RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Djilali Bounaâma-Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département Mathématiques et Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de

Master en mathématiques
Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Présenté par :

BENSEFIA Moussa

Thème

Théorèmes fondamentaux des opérateurs linéaires sur les espaces de Hilbert

Devant le jury composé de :

Examinateur 1 : **Mr. O. Benniche.**
Université Khemis Miliana.
Examinateur 2 : **Mr. M. Bouderbala .**
Université Khemis Miliana.
Encadrant : **Mr. M. Karras.**
Université Khemis Miliana.

Année universitaire 2019/2020

Dédicaces

Je dédie ce travail
A mes très chers parents. Que Allah les protèges,
A mes frères et mes soeurs,
A toute ma famille ainsi qu'à mes amis,
A touts mes collègues de la promotion 2019/2020

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Allah le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

En second lieu, je tiens à remercier mon encadreur Mr : ***M. KARRAS****, son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail.*

Je tiens à remercier les plus vifs s'adressent aussi aux les membres de jury d'avoir accepté d'évaluer ce travail.

Je tiens à remercier tous Les enseignants de l'université Djilali Bounaâma en particulier ceux du département de Mathématiques et Informatique.

Je voudrais également remercier ma mère, mon père et toute ma famille.

Enfin, je tiens également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

MERCI.

RÉSUMÉ

Dans ce travail on s'intéresse aux théorèmes fondamentaux des opérateurs linéaires sur les espaces de Hilbert, tout d'abord, nous présentons quelques notions fondamentaux dans les espaces de Hilbert, et après nous définissons les opérateurs linéaires (bornés et non borné) et certaines théorèmes et propriétés importantes, et en termine par une étude sur la théorie spectrale dans les mêmes espaces de Hilbert.

TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS GÉNÉRALES

Certaines notations seront utilisées tout au long de ce mémoire que nous lisons ci-dessous :

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$	Ensembles des nombres complexe.
$\mathbb{N}$	Ensembles des nombres naturels.
$\mathbb{N}^*$	Ensembles des nombres naturels sauf 0.
$\mathbb{K}$	Le corps des nombres réels ou complexe.
$\mathbb{H}'$	Le dual de l'ecpace H.
i.e.	C'est à dire.
$L(H,G)$	L'ensemble des applications linéaires de H dans G.
$\mathcal{L}(H,G)$	L'ensemble des applications linéaires continues de H dans G.
$\mathcal{L}(H)$	L'ensemble des Opérateurs linéaires bornés de H dans H.
$C([a,b])$	L'espace des fonctions continues sur [a, b].
$L^2([a,b])$	L'espace des fonctions de carreés intégrables sur [a b].
$\ell^2(R)$	L'espaces des suites réelles de carrés sommables.
$Im(T)$	L'image de l'opérateur T.
$ker(T)$	Le noyau de l'opérateur T.
$D(T)$	Le domaine de l'opérateur T.
$G(T)$	Le graphe de l'opérateur T.
$Vp(T)$	L'ensemble des valeurs propre de l'opérateur T.
$\rho(T)$	L'ensemble résolvante de l'opérateur T.
$R_\lambda(T)$	La résolvante de l'opérateur T.
$\sigma(T)$	Le spectre de l'operateur T.
$\sigma_{p(T)}$	Le spectre ponctuel de l'opérateur T.
$\sigma_{r(T)}$	Le spectre résiduel de l'opérateur T.
$\sigma_{c(T)}$	Le spectre continu de l'opérateur T.
$r(T)$	Le rayon spectral de l'opérateur T.

INTRODUCTION

Ce mémoire était divisé en trois chapitres. Dans le premier, nous allons parler de l'espace de Hilbert, en effet ; un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'une distance qui en fait un espace métrique complet dont la distance possède la propriété fondamentale de s'exprimer à l'aide d'une forme bilinéaire, appelé produit scalaire, nous allons définir brièvement les notions de base liées aux espaces de Hilbert et nous allons rappeler quelques théorèmes avec ses démonstrations qui seraient utile pour la suite.

Dans le deuxième chapitre, nous allons exposer les résultats élémentaires sur les opérateurs linéaires bornés et non bornés et quelques propriétés. Nous allons traiter en particulier des opérateurs linéaires entre espaces de Hilbert qui respectent la structure vectorielle, nous nous intéressons aux opérateurs linéaires bornés qui respectent de plus la structure métrique, dans le sens où ils sont continus.

La structure supplémentaire de ces espaces signifie que nous pouvons définir l'adjoint d'un opérateur linéaire et donc les classes particulières d'opérateurs auto-adjoints et unitaires qui ont des propriétés particulièrement intéressantes.

Dans le chapitre trois, nous allons présenter spécifiquement quelques résultats nécessaires sur la théorie spectrale. Le spectre d'un opérateur linéaire est une généralisation de l'ensemble des valeurs propres d'une matrice, qui est un concept bien connu en algèbre linéaire de dimension finie. Nous allons introduire également le spectre des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert.

CHAPITRE 1

ESPACES DE HILBERT

Tous les espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes à $\mathbb{R}^n$. Donc sont munis d'une structure euclidienne issue d'un produit scalaire. Cela confère à $\mathbb{R}^n$ beaucoup de propriétés algébriques et topologiques importantes. Mais dans une dimension infinie, les choses sont différentes. Pour cela dans ce chapitre, on s'intéresse aux espaces vectoriels (sur un corps K qui sera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) que l'on peut munir d'une telle structure. Ces espaces fondamentaux en analyse fonctionnelles sont les espaces de Hilbert.

1.1 Normes

Définition 1.1.1. *(Normes)*
Soit E un espace vectoriel sur le corps K ($k = \mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{C}$). Une application N de E dans $\mathbb{R}$ est appelée norme si, pour tous $x, y \in E$ et $\alpha \in K$ on a :
(i). $N(x) \geq 0$ et $N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$,
(ii). $N(\alpha x) = |\alpha| N(x)$,
(iii). $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.
On note par la suite que $\|.\|$ désigne l'application N.

Exemple 1.1.1. *Les applications $\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ définies pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$*

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad et \quad \|x\|_\infty = \max_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} |x_i|$$

sont des normes.

Définition 1.1.2. *(Normes équivalentes)*
Deux normes N_1 et N_2 d'un K espace vectoriel E dans $\mathbb{R}$, sont dites équivalentes s'il existe deux nombres réels $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$
tels que pour tout $x \in E$ on a

$$\alpha N_2(x) \leq N_1(x) \leq \beta N_2(x).$$

Proposition 1.1.1. *Les normes $\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes deux à deux sur K^n $(n \geq 1)$.*

Démonstration. Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$ $(n \geq 1)$.
Si on pose $\max_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} |x_i| = |x_{i_0}|$, alors

$$|x_{i_0}| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n|x_{i_0}|,$$

donc

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

D'autre part on a

$$|x_{i_0}|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \leq n|x_{i_0}|^2$$

alors

$$|x_{i_0}| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq n^{\frac{1}{2}}|x_{i_0}|.$$

Donc

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq n^{\frac{1}{2}}\|x\|_\infty.$$

D'où les normes $\|.\|_1$,$\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes. □

1.2 Espace vectoriel normé

Définition 1.2.1. *(Espace vectoriel normé)*
Un espace vectoriel E muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé (e.v.n) et noté $(E, \|.\|)$ ou seulement E.

Exemple 1.2.1. *(i). L'espace vectoriel $\mathbb{R}$ muni de l'application "valeur absolue" est un espace vectoriel normé.*
(ii). L'espace vectoriel $\mathbb{C}$ muni de l'application "module" est un espace vectoriel normé.
(iii). L'espace $C_b(\mathbb{R})$ des fonctions continues bornés sur $\mathbb{R}$ est un espace normé avec la norme $\|.\|_\infty$.

Remarque 1.2.1. *Dans un espace vectoriel normé E de dimension finie, toute les normes sont équivalentes.*

1.3 Espace de Banach

Définition 1.3.1. *(Suite de Cauchy)*
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E est dite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall p, q \in \mathbb{N}, \quad p > q \geq N \Longrightarrow \|x_p - x_q\| < \epsilon.$$

Remarque 1.3.1. *(i). Toute suite de Cauchy est bornée.*
(ii). Toute suite convergente est de Cauchy.

Définition 1.3.2. *(Espace de Banach)*
Un espace de Banach est un espace normé et complet par rapport à la distance associée de sa norme (toute suite de Cauchy de E est convergente dans E).

Exemple 1.3.1. *(i). Tout espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ de dimension finie est un espace de Banach.*
(ii). L'espace l^p est un espace de Banach tel que $1 < p < \infty$.
(iii). Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach est de Banach .

1.4 Produit scalaire

Définition 1.4.1. *Soit H un espace vectoriel sur un corps k. Un produit scalaire sur H est une application*

$$\begin{aligned} H \times H \quad &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

vérifie les propriétés suivantes :
(i). Pour tous $x, y_1, y_2 \in H, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, on a

$$\langle x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle = \bar{\alpha}_1 \langle x, y_1 \rangle + \bar{\alpha}_2 \langle x, y_2 \rangle .$$

(ii). Pour tous $x_1, x_2, y \in H, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, on a

$$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle .$$

(iii). Pour tous $x, y \in H$, on a $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
(iv). Pour tout $x \in H$, on a $\quad \langle x, x \rangle \geq 0$ et $(\langle x, x \rangle = 0 \Longrightarrow x = 0)$.

Propriété 1.4.1. *(i). pour tout $x \in H$, on a*

$$\langle x, 0 \rangle = \langle 0, x \rangle = 0.$$

(ii). Soit $x_i, y_j \in H$ et $\lambda_i, \mu_j \in k$ avec $i = \{1, \dots, n\}$ et $j = \{1, \dots, m\}$, on a

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{m} \overline{\mu_j} y_j \right\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{m} \overline{\mu_j} \langle x_i, y_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \overline{\mu_j} \langle x_i, y_j \rangle. \end{aligned}$$

Exemple 1.4.1. *(i). L'application $\langle ., . \rangle : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par*

$$\langle x, y \rangle \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Ce produit scalaire est appelé produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.
(ii). L'application $\langle ., . \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par

$$\langle x, y \rangle \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{C}^n$. Ce produit scalaire est appelé produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^n$.

1.5 Espace préhilbertien

Définition 1.5.1. *On appelle espace préhilbertien un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire* $\langle .,. \rangle$ *sur H. L'application définie par* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \quad x \in H$, *est dite norme induite par le produit scalaire.*

Définition 1.5.2. *(Espace produit)*
Soit $H = H_1 \times H_2$ *tels que* $(H_1, \langle .,. \rangle_{H_1})$ *et* $(H_2, \langle .,. \rangle_{H_2})$ *sont deux espaces préhilbertiens, alors H muni du produit scalaire* $\langle .,. \rangle$ *défini par*

$$\langle (x,y),(u,v) \rangle_H = \langle x,u \rangle_{H_1} + \langle y,v \rangle_{H_2}$$

est un espace préhilbertien. On défini la norme induite par ce produit scalaire par

$$\|(x,y)\| = \sqrt{\|x\|_{H_1}^2 + \|y\|_{H_2}^2}.$$

Théorème 1.5.1. *Soit H un espace vectoriel réel ou complexe muni du produit scalaire* $\langle \cdot, \cdot \rangle$. *Alors pour tous* $x, y \in H$ *on a*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y \rangle + \|y\|^2.$$

Démonstration. On a $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, alors

$$\begin{aligned}
\|x+y, x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle \\
&= \langle x,x \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle + \langle y,y \rangle \\
&= \langle x,x \rangle + \langle x,y \rangle + \overline{\langle x,y \rangle} + \langle y,y \rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y \rangle + \|y\|^2.
\end{aligned}$$

