REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Khemis Miliana

DÉPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Mathématiques et Informatique

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de master en
Mathématique

Option :

Analyse Mathématique et Applications

Thème

THÉORIE DES SEMI-GROUPES DE CONTRACTION et APPLICATION

Réalisé par :

NOURA Feriel

Les membres des jury composé de :

Encadreur	B.CHAOUCHI	Univ. Djilali Bounâama.
Examinateur 1	O.BENNICHE	Univ. Djilali Bounâama.
Examinateur 2	L. DJOUAMAI	Univ. Djilali Bounâama.

Année universitaire 2019/2020

I dédicace

Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour, le respect, la reconnaissance, c'est tous simplement que : Je dédie cette thèse de magistère à :

A Ma tendre Mère Kenza : Tu représente pour moi la source de tendresse et l'exemple de dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager. Tu as fait plus qu'une mère puisse faire pour que ses enfants suivent le bon chemin dans leur vie et leurs études.

A Mon très cher Père Abd elkader : Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours pour vous. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être. Ce travail et le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation le long de ces années.

A mon frères : Mohamed Amine.

A mes sœur :Rania,Chaima,Amina.

A tous mes cousins et cousines.

A mes très chère amis : Fatma Zahra,nesredine,Imen,leila,,Chaima,Dounia,ilhem,Halima,.

A tous mes enseignants depuis mes premières années d'études.

A tous ceux qui me sens chers et que j'ai omis de citer.

N. Feriel

II Remerciements

Au terme de la rédaction de ce travail, je tiens a remercier ALLAH le tout puissant qui m'a été donne la force pour passer a travers tous les épreuves, de courage et surtout de m'avoir muni la santé et la connaissances a élaborer ce modeste mémoire.

Toute ma gratitude a mon encadrant "Dr. Belkacem Chaouchi ", qui a encadre mon travail, pour ses judicieux conseils, l'orientation permanente et la patience qu'il m'a sacre durant toute la période de travail.

J'exprime également toute ma reconnaissance a les membres de jury pour d'avoir accepter d'évaluer ce mémoire.

Je doit aussi remercier tous mes enseignants qui ont constitue un apport considérable pour que j'atteigne ce jour surtout Mr Said .

MERCI.

III Résumé

Dans ce mémoire ,nous nous sommes intéressés a la théorie des semi groupe ,ainsi qu'a leurs applications dans la résolution de certains equation différentielle .

Mots clés : *Semi groupe,Théorème de Hille Yosida,Equation de Cauchy abstraite .*

IV Abstract

In this memory , we are interested in the theory of semi-groups, as well as their applications in the resolution of certain differential equations .

Keywords : *Semi group, Hille Yosida theorem, Abstract Cauchy equation .*

Table des matières

Motivation et position du problème

***

Introduction

Plusieurs phénomènes dans la nature peuvent être reformulés et modélisés sous forme d'une équation différentielle ordinaire ou équation aux dérivées partielles et pour résoudre ce type d'équation, les mathématiciens ont alors introduit la théorie des semi groupes.

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \alpha u \\ u(0) = x_0, \;\; x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

La fonction exponentielle ordinaire rsoud ce type de problème et on trouve que $u(t) = x_0 e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
D'autre part, elle est une solution de l'équation fonctionnelle de Cauchy :

$$f(t+s) = f(t)f(s) \text{ sous la condition } f(0) = 1$$

Cette double caractérisation de la fonction exponentielle par l'équation fonctionnelle de Cauchy et par l'équation différentielle linéaire du premier ordre a été généralisée au cadre des opérateurs .Cet généralisation a été commence a la fin de 19 ème siècle par le mathématicien Giuseppe Peano :
il cherche la solution du problème de Cauchy ,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au \\ u(0) = x_0 \end{cases}$$

où pour chaque $t \geq 0, u(t) \in \mathbb{R}^N, A$ est une $N \times N$ matrice et $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Ce problème a une solution unique pour tout $t \geq 0$. Cette solution peut être écrite comme suit :

$$u(t) = e^{At} x_0$$

Notons que

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

avec $A^0 = I_{N\times N}$ la matrice identité et on a

$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{AA}$$

Ensuite, les mathématiciens ont étendu ce résultat au Équation différentielle operatorielle,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au(t), t \geq 0 \\ u(0) = x_0 \in E \end{cases} \qquad (P)$$

où A est un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach. La solution de ce problème est sous la forme,

$$u(t) = u(t) = e^{At}x_0.$$

Entre les années 1930 et 1948 les mathématiciens posent la question suivante :

" **Est-ce qu'on peut définir une solution exponentielle pour le même type de problème lorsque A est un opérateur non borné dans un espace de Banach ?** "

Il faudrait donc trouver une not ion analogue de la fonction exponentielle qui permet de considérer des opérateurs non bornes. C'est la notion de semi groupe basée sur les propriétés algébriques de l'exponentielle couplées avec une propriété de continuité.

La solution u du problème (P) peut se présenter sous la forme :

$$u(t) = T(t)x_0, (T(t))_{t\geq 0}.$$

Est alors une famille d'opérateurs dépendants du temps t dite semi groupe et qui vérifie les propriétés suivantes :

- $T(0) = I_{\mathcal{L}(E)}$,
- $T(t+s) = T(t)T(s)$ pour tous $t, s \in \mathbb{R}^+$.

"**Je salue un semi groupe lorsque je vois un, et il me semble les voir partout !**"

Plan de travail :

Dans ce travail on présente trois chapitres :

le premier chapitre se compose de connaissance , les éléments de base de cette théorie ,

le second chapitre, : Ce chapitre est consacré aux théorie du semi-groupe ,les définitions ,les théorèmes et les caractéristique des semi groupes,

le dernier chapitre, : : Dans ce chapitre nous étudions des différents types de problème de Cauchy abstrait.

Chapitre 1

Quelques notions et résultats préliminaires

***

Ce chapitre est consacré aux rappels de quelques définitions et résultats qui seront utilisés dans la suite.

1.1 Opérateurs linéaires

Soient E et F deux espaces de Banach Complexes

1.1.1 Généralités

Définition 1

• Une application linéaire A définie d'un sous-espace vectoriel $\mathcal{D}(A) \subset E$ a valeurs dans F est appelée opérateur linéaire de E dans F.
• On appelle $\mathcal{D}(A)$ le domaine de A et pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, on note $A(x)$ par Ax.
• Lorsque $F = E$, A est dite opérateur linéaire sur E.

Définition 2

Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to F$ un opérateur linéaire .

• On appelle graphe de A le sous-espace vectoriel de $E \times F$, note $\mathcal{G}(A)$ et défini par :

$$\mathcal{G}(A) := \{(x, y) \in E \times F / x \in \mathcal{D}(A), y = Ax\} = \{(x, Ax) \in E \times F / x \in \mathcal{D}(A)\}.$$

• On appelle image de A le sous-espace vectoriel de F, note $\mathrm{Im}(A)$ par défini par

$$\mathrm{Im}(A) := \{y \in F / \exists x \in \mathcal{D}(A), y = Ax\} = \{Ax \in F / x \in \mathcal{D}(A)\}.$$

• On appelle noyau de A le sous-espace vectoriel de E , note $\ker(A)$ et défini par

$$\ker(A) := \{x \in \mathcal{D}(A) / Ax = 0\}.$$

• On dit que A est a domaine dense si $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$.

Définition 3

Considérons A et B deux opérateurs linéaires sur E. L'opérateur AB est défini par :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(AB) = |x \in \mathcal{D}(B) : Dx \in D(A)\} \\ (AB)x = A(Bx) \quad \forall x \in \mathcal{D}(B) \end{cases}$$

On définit alors, A^n, $n \in N$ la puissance n-ieme de A par

$$\begin{cases} \mathcal{D}\left(A^0\right) = E \quad \text{et} A^0 = I \\ \mathcal{D}\left(A^1\right) = \mathcal{D}(A) \quad \text{et} A^1 = A \\ \forall n \geq 2 \quad \mathcal{D}\left(A^n\right) = \left\{x \in \mathcal{D}\left(A^{n-1}\right) : A^{n-1}x \in \mathcal{D}(A)\right\} \text{et} A^n = AA^{n-1} \end{cases}$$

Définition 4

Soit A un opérateur linéaire sur E. Si A est injectif, on définit l'opérateur A^{-1}par

$$A^{-1} : \operatorname{Im}(A) \longrightarrow E$$
$$y \longmapsto A^{-1}y = x$$

ou $x \in \mathcal{D}(A)$ est défini par $Ax = y$ .Notons que $\operatorname{Im}\left(A^{-1}\right) = \mathcal{D}(A)$

1.1.2 Opérateurs linéaires bornes

Définition 5

Soit $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. On dit que l'opérateur A est borné s'il existe $k > 0$ tel que :

$$\|Ax\|_F \leqslant k\|x\|_E, \forall x \in E$$

Définition 6

• Soit A un opérateur linéaire de E dans F. On dit que A est continu si $\mathcal{D}(A) = E$ et s'il borné .
• L'espace des opérateurs linéaires bornes de E dans F est note par $\mathcal{L}(E, F)$. • Si $E = F$ on pose $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$.

proposition 1.1

Soit A un opérateur linéaire défini de E dans F. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $A \in \mathcal{L}(E, F)$.
- $\forall x_0 \in E$, $\lim\limits_{x \to x_0} \|Ax - Ax_0\|_F = 0$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \|Ax\|_F = 0$.

Définition 7

Soit $A \in \mathcal{L}(E,F)$. On définit la norme de A comme suit :

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \inf\{c > 0, \|Ax\|_F \leq c\|x\|_E, \forall x \in E\}.$$

L'espace $\mathcal{L}(E,F)$ muni de la norme $\|.\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ est un espace de Banach.

Définition 8

Soit $A : E \to E$ un opérateur linéaire .
On dit que A est inversible s'il existe $A' \in L(E)$ tel que

$$AA' = A'A = I,$$

ou I est l'opérateur identité sur E. Cet opérateur A' s'il existe il est unique, on appelle inverse de A , et on le note A^{-1}.

proposition 1.2

Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, si $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$, alors
- $(I - A)$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$,
- $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$.

1.1.3 Opérateurs linéaires fermés

Dans cette partie, on présentera une classe plus large d'opérateurs linéaires que celle des opérateurs linéaires bornés. Il s'agit des opérateurs linéaires fermés. On donnera aussi quelques éléments de la théorie spectrale.

