}_2y \parallel &\leq \frac{k|\lambda|}{\Gamma(\beta+\alpha+1)(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)}\|x-y\|+\frac{|\lambda|^2}{\Gamma(\beta+1)(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)}\|x-y\|\\
&+\frac{k\Gamma(\beta+1)}{(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)\Gamma(\beta+\alpha+1)}\|x-y\|+\frac{|\lambda|\Gamma(\beta+1)}{(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)\Gamma(\beta+1)}\|x-y\|\\
&\leq \Bigg[\frac{k|\lambda|}{\Gamma(\beta+\alpha+1)(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)}+\frac{k\Gamma(\beta+1)}{(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)\Gamma(\beta+\alpha+1)}\\
&+\frac{k\Gamma(\beta+1)}{(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)\Gamma(\beta+\alpha+1)}+\frac{|\lambda|\Gamma(\beta+1)}{(2\Gamma(\beta+1)+|\lambda|)\Gamma(\beta+1)}\Bigg]\|x-y\|.
\end{aligned}
$$

D'où

$$\|\mathcal{A}_2x-\mathcal{A}_2y\|_{\mathcal{X}} \leq \quad S \parallel x-y \parallel_{\mathcal{X}} .$$

Alors, d'après (H_3) : l'opérateur $\mathcal{A}$ est contractante.

Grâces aux étapes 1, 2, 3, et d'après théorème du point fixe de krasnosselski, on déduit que le problème (3.1) admet au moins une solution.

Exemple :

On considéré le problème suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{\frac{3}{2}}\big(\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}+1\big)x(t) = \dfrac{x(t)}{2e^t+8}, \quad t \in [1,e], \\ \\ x(1)+x(e)=1, \quad \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}x(1)=2 \end{cases} \tag{3.13}$$

Alors $\alpha = \frac{3}{2}, \beta = \frac{1}{2}$ et $\Theta = 2, \eta = 1$

Où :

$$f(t,x(t)) = \frac{x(t)}{2e^t+8}.$$

On a

$$\begin{aligned} \big|f(t,x(t)) - f(t,y(t))\big| &= \left|\frac{x(t)}{2e^t+8} - \frac{y(t)}{2e^t+8}\right| \\ &\leq \frac{1}{10}\big|x(t)-y(t)\big|. \end{aligned}$$

Donc (H_1)est satisfaite avec $k = \frac{1}{10}$.

Par (H_1) , on obtient :

$$\begin{aligned} \big|f(t,x(t))\big| &\leq k \parallel x \parallel_X \\ &\leq \frac{r}{10}. \end{aligned}$$

Alors (H_2) est satisfaite avec $N = \frac{r}{10}$.

Pour (H_3) on obtient :

$$S \simeq 0.43.$$

Par conséquent :

$$S < 1.$$

Ainsi toutes les hypothèses du théorème (3.3.2)sont satisfaits ,par conséquent le problème (3.13) possède au moins une solution dans x dans l'espace X.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. Jarad, Thabet and B. Dumitru, Caputo-type modiÖcation of the Hadamard fractional derivatives, Advances in Diğerence Equations, 2012, page 2 - 8

[2] P.L. Butzer, A.A. Kilbas, J.J. Trujillo, Compositions of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property, Journal of Mathematical Analysis and Applications 269, 2002, page 387ñ400.

[3] J.Hadamard : Essai sur letude des fonctions donnees par leur developpment de Taylor ,Math. Pures Appl, PIER 8, pp 101186, (1892).

[4] A.A. Kilbas, I.O Marichev, G.S Samko : Fractional Integrals and Derivatives - Theory and Applications, Gordon and Breach, Langhorne, (1993).

[5] M. Bengrine and Z. Dahmani : Boundary Value Problems For Fractional Differential Equations, J. Open Problems Compt.Math. , (2012).

[6] M. Benchohra, J. R. Graef and S. Hamani, Existence results for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations with integral conditions, Appl. Anal. 87, No. 7 (2008), 851-863.

[7] M. Benchohra, S. Hamani and S. K. Ntouyas, Boundary value problems for differential equations with fractional order, Surv. Math. Appl. 3 (2008), 1-12.

[8] W. Benhamida, S. Hamani, and J. Henderson, A boundary value problem for fractional differential equations with Hadamard derivative and nonlocal conditions, PanAmerican Math. J. 26 (2016), 1-11

[9] A. A. Kilbas and S. A. Marzan, Nonlinear differential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions, Differential Equations 41 (2005), 84-89

[10] F. Jarad, D. Baleanu and T. Abdeljawad, Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives, Adv. Differ. Equ. 2012, No.1 (2012),1-8