□

Lemme 1.5.1. *(Inégalité de Cauchy Schwarz)*
Soit H un espace préhilbertien. Alors pour tous $x, y \in H$ *on a*

$$|\langle x,y \rangle| \leq \|x\| \|y\|. \tag{1.1}$$

Avec $\|.\|$ *est la norme induite par le produit scalaire de H.*

Démonstration. Si x ou y est égal à 0 l'inégalité est immédiate.
Sinon on pose $z = x - \dfrac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle} y$.
Par positivité on a $\langle z,z \rangle \geq 0$
En développant $\langle z,z \rangle$ on obtient

$$\begin{aligned}
\left\langle x - \frac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle} y, x - \frac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle} y \right\rangle &= \langle x,x \rangle - \frac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle} \langle y,x \rangle - \frac{\overline{\langle x,y \rangle}}{\langle y,y \rangle} \langle x,y \rangle \\
&\quad + \frac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle} \frac{\overline{\langle x,y \rangle}}{\langle y,y \rangle} \langle y,y \rangle \\
&= \langle x,x \rangle - \frac{|\langle x,y \rangle|^2}{\langle y,y \rangle} \geq 0
\end{aligned}$$

donc $|\langle x,y \rangle|^2 \leq \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle$ ce qui donne le résultat. □

Théorème 1.5.2. *Soit H un espace préhilbertien. Le produit scalaire est une application continue sur l'espace $H \times H$.*

Démonstration. Soient $(x_n)_{n\in N}$ et $(y_n)_{n\in N}$ deux suites de H convergentes tells que $x_n \longrightarrow x_0$ et $y_n \longrightarrow y_0$.
On va montrer que $\langle x_n, y_n\rangle \xrightarrow{cv} \langle x_0, y_0\rangle$
c-à-d $|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_0, y_n\rangle + \langle x_0, y_n\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| \\
&= |\langle x_n - x_0, y_n\rangle + \langle x_0, y_n - y_0\rangle| \\
&\leq |\langle x_n - x_0, y_n\rangle| + |\langle x_0, y_n - y_0\rangle| \\
&\leq \|x_n - x_0\|\|y_n\| + \|y_n - y_0\|\|x_0\|
\end{aligned}.$$

Comme $x_n \longrightarrow x_0$ et $y_n \longrightarrow y_0$, alors le terme droit de cette inégalité tend ver zéro quand $n \longrightarrow +\infty$.
Par conséquent

$$\langle x_n, y_n\rangle \xrightarrow{cv} \langle x_0, y_0\rangle.$$

D'où le résultat. □

1.6 Espace de Hilbert

Définition 1.6.1. *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet par rapport à la norme induite par sa produit scalaire.*

Remarque 1.6.1. .
(i). Chaque espace de Hilbert est un espace de Banach.
(ii). Tout espace préhilbertien (réel ou complexe) de dimension finie est un espace de Hilbert.
(iii). Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert est lui-même un espace de Hilbert.

Exemple 1.6.1. *L'espace $\mathbb{C}^n$, muni du produit scalaire*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ avec $x_j, y_j \in \mathbb{C}$, est un espace de Hilbert .

(2) L'espace l^2 des suites $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de nombres complexes de carré sommable

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty$$

muni du produit scalaire défini par

$$\forall x, y \in l^2, \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \overline{y_i}$$

est un espace de Hilbert.

1.7 Orthogonalité

Définition 1.7.1. *Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert et soient $x, y \in H$, on dit que x et y sont orthogonaux (i.e. $x \perp y$) si* $\langle x, y \rangle = 0$.

Soit A et B deux sous-ensembles de H, on dit que A et B sont orthogonaux (i.e. $A \perp B$) si pour tout $x \in A$ et $y \in B$ $\langle x, y \rangle = 0$.

Théorème 1.7.1. *Soient x, y deux vecteurs d'un espace vectoriel réel ou complexe $\mathcal{H}$, on a*

(i). L'identité de Pythagore : Si x et y sont orthogonaux, alors

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \tag{1.2}$$

(ii). Développement d'un carré :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2. \tag{1.3}$$

(iii). Identité de polarisation sur $\mathbb{C}$:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right). \tag{1.4}$$

(iv). Identité de polarisation sur $\mathbb{R}$:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right). \tag{1.5}$$

(v). l'identité de parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right). \tag{1.6}$$

Démonstration. ona

$$\|x+y\|^2 = \left(\|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2\right) \quad \text{et} \quad \|x-y\|^2 = \left(\|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2\right),$$

d'où

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \text{et} \quad \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle.$$

Nous avons donc démontré l'identité du parallélogramme. Nous en déduisons également que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right). \\
&\mathrm{Im}\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}(-i\langle x, y\rangle) = \mathrm{Re}\langle x,\ \mathrm{iy}\ \rangle = \tfrac{1}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right).
\end{aligned}$$

Ce qui établit l'identité de polarisation .
Finalement, si $x \perp y$, alors

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2Re(0) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

$\square$

Remarque 1.7.1. *Un espace de Banach est un espace de Hilbert si et seulement si sa norme vérifié l'égalité de parallélogramme*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Définition 1.7.2. *Soit H un espace de Hilbert et soit A une partie non vide de H . L'orthogonal de A dans H est l'ensemble*

$$A^{\perp} = \{x \in H : x \perp y \quad \forall y \in A\}.$$

Proposition 1.7.1. *Soit A un sous-espace vectoriel de H, alors :*
(i). $0 \in A^{\perp}$.
(ii) Si $0 \in A$ *alors* $A \cap A^{\perp} = \{0\}$ *, sinon* $A \cap A^{\perp} = \varnothing$.
(ii). $H^{\perp} = \{0\}$ *et* $\{0\}^{\perp} = H$.

Démonstration. .
(i). On a $\langle 0, x\rangle = 0$ pour tout $x \in A$. Donc $0 \in A^{\perp}$.
(ii). On suppose que $x \in A \cap A^{\perp}$, donc $\langle x, x\rangle = 0$, alors par définition du produit scalaire on a $x = 0$.
(iii). Soit $x \in H^{\perp}$, donc $\langle x, y\rangle = 0$ pour tout $y \in H$. En particulier $\langle x, x\rangle = 0$ alors $x = 0$. Donc $H^{\perp} \subset \{0\}$ et alors $H^{\perp} = \{0\}$.
D'autre part, pour tout $x \in H$, on a $\langle x, 0\rangle = 0$, donc $x \in \{0\}^{\perp}$. Alors $H \subset \{0\}^{\perp}$ et donc $\{0\}^{\perp} = H$. □

Proposition 1.7.2. *Soit A un sous-espace vectoriel de H, alors :*
(i) $A^{\perp}$ *est un sous-espace fermé de H.*
(ii) Si B est un sous-espace vectoriel et si $B \subset A$, *alors* $A^{\perp} \subset B^{\perp}$.
(iii) $A^{\perp} = (\overline{A})^{\perp}$.

Démonstration. .
(i). Soit $(y_n)_n$ une suite d'élément de $A^{\perp}$ telle que : $y_n \longrightarrow y$ il faut montrer que $y \in A^{\perp}$.
Si $x \in A$, alors d'après la continuité de produit scalaire, on a

$$\langle x, y\rangle = \left\langle x, \lim_{n\to\infty} y_n \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, y_n\rangle = 0 \text{car} y_n \in A^{\perp}.$$

Par conséquent, $y \in A^{\perp}$.

(ii). Soit $y \in A^{\perp}$. Alors, pour tout $x \in B$, on a $x \in A$ (puisque $B \subset A$) et donc $\langle x, y\rangle = 0$, ce qui prouve que $y \in B^{\perp}$. Donc $A^{\perp} \subset B^{\perp}$.

(iii). On a $A \subset \overline{A}$, donc $(\overline{A})^{\perp} \subset A^{\perp}$. Inversement, soient $x \in A^{\perp}$ et $y \in \overline{A}$. Il existe$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de A telle que

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Alors

$$\langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, y_n\rangle = 0,$$

ce qui prouve que $x \in (\overline{A})^{\perp}$. Donc $A^{\perp} \subset (\overline{A})^{\perp}$. □

1.8 Projection orthogonale

Théorème 1.8.1. *(projection sur un convexe fermé)*
Soit H un espace de Hilbert et C un sous-ensemble convexe fermé de H. Pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que

$$\|x-y\| = d(x,C) = \inf_{z \in C} \|x-z\|.$$

Si $x \in C$ alors $y = x$. Si $x \notin C$, alors y est caractérisé par

$$\forall z \in C, \mathrm{Re}\langle x-y, z-y\rangle \leq 0$$

y s'appelle projection orthogonal de x sur C.

Preuve *voir [8], page 348.*

On peut de la même façon définir la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé.

Proposition 1.8.1. *(Cas particulier du théorème de projection orthogonale)*
Soit H un espace de Hilbert et $F \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé.
Il existe une application linéaire $p_F : H \to F$ telle que, pour tout $x \in H$
$x = P_F(x) + (x - P_F(x))$ et

$$\|x - p_F(x)\| = d(x,F)$$

De plus
(i). $P_F(x)$ est l'unique élément de F vérifiant cette égalité.
(ii). $x - P_F(x) \in F^{\perp}$.
(iii). L'application $x \to p_F(x)$ est 1-lipschitzienne.

Corollaire 1.8.1. *Soit H un espace de Hilbert.*
(i). Si F un sous-espace vectoriel fermé de H alors $F^{\perp}$ est un supplémentaire de F, c'est-à-dire que

$$H = F \oplus F^{\perp}.$$

(ii). Si F est un sous-espace vectoriel fermé de H, alors $(F^{\perp})^{\perp} = \overline{F}$.

Démonstration. .
(i). Par projection, on a pour tout $x \in H$

$$x = (x - P_F(x)) + P_F(x)$$

où $x - P_F(x) \in F^{\perp}$ et $P_F(x) \in F$, ce qui donne bien $F \oplus F^{\perp} = H$.
(ii). on a $F \subset \overline{F}$, donc

$$\overline{F}^{\perp} \subset F^{\perp}$$

et encore

$$(F^{\perp})^{\perp} \subset (\overline{F}^{\perp})^{\perp}$$

et comme F est un fermé, alors

$$(\overline{F}^{\perp})^{\perp} = F$$

Par suite

$$(F^{\perp})^{\perp} \subset \overline{F}.$$

D'autre part on a $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$, et comme $(F^{\perp})^{\perp}$ est un fermé, alors

$$\overline{F} \subset \overline{(F^{\perp})^{\perp}} = (F^{\perp})^{\perp}.$$

□

1.9 Base hilbertienne

Définition 1.9.1. *(Densité, Séparabilité et Totalité)*
Soit H un espace de Hilbert.
(i). Une partie F de H est dite dense dans H si :

$$\forall h \in H \qquad \forall \epsilon > 0 \qquad \exists f \in F \qquad telque \qquad \|f - h\| < \epsilon.$$

Autrement dit, les éléments de F sont arbitrairement proches de tous les élément de H.

(ii). Un espace de Hilbert est séparable s'il possède un sous-ensemble dénombrable dense. Autrement dit, H est séparable s'il existe $F = \{f_n; \quad n \in \mathbb{N}^*\} \subset H$ tel que :

$$\forall h \in H, \quad \forall \epsilon > 0, \exists f \in F : \qquad \|f - h\| \leq \epsilon.$$

(iii). Une partie F de H est dite totale si l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de F est dense dans H.

Définition 1.9.2. *(Famille orthonormée)*
Une famille $\{e_i\}_{i\in I}$ d'éléments d'un espace de Hilbert H est dite orthonormée si :

$$\forall i_1 \in I, \forall i_2 \in I \quad \langle e_{i_1}, e_{i_2} \rangle = \delta_{i_1,i_2} := \begin{cases} 1 & si \quad i_1 = i_2 \\ 0 & si \quad i_1 \neq i_2 \end{cases} \tag{1.7}$$

Définition 1.9.3. *Soit $\{e_i\}_{i\in I}$ une famille fini ou dénombrable d'un espace de Hilbert H. On dit que la famille $\{e_i\}_{i\in I}$ est une base hilbertienne ou base orthonormée si :*

(i). $\|e_i\| = 1$ et pour tous $i \neq j$ on a $\langle e_i, e_j \rangle = 0$.

(ii). l'espace vectoriel $Vect\{e_i : i \in I\}$ des combinaisons linéaires finies des vecteurs e_i pour $i \in I$ est dense dans H.