Définition 9

Soit A un opérateur linéaire de E dans F. A est dite fermé si son graphe est ferme dans $E \times F$.
Notons qu'un opérateur linéaire borné est un opérateur linéaire ferme .
L'espace des opérateurs fermes de E dans F est note par $\mathcal{F}(E,F)$.
La proposition suivante donne une caractéristique des opérateurs linéaires fermes .

proposition 1.3

Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to F$ un opérateur linéaire. A est ferme si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'élément de $\mathcal{D}(A)$ telle que

$$\begin{cases} x_n \to x, \mathrm{dans} E \\ Ax_n \to y, \mathrm{dans} F \end{cases}$$

on a $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$

proposition 1.4

Soient A et B deux opérateurs linéaires sur E . On a

- Si B est borné alors B est fermé.

- Si A est fermé et B est borné, alors $A+B$ est fermé.

- Si A est fermé et B est borné ,alors AB est fermé .

1.1.4 Ensemble résolvant, spectre et résolvante d'un opérateur linéaire

Définition 10

Soit A un opérateur linéaire sur E.

- L'ensemble résolvant de A, noté $\rho(A)$, est défini par

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathcal{L}(E)\}$$

- Si $\lambda \in \rho(A)$,on définit la résolvante $R(\lambda, A)$ de A au point λ par

$$R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$$

- Le spectre de A , noté $\sigma(A)$,est défini par

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A).$$

proposition 1.5

Soit $A : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset E \to F$ un opérateur linéaire. Alors ,pour tous $\lambda, \mu \in \rho(A)$,on a

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A).$$

Démonstration 1.1

De la définition de la résolvante ,on a :

$$(\lambda, R(\lambda, A) - AR(\lambda, A))R(\mu, A) = R(\mu, A)$$

et

$$(\mu R(\mu, A) - AR(\mu, A))R(\lambda, A) = R(\lambda, A)$$

En faisant la différence des deux égalités et compte tenu du fait que

$$R(\lambda, A)R(\mu, A) = R(\mu, A)R(\lambda, A).$$

On obtient

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A).$$

1.2 Quelques théorèmes d'analyse fonctionnelle

Le théorème de Banach Steinhaus est l'un des théorème fondamentaux en analyse fonctionnelle il affirme qu' à partir d'une estimation ponctuelle on obtient une estimation uniforme.

Théorème 1.1: (Banach-Steinhaus)

Soient E et F deux espaces de Banach . Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaire continue de E dans F . On suppose que

$$\sup_{i\in I}\|A_i x\| < +\infty, \forall x \in E$$

Alors

$$\sup_{i\in I}\|A_i\| < +\infty.$$

Théorème 1.2: (Théorème du graphe ferme)

Soient E et F deux espaces de Banach .Soit A un opérateur linéaire ferme de E dans F. Si $\mathcal{D}(A) = E$, alors $A \in \mathcal{L}(E, F)$.

.

Chapitre 2

Semi-groupes a un paramètre d'opérateurs linéaires bornes

***

Dans ce chapitre on donnera les définitions des semi groupes d'opérateurs linéaires bornés, ainsi que leurs générateurs infinitésimaux. On donnera aussi quelque propriétés et résultats concernant ces notions.

2.1 Semi-groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornes :

2.1.1 Semi-groupe :

Définition 11

Soit E est un espace de Banach.
$(T(t))_{t \geqslant 0}$ est une famille d'opérateurs linéaires bornés de E dans E est dite semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur E, si sont vérifies les axiomes suivantes :

- $T(0) = I$ (ou I est l'opérateur identité de E).

- $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall t, s \geqslant 0$.

Exemple 01

Une equation différentielle :

Soit $k \in \mathbb{C}$ et $x_0 \in \mathbb{C}$, on considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'(t) + ky(t) = 0, & t > 0, \\ y(0) = x_0, \end{cases}$$

dont la solution est $y(t) = e^{-kt} x_0$

$$E = \mathbb{C}, \quad T(t) : x_0 \to \left(e^{-kt}\right) \cdot x_0$$

• on remarque ici que $T(t)$ définit un semi groupe, $T(t)$est la multiplication e^{-kt}.

Exemple 02

Un système différentiel :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $X_0 \in \mathbb{C}^n$ on considère :

$$\begin{cases} Y'(t) + AY(t) = 0 \quad t > 0 \\ Y(0) = X_0 \end{cases}$$

Alors $Y(t) = e^{-tA}X_0$,

Posons $T(t) = e^{-tA} \quad \left(= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-tA)^k}{k!}\right)$.

$$E = \mathbb{C}^n \quad \text{et} \quad e^{-tA} \in \mathcal{L}(E)$$

• On remarque que $T(t)$ forme un semi groupe.

Exemple 03

Une équation abstraite :

Soit E un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(E)$ et $x_0 \in E$.
L'équation différentielle :

$$\begin{cases} x'(t) + Ax(t) = 0 \quad t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

a une unique solution

$$x(t) = e^{-tA}x_0$$

où $e^{-tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-tA)^k}{k!}$.

Propriétés immédiates : pour les exemples 2 et 3 :

• $\forall x_0, x_0 \in E \quad \lim_{t\to 0_+} T(t)x_0 = x_0$ dans E.

• $\forall x, x \in E, \forall t_0 \geq 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0_+} \frac{T(t_0+h)x - T(t_0)x}{h} &= T(t)Ax \\ &= AT(t_0)x \end{aligned}$$

$\Longrightarrow AT(t) = T(t)A$, ces propriétés seront étudier ultérieurement .

Exemple 04

▌ **Translation à droite** :

$E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, pour $u_0 \in E$ et $t \geq 0$ on pose :

$$(T(t)u_0)(x) = u_0(x+t)$$

On a

$$T(0)u_0 = u_0, \quad T(t+s)u_0 = T(t)\left[T(s)u_0\right]$$

.

Exemple 05

▌ **Translation à droite et transport** :

$$displaystyle \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}; \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{donnée} \end{cases}.$$

la solution est :

$$u(x,t) = u_0(x+t) = T(t)u_0$$

- $\cdot\{T(t)\}$ est bien défini sur $E = \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$.
- si $u_0 \in E$ "comment" $T(t)u_0$ est solution de (4)?.
- Si $u_0 \in E$ et $\frac{du_0}{dx} \in E$.

Exemple 06

▌ **L'équation de chaleur** :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}; \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{donnée} \end{cases}$$

avec par exemple $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ pour simplifier.
En faisant une transformation de Fourier en x seulement on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi,t) + \xi^2 \hat{u}(\xi,t) = 0 \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases}$$

.

d'où $\hat{u}(\xi,t) = e^{-t\xi^2}\hat{u}_0(\xi)$ et par Fourier inverse :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y)dy = K_t * u_0$$

En posant $T(t)u_0 = u(x,t).T(t)$ est un semi-groupe.

Définition 12

Soit $\{T(t), t \geq 0\}$ un semi-groupe défini sur un espace de Banach E.

- On dira qu'il est uniformément continu si :

$$\lim_{t \to 0_+} \|T(t) - \mathcal{I}d\|_{\mathcal{L}(E)} = 0.$$

- On dira qu'il est fortement continu si :

$$\forall x, x \in E \quad \lim_{t \to 0_+} \|T(t)x - x\|_E = 0.$$

2.1.2 générateurs infinitésimal :

Définition 13

Soit $\{T(t), t \geq 0\}$ un semi-groupe défini sur un espace de Banach E.

- L'opérateur linéaire A défini par :

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in E, \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe dans } E \right\},$$

et

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{\mathrm{d}T(t)x}{\mathrm{d}t} \right|_{t=0}, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)$$

est appelé le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t \geqslant 0}$ et $\mathcal{D}(A)$ est appelé le domaine de A.

Dans ce paragraphe, nous allons étudier quelques propriétés des semi-groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés.

Lemme 1

Soit $f : [a, b] \longrightarrow E$ une fonction continue,alors :

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s) ds = f(a).$$

Démonstration

On va montre que pour tout $t \neq 0$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s) ds - f(a) = 0.$$

Alors, il suffit de montre que :

$$\left\|\frac{1}{t}\int_a^{a+t} f(s)\mathrm{d}s - f(a)\right\| = \left\|\frac{1}{t}\int_a^{a+t} f(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{t}\int_a^{a+t} f(a)\mathrm{d}s\right\|$$

On a :

$$= \left\|\frac{1}{t}\int_a^{a+t} (f(s) - f(a))\mathrm{d}s\right\|$$

$$\leqslant \frac{1}{t} \times \sup_{s\in[a,a+t]} \|f(s) - f(a)\| \times t$$

$$= \sup_{s\in[a,a+t]} \|f(s) - f(a)\|$$

et de la continuité de f nous permet de conclure .

Théorème 2.1

Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu sur E si, et seulement si A est un opérateur linéaire borné sur E et $T(t) = e^{tA}$.

Démonstration 2.1

$\Longleftarrow$ *Soit A un opérateur linéaire borné sur E. On suppose que le semi groupe générer par A est donne par :*

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Cette série, ainsi définie, converge en norme et définit un opérateur linéaire borne $T(t)$ pour tout $t > 0$.

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ admet un sens. Il est clair que $T(0) = I$, et on a pour tous $t, s \geqslant 0$

$$T(t+s) = e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} = T(t)T(s)$$

(d'après la formule de Cauchy de produit de deux série) ,

donc $T(t)$ est un semi groupe .

il reste de montrer que $T(t)$ es uniformément continue :

Par ailleurs, pour tout $t > 0$ on a :

$$\begin{aligned}\|T(t)-I\| &= \|\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^nA^n}{n!}-I\| \\ &= \left\|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^nA^n}{n!}\right\| \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}t^n\frac{\|A\|^n}{n!} \\ &= e^{t\|A\|}-1 \underset{t\to 0^+}{=} 0\end{aligned} \quad .$$

d'où $\lim_{t\to 0^+}\|T(t)-I\|=0$.

