République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de La Recherche Scientifique
Université Djilali Bounaama-Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la technologie
Département de Mathématiques et informatique

Mémoire de fin d'étude
En vue de l'obtention d'un diplôme de Master en Mathématique
Spécialité Analyse Mathématique et Applications

Thème :

Sur l'identité d'Hermite et applications

Présenté par :
ZERKA Nasreddine

Devant le jury composé par :

Examinateur 1 :	M. Bouderbala	Université de Khemis Miliana
Examinateur 2 :	M. Houasni	Université de Khemis Miliana
Encadrant :	M. Karras	Université de Khemis Miliana

Année universitaire : 2019-2020

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier DIEU de m'avoir donné la force et le courage pour faire ce modeste travail.

Je tiens à adresser mes sincères remerciements à mon encadreur monsieur KARRAS Meselem pour son encouragement, son aide et son suivi pour terminer ce travail.

Je voudrais remercier messieurs les membres de jury. Ainsi qu'à tous les enseignants du département de mathématique.

A la fin, je remercie tous ceux qui de prés ou de loin m'ont aidés à la réalisation de ce travail.

MERCI

Dédicaces

Je tiens à dédier cet humble travail :

À ma tendre mère et mon très cher père.

À mes chères frères et sœurs : Abdelnour, Fadhila, Hamide, Nawel.

À mes meilleurs amis : Abdelkader, Ahlem, Amina, Imene et Moussa.

À tout les étudiants de MASTER MATH 2020.

À tous ceux qui m'aiment et que j'aime.

Résumé

Dans notre travail, dans un premier lieu, on définit l'identité d'Hermite et on donne quelques notions générales et propriétés concernant la théorie analytique des nombres, et on présente quelques exemples pour montrer que l'identité d'Hermite a un rôle très important dans les calculs des sommes, et encore de prouver quelques inégalités qui contiens la partie entière. Ensuite, on présente une généralisation sur l'identité d'Hermite et quelques résultats avec les démonstrations détaillés, et on termine par deux applications sur ces résultats.

NOTATIONS GÉNÉRALES

Certaines notations seront utilisées tout au long de ce mémoire que nous lisons ci-dessous :

$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels.
$\mathbb{Z}$	ensembles des nombres entiers.
$\mathbb{N}$	ensembles des nombres naturels.
$\mathbb{N}^*$	ensembles des nombres naturels sauf 0.
$\lfloor x \rfloor$	partie entier de x.
$\{x\}$	partie fractionnaire de x.
$pgcd(a, b)$	le plus grand diviseur commun de a et b.
$a \| b$	n divise m.
$a \equiv b[n]$	a et b sont congruents modulo n.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

L'identité d'Hermite est une identité qui calcule la valeur d'une sommation impliquant la fonction partie entière $\lfloor . \rfloor$. Il est nommé d'après **Charles Hermite**, un mathématicien français qui a fait des recherches au cours Le dix-neuvième siècle. Il est utile pour résoudre des équations, prouver des inégalités, calculer des sommes, etc..., impliquant des fonctions partie entière.

Étant donné un nombre réel x, on utilise la notation $\lfloor x \rfloor$ pour dénoter le plus grand entier qui est plus petit ou égal à x. De plus, on utilise la notation $\{x\}$ pour dénoter la partie fractionnaire de x, qui est défini par, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Les problèmes impliquant la fonction partie entière et la fonction partie fractionnaire ont intéressé les mathématiciens, en particulier en théorie des nombre depuis plus de 100 ans. Par exemple, le fameux problème des diviseurs de **Dirichlet** consiste à obtenir une estimation de la somme $\sum_{n \leq N} d(n)$, qui peut être écrit sous la forme suivante

$$\sum_{n \leq N} d(n) = \sum_{n \leq N} \left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor . \tag{A}$$

Comprendre les propriétés de la fonction partie entière peut être conduire à une meilleure estimation de (A) et d'autres sommes similaires. Pour plus de détails sur le problème des diviseurs de Dirichlet, voir par exemple [13, 2, 11, 12]

D'autres sommes impliquant la fonction partie entière sont également considérées par Jacobsthal [7], Carlitz [3], Grimson [5], et récemment par Tverberg [14], nous rappelons l'identité d'Hermite qui déclare que

$$\sum_{0 \leq k \leq n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

L'objectif de ce mémoire est de donner la démonstration de cette identité et encore sa généralisation et quelques applications. L'essentiel du travail que nous présentons une preuve alternative d'une formule qui généralise l'identité d'Hermite, notre preuve repose sur l'expansion de type **Fourier** pour la fonction $\lfloor . \rfloor$ et sur une formule trigonométrique.

Ce travail consiste en deux chapitres :

Dans le chapitre I, nous faisons quelques définitions et propriétés de base en théorie des nombres, et nous donnons la démonstration de l'identité d'Hermite et quelques exemples.

Dans le chapitre II, nous introduirons une généralisation de l'identité d'Hermite et étendrons les résultats, et finalement on voir deux application, la première nous considérons la somme ci-dessus lorsque k varie de 0 à $F_m - 1$, où F_m est le terme général de la suite de **Fibonacci** [8] et la deuxième application sur la somme $S_{a,b;m}(N)$, introduite par Jacobsthal [7].