Autrement dit, une famille $\{e_i\}_{i\in I}$ de H est une base hilbertienne de H si elle est orthonormée et totale.

Remarque 1.9.1. *Une base hilbertienne n'est pas une base algébrique car pour une base algébrique,tout élément de l'espace est combinaison linéaire finie d'éléments de la base.*

Exemple 1.9.1. .

1) La base canonique $(e_n)_n$ *de* $\mathbb{K}^n$ *avec*

$$e_1 = (1,0,\ldots,0), e_2 = (0,1,\ldots,0), \ldots, e_n = (0,0,\ldots,1)$$

est une base hilbertienne.

2) La famille $(e_n)_n$ *avec* $e_n = (\delta_{n,k})_k$ *est une base hilbertienne sur* $l^2(N)$.

CHAPITRE 2

LES OPÉRATEURS LINÉAIRES DANS LES ESPACES DE HILBERT

Dans ce chapitre on va citer une collection de quelques définitions, propriétés et théorèmes sur les opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert. Par exemples les opérateurs auto-adjoints, isométriques, unitaires, normaux et positifs etc.

2.1 Opérateurs linéaires bornés

2.1.1 Généralités

Soient H et G deux espaces de Hilbert sur le corps $K \quad (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

Définition 2.1.1. *On dit que l'application (l'opérateur) $T : H \longrightarrow G$ est linéaire si*

$$\forall x, y \in H, \forall \alpha, \beta \in K : T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

On note par $L(H, G)$ l'ensemble des applications linéaires de H dans G.

Définition 2.1.2. *Soient H et G deux espaces de Hilbert et soit $T \in L(H, G)$.*
(i). On dit que T est continu au point x_0 de H si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in H, \quad \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon.$$

(ii). On dit que T est continu sur H s'il est continu en chaque point de H.
On note par $\mathcal{L}(H, G)$ l'ensemble des applications linéaires continus de H dans G.

(iii). On dit que T est une forme linéaire continue Si $G = K$.
On note par H' l'ensemble des formes linéaires continus de H dans K, appelé dual de H.

Lemme 2.1.1. *Soient $(H, \|.\|_H)$ et $(G, \|.\|_F)$ deux espaces de Hilbert sur le corps k .*
Soit T une application linéaire de H dans G, pour que T soit continue (borné), if faut et il suffit qu'il existe une constante positive $a > 0$ tel que

$$\|T(x)\|_G \leq a\|x\|_H.$$

Démonstration. .
1) Si T est continue sur H alors il est continue en 0
T continue en $x_0 = 0$ alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x\| \leq \delta \Rightarrow \|T(x)\| \leq \epsilon,$$

pour $\epsilon = 1$, alors $\exists \delta > 0 : \|x\| \leq \delta \Rightarrow \|T(x)\| \leq 1$.
On pose $z = \dfrac{x}{\|x\|_H}\delta$ donc

$$\begin{aligned}
\|z\| \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_H}\delta \right\| &\Rightarrow \|z\| \leq \delta \\
&\Rightarrow \|T(z)\| \leq 1 \\
&\Rightarrow \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|_H}\delta \right) \right\| \leq 1 \\
&\Rightarrow \left\| \|\frac{\delta}{x}\|_H T(x) \right\| \leq 1 \\
&\Rightarrow \|T(x)\| \leq \frac{1}{\delta}\|x\|_H.
\end{aligned}$$

2) On a

$$\|T(x-y)\|_G \leq a\|x-y\|_H \Rightarrow \|T(x) - T(y)\|_G \leq a\|x-y\|_H.$$

Alors T est lipschitzienne , donc T uniformément continue . □

Définition 2.1.3. *Toute application linéaire $T : H \longrightarrow G$ s'appelle un opérateur linéaire. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(H, G)$ des applications linéaires continus de H dans G est l'espace des opérateurs linéaires borné .*

Théorème 2.1.1. *Soient U, S et T des opérateur de H à valeurs dans G tell que les formules qui suivent aient un sens.*
(i). $S + T = T + S$ et $(S + T) + U = S + (T + U)$.
(ii). $(ST)U = S(TU)$ et $(S + T)U = SU + TU$.
(iii). Si S est borné, alors $S(T + U) = ST + SU$.

Exemple 2.1.1. *1. Soit H un Hilbert. L'opérateur I (l'identité) est borné car*

$$\forall x \in H : \quad \|I(x)\| = \|x\|.$$

2. Soit $H = l^2$. L'opérateur shift Défini par

$$T : H \longrightarrow H$$

$$x \longrightarrow T(x) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

est borné.
3. Soient $H = L^2[0, 1]$ et φ fonction continue sur $[0, 1]$. L'opérateur

$$T\varphi : H \longrightarrow H$$

$$f \longrightarrow T_\varphi f = \varphi f$$

est borné car

$$\begin{aligned} \|T_\varphi f\|^2 &= \int_0^1 |\varphi(x)f(x)|^2 \mathrm{d}x \\ \|T_\varphi f\|^2 &\leq \|\varphi\|_\infty^2 \|f\|^2 \end{aligned}$$

donc $\exists a = \|\varphi\|_\infty^2$ *tel que*

$$\|T_\varphi f\| \leq a\|f\|, \forall f \in L^2[0,1].$$

Ce qui assure que $T\varphi$ *est borné.*

Théorème 2.1.2. *Soient* H *et* G *deux espaces de Hilbert.*
Si $dim(H) < \infty$ *, alors toute application linéaire*

$$\begin{aligned} T : H &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto Tx \end{aligned}$$

est bornée.

Démonstration. Il est claire que l'application définie sur H comme suit

$$x \mapsto \|x\| = \|x\|_H + \|Tx\|_G$$

est une norme sur H. Puisque $dim(H) < \infty$, toute les normes sur H sont équivalentes, donc

$$\exists \alpha > 0, \quad \|x\| \leq \alpha\|x\|_H.$$

Par conséquent

$$\|Tx\|_G \leq (\alpha - 1)\|x\|_H, \forall x \in H$$

et donc T est bornée. □

Définition 2.1.4. *On définit la norme de l'opérateur* T *par*

$$\|T\| = \inf\{c > 0 : \|Tx\|_G \leq \|x\|_H, \forall x \in H\}. \tag{2.1}$$

On peut aussi le définir comme

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Tx, y\rangle|. \tag{2.2}$$

Voici quelques propriétés de la norme opérateur.

Proposition 2.1.1. *.*
i. Si $T \in \mathcal{L}(H)$*, alors* $\|T\| = 0$ *si et seulement si* $T = 0$*.*
ii. Si $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(H)$*, alors* $T_1 + T_2 \in \mathcal{L}(H)$ *et* $\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$*.*
iii. Si $\alpha \in K$ *et* $T \in \mathcal{L}(H)$*, alors* $\alpha T \in \mathcal{L}(H)$ *et* $\|\alpha T\| = |\alpha|\|T\|$*.*
iv. Si $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(H)$*, alors* $T_1 \circ T_2 \in \mathcal{L}(H)$ *et* $\|T_1 \circ T_2\| \leq \|T_1\|\|T_2\|$*.*

Définition 2.1.5. *On définit le noyau de l'opérateur* T *par*

$$Ker(T) = \{x \in E : Tx = 0\}.$$

et l'image de l'opérateur T *par*

$$Im(T) = \{Tx : x \in E\}.$$

2.1.2 L'inverse d'un opérateur

Définition 2.1.6. *(Opérateur inverse)*
Soient H et G deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H,G)$ un opérateur. On dit que T est inversible s'il existe $S \in \mathcal{L}(G,H)$ tel que

$$T \circ S = I_G \qquad et \qquad S \circ T = I_H \tag{2.3}$$

Où I_H (resp. I_G) est l'opérateur identité de H (resp. de G).
Un tel opérateur S (lorsqu'il existe) est unique. S est appelé l'inverse de T et on le note T^{-1}.

Théorème 2.1.3. *Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur. Si $dim H < +\infty$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i. T est inversible.

ii. T est injectif.

iii. T est surjectif.

iv. T admet un inverse à droite (i.e. il existe $U \in \mathcal{L}(H,H)$ tel que $T \circ U = I_H$).

v. T admet un inverse à gauche (i.e. il existe $V \in \mathcal{L}(H,H)$ tel que $U \circ T = I_H$).

Lemme 2.1.2. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ est inversible alors*

$$\forall x \in H \qquad \|Tx\| \geq \|T^{-1}\|^{-1}\|x\|.$$

Démonstration.

$$\forall x \in H \quad \text{on a} \quad \|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \leq \|T^{-1}\|\|Tx\|$$

alors

$$\frac{\|x\|}{\|T^{-1}\|} \leq \|Tx\|$$

donc

$$\|T^{-1}\|^{-1}\|x\| \leq \|Tx\|.$$

□

Lemme 2.1.3. *Soit $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(H)$ si T_1 et T_2 sont inversibles alors*
$T_2T_1 \in \mathcal{L}(H)$ est inversible et l'on a

$$(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}.$$

On note par la suite que TS désigne $T \circ S$.

Théorème 2.1.4. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ si $\|T\| < 1$, alors $I - T$ est inversible*

i.e $(I-T)^{-1}$ existe et on a $(I-T)^{-1} = \sum_{n\geq 0} T^n$.

Démonstration. Il est claire que la série $\sum_{n\geq 0} T^n$ est convergente (a un sens) car si $\|T\| < 1$, alors la série $\sum_{n\geq 0} \|T\|^n$ converge et comme

$$\|T^n\| \leq \|T\|^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Alors la série $\sum_{n\geq 0} T^n$ est absolument convergente.
on pose $S = \sum_{n\geq 0} T^n$, alors

$$\begin{aligned}(I-T)S &= (I-T)\sum_{n\geq 0} T^n \\ &= \sum_{n\geq 0} T^n - \sum_{n\geq 0} T^{n+1} \\ &= (I + T + T^2 + \ldots + T^n + \ldots) - (T + T^2 + \ldots + T^n + \ldots) \\ &= I.\end{aligned}$$

De même si on fiat le calcul de $S(I-T)$ on trouve

$$S(I-T) = \textstyle\sum_{n\geq 0} T^n(I-T) = I$$

donc $(I-T)S = S(I-T) = I$.

D'où $I-T$ est inversible et $(I-T)^{-1} = S = \sum_{n\geq 0} T^n$. □

Exemple 2.1.1. *1. L'opérateur identité I_H est inversible et*

$$I_H^{-1} = I_H.$$

2. Soit $H = l^2(R)$ l'espace des suites carré sommable $\{(x_n)_n, \sum_0^{+\infty} |x_n|^2 \leq \infty\}$.
On considère l'opérateur

$$\begin{aligned}&S : H \longrightarrow H \\ &x = x^n \longrightarrow S(x) = (0, x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)\end{aligned}$$

et on considère l'opérateur

$$\begin{aligned}&T : H \longrightarrow H \\ &x = x^n \longrightarrow T(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, \ldots)\end{aligned}$$

On a $T(S(x)) = T(S(x_1, x_2, \ldots)) = T(0, x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) = x$ (inverse à droite) mais par conte

$$S(T(x)) = S(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \neq x.$$

Donc T admet un inverse à droite mais n'est pas inversible.

3. Soit $h \in C[0,1]$ et soit $T_h \in \mathcal{L}(L^2[0,1])$ définit par

$$(T_h g)(t) = h(t)g(t)$$

Si $f \in C[0,1]$ définit par

$$f(t) = 1 + t$$

alors T_f est inversible.
En effet, la fonction k définie par $k(t) = \dfrac{1}{1+t}$ est un élément de $C[0,1]$, donc

$$\forall t \in [0,1], (T_k T_f g)(t) = (T_k(fg))(t) = k(t)f(t)g(t) = g(t), \forall g \in L^2[0,1]$$

et

$$\forall t \in [0,1], (T_f T_k g)(t) = (T_f(kg))(t) = f(t)k(t)g(t) = g(t), \forall g \in L^2[0,1],$$

donc

$$T_k T_f = I = T_f T_k.$$

D'où T_f est inversible et $T_f^{-1} = T_k$.