D'autre part, pour tout $t>0$ *on a :*

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T(t)-I}{t}-A\right\| &= \left\|\frac{e^{tA}-I}{t}-A\right\| \\ &= \left\|\frac{e^{tA}-I-tA}{t}\right\| \\ &= \left\|\frac{1}{t}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{t^nA^n}{n!}\right\| \\ &\leqslant \frac{1}{t}\sum_{n=2}^{+\infty}t^n\frac{\|A\|^n}{n!} \\ &= \frac{1}{t}\left(e^{t\|A\|}-1-t\|A\|\right)\underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{T(t)-I}{t}=A$.
Ainsi, $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *est un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur* X *de générateur infinitésimal* A.

$\Rightarrow$ *Réciproquement, soit* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur* E*, de générateur infinitésimal* A.

L'application $\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathcal{L}(E), t\longmapsto T(t)$ *est continue, donc* $\int_0 T(s)\mathrm{d}s\in\mathcal{L}(E),\forall t\geqslant 0$.

D'après lemme 1 on a $\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)\mathrm{d}s=T(0)=I$.

Il existe alors $\rho>0$ *tel que* $\left\|\frac{1}{\rho}\int_0^\rho T(s)\mathrm{d}s-I\right\|<1$*, ce qui implique que* $\frac{1}{\rho}\int_0^\rho T(s)\mathrm{d}s$ *est inversible, et donc* $\int_0^\rho T(s)\mathrm{d}s$ *est aussi inversible.*

Pour tout $h>0$ *on a :*

$$\begin{aligned}\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)\left(\int_0^\rho T(s)\mathrm{d}s\right) &= \frac{1}{h}\left(\int_0^\rho (T(h+s)-T(s))\mathrm{d}s\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_h^{\rho+h}T(s)\mathrm{d}s-\int_0^\rho T(s)\mathrm{d}s\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_\rho^{\rho+h}T(s)\mathrm{d}s-\int_0^h T(s)\mathrm{d}s\right)\end{aligned}$$

Donc, $\frac{T(h)-I}{h} = \left(\frac{1}{h}\int_{\rho}^{\rho+h} T(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)\mathrm{d}s\right)\left(\int_0^{\rho} T(s)\mathrm{d}s\right)^{-1}$.

Compte tenu du lemme 1, on obtient $\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)-I}{h} = (T(\rho)-I)\left(\int_0^{\rho} T(s)\mathrm{d}s\right)^{-1}$ *Ainsi, le générateur infinitésimal du semi-groupe* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *est l'opérateur linéaire borné*

$$A = (T(\rho)-I)\left(\int_0^{\rho} T(s)\mathrm{d}s\right)^{-1}.$$

Remarque :

De la définition 2, on voit bien qu'un semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ admet un unique générateur infinitésimal. Si $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est uniformément continu alors son générateur infinitésimal est un opérateur linéaire borné. D'autre part, tout opérateur linéaire borné est le générateur infinitésimal d'un semigroupe uniformément continu. Ce semi-groupe est t-il unique ? La réponse affirmative est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.2

Soient $(T(t))_{t\geqslant 0}$ et $(S(t))_{t\geqslant 0}$ deux semi-groupes uniformément continus. Si :

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)-I}{t} = A = \lim_{t\to 0^+}\frac{S(t)-I}{t}$$

alors $T(t) = S(t), \forall t \geqslant 0$

Démonstration 2.2

Montrons que pour tout $a > 0, T(t) = S(t)$ *pour* $t \in [0, a]$.

Soit $a > 0$ *fixé. Comme* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *et* $(S(t))_{t\geqslant 0}$ *sont des semi-groupes uniformément continus, alors les applications* $t \longmapsto \|T(t)\|$ *et* $t \longmapsto \|S(t)\|$ *sont continues.*

Il existe alors une constante $C_a > 0$ *telle que* $\|T(t)\|\|S(t)\| \leqslant C_a, \forall t, s \in [0, a]$.

Soit $\varepsilon > 0$. *L'égalité (1) implique qu'il existe* $\delta > 0$ *tel que pour* $0 < h \leqslant \delta$, *on ait*

$$\left\|\frac{T(h)-I}{h} - A\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2aC_a} \quad \textit{et} \quad \left\|\frac{S(h)-I}{h} - A\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2aC_a}$$

Ce qui entraine alors que pour $0 < h \leqslant \delta$, *on a :*

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T(h)-S(h)}{h}\right\| &= \left\|\frac{T(h)-I}{h} - A\right\| + \left\|\frac{S(h)-I}{h} - A\right\| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{aC_a}\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. *L'égalité (1) implique qu'il existe* $\delta > 0$ *tel que pour* $0 < h \leqslant \delta$, *on ait*

$$\left\|\frac{T(h)-I}{h} - A\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2aC_a} \quad \textit{et} \quad \left\|\frac{S(h)-I}{h} - A\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2aC_a}$$

Soient $t \in [0, a]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{t}{n} < \delta$. De la définition 1.1 et de l'inégalité précédente il vient que :

$$\begin{aligned}
\|T(t) - S(t)\| &= \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \left[T\left((n-k)\frac{t}{n}\right) S\left(k\frac{t}{n}\right) - T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) S\left((k+1)\frac{t}{n}\right) \right] \right\| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k)\frac{t}{n}\right) S\left(k\frac{t}{n}\right) - T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) S\left((k+1)\frac{t}{n}\right) \right\| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) T\left(\frac{t}{n}\right) S\left(k\frac{t}{n}\right) - T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) S\left(k\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) \right\| \left\| S\left(k\frac{t}{n}\right) \right\| \left\| T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \\
&\leqslant C_a \frac{t}{n} \frac{\varepsilon}{a C_a} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \varepsilon \frac{t}{a} \leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors $T(t) = S(t), \forall t \in [0, a]$. Mais puisque $a > 0$ est aussi arbitraire, il s'ensuit que $T(t) = S(t), \forall t \geqslant 0$.

proposition 2.1

Soit $(T(t))_{t \geqslant 0}$ un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés. Alors :

- Il existe une constante $\omega \geqslant 0$ telle que :

$$\|T(t)\| \leqslant e^{\omega t}, \forall t \geqslant 0.$$

- Il existe un opérateur linéaire borné A tel que $T(t) = e^{tA}, \forall t \geqslant 0$.

- L'opérateur A de l'assertion 2) est le générateur infinitésimal du semi-groupe ($T(t)$)) $_{t \geqslant 0}$.

- L'application $t \longmapsto T(t)$ est différentiable et on a

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A.$$

Démonstration 2.3

Toutes les assertions ci-dessus découlent de l'assertion 2). Pour montrer 2) notons que puisque $(T(t))_{t \geqslant 0}$ est un semi-groupe uniformément continu son générateur infinitésimal

A est un opérateur linéaire borné et est aussi le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $\left(e^{tA}\right)_{t\geqslant 0}$ et par le théorème 2.2 on obtient

$$T(t)=e^{tA}, \quad \forall t \geqslant 0.$$

.

2.2 C_0- semi-groupes d'opérateurs linéaires bornes

Définition 14

Un semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X est dit fortement continu si

$$\lim_{t\to 0^+}\|T(t)x-x\|=0, \forall x\in X$$

Un semi-groupe fortement continu sur X est aussi appelé $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe sur X

Dans ce paragraphe, nous allons étudier quelques propriétés des semi-groupes fortement continus d'opérateurs linéaires bornes.

Théorème 2.3

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0 -semi-groupe de l'opérateur linéaire A. Alors il existe deux constantes $\omega\geq 0$ et $M\geq 1$ telle que :

$$\|T(t)\|\leq Me^{\omega t} \quad \text{pour tout} \quad 0\leq t<\infty.$$

Dans ce cas on dit que $(T(t))_{t\geq 0}$ exponentiellement borné et on note l'ensemble des C_0-semi-groupe exponentiellement bornés par $SG(M,\omega)$.

Démonstration 2.4

On montre dans un premier temps que :

$$\sup_{t\in[0,\eta]}\|T(t)\|<+\infty$$

Procédons par l'absurde : i.e : $\forall \eta=\frac{1}{n}\in(0,1]$ *avec* $n\in\mathbb{N}$:

$$\sup_{t\in[0,\eta]}\|T(t)\|=+\infty,$$

Il s'ensuit que : $\forall n\in\mathbb{N}, \exists t_n\in\left[0,\frac{1}{n}\right]$ *tel que*

$$\sup_{n\geq 1}\|T(t_n)\|=+\infty$$

En vertu du théorème $(Banach-Steinhaus), \exists x\in X$

$$\sup_{n\geq 1}\|T(t_n)x\|=+\infty.$$

Alors $\|T(t_n)x\|$ *est non borné.*

D'autre part : $\forall x \in X, \mathbb{R} \ni t \longrightarrow T(t_n)x \in X$ *est continue en* 0, *on a :* $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |t| < \delta \Rightarrow \|T(t)x - x\| < \epsilon$ *En particulier ; soit* $\epsilon = 1$, *alors :*

$$\|T(t)x - x\| < 1$$

Nous obtenons donc les estimations suivantes :

$$\|T(t)x\| - \|x\| \leq \|T(t)x\| - \|x\| \,| \leq \|T(t)x - x\| < 1$$

Donc

$$\|T(t)x\| \leq \|x\| + 1$$

Mais on a :

$$0 \leq t_n \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad t_n \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

On trouve $\epsilon = \delta$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : |t_n| < \delta \quad ; \quad \forall n > n_0$$

Ainsi

$$\|T(t_n)x\| \leq 1 + \|x\|; \quad n > n_0$$

Il s'ensuit que :

$$\sup_{n \geq n_0} \|T(t_n)x\| \leq 1 + \|x\|; \quad n > n_0 \tag{2.1}$$

Soit $n = 1, 2, \ldots, n_0 - 1$, *il n'ya qu'un nombre fini de* $T(t)x$ *Soit* $M^* := \max \|T(t_n)x\|, n = 1, 2, \ldots, n_0 - 1$ *alors :*

$$\sup_{n \geq 1} \|T(t_n)x\| \leq M^* \tag{2.2}$$

pour $n = 1, 2, \ldots, n_0 - 1$ *D'aprés (2.1) et (2.2) on a :*

$$\sup_{n \geq 1} \|T(t_n)x\| \leq 1 + \|x\| + M^*$$

En contradiction

$$\exists \eta \in (0, 1] : \sup_{t \in [0,\eta]} \|T(t)\| < +\infty.$$

Soit $M := \sup_{t \in [0,n]} \|T(t)\|$, *depuis* $\|T(0)\| = 1$ *ainsi* $M \geq 1$ *Soit* $\omega = \eta^{-1} \log M$. *On prend* $t \geq 0$ *avec* $t > \eta$; *on a :* $t = n(t)\eta + \delta$, *si* $0 \leq \delta \leq \eta$ *et* $n(t) \in \mathbb{N}$ *D'après la propriété du semi-groupe :*

$$\begin{aligned}
\|T(t)\| = \left\|T(\eta)^{n(t)} T(\delta)\right\| &\leq \left\|T(\eta)^{n(t)}\right\| \|T(\delta)\| \\
&= MM^{n(t)} = MM^{\frac{t-s}{\eta}} \\
&\leq MM^{\frac{t}{\eta}} = Me^{\omega\eta\frac{t}{\eta}} = Me^{\omega t}
\end{aligned}$$

Théorème 2.4

Si$(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0 -semi-groupe. Alors $\forall x \in X, t \longrightarrow T(t)x$ est continue de $\mathbb{R}^+$ dans X.

Démonstration 2.5
Soit $t_0 > 0, x \in X$, *Nous voulons montrer que :*

$$\lim_{t\to t_0} T(t)x = T(t_0)\, x,$$

Si : $t > t_0$

$$T(t)x - T(t_0)\, x = T(t_0)\, [T(t-t_0)\, x - x]$$
$$\|T(t)x - T(t_0)\, x\| \leq \|T(t_0)\|\, \|T(t-t_0)\, x - x\| \to 0 \quad \textit{quand } t \to t_0$$

Alors

$$\lim_{t\to t_0^+} T(t)x = T(t_0)\, x.$$

Si $t < t_0$

$$\begin{aligned}\|T(t)x - T(t_0)\, x\| &\leq \|T(t)\,[T(t_0-t)\, x - x]\| \\ &\leq \|T(t)\|\, \|T(t_0-t)\, x - x\| \\ &\leq Me^{wt}\, \|T(t_0-t)\, x - x\| \to 0 \quad \textit{quand} \quad t \to t_0\end{aligned}$$

alors

$$\lim_{t\to t_0^-} T(t)x = T(t_0)\, x,$$

Ainsi

$$\lim_{t\to t_0} T(t)x = T(t_0)\, x.$$

Théorème 2.5

Soit $(T(t))_{l\geq 0}$ un C_0 -semi-groupe et A son générateur infinitésimal alors :

- Pour $x \in X$, on a :
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x \tag{2.3}$$
- Pour $x \in X, \int_0^t T(s)xds \in D(A)$ et
$$A\left(\int_0^t T(s)xds\right) = T(t)x - x \tag{2.4}$$
- Pour $x \in D(A), T(t)x \in D(A)$ et
$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax \tag{2.5}$$
- Pour $x \in D(A)$
$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_S^t AT(\tau)xd\tau \tag{2.6}$$

Démonstration 2.6
a) Soit $x \in X$ et $h > 0$; on a :

$$\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - T(t)x\right\| = \left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t)xds\right\|$$
$$\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|T(s)x - T(t)x\|ds$$

En faisant un changement variable ; soit $u + t = s, du = ds$; si $s = t$ alors $u = 0$ et sis $= t + h$ alors $u = h$

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|T(s)x - T(t)x\|ds \leq \frac{1}{h}\int_0^h \|T(u+t)x - T(t)x\|du$$

comme u est une variable muette ; on peut écrire :

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|T(s)x - T(t)x\|ds = \frac{1}{h}\int_0^h \|T(s+t)x - T(t)x\|ds$$

.

D'aprés le Théorème 2.3 L'application le $\mathbb{R}^+$ dans X ie : gour chaque $\epsilon > 0, \exists\delta > 0$ tel que $|$ t on prend $h = t_0 - t$; on peut écrire la wivante : $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$ tel que $|h|$

$$\frac{1}{h}\int_0^h \|T(t)x - T(t+$$

Donc on peut l'écrire comme suit :

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|T(s)x - T(t)x\|ds.$$

b) Soit $x \in X$ *et* $h > 0$

$$\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)xds = \frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds$$

$$= \frac{1}{h}\int_h^{h+t} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds.$$

$u = s+h; ds = du;$ *si* $s = 0$ *alors* $u = h$ *et si* $s = t$ *alors* $u = t+h$

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int_h^{h+t} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds &= \frac{1}{h}\int_h^t T(s)xds + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds \\ &- \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\ &= \frac{1}{h}\int_h^0 T(s)xds + \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \quad . \\ &+ \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds\end{aligned}$$

c) Soit $x \in D(A)$ *et* $h > 0$ *alors :*

$$\begin{aligned}\frac{T(h)-I}{h}T(t)x &= \frac{T(h+t)-T(t)}{h}x \\ &= T(t)\frac{T(h)-I}{h}x \longrightarrow T(t)Ax \quad \text{quand } h \to 0.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Ainsi $T(t)x \in D(A)$ *et* $AT(t)x = T(t)Ax$ *L'expression (2.7) implique aussi que :*

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$$

ie :la dérivée droite de $T(t)x$ *est* $T(t)Ax$ *pour achevés la démonstration il faut montrer que : pour* $t > 0$ *la dérivée gauche de* $T(t)x$ *existe et équivalente à* $T(t)Ax \cdot x \in X$, *on a :*

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax\right] = \lim_{h\to 0} T(t-h)\left[\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right]$$

$$+ \lim_{h\to 0}[T(t-h)Ax - T(t)Ax].$$

d) En intégrant de s *et* t *l'expression (2.5) donc on trouve la relation (2.6).*

corollaire 2.1

Si A est un générateur d 'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t>0}$ alors :

- $D(A)$ le domaine de A est dense dans X .
- A est un opérateur linéaire fermé.

Démonstration 2.7

• *Soit* $x \in X$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *posons* $x_n = \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_0^{\frac{1}{n}} T(s)x\mathrm{d}s$.

D'après l'assertion 2) du théorème 2.5 on a $x_n \in \mathcal{D}(A), \forall n \in \mathbb{N}^*$ *et par l'assertion 1) du même théorème on a,*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_0^{\frac{1}{n}} T(s)x\mathrm{d}s = x$$

Ainsi, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$

• *D'abord* A *est un opérateur linéaire. Soit* $(x_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{D}(A)$ *telle que* $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ *et* $Ax_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$. *Montrons que* $x \in \mathcal{D}(A)$ *et que* $Ax = y$.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathcal{D}(A)$, *alors d'après la formule* (2.6) *on a*

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n\mathrm{d}s, \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \geqslant 0 \tag{2.8}$$

Soit $t > 0$. *Alors pour tout* $s \in [0,t]$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a*

$$\begin{aligned} \|T(s)Ax_n - T(s)y\| &= \|T(s)\left(Ax_n - y\right)\| \\ &\leqslant \|T(s)\| \, \|Ax_n - y\| \\ &\leqslant Me^{\omega t} \|Ax_n - y\| \end{aligned}$$

Donc $(T(s)Ax_n)_{n\geqslant 0}$ *converge quand* $n \to +\infty$ *vers* $T(s)y$ *uniformément en* $s\,\mathrm{sur}[0,t]$ *Il vient alors de l'égalité (2.8) et du théorème d'interversion de la limite et l'intégrale que :*

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\mathrm{d}s.$$

Donc $\dfrac{T(t)x - x}{t} = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t T(s)y\mathrm{d}s \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} y.$

Ainsi $x \in \mathcal{D}(A)$ *et* $Ax = y$.

Théorème 2.6

Soient $(T(t))_{t\geq 0}$ et $(S(t))_{t\geq 0}$ deux $\mathcal{C}_0$ -semi-groupes ayant pour générateur infinitésimal le même opérateur A. Alors

$$T(t) = S(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Démonstration 2.8
Soient $t > 0$ et $x \in \mathcal{D}(A)$. On définit l'application suivante sur $[0, t]$ par :

$$U(s)x := T(t-s)S(s)x \in \mathcal{D}(A)$$

On a :

$$\frac{d}{ds}U(s)x = \frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}S(s)x$$

$$= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)AS(s)x$$

$$= 0$$

Ce qui entraine alors que pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, la fonction

$$s \mapsto U(s)x := T(t-s)S(s)x$$

est constante.
Remarquons que $T(t)x$ et $S(t)x$ représentent les valeurs de la fonction précédente pour $s = 0$ et $s = t$ respectivement.

Et puisqu'elle est constante, alors $T(t)x$ coïncide avec $S(t)x$. Par suite,

$$T(t)x = S(t)x \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathcal{D}(A)$$

Comme $\mathcal{D}(A)$ est dense dans X et $T(t), S(t)$ sont des opérateurs bornés sur X, alors

$$T(t) = S(t) \quad \forall t \geq 0$$

2.3 Théorème de Hille Yoisida :

Dans cette section on donne le théorème de Hill-Yosida qui est un résultat très important qui nous aide à trouver tous les générateurs infinitésimaux d'un semi groupe fortement continu unique.

Nous allons commencer tout d'abord par introduire quelques notions et résultats intermédiaires.

2.3.1 Prelimenaire :

Lemme 2

Soit $(T(t))_{t \geqslant 0}$ un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe sur E de générateur infinitésimal A et soit V un opérateur linéaire borné sur E, i.e., $V \in \mathcal{L}(E)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $T(t)V = VT(t), \forall t \geqslant 0.$
- $V\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$ et $AVx = VAx, \forall x \in \mathcal{D}(A).$

Démonstration 2.9

1) ⇒ 2

Soit $V \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $T(t)V = VT(t), \forall t \geqslant 0.$

Soit $x \in \mathcal{D}(A)$, *alors on a :*

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)Vx - Vx}{t} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{VT(t)x - Vx}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} V\left(\frac{T(t)x - x}{t}\right) = VAx\end{aligned}$$

Donc $Vx \in \mathcal{D}(A)$ *et* $AVx = VAx$.

2) ⇒ 1

Soit $V \in \mathcal{B}(X)$ *tel que* $V\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$ *et* $AVx = VAx, \forall x \in \mathcal{D}(A)$.

Pour tous $t \geqslant 0$ *et* $x \in \mathcal{D}(A)$ *définissons la fonction :*

$s \ni [0,t] \longmapsto W(s) = T(t-s)VT(s)x \in \mathcal{D}(A).$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W(s)}{\mathrm{d}s} &= -AT(t-s)VT(s)x + T(t-s)VAT(s)x \\ &= -T(t-s)AVT(s)x + T(t-s)VAT(s)x \\ &= -T(t-s)VAT(s)x + T(t-s)VAT(s)x = 0\end{aligned}$$

Donc W *est constante, et par conséquent* $W(0) = W(t)$.