2.1.3 L'adjoint d'un opérateur borné

On rappelons le théorème de représentation de Riesz.

Théorème 2.1.5. *Soient $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert et f une forme linéaire continue de H', alors il existe un vecteur unique $y \in H$ tel que :*

$$f(x) = \langle x, y \rangle, \forall x \in H.$$

Proposition 2.1.2. *Soient H et G deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H,G)$. Alors il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(G,H)$ tel que, pour tout $x \in H$ et tout $y \in G$,*

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle .$$

De plus on a $\|T^*\| = \|T\|$.

Démonstration. Pour tout $y \in G$ l'application $\varphi_y : x \mapsto \langle T(x), y \rangle$ est linéaire.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la définition de la norme opérateur, on a l'inégalité

$$|\langle T(x), y \rangle| \leqslant \|T\|_{op} \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

Alors φ_y est linéaire continue et par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique élément notons-le $T^*(y)-$ tel que

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle .$$

Soient $y_1, y_2 \in G$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors, pour tout $x \in H$, on a

$$\begin{aligned} \langle x, T^*(y_1 + \alpha y_2) \rangle_H &= \langle T(x), y_1 + \alpha y_2 \rangle_G \\ &= \langle T(x), y_1 \rangle_G + \bar{\alpha} \langle T(x), y_2 \rangle_G \\ &= \langle x, T^*(y_1) \rangle_H + \bar{\alpha} \langle x, T^*(y_2) \rangle_H \\ &= \langle x, T^*(y_1) + \alpha T^*(y_2) \rangle_H \end{aligned}$$

D'où, $T^*(y_1 + \alpha y_2) = T^*(y_1) + \alpha T^*(y_2)$ i.e. T^* est linéaire.
On calcule la norme opérateur de T^*

$$\begin{aligned}\|T^*\|_{op} &= \sup_{\|x\|\leqslant 1, \|y\|\leqslant 1} |\langle T^*(x), y\rangle| \\ &= \sup_{\|x\|\leqslant 1, \|y\|\leqslant 1} |\langle y, T^*(x)\rangle| \\ &= \sup_{\|x\|\leqslant 1, \|y\|\leqslant 1} |\langle T(y), x\rangle| \\ &= \|T\|_{op}\end{aligned}$$

AinsiT^*est continue et $\|T^*\| = \|T\|$. □

Définition 2.1.7. *Soient H et G deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H, G)$. L'unique opérateur $T^* \in \mathcal{L}(G, H)$ qui vérifie la relation suivante : pour tout $x \in H$ et tout $y \in G$,*

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle \tag{2.4}$$

est appelée adjointe de T.

Propriété 2.1.1. *Pour tout $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(H, G)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on a*
i. $(I_d)^* = I_d$.
ii. $(T^*)^* = T$.
iii. $(\alpha T_1 + \beta T_2)^* = \overline{\alpha} T_1^* + \overline{\beta} T_2^*$.

Démonstration. La démonstration illustré directement par la définition. □

Proposition 2.1.3. *Soient E, F et G trois espaces de Hilbert , Pour $T_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T_1 \in \mathcal{L}(F, G)$ on a*
(i). $\|T^* \circ T\| = \|T\|^2$.
(ii). $(T_1 \circ T_2)^* = T_2^* \circ T_1^*$.

Démonstration. (i). Montrons que $\|\mathrm{T}^* \circ \mathrm{T}\| = \|\mathrm{T}\|^2$.
On a

$$\|\mathrm{T}^* \circ \mathrm{T}\| \leq \|\mathrm{T}^*\| \, \|\mathrm{T}\| = \|\mathrm{T}\|^2.$$

De plus, pour tout $x \in \mathrm{E}$ tel que $\|x\| \leq 1$ on a

$$\|\mathrm{T}(x)\|^2 = \langle \mathrm{T}(x), \mathrm{T}(x)\rangle = \langle x, \mathrm{T}^* \circ \mathrm{T}(x)\rangle \leq \|\mathrm{T}^* \circ \mathrm{T}\| .$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc

$$\|\mathrm{T}\|^2 \leq \|\mathrm{T}^* \circ \mathrm{T}\| .$$

D'où $\|\mathrm{T}^* \circ \mathrm{T}\| = \|\mathrm{T}\|^2$.

(ii). Il suffit de montrer que $\langle (T_1T_2)^*(x), y\rangle = \langle T_2^* T_1^*(x), y\rangle$.
pour tous $x \in E$ et $y \in F$

$$\begin{aligned}\langle (T_1T_2)^*(x), y\rangle &= \langle x, (T_1T_2)(y)\rangle \\ &= \langle T_1^*(x), T_2(y)\rangle \\ &= \langle T_2^* T_1^*(x), y\rangle\end{aligned}$$

Donc $(T_1 \circ T_2)^* = T_2^* \circ T_1^*$.

□

Théorème 2.1.6. *Soient H et G deux espaces de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(H,G)$. L'opérateur T est inversible si et seulement si T^* est inversible et on a*

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

Démonstration. Si $T \in \mathcal{L}(H,G)$ est inversible (T^{-1} existe), alors

$$(T^{-1})^* \circ T^* = (T \circ T^{-1})^* = (Id_G)^* = Id_G$$

$$T^* \circ (T^{-1})^* = (T^{-1} \circ T)^* = (Id_H)^* = Id_H.$$

Donc $T^* \in \mathcal{L}(G,H)$ est inversible et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.
Si $T^* \in \mathcal{L}(G,H)$ est inversible, alors l'étape précédente montre que $(T^*)^* \in \mathcal{L}(H,G)$ est inversible, donc T est inversible (car $(T^*)^* = T$).
D'où la démonstration.

□

Exemple 2.1.2. *Soit $S : \ell^2 \to \ell^2$ le shift défini par $S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = (0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, alors S^* est défini par*

$$S^*(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = (\alpha_2, \alpha_3, \ldots).$$

Preuve*- Soit (α_n) et (β_n) dans ℓ^2. Alors*

$$\begin{aligned}\langle S^*(\alpha_n), (\beta_n)\rangle &= \langle(\alpha_n), S(\beta_n)\rangle \\ &= \langle(\alpha_1, \alpha_2, \ldots), (0, \beta_1, \beta_2, \ldots\rangle \\ &= \alpha_2\overline{\beta_1} + \alpha_3\overline{\beta_2} + \cdots \\ &= \langle(\alpha_2, \alpha_3, \ldots), (\beta_1, \beta_2, \ldots)\rangle.\end{aligned}$$

Ainsi S^* est bien donné par la formule annoncée.

Exemple 2.1.3. *Soit $H = L^2([a,b])(a < b)$ l'espace des classes de fonctions $x : [a,b] \to \mathbb{C}$ de carré sommable avec le produit scalaire*

$$< x, y >= \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t$$

et soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continu fixée. L'application T définie sur $L(H,H)$ par

$$(Tx)(t) = f(t)x(t)$$

est un opérateur appelé opérateur de multiplication par f. L'opérateur $T^* \in L(H,H)$ est alors l'opérateur de multiplication par la fonction $\overline{f}$.

2.1.4 Opérateurs Auto-adjoints, Isométriques, Unitaires, Normaux,Positifs

Soient H et G deux espaces de Hilbert.

Définition 2.1.8. *(Opérateur auto-adjoint)*
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. On dit que A est un opérateur auto-adjoint (on dit aussi symétrique lorsque $K := \mathbb{R}$ et hermitien lorsque $K := \mathbb{C}$) s'il égale à son adjoint, i.e $A = A^*$. Autrement dit :

$$\forall x, y \in H \quad \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle.$$

Si de plus, pour tout $x \in H$, $\langle Ax, x\rangle > 0$, on dit que A est auto-adjoint positif (ou positif).

Théorème 2.1.7. *Soit H un espace de Hilbert complexe et soit $A \in \mathcal{L}(H)$,*

$$A \text{ est auto-adjoint} \Longleftrightarrow \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}, \forall x \in H.$$

Démonstration. Si A est auto-adjoint (i.e $A = A^*$), alors

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, A^*x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}.$$

D'où

$$\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}, \forall x \in H.$$

Inversement, si $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}, \forall x \in H$, alors :

$$\langle Ax, x\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle} = \langle x, Ax\rangle = \langle A^*x, x\rangle \qquad \forall x \in H.$$

Donc A est auto-adjoint. □

Théorème 2.1.8. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, Alors les deux opérateur suivants sont auto-adjoints :*
1. $T_1 = AA^*$.
2. $T_2 = A + A^*$.
En effet

$$T_1^* = (AA^*)^* = (A^*)^*A^* = AA^* = T_1.$$
$$T_2^* = (A + A^*)^* = A^* + (A^*)^* = A^* + A = T2.$$

Exemple 2.1.4. *(i). L'opérateur identité sur un espace de Hilbert est auto-adjoint.*
(ii) Les opérateurs linéaires sur $\mathbb{C}^n$ donné par des matrices hermitiennes (a_{ij}), c'est à dire telles que $a_{ij} = \overline{a_{ij}}$ est auto-adjoint.
(iii). Un opérateur intégral

$$(Tf)(t) = \int_0^1 k(s, t)f(s)ds$$

sur $L^2([0, 1], \mathbb{C})$ avec un noyau hermitien, c'est à dire tel que $k(s, t) = \overline{k(t, s)}$ est auto-adjoint.

Remarque 2.1.1. *(i). Tout opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ peut être représenté de manière unique comme*

$$A = T + iS$$

où $T, S \in \mathcal{L}(H)$ sont opérateurs auto-adjoints.
De plus

$$A^* = T - iS, \quad T = \frac{A + A^*}{2} \quad et \quad S = \frac{A - A^*}{2i}$$

(ii). L'ensemble des opérateurs auto-adjoints forme un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(H)$.

Proposition 2.1.4. *Soient H un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$.*
Si T est auto-adjoint et si F est un sous-espace vectoriel de H invariant par T (c'est-à-dire tel que $T(F) \subset F$), alors $F^\perp$ est aussi invariant par T.

Démonstration. Soit $x \in F^\perp$. Pour tout $y \in F$, nous avons $T(y) \in F$, donc

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle = 0$$

donc $T(x) \in F^\perp$. D'où $T(F^\perp) \subset F^\perp$. □

Définition 2.1.9. *Soit T un opérateur borné sur un espace de Hilbert H On dit que :*
(i) T est une projection si
$$T^2 = T.$$
(ii). projection orthogonale si
$$T^2 = T \quad et \quad T = T^*.$$

Remarque 2.1.2. *Les projections orthogonales sur des sous-espaces fermés de H sont auto-adjoints.*

Proposition 2.1.5. *Soit H un espace de Hilbert et $M \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé. si $T : H \longrightarrow M$ un projection orthogonale, alors*
$$Im(T) = M \text{ et } ker(T) = M^{\perp}.$$

Démonstration. Il est clair que $Im(T) \subset M$. De plus, si $x \in M$, alors $T(x) = x$ implique que $Im(T) = M$.
Maintenant $x \in ker(T)$ ssi $T(x) = 0$ ssi $x = x - 0 \in M^{\perp}$, donc $ker(T) = M^{\perp}$ (voir proposition 1.8.1). □

Définition 2.1.10. *(Opérateur isométrique)*
Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est appelé isométrique s'il préserve la norme i.e
$$\|T(x)\| = \|x\| \qquad pourtout \quad x \in H.$$

Proposition 2.1.6. *Soient H et G deux espaces de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(H, G)$.Sont équivalents*
1. *T est isométrique.*
2. *$T^*T = Id_H$.*

Démonstration. Supposons que T est isométrique. Montrer que $T^*T = Id_H$. Revient à montrer que pour tous $x, y \in H$, on a
$$\langle T^*T(x), y\rangle = \langle x, y\rangle$$
Comme $\|T(u)\| = \|u\|$, d'après l'équation (1.4) on en déduit :
$$\langle T^*T(x), y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2) = \langle x, y\rangle$$
Réciproquement, supposons que $T^*T = Id_H$. Ceci implique que pour tout $x \in H$,
$$\langle T^*T(x), y\rangle = \langle x, y\rangle$$
On en déduit immédiatement pour tout $x \in H$,
$$\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$$
Ce qui prouve que T est bien isométrique. □

Exemple 2.1.5. *Le shift S défini sur $\ell^2(\mathbb{N})$ par $S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$ est isométrique.*

En effet soit $x = (x_1, x_2, \dots)$, alors

$$\begin{aligned} \|S(x)\|^2 &= |0|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \dots \\ &= |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \dots \\ &= \|x\|^2, \end{aligned}$$

donc S est bien isométrique.