D'où $T(t)Vx = VT(t)x, \forall t \geqslant 0, \forall x \in \mathcal{D}(A)$.

Comme $\overrightarrow{\mathcal{D}(A)} = X$ *et* $T(t)V$ *et* $VT(t)$ *sont continues alors*

$$T(t)V = VT(t), \forall t \geqslant 0.$$

Théorème 2.7

Soit $(T(t))_{t>0}$ un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe sur X de générateur infinitésimal A, et soient $\omega \geqslant 0$ et $M \geqslant 1$ tels que $\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}, \forall t \geqslant 0$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $\mathcal{R}e\lambda > \omega$, alors :

• L'application

$$\begin{aligned} R_\lambda : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) x ds \end{aligned}$$

définit un opérateur linéaire borné sur X et on a :

$$\|R_\lambda\| \leqslant \frac{M}{\mathcal{R}e\lambda - \omega}$$

• $\lambda \in \rho(A)$ et $R(\lambda, A)x = R_\lambda x, \forall x \in X$

Démonstration 2.10

1 • Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $\mathcal{R}e\lambda > \omega . R_\lambda$ est un opérateur linéaire.

De plus, pour tout $s \geqslant 0$ et tout $x \in X$, on a

$$\begin{aligned} \left\| e^{-\lambda s} T(s) x \right\| &\leqslant e^{-\mathcal{R}e\lambda s} \|T(s)\| \|x\| \\ &\leqslant e^{-\mathcal{R}e\lambda s} M e^{\omega s} \|x\| \\ &= M e^{-(\mathcal{R}e\lambda - \omega)s} \|x\| \end{aligned}$$

Ce qui entraine alors que :

$$\begin{aligned} \|R_\lambda x\| &\leqslant \int_0^\infty \left\| e^{-\lambda s} T(s) x \right\| \mathrm{d}s \\ &\leqslant M \|x\| \int_0^\infty e^{-(\mathcal{R}e\lambda - \omega)s} \mathrm{d}s \\ &= \frac{M}{\mathcal{R}e\lambda - \omega} \|x\| \end{aligned}$$

Il s'ensuit alors que R_λ est un opérateur linéaire borné sur X et que $\|R_\lambda\| \leqslant \frac{M}{\mathcal{R}e\lambda - \omega}$.

2

$$\begin{aligned}\frac{T(h)R_\lambda x - R_\lambda x}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(h+s)x\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\mathrm{d}s \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\mathrm{d}s \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\mathrm{d}s - \int_0^h e^{-\lambda s}T(s)x\mathrm{d}s\right) - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\mathrm{d}s\cdot \\ &= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\mathrm{d}s - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda s}T(s)x\mathrm{d}s \\ &\underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} \lambda R_\lambda x - x\end{aligned}$$

Donc $R_\lambda x \in \mathcal{D}(A)$

et que

$AR_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x, \forall x \in X,$

c-à-d $(\lambda I - A)R_\lambda x = x, \forall x \in X$ *Comme* R_λ *commute avec* $T(t)$, *il vient du lemme II.3.1 que* R_λ *commute avec* A *sur* $\mathcal{D}(A)$ *.*

D'où

$$R_\lambda(\lambda I - A)x = x, \forall x \in \mathcal{D}(A)$$

et $R(\lambda, A) = R_\lambda$.

corollaire 2.2

Soit $(T(t))_{t\geqslant 0}$ un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe sur E de générateur infinitésimal A, et soient $\omega \geqslant 0$ et $M \geqslant 1$ tels que $\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}, \forall t \geqslant 0$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e\lambda > \omega$ et pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ on a

$$AR(\lambda, A)x = R(\lambda, A)Ax.$$

2.3.2 Théorème de Hille-Yosida pour les C_0-semi-groupes de contractions

Définition 15

Soit $(T(t))_{t\geqslant 0}$ un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe sur E.

- $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est dit uniformément borné sur X s'il existe $M \geqslant 1$ telle que $\|T(t)\| \leqslant M, \forall t \geqslant 0$.

- $(T(t))_{t>0}$ est dit un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe de contractions si $\|T(t)\| \leqslant 1, \forall t \geqslant 0$.

Théorème 2.8: Hille Yousida

Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe de contractions $(T(t))_{t\geqslant 0}$ sur E si et seulement si

- $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$ et A est un opérateur ferme.
- $]0,+\infty\left[\subset \rho(A)\right.$ et pour tout $\lambda > 0$ on a $\|R(\lambda, A)\| \leqslant \frac{1}{\lambda}$

Démonstration 2.11
(Condition nécessaire) La condition nécessaire résulte du corollaire 2.1 et du théorème 2.8 pour $\omega = 0$ *Pour montrer que les conditions 1) et 2) du théorème 2.9 sont suffisantes pour que* A *soit le générateur infinitésimal d'un* $\mathcal{C}_0$ *-semi-groupe de contractions* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *on aura besoin des lemme suivants :*

Lemme 3

Soit A un opérateur linéaire sur E vérifiant les conditions 1) et 2) du theorème 2.9 Alors :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \forall x \in E$$

Démonstration 2.12
Soit $x \in \mathcal{D}(A)$*. Alors pour tout* $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}
\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| &= \|AR(\lambda, A)x\| \\
&= \|R(\lambda, A)Ax\| \\
&\leqslant \|R(\lambda, A)\|\|Ax\| \\
&\leqslant \frac{\|Ax\|}{\lambda} \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Donc

$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \forall x \in \mathcal{D}(A)$ *Comme* $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$ *et* $(\lambda R(\lambda, A))_{\lambda>0}$ *est uniformément bornée car* $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leqslant 1$*, alors :*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \forall x \in E.$$

Définition 16

Pour $\lambda > 0$, On appelle approximation de Y Yosida de l'opérateur linéaire A, l'opérateur

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$$

Lemme 4

Soit A un opérateur linéaire satisfaisant les conditions 1) et 2) du théorème 2.9 Alors :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x = Ax, \forall x \in \mathcal{D}(A)$$

Démonstration 2.13
Soit $x \in \mathcal{D}(A)$.

D'après le lemme 3, on a $\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax$.

Et du corollaire 2.2 on déduit que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax.\mathbb{B}$$

Lemme 5

le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu de contractions $\left(e^{tA_\lambda}\right)_{t>0}$ De plus, pour tout $x \in X$ et $\lambda, \mu > 0$ on a

$$\left\|e^{LA_\lambda} x - e^{i\Lambda_\mu} x\right\| \leqslant t \left\|A_\lambda x - A_\mu x\right\|$$

Démonstration 2.14
Puisque $A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$ *et* $R(\lambda, A)$ *est borné alors* A_λ *est un opérateur linéaire borné sur* X *donc d'après le théorème 2.1* A_λ *est le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu* $\left(e^{iA_\lambda}\right)_{t>0}$.

De plus pour tout $t \geqslant 0$ *on a*

$$\begin{aligned} \left\|e^{tA_\lambda}\right\| &= \left\|e^{u^2 R(\lambda, A)} e^{-t\lambda t}\right\| \\ &\leqslant e^{-t\lambda} \left\|e^{t\lambda^2 R(\lambda, A)}\right\| \\ &\leqslant e^{-\lambda\lambda} e^{t\lambda^2 \|R(\lambda, A)\|} \\ &\leqslant e^{-\lambda\lambda} e^{t\lambda} = 1, \text{car } \|R(\lambda, A)\| \leqslant \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Il en résulte que $\left(e^{tA_\lambda}\right)_{l \geqslant 0}$ *est un semi-groupe uniformément continu de contractions sur* X *Il est facile de voir à partir de la définition que pour tout* $\lambda, \mu > 0, A_\lambda, A_\mu, e^{tA_\lambda}$ *et* $e^{\ell A_\mu}$ *commutent entre eux.*

Il en résulte alors que pour tout $x \in X$:

$$\begin{aligned}
\left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| &= \left\|\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}\right)x\mathrm{d}s\right\| \\
&\leqslant \int_0^1 \left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}\right)x\right\|\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_0^1 t\left\|e^{t_sA_\lambda}e^{t(1-s)A_p}\left(A_\lambda x - A_\mu x\right)\right\|\mathrm{d}s \\
&\leqslant t\left\|A_\lambda x - A_\mu x\right\|, \text{car} \left\|e^{tsA_\lambda}\right\| \leqslant 1 \;\; et \;\; \left\|e^{t(1-s)A_\mu}\right\| \leqslant 1
\end{aligned}$$

Démonstration 2.15 *du theoreme 2.9*
(Condition suffisante)

Soit $x \in \mathcal{D}(A)$. Pour tout $\lambda, \mu > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| &\leqslant t\left\|A_\lambda x - A_\mu x\right\| \\
&\leqslant t\left\|A_\lambda x - Ax\right\| + t\left\|A_\mu x - Ax\right\|
\end{aligned}$$

Il vient du lemme 4 que pour tout $x \in \mathcal{D}(A), e^{tA_\lambda}x$ converge quand $\lambda \rightarrow +\infty$, et la convergence est uniforme sur les intervalles bornés.

Posons alors

$$T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{tA_\lambda}x, \forall x \in \mathcal{D}(A) \tag{2.9}$$

Et la limite est uniforme sur les intervalles bornés.

De la formule (2.9) on voit que $T(0) = I, T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geqslant 0$, et $\|T(t)\| \leqslant 1, \forall t \geqslant 0$

De plus $t \longmapsto T(t)x$ est continue pour tout $x \in X$ comme limite uniforme d'une famille de fonctions continues.