Définition 2.1.11. *(Opérateur normal)*
Un élément $T \in \mathcal{L}(H)$ est appelé normal si

$$TT^* = T^*T.$$

Proposition 2.1.7. *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est normale si et seulement si*

$$\|T(x)\| = \|T^*(x)\| \text{ pour tout } x \in H.$$

En effet .

$$\|T(x)\|^2 = \langle T^*T(x), x\rangle = \langle TT^*(x), x\rangle = \|T^*(x)\|^2.$$

Proposition 2.1.8. *Sont $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal. Alors*

$$kerT = kerT^*.$$

Démonstration. Soit $x \in kerT$. Alors

$$\|T^*(x)\|^2 = \langle T^*(x), T^*(x)\rangle = \langle TT^*(x), x\rangle = \langle T^*T(x), x\rangle = 0$$

En utilisant pour la troisième égalité le fait que T est normal donc $TT^* = T^*T$. Ceci prouve donc que $kerT \subset kerT^*$.
Maintenant remarquons que si T est normal, alors T^* est normal et en appliquant l'inclusion qu'on vient de démontrer à T^*, on obtient $kerT^* \subset kerT^{**} = kerT$ car $T^{**} = T$.
Finalement $kerT = kerT^*$. □

Proposition 2.1.9. *Sont $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal et soit $\alpha \geq 0$. Si*

$$\|T(x)\| \geq \alpha\|x\| \quad \text{pour tout} \quad x \in H, \quad \text{alors} \quad KerT^* = \{0\}.$$

Démonstration. Soit $x \in KerT^*$. Alors $T^*(x) = 0$, donc par proposition (2.1.7) on a

$$0 = \|T^*(x)\| = \|T(x)\| \geq \alpha\|x\|.$$

Ce qui donne $\|x\| = 0$, donc $x = 0$. D'où $KerT^* = \{0\}$. □

Proposition 2.1.10. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal. Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$*

$$T_\lambda = T - \lambda I \text{ est normal.}$$

Démonstration. D'après propriété (2.1.1) on a $(T - \lambda I)^* = T^* - \overline{\lambda} I$ Par conséquent, en utilisant $T^*T = TT^*$, alors

$$\begin{aligned}(T - \lambda I)(T - \lambda I)^* &= (T - \lambda I)(T^* - \overline{\lambda} I) \\ &= TT^* - \lambda T^* - \overline{\lambda} T + \lambda\overline{\lambda} I \\ &= T^*T - \lambda T^* - \overline{\lambda} T + \lambda\overline{\lambda} I \\ &= (T^* - \overline{\lambda} I)(T - \lambda I) \\ &= (T - \lambda I)^*(T - \lambda I).\end{aligned}$$

Donc $T - \lambda I$ est normal. □

Exemple 2.1.6. *Le opérateur de multiplication par f noté (M_f) défini précédemment (Exemple 2.1.3) est normal car*

$$M_f M_{f^*} = M_f M_{\bar{f}} = M_{|f|^2} = M_{f^*} M_f$$

Définition 2.1.12. *(opérateur unitaire)*
Un élément $U \in \mathcal{L}(H, G)$ est appelé unitaire si

$$U^*U = Id_H \qquad et \qquad UU^* = Id_G$$

Autrement dit, Un opérateur U sur H est unitaire s'il est surjectif et si pour tous

$$x, y \in H, \quad \langle U(x), U(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Remarque 2.1.3. *(i). Un opérateur unitaire est de norme* 1.
(ii). Un opérateur unitaire U est bijectif et son inverse égale son adjoint, i.e

$$U^* = U^{-1}$$

(iii). tout opérateur unitaire est normale.

Proposition 2.1.11. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$*

$$T \text{ est unitaire} \Longleftrightarrow \|T(x)\|^2 = \|T^*(x)\|^2 = \|x\|^2, \forall x \in H.$$

Démonstration. Si T est unitaire (i.e $T^*T = TT^* = Id$), alors

$$\begin{aligned} \|T(x)\|^2 &= \langle T(x), T(x) \rangle \\ &= \langle x, T^*T(x) \rangle \\ &= \langle x, Id(x) \rangle \qquad = \|x\|^2 \\ \text{et} \quad \|T^*(x)\|^2 &= \langle T^*(x), T^*(x) \rangle \\ &= \langle x, TT^*(x) \rangle \\ &= \langle x, Id(x) \rangle \qquad = \|x\|^2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc} \quad \|T(x)\|^2 = \|T^*(x)\|^2 = \|x\|^2.$$

Inversement, si $\|T(x)\|^2 = \|T^*(x)\|^2 = \|x\|^2$, alors T est normale,
C'est à dire que

$$\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x) \rangle = \langle x, x \rangle.$$

Donc pour tout $x \in H$ on a

$$\begin{aligned}
\langle T(x), T(x)\rangle - \langle x, x\rangle &= \langle T^*T(x), x\rangle - \langle x, x\rangle \\
&= \langle (T^*T - Id)(x), x\rangle \quad = 0 \\
\text{et} \quad \langle T^*(x), T^*(x)\rangle - \langle x, x\rangle &= \langle TT^*(x), x\rangle - \langle x, x\rangle \\
&= \langle (TT^* - Id)(x), x\rangle \quad = 0 \\
\text{D'où} \quad T^*T = TT^* = Id.
\end{aligned}$$

Finalement T est bien unitaire. □

2.2 Opérateurs linéaires non bornés

2.2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.2.1. *Soit H un espace de Hilbert.*
Un opérateur non borné sur H est un couple $(D(T), T)$ où $D(T)$ est un sous espace vectoriel de H et T une application linéaire (un opérateur) définie sur $D(T) \subset H$ 'a valeurs dans H.
$D(T)$ est appelé le domaine de l'opérateur T, et on dit T est un opérateur non borné de domaine $D(T)$.
Autrement dit

On dit que un opérateur linéaire T défini sur $D(T) \subset H$ dans H est un opérateur non borné si :

$$D(T) \neq H.$$

Remarque 2.2.1. *(i). Les opérateurs non bornés peuvent étre seulement dans les espaces de dimension infinie car dans les espaces de dimension finie tous les opérateurs linéaires sont bornés.*
(ii). Un opérateur non borné admet en générale plusieurs domaine , le domaine natural (maximal) de T est

$$D(T) = \{x \in H : T(x) \in H\}.$$

Exemple 2.2.1. *Soit T l'opérateur de multiplication par x défini de $L^2(R)$ dans $L^2(R)$ par*

$$\begin{aligned}
T : L^2(R) &\longrightarrow L^2(R) \\
f &\longrightarrow Tf(x) = xf(x)
\end{aligned}$$

Avec $D(T) = \{f \in L^2(R) : xf(x) \in L^2(R)\}$.
tel que le produit scalaire sur $L^2(R)$ est

$$\langle f, g\rangle = \int f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x.$$

Alors

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \in L^2(R) \qquad \left(car \int_R f(x)^2 \mathrm{d}x = \pi < +\infty\right)$$

mais $xf(x) \notin L^2(R)$, donc T est un opérateur non borné.

2.2.2 Opérateurs fermés

Définition 2.2.2. *(Graphe d'un opérateur)*
Soit $(D(T), T)$ un opérateur non borné sur un espace de Hilbert H.
Le graphe de T est le sous espace vectoriel noté : $G(T)$ de $H \times H$ défini par :

$$G(T) = \{(x, T(x)) : x \in D(T)\}.$$

La norme de Graphe de T est définie pour tout $x \in D(T)$ par :

$$\|x\|_{gr} = \sqrt{\|x\|^2 + \|Tx\|^2}.$$

Lemme 2.2.1. *Soit H un espace de Hilbert, alors l'espace de $H \times H$ muni du produit scalaire*

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle_{H \times H} = \langle x, x' \rangle_H + \langle y, y' \rangle_H$$

est de Hilbert .

Proposition 2.2.1. *Un sous-espace G de $H \times H$ est le graphe d'un opérateur si et seulement si*

$$(0, y) \in G \Longrightarrow y = 0. \tag{2.5}$$

Preuve *voir [4] Chapitre 4 page 34.*

Définition 2.2.3. *(Opérateur fermé)*
Soit H un espace de Hilbert.
On dit que $(D(T), T)$ est un opérateur fermé si son graphe $G(T)$ est fermé dans $H \times H$.

Théorème 2.2.1. *Un opérateur $(D(T), T)$ est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de $D(T)$ telle que* $\left\{\begin{array}{rcl} \lim_{n\to\infty} x_n &=& x \\ & \textit{et} & \\ \lim_{n\to\infty} T(x_n) &=& y \end{array}\right.$ *on a alors* $\left\{\begin{array}{rcl} x &\in& D(T) \\ \textit{et} && \\ T(x) &=& y \end{array}\right.$

Démonstration. Supposons que T est fermé alors $G(T) = \overline{G(T)}$.
Soit $(x_n)_n \subset D(T)$ telle que $(x_n, T(x_n))_{n\in N}$ converge vers (x, y).
On a $(x_n, T(x_n))_{n\in N} \in G(T)$ qu'est fermé alors

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, T(x_n))_{n\in N} = (x, y) \in G(T).$$

Donc $x \in D(T)$ et $y = T(x)$.
Inversement, Soit $(x, y) \in \overline{G(T)}$ alors il existe une suite $((x_n), T(x_n))_{n\in N} \in G(T)$,

$$\text{telle que } \lim_{n\to\infty}((x_n), T(x_n))_{n\in N} = (x, y),$$

alors $x \in D(T)$ et $y = T(x)$.
Donc $G(T)$ est fermé. □

Théorème 2.2.2. *(Graphe fermé)*
Soient H et G deux espaces de Hilbert et $T : H \longrightarrow G$ un opérateur linéaire partout défini sur H, (i.e $D(T) = H$), alors :

T est fermé si et seulement si T est borné.

Preuve *voir [8] page 596.*

Remarque 2.2.2. *Soit T et S deux opérateurs sur H.*
(i). Le produit et la somme de deux opérateurs fermés n'est pas forcément un opérateur fermé.
(ii). Si T borné, alors $T + S$ est fermé si T l'est aussi.
*(iii). Si T et S sont fermés, alors le produit TS est fermé si T est inversible **ou** S est borné (si l'une des deux conditions est vérifiée).*

2.2.3 Opérateur fermable

Définition 2.2.4. *(Extension et Opérateur fermable)*
(i). On dit que $(D(S), S)$ est une extension de $(D(T), T)$ et on note $T \subset S$ si :
$D(T) \subset D(S)$ et $T(x) = S(x)$ pour tout $x \in D(T)$,
Autrement dit, $G(T) \subset G(S)$.
(ii). On dit qu'un opérateur $(D(T), T)$ est fermable s'il possède une extension fermé.

Proposition 2.2.2. *Tout opérateur fermable $(D(T), T)$ admet une plus petite extension fermé notée $\overline{T}$. De plus, on a*

$$G(\overline{T}) = \overline{G(T)}.$$

Démonstration. Pour toute extension S fermée de T, on a $G(T) \subset G(S)$ avec $G(S)$ un fermé de $H \times H$ et donc $\overline{G(T)} \subset G(S)$. On conclut que $\overline{G(T)}$ ne contient pas d'éléments de la forme $(0, f)$ avec $f \neq 0$. Par la proposition (2.2.1) $\overline{G(T)}$ est le graphe d'un opérateur fermé, noté $\overline{T}$.
Enfin, il est claire que $\overline{T}$ est la plus petite extension fermée de T puisque
$G(\overline{T}) = \overline{G(T)} \subset G(S)$ pour toute extension fermée S de T. □

Remarque 2.2.3. *On remarque que si $(D(T), T)$ est un opérateur fermable alors*

$$\overline{G(T)} = \bigcap_{i \in I} G(T_i)$$

où $(T_i, D(T_i))_{i \in I}$ est la famille de toutes les extensions fermés de $(D(T), T)$
(il existe au moins une).

2.2.4 Inverse d'un opérateur non borné

Définition 2.2.5. *Un opérateur $T : D(T) \subset H \longrightarrow H$ est dit inversible s'il existe un unique opérateur T^{-1} défini de H dans H tel que :*

$$TT^{-1}(x) = x \quad \forall x \in H \qquad et \qquad T^{-1}T(x) = x \quad \forall x \in D(T).$$

L'opérateur T^{-1} est dit l'inverse de T.

Proposition 2.2.3. *L'inverse d'un opérateur injectif fermé est fermé.*

Démonstration. Soit $T : D(T) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur injectif et fermé
alors $G(T) = \{(x, T(x)), x \in D(T)\}$ est fermé.
Si T est inversible alors $G(T^{-1}) = \{(T(x), x), x \in D(T)\}$ est fermé
Donc T^{-1} est fermé.

□

Remarque 2.2.4. *Si T est inversible alors L'image de l'inverse de T égal au domaine de T, i.e*

$$Im(T^{-1}) = D(T).$$

2.2.5 Adjoint d'un opérateur non borné

Définition 2.2.6. *(Opérateur densément défini)*
Un opérateur $(D(T), T)$ est dit densément défini si son domaine $D(T)$ est dense dans H, i.e.

$$\overline{D(T)} = H.$$

Définition 2.2.7. *Soit $(D(T), T)$ un opérateur non borné sur H de domaine $D(T)$ dense. On définit l'adjoint T^* de T par :*

$$\forall x \in D(T), \forall y \in D(T^*) \langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle.$$

Avec $D(T^*) = \{y \in H : \exists c \geq 0 \quad tq \quad |\langle T(x), y\rangle| \leq c\|x\|, \forall x \in D(T)\}$.

Si l'application $D(T) \ni x \longrightarrow \langle T(x), y \rangle$ est continue, alors elle possède une extension continue à H (i.e. admet un prolongement continu) ce qui permet de définir l'élément $T^*(y)$ dans H par le théorème de Riesz.

Définition 2.2.8. *On peut définit $D(T^*)$ comme suit :*

$$D(T^*) = \{y \in H : \exists \eta \in H : \forall x \in D(T), < T(x), y >=< x, \eta >\}.$$

Pour un y donné, si un tel η existe, alors il est unique et on pose $T^*(y) = \eta$.

Proposition 2.2.4. *Si T un opérateur non borné sur H dont le domaine $D(T)$ est dense, alors Son adjoint T^* est fermé.*

Démonstration. Soit $(x_n, T^*(x_n))_{n \in \mathbb{N}/\{0\}} \in G(T^*)$ une suite du graphe de T^* convergeant vers $(x, y) \in H \times H$. Montrons que $x \in D(T^*)$ et $y = T^*(x)$. Du fait de l'identité,

$$\begin{aligned}
\|(x_n, T^*(x_n)) - (x, y)\|^2_{H\times H} &= \|(x_n - x, T^*(x_n) - y)\|^2_{H\times H} \\
&= \langle (x_n - x, T^*(x_n) - y), (x_n - x, T^*(x_n) - y) \rangle_{H \times H} \\
&= \langle x_n - x, x_n - x \rangle_H + \langle T^*(x_n) - y, T^*(x_n) - y \rangle_H \\
&= \|x_n - x\|^2 + \|T^*(x_n) - y\|^2.
\end{aligned}$$

Nous avons également $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ et $T^*(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. Il découle alors de la continuité du produit scalaire que pour tout $z \in D(T)$:

$$\langle T(z), x \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T(z), x_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle z, T^*(x_n) \rangle = \langle z, x \rangle.$$

Ainsi $z \longrightarrow \langle z, x \rangle$ est bornée sur $D(T)$ et donc $x \in D(T^*)$. De plus, puisque $T^*(x)$ est l'unique élément de H à satisfaire l'égalité ci-dessus pour tout $z \in D(T)$,
nécessairement $y = T^*(x)$ et donc $(x, y) \in G(T^*)$.
Finalement T^* est bien fermé.

□

Propriété 2.2.1. *Soit H un espace de Hilbert et $(D(T), T), (D(S), S)$ deux opérateurs non bornés densément défini sur H, alors :*
(i). Si $S \subset T$, alors $S^* \supset T^*$.
(ii). Si le domaine de $S + T$ est dense, alors $S^* + T^* \subset (S + T)^*$.
(iii). Si le domaine de ST est dense, alors $T^*S^* \subset (ST)^*$.
et on a

$$D(T + S) = D(T) \cap D(S),$$
$$D(ST) = \{x \in D(T) : T(x) \in D(S)\}.$$

Proposition 2.2.5. *Si $(D(T), T)$ un opérateur non borné de domaine dense, alors :*

$$Im(T)^{\perp} = ker(T^*)$$

Démonstration. Si $y \in Im(T)^{\perp}$ alors pour tout $x \in D(T), \langle T(x), y\rangle = 0$
donc $y \in D(T^*)$ et $T^*(y) = 0$ (par la définition 2.2.8); ce qui donne $y \in ker(T^*)$.
Réciproquement : Si $y \in ker(T^*)$, alors $\quad y \in D(T^*)$ et $T^*(y) = 0$,
ainsi

$$\begin{gathered}\forall x \in D(T), \langle x, T^*(y)\rangle = 0 \\ \text{alors } \langle T(x), y\rangle = 0.\end{gathered}$$

Donc $y \in Im(T)^{\perp}$. □

2.2.6 Opérateurs symétriques et auto-adjoints

Définition 2.2.9. *Un opérateur T dans un espace de Hilbert à domaine dense est dit symétrique si $T \subset T^*$, c'est-a-dire :*

$$D(T) \subset D(T^*), \textit{ et} \quad T(x) = T^*(x) \quad \textit{pour } x \in D(T).$$

Autrement dit, T est symétrique si et seulement si

$$\forall x, y \in D(T), \langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$$

(ii). Un opérateur symétrique T est dit maximal symétrique s'il n'admet aucun prolongement symétrique propre, c'est-a-dire : S'il n'existe pas d'opérateur symétrique S avec $T \subsetneq S$ et $T \neq S$.

Remarque 2.2.5. *Si T est un opérateur symétrique, alors le domaine de son adjoint est également dense dans H car :*

$$H = \overline{D(T)} \subseteq \overline{D(T^*)} \subseteq H.$$

Remarque 2.2.6. *(i). Tout opérateur symétrique est fermable.*
(ii). Si T est un opérateur symétrique alors T^* et T^{**} sont deux extensions fermées de T.

Définition 2.2.10. *Un opérateur T dans un espace de Hilbert à domaine dense est dit auto-adjoint si $T = T^*$, c'est-a-dire :*

$$D(T) = D(T^*), \textit{ et} \quad T(x) = T^*(x) \quad \textit{pour } x \in D(T).$$

Remarque 2.2.7. *(i). tout opérateur auto-adjoint est symétrique mais l'inverse n'est pas vrai.*
(ii). tout opérateur autoadjoint A est maximal symétrique. En effet,

$$\begin{gathered}A \subseteq T \textit{ et } T \subseteq T^* \\ \textit{entraîne } A = A^* \supseteq T^* \supseteq T \supseteq A,\end{gathered}$$

et donc $T = A$.

Définition 2.2.11. *(Opérateurs essentiellement auto-adjoints)*
Soit $(D(T), T)$ un opérateur non borné symétrique sur l'espace de Hilbert H avec $D(T)$ dense dans H. On dit que T est essentiellement auto-adjoint si sa fermeture $(\overline{T})$ est auto-adjoint.

Autrement dit, T est essentiellement auto-adjoint si

$$(\overline{T})^* = \overline{T} = T^*.$$

Remarque 2.2.8. *(i). Tout opérateur auto-adjoint est essentiellement auto-adjoint mais la réciproque est fausse.*
(ii). Tout opérateur essentiellement auto-adjoint possède une unique extension auto-adjointe.
(iii). Si T est essentiellement auto-adjoint, alors T^* est la plus petite extension fermé de T.

Définition 2.2.12. *(Opérateurs normaux)*
Soit $(D(T), T)$ un opérateur non borné densément défini, On dit que T est normal si

$$D(T) = D(T^*) \text{ et } \|T(x)\| = \|T^*(x)\| \text{ pour tout } x \in D(T).$$

Remarque 2.2.9. *(i). Si T est un opérateur normal, alors : T est fermé et $TT^* = T^*T$.*
(ii). Tout opérateur auto-adjoint est normal.
(iii). Si T et S sont deux Opérateurs normaux tels que $S \subset T$, alors $S = T$.

CHAPITRE 3

THÉORIE SPECTRALE DES OPÉRATEURS LINÉAIRES BORNÉS

Dans ce chapitre, nous traitons une étude spectrale sur les opérateurs linéaires bornés, plus précisément, le spectre, l'ensemble résolvant et l'identité de la résolvante, et la décomposition du spectre des opérateurs linéaires bornés.

3.1 spectre et résolvant

Soit H un espace de Hilbert complexe.

Définition 3.1.1. *(valeur propre)*
Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Un nombre complexe λ est une valeur propre de T s'il existe un vecteur $x \neq 0$ tel que

$$Tx = \lambda x.$$

Autrement dit, λ est une valeur propre de T si le noyau de $T - \lambda I$ soit non nul

$$i.e \qquad ker(T - \lambda I) \neq 0$$

x est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.
On désigne par $Vp(T)$ l'ensemble des valeurs propre de T.

Définition 3.1.2. *(Valeur régulière)*
Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Une valeur régulière de T est un élément $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $T - \lambda I$ soit inversible dans $\mathcal{L}(H)$.

L'ensemble des valeurs régulières de T est appelé ***L'ensemble résolvant*** *de T, noté $\rho(T)$.*

$$\text{Autrement dit,} \qquad \rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda I \quad \text{inversible } \}.$$

On définit alors ***la résolvante*** *de T (opérateur résolvant) comme*

$$\lambda \in \rho(T), \quad R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}.$$

Remarque 3.1.1. *(i). Si l'équation spectrale*

$$T(x) = \lambda x \Leftrightarrow (T - \lambda I)(x) = 0 \Leftrightarrow (\lambda I - T)(x) = 0$$

n'admet pas de Solution non nulle c'est à dire $(T - \lambda I)$ *est injectif donc bijectif, alors* $\lambda \in \rho(T)$.
(ii). On pus défini l'opérateur résolvant comme $R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$.