Ainsi $(T(t))_{>0}$ est un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe de contractions sur X Pour conclure, il reste à montrer que A est le générateur infinitésimal de $(T(t)) > 0$ Soit B le générateur infinitésimale de $(T(t)) > 0$ Soit $x \in \mathcal{D}(A)$, en utilisant la formule (2.9) et le théorème 2.5 et compte tenu de la convergence uniforme de $e^{t\wedge_\lambda}A_\lambda x$ vers $T(t)Ax$ sur les intervalles bornés, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{T(t)x - x}{t} &= \frac{1}{t} \lim_{\lambda\to+\infty} \left(e^{tA_\lambda}x - x\right) \\
&= \frac{1}{t} \lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(e^{sA_\lambda}x\right) \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{t} \lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{t} \int_0^t \lim_{\lambda\to+\infty} e^{sA_\lambda} A_\lambda x \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Ax\mathrm{d}s \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} Ax
\end{aligned}$$

Donc $x \in \mathcal{D}(B)$ *et* $Bx = Ax$*, ce qui entraine que* $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$ *et* $Ax = Bx, \forall x \in \mathcal{D}(A)$ *Comme* B *est le générateur infinitésimal de* $(T(t))_{>0}$ *qui est de contractions, alors d'après la condition 2) du théorème 2.5 on a* $1 \in \rho(B)$.

D'autre part, puisque A *vérifie la condition 2) du théorème 2.5 alors* $1 \in \rho(A)$.

Mais puisque $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$ *et* $Ax = Bx, \forall x \in \mathcal{D}(A)$*, on a* $(I - B)\mathcal{D}(A) = (I - A)\mathcal{D}(A) = X$*, ce qui entraine alors que* $\mathcal{D}(B) = (I - B)^{-1}X = \mathcal{D}(A)$

D'où $A = B$.

Comme conséquence du théorème 2.5 de Hille-Yosida, on obtient :

corollaire 2.3

Soit A le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi-groupe de contractions $(T(t))_{t\geqslant0}$. Alors :

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to+\infty} e^{tA_\lambda}x, \forall x \in X$$

corollaire 2.4

Soit $\omega \geqslant 0$. Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe $(T(t))_{\text{es } 0}$ vérifiant $\|T(t)\| \leqslant e^{\omega t}, \forall t \geqslant 0$ si et seulement si :

- $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ et A un opérateur fermé.
- $\left|\ \omega, +\infty\right[\subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda > \omega$ on a $\|R(\lambda, A)\| \leqslant \frac{1}{\lambda - \omega}$

Démonstration 2.16

$\Rightarrow$ *Découle du corollaire 2.1 et du théoreme 2.9*

$\Rightarrow$ *Le théorème* $\Pi.3.2$ *de Hille-Yosida appliqué à l'opérateur* $B = A - \omega I$ *pour* $\lambda - \omega > 0$ *implique qu'il génère un* C_0 *-semi groupe de contractions* $(S(t))_{t \geqslant 0}$. *Le* $\mathcal{C}_0$ *-semi groupe défini par*

$$T(t) = e^{\omega t} S(t), \forall t \geqslant 0$$

donne le résultat.

Théorème 2.9

Si A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe $(\ T(t))_{t \geqslant 0}$ sur X vérifiant :

$$\|T(t)\| \leqslant M e^{\omega t}, \forall t \geqslant 0, \text{ avec } \omega \geqslant 0, M \geqslant 1$$

Alors :

- $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ et A est un opérateur fermé.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}\rceil\lambda > \omega$ on a $\lambda \in \rho(A)$ et

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leqslant \frac{M}{(\mathcal{R}e\lambda - \omega)^n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Démonstration 2.17

• *Déjà vu dans le corollaire* $\Pi.2.1$.

• *D'après le théorème 2.9, comme* $\mathcal{R}e\lambda > \omega$, *alors* $\lambda \in \rho(A)$ *et pour tout* $x \in X$, *on a* $R(\lambda, A)x = R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) x \mathrm{d}s$, *et* $\|R(\lambda, A)\| \leqslant \frac{M}{Re\lambda - \omega}$ *Il est facile de voir que*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} R(\lambda, A)x = -\int_0^\infty s e^{-\lambda s} T(s) x \mathrm{d}s, \forall x \in X$$

et par récurrence on obtient pour tout $x \in X$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$, *que :*

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n} R(\lambda, A)x = (-1)^n \int_0^\infty s^n e^{-\lambda s} T(s) x \mathrm{d}s$$

Par ailleurs, par le lemme 1.2.8, *on a* $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n}R(\lambda,A) = (-1)^n n! R(\lambda,A)^{n+1}$ *Il en résulte alors que :*

$$R(\lambda,A)^{n+1}x = \frac{1}{n!}\int_0^\infty s^n e^{-\lambda s}T(s)xds, \forall x \in X$$

D$'$ *où*

$$R(\lambda,A)^n x = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty s^{n-1}e^{-\lambda s}T(s)xds, \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Il vient alors que pour tout $x \in X$ *et tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda,A)^n x\| &= \frac{1}{(n-1)!}\left\|\int_0^\infty s^{n-1}e^{-\lambda s}T(s)x\mathrm{d}s\right\| \\
&\leqslant \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty s^{n-1}\left\|e^{-\lambda s}T(s)x\right\|\mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty s^{n-1}e^{-\mathcal{R}e\lambda s}Me^{\omega s}\|x\|\mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{M}{(\mathcal{R}e\lambda-\omega)^n}\|x\|
\end{aligned}$$

(Intégration par parties (n-1) fois)

$$\mathrm{D}' \text{ où } \|R(\lambda,A)^n\| \leqslant \frac{M}{(\mathcal{R}e\lambda-\omega)^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.3.3 Théorème de Hille-Yosida dans le cas général :

Dans ce paragraphe on va démontrer le théorème de Hille-Yosida dans le cas général d'un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe sur X. Tout d'abord on va commencer par démontrer le lemme suivant :

Lemme 6

Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire tel que$]0,+\infty[\subset \rho(A)$ et vérifiant :

$$\|\lambda^n R(\lambda,A)^n\| \leqslant M, \forall n \in \mathbb{N}, \forall \lambda > 0$$

Alors il existe une norme $\|\cdot\|_1$ sur X équivalente à la norme d'origine $\|\cdot\|$ vérifiant :

- $\|x\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant M\|x\|, \forall x \in X.$
- $\|\lambda R(\lambda,A)x\|_1 \leqslant \|x\|_1, \forall x \in X.$

Démonstration 2.18 *Soit* $\mu > 0$. *Posons :*

$$\|x\|_\mu = \sup_{n\geqslant 0}\|\mu^n R(\mu,A)^n\|, \forall x \in X \tag{2.10}$$

Il est facile de voir que $\|\cdot\|_\mu$ *définit une norme sur* X *vérifiant :*

$$\|x\| \leqslant \|x\|_\mu \leqslant M\|x\|, \forall x \in X \tag{2.11}$$

et

$$\|\mu R(\mu, A)\|_\mu \leqslant 1 \tag{2.12}$$

Montrons alors que :

$$\|\lambda R(\lambda, A)\|_\mu \leqslant 1, \text{ pour } 0 < \lambda \leqslant \mu \tag{2.13}$$

Soit $x \in X$. *Posons* $y = R(\lambda, A)x$. *Il vient alors de l'équation de la résolvante que :*

$$y = R(\lambda, A)x = R(\mu, A)(x + (\mu - \lambda)y)$$

Et par l'inégalité triangulaire et l'inégalité (2.11) on obtient :

$$\begin{aligned}\|y\|_\mu &= \|R(\mu, A)x + (\mu - \lambda)R(\mu, A)y)\|_\mu \\ &\leqslant \|R(\mu, A)x\|_\mu + (\mu - \lambda)\|R(\mu, A)y\|_\mu \\ &\leqslant \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu + \frac{\mu - \lambda}{\mu}\|y\|_\mu\end{aligned}$$

Ce qui entraine $\|y\|_\mu \left(1 - \frac{\mu-\lambda}{\mu}\right) \leqslant \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu$,

et par suite $\lambda\|y\|_\mu \leqslant \|x\|_\mu, \forall x \in X$

D'où $\|\lambda R(\lambda, A)\|_\mu \leqslant 1$, *pour* $0 < \lambda \leqslant \mu$ *Des inégalités (2.11) et (2.13),*

on voit facilement que :

$$\|\lambda^n R(\lambda, A)^n x\| \leqslant \|\lambda^n R(\lambda, A)^n x\|_\mu \leqslant \|x\|_\mu, \text{ pour } 0 < \lambda \leqslant \mu$$

D'où $\|x\|_\lambda \leqslant \|x\|_\mu$, *pour* $0 < \lambda \leqslant \mu$

Posons alors

$$\|x\|_1 = \lim_{\mu \to +\infty} \|x\|_\mu, \forall x \in X$$

En faisant tendre $\mu \to +\infty$ *dans l'inégalité (2.11) on obtient :*

$$\|x\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant M\|x\|, \forall x \in X$$

En prenant $n = 1$ *dans l'inégalité* (II.3.5), *il vient que :*

$$\|\lambda R(\lambda, A)x\|_\mu \leqslant \|x\|_\mu, \forall x \in X$$

En faisant tendre $\mu \to +\infty$

On obtient $\|\lambda R(\lambda, A)x\|_1 \leqslant \|x\|_1, \forall x \in X.$

D'où $\|\lambda R(\lambda, A)\|_1 \leqslant 1.$

Théorème 2.10: Théorème de Hille-Yosida, cas général

Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ sur X vérifiant $\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}, \forall t \geqslant 0$, avec $\omega \geqslant 0, M \geqslant 1$, si et seulement si :

- $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ et A est un opérateur fermé.
- Pour tout $\lambda \in C$ tel que $\mathcal{R}\rceil\lambda > \omega$, on a $\lambda \in \rho(A)$ et

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leqslant \frac{M}{(\mathcal{R}e\lambda - \omega)^n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Démonstration 2.19 $\Longrightarrow$ *Découle du théorème 2.* 10.. $\Longleftarrow$ *Supposons que A vérifie les assertions 1) et 2) du théorème 2.* 11,

alors sans perte de généralité et quitte à considérer le $\mathcal{C}_0$ *-semi-groupe* $S(t) = e^{-\omega t}T(t), \forall t \geqslant 0,$

on peut supposer que $\omega = 0$ *L'assertion 2) implique dans ce cas que* $\|\lambda^n R(\lambda, A)^n\| \leqslant M, \forall n \in \mathbb{N}, \forall \lambda > 0$

Soit $\|\cdot\|_1$ *la norme équivalente à* $\|\cdot\|$, *définie dans le lemme* II.3.5 *et vérifiant :*

$$\|x\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant M\|x\|, \forall x \in X, \text{ et } \|\lambda R(\lambda, A)\|_1 \leqslant 1, \forall \lambda > 0 \tag{2.14}$$

Il vient alors du théorème 2.9 de Hille-Yosida pour les $\mathcal{C}_0$ *-semi-groupes de contractions que* A *est le générateur infinitésimal d'un* $\mathcal{C}_0$ *-semi-groupe* $(T(t))_{\geqslant 0}$ *de* $\|\cdot\|_1$ *-contractions sur* X, *et en utilisant l'inégalité (2.14),*

on obtient pour tout $t \geqslant 0$ *et tout* $x \in X$,

$$\begin{aligned}\|T(t)x\| &\leqslant \|T(t)x\|_1\\ &\leqslant \|T(t)\|_1\|x\|_1\\ &\leqslant \|x\|_1\\ &\leqslant M\|x\|\end{aligned}$$

D'où $\|T(t)\| \leqslant M, \forall t \geqslant 0.$

2.3.4 Des exemples sur les semi groupe :

Soit $A \in \mathcal{L}(E)$. Alors, $\left(e^{tA}\right)_{t\geq 0}$ est un semi groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur E dont le générateur infinitésimal est A. En effet, soit

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

Remarquons que la série de membre de droite de l'égalité est convergent pour la topologie de la convergence de la norme $\mathcal{L}(E)$.
De plus

- $T(0) = I$.
- $T(t+s) = e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} = T(t)T(s)$, pour tous $t, s \in \mathbb{R}^+$.