Définition 3.1.3. *(Valeur spectrale)*
Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. *Un élément de* $\mathbb{C}$ *qui n'est pas une valeur régulière de* T *est appelé une valeur spectrale de* T.
L'ensemble des valeurs spectrales est appelé ***le spectre*** *de* T, *et noté* $\sigma(T)$.
Autrement dit, le spectre de T *est Le complémentaire de* $\rho(T)$, *ceci équivalant à définir* $\sigma(T)$ *comme l'ensemble des* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tels que* $T - \lambda I$ *n'est pas bijective i.e*

$$\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda I \quad \text{n'est pas inversible }\}.$$

Remarque 3.1.2. *Un* $\lambda \in \mathbb{C}$ *est une valeur régulière d'un opérateur borné* T *si et seulement si* $T - \lambda I$ *est bijectif.*

Remarque 3.1.3. *(i). L'ensemble des valeurs propre de* T *est sous-ensemble de spectre de* T, *i.e*

$$Vp(T) \subset \sigma(T).$$

(ii). En dimension finie

$$Vp(T) = \sigma(T).$$

(iii).

$$\sigma(T) \cup \rho(T) = \mathbb{C}$$
$$\text{et}$$
$$\sigma(T) \cap \rho(T) = \varnothing$$

(iv). l'ensemble résolvant de T *est Le complémentaire de spectre, i.e*

$$\rho(T) = \mathbb{C} - \sigma(T).$$

3.2 Identité de la Résolvante

Théorème 3.2.1. *(Identité de la Résolvante)*
Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ *et* $\lambda, \mu \in \rho(T)$ *, l'opérateur résolvant* $R(T)$ *vérifie*

$$(i). \quad R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu) R_\lambda(T) R_\mu(T) \quad \forall \lambda, \mu \in \rho(T).$$

$$(ii). \quad \frac{d^n R_\lambda}{d\lambda^n}(T) = (-1)^n n! R_\lambda^{n+1}(T) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \lambda \in \rho(T).$$

Démonstration. (i). On a

$$\begin{aligned} R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1} &= (T - \lambda I)^{-1}(T - \mu I)(T - \mu I)^{-1} \\ &= (T - \lambda I)^{-1}((T - \lambda I) + (\lambda - \mu))(T - \mu I)^{-1} \\ &= (I + (\lambda - \mu)(T - \lambda I)^{-1})(T - \mu I)^{-1} \\ &= (T - \mu I)^{-1} + (\lambda - \mu)(T - \lambda I)^{-1})(T - \mu I)^{-1} \\ &= R_\mu(T) + (\lambda - \mu) R_\lambda(T) R_\mu(T). \end{aligned}$$

Donc $R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu)R_\lambda(T)R_\mu(T)$.
(ii). Par récurrence : pour $n = 1$ on a

$$\begin{aligned}\frac{dR_\lambda}{d\lambda}(T) &= \frac{d}{d\lambda}(\lambda I - T)^{-1}\\ &= -(\lambda I - T)^{-2}\\ &= -R_\lambda(T)^2\end{aligned}$$

Supposons que c'est vrai jusqu'à l'ordre n :

$$\frac{d^nR_\lambda}{d\lambda^n}(T) = (-1)^n n\,!R_\lambda^{n+1}(T)$$

et on montre que la relation est vrai pour $n+1$

$$\begin{aligned}\frac{d^{n+1}R_\lambda}{d\lambda^{n+1}}(T) &= \frac{d}{d\lambda}[(-1)^n n\,!R_\lambda^{n+1}(T)]\\ &= \frac{d}{d\lambda}[(-1)^n n\,!(\lambda I - T)^{-(n+1)}]\\ &= -(-1)^n n\,!(n+1)(\lambda I - T)^{-(n+2)}\\ &= (-1)^{n+1}(n+1)\,!(\lambda I - T)^{-(n+2)}\\ &= (-1)^{n+1}(n+1)\,!R_\lambda^{n+2}(T).\end{aligned}$$

D'où la relation . □

Théorème 3.2.2. *Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.*

$$\textit{Si } |\lambda| > \|T\| \textit{ alors } \lambda \in \rho(T) \textit{ et de plus } R_\lambda(T) = \textstyle\sum_{n\geq 0} \dfrac{T^n}{\lambda^{n+1}}$$

Démonstration. $T \in \mathcal{L}(H)$ donc $\|T\| \neq 0$.
Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $|\lambda| > \|T\|$ alors $|\lambda| > 0$ donc $|\lambda|^{-1}$ existe,
alors

$$|\lambda| > \|T\| \Rightarrow \frac{|\lambda|}{|\lambda|} > \frac{\|T\|}{|\lambda|} \Rightarrow \|\lambda^{-1}T\| < 1$$

D'après théorème (2.1.4) on a $I - \lambda^{-1}T$ inversible et

$$(I - \lambda^{-1}T)^{-1} = \sum_{n\geq 0}(\lambda^{-1}T)^n$$

Par conséquent $\lambda I - T$ est inversible donc $\lambda \in \rho(T) = \mathbb{C} - \sigma(T)$ (i.e $\lambda \notin \sigma(T)$.
De plus

$$\begin{aligned}R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1} &= \lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}T)\\ &= \lambda^{-1}\sum_{n\geq 0}(\lambda^{-1}T)^n\\ &= \sum_{n\geq 0}(\lambda^{-1})^{n+1}T^n\\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}.\end{aligned}$$

On voit donc que $\sigma(T)$ est contenu dans le disque fermé du plan complexe centré en 0 et de rayon $\|T\|$ (i.e si $|\lambda| \leq \|T\|$ alors $\lambda \in \sigma(T)$). □

Proposition 3.2.1. *Pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$*

$$\lim_{n\to+\infty} \|R_\lambda(T)\| = \lim_{|\lambda|\to+\infty} \|(T-\lambda I)^{-1}\|.$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ qu'on peut supposer vérifiant la condition $|\lambda| \geq \|T\|$. Alors $R_\lambda(T)$ existe et de plus

$$\begin{aligned}
\left\|(T-\lambda I)^{-1}\right\| &= \left\|\lambda^{-1}(\frac{T}{\lambda}-I)^{-1}\right\| \\
&= \frac{1}{|\lambda|}\left\|(\frac{T}{\lambda}-I)^{-1}\right\| \\
&\leq \frac{1}{|\lambda|}\left\|\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n\right\| \\
&\leq \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{+\infty}\left\|\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n\right\| \\
&= \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0.
\end{aligned}$$

D'où, résulte l'égalité attendue.

□

3.3 Décomposition du spectre

Définition 3.3.1. *(Spectre ponctuel)*
Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. On appelle spectre ponctuel de T l'ensemble noté $\sigma_p(T)$ tel que

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T), T-\lambda I \text{ non injectif}\}.$$

Autrement dit, spectre ponctuel est l'ensemble des valeurs propre de T.

Définition 3.3.2. *(Spectre résiduel)*
Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Le spectre résiduel de T est l'ensemble noté $\sigma_r(T)$, des $\lambda \in \mathbb{C}$ non valeurs propres tels que l'image de $T-\lambda I$ ne soit pas dense dans H, i.e

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \sigma(T), T-\lambda I \text{ injectif et } \overline{Im(T-\lambda I)} \neq H\}.$$

Exemple 3.3.1. *Soit $H \neq \{0\}$ un Hilbert*
1. Si T est l'opérateur nul, alors

$$\sigma_p(T) = Vp(T) = \{0\} \text{ et } \sigma_r(T) = \varnothing.$$

2. Si T est l'opérateur identité, alors

$$\sigma_p(T) = Vp(T) = \{1\} \text{ et } \sigma_r(T) = \varnothing.$$

Propriété 3.3.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$.Pour tout λ dans $\mathbb{C} - \{0\}$, nous avons*

$$\sigma(\lambda T) = \lambda\sigma(T), \quad Vp(\lambda T) = \lambda Vp(T) \text{ et } \sigma_r(\lambda T) = \lambda\sigma_r(T).$$

(ii). Pour tout λ dans $\mathbb{C}$, nous avons

$$\sigma(T+\lambda I) = \lambda + \sigma(T), \quad Vp(T+\lambda I) = \lambda + Vp(T) \text{ et } \sigma_r(T+\lambda I) = \lambda + \sigma_r(T)\ .$$

Définition 3.3.3. *(Spectre continu)*
Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. On appelle spectre continu de T l'ensemble noté $\sigma_c(T)$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ non valeurs propres tels que l'image de $T - \lambda I$ est dense dans H et pas fermé, i.e

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \sigma(T), T - \lambda I \text{ injectif et } Im(T-\lambda I) \neq \overline{Im(T-\lambda I)} = H\}.$$

Remarque 3.3.1. *Si l'image de $T - \lambda I$ n'est pas dense, alors $T - \lambda I$ n'est pas surjectif. Puisque bijectif implique surjectif, le spectre résiduel est donc contenu dans le spectre, i.e*

$$\sigma_r(T) \subset \sigma(T).$$

De plus. Par la définition de spectre résiduel on a

$$\sigma_r(T) \subset \sigma(T) - Vp(T).$$

(ii). Le spectre $\sigma(T)$ est la réunion disjointe de trois ensembles

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T).$$

(iii). $\sigma(T)$ est fermé et $\rho(T)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$.
(iv). $\sigma(T)$ est un compact de $\mathbb{C}$.

Théorème 3.3.1. *Si $T \in \mathcal{L}(H)$ est inversible, alors le spectre de son inverse T^{-1} est l'ensemble des inverses des éléments du spectre de T, i.e*

$$\sigma(T^{-1}) = \sigma(T)^{-1} = \{\frac{1}{\lambda}, \quad \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Démonstration. Si T est inversible, alors 0 n'appartient ni au spectre de T ni à celui de T^{-1}, de plus , pour tout nombre complexe non nul λ, l'opérateur $T^{-1} - \lambda I$ est inversible si et seulement si $T - \frac{1}{\lambda} I = -\frac{1}{\lambda} T(T^{-1} - \lambda I)$ est inversible.

□

Proposition 3.3.1. *Si H est un espace de Hilbert complexe alors le spectre de tout opérateur linéaire borné dans H est non vide.*

3.4 Rayon spectral

Définition 3.4.1. *(Rayon spectral)*
Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. On appelle rayon spectral de T, et on note $r(T)$, la quantité

$$r(T) = sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(T)\}$$

avec la convention usuelle que $r(T) = 0$ si $\sigma(T)$ est vide.

Remarque 3.4.1. *On a déjà remarqué que le spectre de T est contenu dans le disque de $\mathbb{C}$ centré en 0 et de rayon $\|T\|$, donc*

$$r(T) \leq \|T\|.$$

Exemple 3.4.1. *Soient $H = L^2([0,1],\mathbb{C})$ et l'opérateur $T : H \longrightarrow H$ défini par*

$$Tf(x) = xf(x), \quad x \in [0,1]$$

On a

$$\begin{aligned}
\|Tf(x)\|^2 &= \int_0^1 x^2 f(x)^2 dx \\
&\leq \int_0^1 |x^2||f(x)^2| dx \\
&\leq \int_0^1 |f(x)^2| dx \\
&= \|f\|^2.
\end{aligned}$$

Donc $\|T\| = 1$ de plus $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\}$.

L'équation spectrale

$$\begin{aligned}
(T-\lambda I)f(x) = 0 \quad \forall f \in H, \forall x \in [0,1] &\Rightarrow Tf(x) - \lambda f(x) = 0 \quad \forall f \in H, \forall x \in [0,1] \\
&\Rightarrow xf(x) - \lambda f(x) = 0 \quad \forall f \in H, \forall x \in [0,1] \\
&\Rightarrow (x-\lambda)f(x) = 0 \quad \forall f \in H, \forall x \in [0,1].
\end{aligned}$$

1) Si $\lambda \notin [0,1]$ alors $x - \lambda \neq 0$ car $x \in [0,1]$ la fonction $x \longrightarrow \dfrac{1}{(x-\lambda)}$ est borné sur l'intervalle $[0,1]$ et l'opérateur T par cette fonction est borné, c'est l'inverse de $T - \lambda I$.

$$\text{Donc } \rho(T) = \mathbb{C} - [0,1] \text{ et } \sigma(T) \subset [0,1].$$

2) Si $\lambda \in [0,1]$ il ya une singularité en $x = \lambda$ par conséquent $(T - \lambda I)f$ n'est pas inversible pour tous les λ (pôles en $x = \lambda$) donc

$$\sigma(T) = [0,1].$$

3) Montrons par absurde que $\sigma_p(T) = \varnothing$:Supposons qu'il existe $\lambda \in \sigma_p(T)$ tel que

$$(x-\lambda)f(x) = 0, \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1].$$

Contradiction avec la définition de vecteur propre.

$$\text{Donc } \sigma(T) = [0,1], \text{ et } r(T) = 1.$$

Théorème 3.4.1. *(Formule du rayon spectrale)*
Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors la suite $(\|T^n\|^{\frac{1}{n}})_n$ converge et on a

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Prouve *voir [10], page 39 .*

Proposition 3.4.1. *Soit H un espace de Hilbert complexe.*
Si $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathcal{L}(H)$ qui converge vers $T \in \mathcal{L}(H)$, si λ_i est un point du spectre de T_i pour tout $i \in \mathbb{N}$, si la suite $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers un point λ dans $\mathbb{C}$, alors λ appartient au spectre de T.