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}\|T(t)-I\|_{\mathcal{L}(E)} &= \left\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k A^k}{k!} - I\right\|_{\mathcal{L}(E)}\\ &= \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k A^k}{k!}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k\|A\|^k_{\mathcal{L}(E)}}{k!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\|A\|^k_{\mathcal{L}(X)}}{k!} - 1\end{aligned}$$

d'où $\|T(t)-I\|_{\mathcal{L}(E)} \leq e^{t\|A\|_{\mathcal{L}(E)}} - 1, \forall t \geq 0$ En faisant tendre t vers 0^+ on obtient $\lim_{t\to 0^+}\|T(t)-I\| = 0$ et par suite $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi groupe uniformément continu. Montrons maintenant que A est le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geq 0}$

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{T(t)-I}{t}-A\right\|_{\mathcal{L}(E)} &= \left\|\frac{T(t)-I-At}{t}\right\|_{\mathcal{L}(E)} \\
&= \frac{1}{t}\left\|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!}\right\|_{\mathcal{L}(E)} \\
&\leq \frac{1}{t}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^k\|A\|_{\mathcal{L}(E)}^k}{k!} \\
&\leq \frac{1}{t}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\|A\|_{\mathcal{L}(E)}^k}{k!}-1-\|A\|_{\mathcal{L}(E)}t\right) \\
&\leq \frac{1}{t}\left(e^{t\|A\|_{\mathcal{L}(E)}}-1-\|A\|_{\mathcal{L}(E)}t\right. \\
&\leq \frac{e^{t\|A\|_{\mathcal{L}(E)}-1}}{t}-\|A\|_{\mathcal{L}(E)}\to 0
\end{aligned}$$

lorsque $t\to 0^+$ et par suite $\lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)-I}{t}=A$ ce qui montre que le semi groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ admet pour générateur infinitésimal l'opérateur A.

Semi-groupe de la chaleur dans $L^2(\mathbb{R}^n)$:

Ici, $E=L^2(\mathbb{R}^n)$. On considère le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ défini par

$$\forall t\geq 0\forall f\in L^2(\mathbb{R}^n),\forall x\in\mathbb{R}^n, T(t)f(x):=\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{x^2}{1}}f(x+\sqrt{t}z)d\mu^n(z)$$

Cet expression définit effectivement un C_0-semi-groupe de générateur A défini par :

- $D(A)=H^2(\mathbb{R}^n)$.
- $Af=\Delta f$.

Pour voir cela, on va travailler en Fourier (qui est un des grands intérêts de $L^2(\mathbb{R}^n)$: en transformée de Fourier, $(T(t))_{t\geq 0}$ est défini par

$$\widehat{T(t)f}(\xi)=e^{|\xi|^2t}\widehat{f}(\xi)$$

En utilisant de la convergence dominée, on voit donc qu'il s'agit d'un semi groupe fortement continu.

Pour déterminer le générateur infinitésimal de ce semi-groupe, considérons tout d'abord $u\in D(A)$. Alors pour tout $t\geq 0$ on a

$$\begin{aligned}\underbrace{\|Af\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}_{<+\infty} &= \lim_{t\to 0^+}\left\|\frac{T(t)f-f}{t}\right\|^2_{L^2(\Re(n))}\\ &= \lim_{t\to 0^+ \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{1-e^{-|\xi|^2t}}{t|\xi|^2}\right|^2|\xi|^4|\widehat{f}(\xi)|^2d\mu^{(n)}(\xi)}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^4|\widehat{f}(\xi)|^2d\mu^{(n)}(\xi)\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient par application du lemme de Beppo-Levi. Par caractérisation des espace de Sobolev via la transformée de Fourier, on en déduit que $u\in H^2(\mathbb{R}^n)$. Réciproquement, soit $u\in H^2(\mathbb{R}^n)$, ce qui est équivalent à dire que $\xi\mapsto|\xi|^2\widehat{f}(\xi)\in L^2(\mathbb{R}^n)$

On a alors

$$\frac{\widehat{T(t)f-\widehat{f}}}{t}(\xi) = -|\xi|^2\widehat{f}(\xi)+|\xi|^2\hat{f}(\xi)\int_0^1\left(1-e^{-|\xi|^2ts}\right)ds$$

De ceci on tire facilement

$$\left\|\frac{T(t)-f}{t}\Delta f\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^4|\widehat{f}(\xi)|^2\left|\int_0^1\left(1-e^{-|\xi|^2ts}\right)\right|d\xi \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

ce qui permet de montrer que $u\in D(A)$ et que $Au=\Delta u$.

Semi groupe de translations :

soit $X=L^1([0,1])$.soit $(T(t))_{t>0}$ la famille d'opérateurs dans X définit par

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta\in[0,1],T(t)u(x)=u(x+t)\quad x+t\leq 1$$

Il s'agit d'un C_0 semi-groupe dans X, de générateur infinitésimal $Au=u'$ défini sur $D(A)$ l'ensemble des applications absolument continues nulles en 1 Rappelons qu'une application absolument continue de [0,1] dans $\mathbb{R}$ est une application u telle que

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall n\in\mathbb{N},\forall 0\leq x_1<y_1<x_2<\ldots<x_n<y_n\leq 1$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|\leq\delta\Rightarrow\sum_{i=1}^n|u(x_i)-u(y_i)|\leq\varepsilon$$

Chapitre 3

Application a la résolution d'équation différentielles abstraites

***

le but de ce chapitre est d'appliquer les principaux concept et résultats développés dans le chapitre 2 pour résoudre le problème de Cauchy homogène et non homogène pour des equation différentielles abstraites sur des espaces de Banach . Premièrement on va donner quelques définition qui nous avons utilise dans la suite :

3.1 Les différentes types de solutions :

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \geq 0 \\ x(0) = x \end{cases} \tag{3.1}$$

Définition 17

Une fonction $x : [a, b] \longrightarrow E$ est dite solution **classique** ou C^1 solution du problème (3.1), si x est continue sur $[a, b]$, continument différentiable sur $(a, b]$ et $x(t) \in \mathcal{D}(A), \quad \forall t \in (a, b]$ et satisfait l'équation $x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad \forall t \in [a, b]$ et $x(0) = x$.

Définition 18

Une fonction $x : [a, b] \to E$ est dite solution **forte** ou solution absolument continue du problème (3.1), si x est absolument continue sur $[a, b], x' \in L^1([a, b], X)$, $x(t) \in \mathcal{D}(A)$ p.p tout $t \in (a, b)$ et satisfait l'équation $x'(t) = Ax(t) + f(t)$, p.p tout $t \in (a, b)$ et $x(0) = x$.

Définition 19

Une fonction $x : [a, b] \to E$ est dite "*mild*" solution ou $C^{-}solution$si x est continue sur $[a, b], x(0) = x$ et satisfait l'équation intégrale :

$$x(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \qquad (3.2)$$

Définition 20

Le terme mathématique de problème bien pose provient d'une définition de Hadamard . il pensait que les modelés mathématique de phénomènes physique devraient avoir les propriétés suivantes :

- une solution existe.

- une solution est unique .

- la solution dépend de façon continue des données,pour une topologie raisonnable .

3.2 Problème homogène à valeur initiale :

Soit E un espace de Banach et A un opérateur linéaire de $\mathcal{D}(A) \subset E$ dans E. Étant donné $x \in E$ le problème de Cauchy pour A avec données initiales x consiste à la détermination d'une solution $x(t)$ au problème à valeur initiale

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), \quad t \geq 0 \\ \\ x(0) = x \end{cases} \qquad (3.3)$$

Où par solution on veut dire une fonction $x(t)$ à valeur dans X tel que $x(t)$ est continue pour $t \geq 0$ continument différentiable et $x(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour $t > 0$ et (3.2) est satisfaite.

Notez que quand $x(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour $t > 0$ et x est continu à $t = 0$(3.2) ne peut pas avoir une solution pour $x \notin \mathcal{D}(A)$.

Théorème 3.1

Soit A est le générateur infinitésimal d'un Co-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur X. Alors pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, la fonction :

$$x : t \longrightarrow x(t) := T(t)x$$

est l'unique solution classique du problème (3.3) à valeur initiale x.

Démonstration 3.1

Existence :

Soit $x \in \mathcal{D}(A)$. D'après l'assertion 4) de la proposition 2.1, on a

$$T(t)x \in \mathcal{D}(A) \text{ et } \frac{dT(t)x}{dt} = AT(t)x = T(t)Ax$$

Il en résulte que $t \mapsto u(t) := T(t)x$ est une solution classique du problème (3.3).

Unicité :

Montrons maintenant l'unicité de cette solution classique. Supposons qu'il existe deux solutions classiques u et v. Soit $t > 0$ et posons

$$w(t) = T(t-s)v(s), \forall s \in [0,t]$$

Pour tout $s \in [0,t]$, on a

$$\begin{aligned} \frac{dw(t)}{ds} &= -T(t-s)Av(s) + T(t-s)v'(s) \\ &= -T(t-s)Av(s) + T(t-s)Av(s) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, la fonction

$$s \mapsto T(t-s)v(s)$$

est constante.

Remarquons que $v(t)$ et $T(t)x$ représentent les valeurs de la fonction précédente pour $s = t$ et $s = 0$ respectivement.

Et puisqu'elle est constante, alors $v(t)$ coïncide avec $T(t)x$.

Finalement,

$$v(t) = T(t)x = u(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Définition 21

Si A est un générateur infinitésimal d'un C_o-semi-groupe ce qui n'est pas différentiable, alors en général si $x_0 \notin \mathcal{D}(A)$, alors le problème de valeur initiale (3.3) n'a pas de solution classique.
La fonction $t \to T(t)x_0$ est alors appelée "mild " solution d u problème à valeur initiale (3.3)

Définition 22

Soit$\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0 -semi-groupe sur un espace de Banach X.
Le semi-groupe $T(t)$ est dit différentiables pour $t > t_0$ si pour tout $x \in X, t \to T(t)x$ est différentiables pour $t > t_0, T(t)$ est différentiables s'il est différentiables pour $t > 0$.
Notez que nous avons vu dans la proposition 2.1 assertion (4) que si $T(t)$ est un C_0-semi-groupe avec un générateur infinitésimal A et $x \in \mathcal{D}(A)$ alors $T \to T(t)x$ est différentiable pour $t \geq 0$ Si $T(t)$ est de plus différentiable alors pour tout $x \in X, t \to T(t)x$ est différentiables pour $t > 0$.

3.3 Problème non homogène à valeur initiale :

Dans cette section nous étudions le problème non homogène à valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t), & t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{3.4}$$

où $f : [0, T[\longrightarrow X$ est continue.Nous supposerons dans cette section que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de sorte que l'équation homogène correspondante, i.e avec $f \equiv 0$, a une solution unique pour chaque valeur initiale $x_0 \in \mathcal{D}(A)$.

Définition 23

Une fonction $x : [0; T[\longrightarrow X$ est une solution **(classique)** de (3.4) sur $[0; T[$ si et seulement si :

- $x(t)$ est continu dans $[0; T[$.
- $x(t)$ est continument differentiables sur $]0; T[$.
- $x(t) \in \mathcal{D}(A)$, pour $t \geq 0$ et (3.4) est satisfaite sur $[0; T[$..

proposition 3.1

Si $f \in L^1(0, T; X) = \left\{ f : (0, T) \to \mathbb{R} / \int_0^1 \|f(t)\|_X < +\infty \right\}$, alors pour tout $x \in X$ le problème (3.4) admet au plus une solution.

Dans le cas où celte solution existe, elle est sous la forme :

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \tag{3.5}$$

Démonstration 3.2

Soit $T(t)$ un C_0 -semi-groupe de générateur infinitésimal A et soit x une solution de (3.3).

Alors la fonction $g(s) = T(t-s)x(s)$ est différentiables pour $0 < s < t$ et :

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds}(s) &= -AT(t-s)x(s) + T(t-s)x'(s) \\ &= -AT(t-s)x(s) + T(t-s)(Ax(s) + f(s)) \\ &= -AT(t-s)x(s) + T(t-s)Ax(s) + T(t-s)f(s) \end{aligned}$$

Alors :

$$\frac{dg}{ds}(s) = T(t-s)f(s) \tag{3.6}$$

Si $f \in L^1([0;T];X)$ alors $T(t-s)f(s)$ est intégrable et en intégrant (3.5) de 0 à t on a :

$$g(t) = g(0) + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

Donc,

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \tag{3.7}$$

En particulier si $A \in \mathcal{L}(E)$, alors $\forall x_0 \in X$, l'équation (3.5) a une solution unique x sur $\mathbb{R}^+$ donnée par :

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds. :$$

Définition 24

Soit A le générateur infinitésimal d'un Co-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Soit $x \in X$ et $f \in L^1([0;T];X)$. La fonction $x \in C([0;T];X)$ donnée par :

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq a$$

est la solution "*mild*" du problème à valeur initiale (3.5) sur $[0;T]$. .

Remarque :

La continuité de f en général, ne suffit pas à assurer l'existence de solution du problème (3.5) pour $x_0 \in \mathcal{D}(A)$.

Exemple :

Soit A le générateur infinitésimal d'un $C_{0^-\text{semi-groupe}}$ $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, et soit $y \in X$ telle que $T(t)y \notin \mathcal{D}(A)$ pour tout $t \geq 0$, soit $f(s) = T(s)y$ Alors f est continue pour $s \geq 0$. Considérons le problème de valeur initiale :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + T(t)y, & t \geq 0 \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

proposition 3.2

(3.8) n'a pas de solution, même si $x(0) = 0 \in \mathcal{D}(A)$. La solution "mild" de (3.8) est :

$$x(t) = T(t)0 + \int_0^t T(t-s)T(s)yds = \int_0^t T(t)yds = tT(t)y$$

mais $tT(t)y$ est non dérivable pour $t > 0$ puisque $y \notin \mathcal{D}(A)$,et par conséquent ne peut pas être la solution de (3.8) .

Théorème 3.2

Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ Soit $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ et $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow X$ est fonction de classe C^1 alors la solution "mild" devient une solution classique de l'équation (3.4) .

Démonstration 3.3

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds = T(t)x_0 + v(t)$$

Soit $v \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$; *alors*

$$v'(t) = Av(t) + f(t), \quad \forall t \geq 0 \ \textit{et} \ v(0) = 0$$

En effet, Soit $h > 0$

$$\begin{aligned}\frac{T(h)-I}{h}v(t) &= \frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds \\ &= \frac{1}{h}\int_0^t T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds \\ &= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds\end{aligned}$$

Alors,

$$\frac{T(h)-I}{h}v(t) = \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds$$

De la continuité de f *il est clair que le deuxième terme sur le coté droit de (3.8) à la limite* $f(t)$ comme $h \longrightarrow 0$ *Mais nous avons aussi :*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(s)f(t-s)ds$$

Alors,

$$\begin{aligned}D^+v(t) = \frac{v(t+h)-v(t)}{h} &= \int_0^t T(s)\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}ds \ \textit{comme} \ h \longrightarrow 0^+ \\ &= \int_0^t T(s)f'(t-s)ds \\ &= \int_0^t T(t-s)f'(s)ds\end{aligned}$$

Comme f' *est continue alors :* $t \longrightarrow \int_0^t T(t-s)f'(s)$ *est continue dans* $\mathbb{R}^+$.

Finalement,

$$Av(t) = D^+v(t) - f(t), \quad t \geq 0. :$$

Lemme 7

Soit $u : [a, b] \longrightarrow X$ Supposons que $D^+u(t)$ existe on $[a, b]$ et $t \longrightarrow D^+u(t)$ est continue sur $[a, b]$ alors u est de classe C^1 sur $[a, b]$. En utilisant ce lemme alors v est de classe C^1 et :

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + f(t), \quad t \geq 0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

La solution 'mild' de l'équation (3.3) est :

$$x(t) = v(t) + T(t)x_0$$

Nous devons montrer que $x \in C^1$ Soit $x_0 \in \mathcal{D}(A)$, alors :

$$\frac{d}{dt}T(t)x_0 = AT(t)x_0$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} x'(t) &= v'(t) + AT(t)x_0 \\ &= Av(t) + f(t) + AT(t)x_0 \\ &= A\left[v(t) + T(t)x_0\right] + f(t) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} x'(t) &= v'(t) + AT(t)x_0 \\ &= Av(t) + f(t) + AT(t)x_0 \\ &= A\left[v(t) + T(t)x_0\right] + f(t) \end{aligned}$$

Alors,

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \geq 0 \tag{3.9}$$

Le coté droit de (3.9) est continu puisque x et f sont continus. Donc $x \in C^1$.

Bibliographie

***

[1] A.L.Cauchy, « Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique», première partie, Analyse Algébrique, 1821.

[2] Amara Mohamed Amine, « Théorie des $C0$-semi-groupe et applications», Université Dr Tahar Moulay-Saida, 2015.

[3] A.Pazy, « Semi Groups Of Linear Operators And Applications To Partial Differential Equations» , Springer Verlag, New York, Berlin, 1983.

[4] Engel, Klaus-Jochen and R.Nagel, «One-parameter semigroups for linear evolution equations». New York :Springer, 2000.

[5] E.Hille, « functional Analyse and semigroups», Amer. Math.Soc, 1948.

[6] Gregoire Allaire, « Analyse numérique et optimisation ». Paris, 2005.

[7] Haim Brezis , « ANALYSE FONCTIONNELLE THEORIE ET APPLICATIONS», MASSON Paris New York Barcelon Milan Mexico Sao Paulo 1987.

[8] H.E.KHochemane, l.Bouzettota and A.GUerouah, « POROUS-ELASTIC SYSTEM WITH DISTRIBUTE DELAY», Aplicable Analysis,http ://.

[9] J.A.Goldstein, «Semigroups of Operators and Applications», Oxford University press, 1985.

[10] J.Hadamard, «Le principe de Huygens, Bull.Soc», Math. France 52(1924), 610-640.

[11] Jean-Pierre RAYMOND, «Équation d'évolution». Université Paul Sabatier.

[12] Kantaoui Hafssa, « Propriétés du semi-groupe engendre par un opérateur m-dissipatif», Mémoire de fin de master, UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA, 2016.

[13] K.Yosida, «On the differentiability and the representation of one paremeter semi-groups of linear operators», J.Math.Soc.Japan 1 (1948), 15-21.

[14] Ludovic Dam LEMLE, « LA FORMULE DE LIE-TROTTER POUR LES SEMI GROUPES FORTEMENT CONTINUS». 2001.

[15] Salah-Eddine CHorfi, «THEORIE DE SEMI -GROUPES : PROBLEME ABSTRAITE DE CAUCHY ET EQUATION D'EVOLUTION », Memoire de fin d'etude, faculte de science Semlalia Marrakech, 2017.

[16] Saul Lubkin, « C_0 Semigroups and Applications » , North-Holland.

[17] S.Kesavan, «Topics in function Analysis and Applications», Wiley-Eastern,New Delhi, 1989.

[18] T.Cazenave, A.Haraux, «Introduction aux problemes d'evolution semi-lineaires», Ellipses, 1990.