Démonstration. Par contraposée : si $\lambda \notin \sigma(T)$ alors, $T - \lambda I$ est inversible . Donc pour i suffisamment grand, l'opérateur borné $T_i - \lambda_i I$, qui est proche de $T - \lambda I$ est encore inversible. Donc $\lambda_i \notin \sigma(T_i)$. □

Corollaire 3.4.1. *Soit $H \neq \{0\}$ un espace de Hilbert complexe.*
L'application rayon spectral $r : \mathcal{L}(H) \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $T \longrightarrow r(T)$, est semi-continue supérieurement.

3.5 Image spectrale

Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ polynôme avec complexe coefficients

$$p(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X_k \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}.$$

Si v une sous-ensemble de $\mathbb{C}$ alors

$$p(v) = \{p(\lambda) \in \mathbb{C}, \lambda \in v\}.$$

On défini l'opérateur $P(T) \in \mathcal{L}(H)$ par la manière suivante

$$p(T) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T_k.$$

Théorème 3.5.1. *(Théorème de l'image spectrale)*
Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ et $P \in \mathbb{C}[X]$, alors on a

$$p(\sigma(T)) = \sigma(p(T)).$$

Démonstration. Par contraposé
Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et P de degré n posons $Q(T) = \lambda - p(T)$, alors $Q(T)$ admet n racines, i.e

$$Q(T) = \lambda - p(T) = c(T - \mu_1 I) \ldots (T - \mu_n I) \quad \text{où} \quad c \neq 0 \quad \text{et} \quad \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C};$$

$$\begin{aligned}
\lambda \quad \text{n'appartient pas à} \quad \sigma(p(T)) &\Leftrightarrow \lambda \in \rho(p(T)) \\
&\Leftrightarrow \lambda - p(T) \quad \text{est inversible} \quad \Leftrightarrow Q(T) \quad \text{est inversible} \\
&\Leftrightarrow c(T - \mu_1 I) \ldots (T - \mu_n I) \quad \text{est inversible} \\
&\Leftrightarrow \mu_i \quad \text{est inversible} \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\
&\Leftrightarrow \mu_i \in \rho(T) \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\
&\Leftrightarrow Q(\mu) \neq 0 \quad \forall \mu \in \sigma(T) \\
&\Leftrightarrow \lambda \neq p(\mu) \quad \forall \mu \in \sigma(T) \\
&\Leftrightarrow \lambda \quad \text{n'appartient pas à} \quad p(\sigma(T)).
\end{aligned}$$

□

Remarque 3.5.1. *En particulier*
Si $T \in \mathcal{L}(H)$ alors $p(T) = T^n \in \mathcal{L}(H)$ et on a

$$\sigma(p(T)) = \sigma(T^n) = \sigma(T)^n \quad \forall n \geq 0.$$

3.6 Propriétés spectrales de l'opérateur adjoint

Définition 3.6.1. *Soient H un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$.*
Le spectre de l'adjoint T^* est formé des complexes conjugués des éléments du spectre de T, i.e

$$\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)} = \{\overline{\lambda}, \quad \lambda \in \sigma(T)\}.$$

En effet, L'opérateur $T - \lambda I$ est inversible si et seulement si son adjoint qui est $(T - \lambda I)^* = T^* - \overline{\lambda} I$ est inversible (d'après le Théorème 2.1.6). Donc $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$.

Proposition 3.6.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ alors on a*
(i). $\rho(T^*) = \{\lambda, \quad \overline{\lambda} \in \rho(T)\}$.
(ii). Pour tout $\lambda \in \rho(T^*)$ $\quad R_\lambda(T^*) = (R_{\overline{\lambda}}(T))^*$.

Démonstration. (i) On a $\rho(T^*) = \mathbb{C} - \sigma(T^*)$ ce qui implique

$$\begin{aligned} \rho(T^*) &= \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda \notin \sigma(T^*)\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad T^* - \lambda I \quad \text{est inversible}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad T - \overline{\lambda} I \quad \text{est inversible}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad \overline{\lambda} \in \rho(T)\}. \end{aligned}$$

(ii) . Si $\lambda \in \rho(T^*)$, alors on a

$$\begin{aligned} R_\lambda(T^*) &= (T^* - \lambda I)^{-1} \\ &= ((T - \overline{\lambda} I)^*)^{-1} \\ &= ((T - \overline{\lambda} I)^{-1})^* \\ &= (R_{\overline{\lambda}}(T))^*. \end{aligned}$$

□

Proposition 3.6.2. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. L'opérateur adjoint T^* est injectif si et seulement si T est d'image dense. De plus*

$$\sigma_r(T) = \overline{Vp(T^*)} - Vp(T).$$

Autrement dit,

$$\lambda \in \sigma_r(T) \Leftrightarrow \lambda \notin \sigma_p(T) \quad et \quad \overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*).$$

Théorème 3.6.1. *Soit $S : \ell^2 \to \ell^2$ le shift défini par $S(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$, alors :*
(i). si $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| < 1$ alors λ est une valeur propre de S^*.
(ii). $\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$.

Démonstration. (i). Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| < 1$. Nous devons trouver un vecteur non nul $\{x_n\} \in \ell^2$ tel que

$$S^*(\{x_n\}) = \lambda\{x_n\}.$$

Comme $S^*(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$ (voir Exemple 2.1.2), cela signifie que nous devons trouver un $\{x_n\} \in \ell^2$ non nul tel que

$$(x_2, x_3, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots)$$

c'est-à-dire $x_{n+1} = \lambda x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Une solution à cet ensemble d'équations est $\{x_n\} = \{\lambda^{n-1}\}$ qui est non nul. De plus, comme $|\lambda| < 1$, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda^{n-1}|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{2n} < \infty,$$

donc $\{x_n\} \in \ell^2$. Ainsi $S^*(\{x_n\}) = \lambda\{x_n\}$ et donc λ est une valeur propre de S^* avec le vecteur propre $\{x_n\}$.
(ii). D'après la partie (i) On a

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \subseteq \sigma(S^*)$$

(car l'ensemble des valeurs propre est une sous-ensemble de spectre).
Donc (d'après Définition 3.6.1)

$$\{\overline{\lambda} \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \subseteq \sigma(S).$$

Cependant, à partir de l'élémentaire géométrie

$$\{\overline{\lambda} \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$$

et donc

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \subseteq \sigma(S).$$

Comme $\sigma(S)$ est fermé (par le théorème 3.2.2), alors

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\} \subseteq \sigma(S).$$

Par contre, si $|\lambda| > 1$ puis $\lambda \notin \sigma(S)$ (par le théorème 3.2.2), puisque $\|S\| = 1$.
D'où

$$\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}.$$

□

3.7 Propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints, unitaires et normaux

Proposition 3.7.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur autoadjoint.*
(i). Les valeurs propres de T sont réelles.
(ii). Deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes de T sont orthogonaux.

Démonstration. (i). Si λ est une valeur propre de T, et si x est un vecteur propre (non nul) de T de valeur propre λ, alors $T(x) = \lambda x$. de plus

$$\lambda\langle x, x\rangle = \langle T(x), x\rangle = \langle x, T(x)\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle.$$

Donc λ est réelle.
(ii). Si x_1 et x_2 deux vecteurs propres de T, associés à deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2. Alors

$$\lambda_1\langle x_1, x_2\rangle = \langle T(x_1), x_2\rangle = \langle x_1, T(x_2)\rangle = \lambda_2\langle x, x\rangle.$$

Comme λ_1 et λ_2 sont différentes alors forcément $\langle x_1, x_2\rangle = 0$.
Donc x_1 et x_2 sont orthogonaux. □

Proposition 3.7.2. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint.*
On note : $m = \inf\{\langle Tx, x\rangle, \|x\| = 1\}$ et $M = \sup\{\langle Tx, x\rangle, \|x\| = 1\}$ alors :
(i). m et M appartiennent au spectre de T.
(ii). Spectre de T est réel.
(iii). Spectre de T contenu dans l'intervalle $[m, M]$.

prouve *voir [6], page 73.*

Corollaire 3.7.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors T est positif si et seulement si son spectre $\sigma(T)$ est positif (contenu dans $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$).*

Démonstration. D'après la proposition précédente (3.7.2), On a

$$\inf\{\langle Tx, x\rangle, \|x\| = 1\} = m = \min \sigma(T).$$

Comme T est positif si et seulement si $\inf\{\langle Tx, x\rangle, \|x\| = 1\}$ est positif ou nul, le résultat en découle. □

Théorème 3.7.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur unitaire, alors*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

Démonstration. si T est unitaire, alors $\|T\| = 1$, donc d'après le théorème 3.2.2 on a

$$\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\},$$

et comme T^* est également unitaire, alors

$$\sigma(T^*) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}.$$

Cependant, $T^* = T^{-1}$ donc d'après le théorème 3.3.1 on a

$$\sigma(T) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(T^*)\} \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq 1\}.$$

Ce qui prouve le résultat. □

Proposition 3.7.3. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal. Alors le rayon spectral de T est égal à sa norme, i.e*

$$r(T) = \|T\|.$$

Démonstration. Soit d'abord A un élément auto-adjoint (hermitien), On a

$$\|A^2\| = \|A^*A\| = \|A\|^2.$$

On en déduit par récurrence que

$$\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n} \quad \forall n \geq 0$$

donc (d'après théorème 3.4.1)

$$r(A) = \|A\| \text{ (car } \|A\| = \|A^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} \text{ sous-suite de } \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \text{).}$$

Soit maintenant T un élément normal de $\mathcal{L}(H)$; par récurrence sur n, on a

$$(T^*T)^n = (T^*)^n T^n$$

donc

$$\|(T^*T)^n\| = \|T^n\|^2 \quad \text{et} \quad r(T^*T) = r(T)^2.$$

Or $A = T^*T$ est hermitien (théorème 2.1.8) , donc

$$r(T)^2 = r(T^*T) = \|T^*T\| = \|T\|^2.$$

□

Remarque 3.7.1. *En remarque que si T est auto-adjoint alors* $r(T) = \|T\| = \lim_{n\to+\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Proposition 3.7.4. *Soit* $T \in \mathcal{L}(H)$ *un opérateur normal. Alors Le spectre résiduel l'opérateur T est vide, i.e* $\quad \sigma_r(T) = \emptyset$.

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal. pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ l'opérateur $T_\lambda = T - \lambda I$ est normal (par la proposition 2.1.10) ; si λ est dans le spectre, ou bien T_λ n'est pas injectif et $\lambda \in \sigma_p(T)$, ou bien T_λ est injectif, donc à image dense et $\lambda \in \sigma_c(T)$. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] N.I. Akhiezer and I.M. Glazman, *Theory of linear Operators in Hilbert Space, New york 1993* .

[2] S. Axler, *Linear Algebra Done Right (Second Edition), 1991*.

[3] V. Agniel, *Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes (Exemples et applications), École normale supérieure de Rennes, June 10, 2017*.

[4] Z. Ammari, *Analyse microlocale et théorie spectrale (cours Master 2), perso.univ-rennes1.*

[5] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications. Masson, Paris 1983*.

[6] E. Clement et C. Dupont, *Analyse fonctionnelle, Université de Rennes 1, France, 2014-2015* .

[7] J. Charles, M. Mbekhta et H. Queffélec, *Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs : Rappels de cours et exercices corrigés. Dunod, Paris, 2010* .

[8] Bruce K. Driver, *Analysis Tools with Applications, 9 June 2003* .

[9] E. Fricain, *Analyse fonctionelle et theorie des opérateurs cours et exercices, 2009-2010* .

[10] C.S. Kubrusly, *Spectral Theory of Operators on Hilbert Spaces, University of Rio de Janeiro, Brazil, March 2012* .

[11] S. Maingot et D.Manceau, *Théorie spectrale, Université de Harve, 2011*.

[12] C. Portenier, *Analyse Fonctionnelle, Version du 28 juin 2001*.

[13] Bryan P. Rynne and Martin A. Youngson, *Linear Analysis Functional (Second Edition), © Springer-Verlag London Limited 2008*.

[14] D. Robert, *cours d'analyse Fonctionnelle, Nantes, le 20 juillet 2005* .

[15] A. Yger, *Espaces de Hilbert et Analyse de Fourier, 5 décembre 2013*.