CHAPITRE 1

L'IDENTITÉ D'HERMITE

Dans ce chapitre, on va donner quelques éléments essentiels sur les théories des nombres, qui sont nécessaires, pour la suite de notre travail, comme la partie entier, la divisibilité, les congruences et dans la section 1.3, nous donnons l'identité d'Hermite et sa démonstration, et quelques exemples.

1.1 Définitions et quelques propriétés

Définition 1. *Si x est un réel, la partie entière de x est le plus grand entier k qui vérifie $k \leq x$, $k \in \mathbb{Z}$. Alors la partie entière de x est l'entier unique k qui vérifier :*

$$k \leq x < k + 1.$$

i.e

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

La partie fractionnaire de x, est la différence entre ce nombre et sa partie entière, i.e

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor.$$

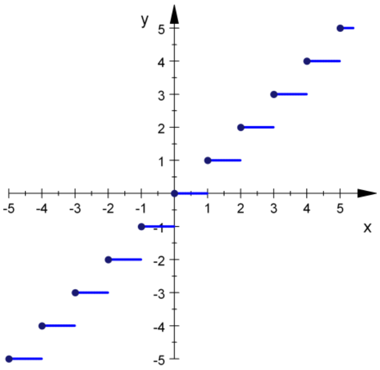

FIGURE 1.1 – La fonction parie entière

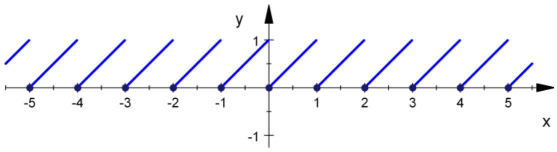

FIGURE 1.2 – La fonction parie fractionnaire

Par exemple :

— $\lfloor 4.3 \rfloor = 4$ et $\{4.3\} = 0.3$

— $\lfloor -2.4 \rfloor = -3$ et $\{-2.4\} = 0.4$

— $\lfloor 7 \rfloor = 7$ et $\{7\} = 0$

Proposition 1. *Soit x un réel et k un entier. Alors*

$$\lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$$

et donc

$$\{x+k\} = \{x\} + k.$$

Preuve 1.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout entier k, d'après la définition de la partie entière de x, on a

$$k + \lfloor x \rfloor \leq k + x < k + \lfloor x \rfloor + 1.$$

On pose $N = k + \lfloor x \rfloor$ ce qui implique que N est entier tel que

$$N \leq x + k < N + 1,$$

donc

$$\lfloor x+k \rfloor = N = \lfloor x \rfloor + k.$$

Alors

$$\lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k.$$

■

Proposition 2. *Soit x un réel. Alors :*

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0, & si\ x \in \mathbb{Z} \\ -1, & si\ x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Preuve 2.
Cas 1 : *$x \in \mathbb{Z}$*
Dans ce cas x est un entier, puisque $-x$ est également un entier donc $\lfloor -x \rfloor = -x$ et

$\lfloor x \rfloor = x$.
Alors $\forall x \in \mathbb{Z}$

$$\lfloor -x \rfloor + \lfloor x \rfloor = (-x) + (x) = 0.$$

Cas 2 : $x \notin \mathbb{Z}$
D'après la définition de la partie entière de x*, on a*

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1,$$

et comme $x \notin \mathbb{Z}$ *, alors*

$$\lfloor x \rfloor < x.$$

D'autre part

$$x < \lfloor x \rfloor + 1 \qquad \Rightarrow \qquad -1 - \lfloor x \rfloor < -x,$$

donc

$$-1 - \lfloor x \rfloor \leq -x.$$

L'inégalité $\lfloor x \rfloor < x$*, implique* $-x < -\lfloor x \rfloor = (-1 - \lfloor x \rfloor) + 1$*, par conséquent,*

$$-1 - \lfloor x \rfloor \leq -x < (-1 - \lfloor x \rfloor) + 1,$$

et par la définition de la partie entière, on a

$$\lfloor -x \rfloor = -1 - \lfloor x \rfloor,$$

d'où

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1.$$

■

1.2 La structure multiplicative des entiers

1.2.1 Divisibilité

Définition 2. *Soit* $a, b \in \mathbb{Z}$ *avec* $a \neq 0$*, on dit que* a *divise* b *et on écrit* $a|b$ *si* $\dfrac{b}{a} \in \mathbb{Z}$*, c'est-à-dire si il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $b = ak$*.*
Dans ce cas, on dit aussi que b *est divisible par* a*, ou que* a *est un diviseur de* b *ou que* b*. est un multiple de* a*.*

Lemme 1. *Soit* $(a, b) \in Z^2$ *avec* $a \neq 0$*.*
Si $a|b$ *et* $a|c$*, alors* $a|(bu + cv)$ *pour tout* $(u, v) \in Z$

Preuve 3.
Si $a|b$ *et* $a|c$ *implique* $b = ka$ *et* $c = k'a$ *tel que* $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$*, donc*

$$\begin{aligned} bu + cv &= kau + k'av \\ &= a\underbrace{(ku + k'v)}_{=M\in\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Depuis $ku + k'v$ *est un entier alors* a *divise* $bu + cv$*.* ■

Lemme 2. *(Division euclidienne).*
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a \neq 0$, il existe $q, r \in \mathbb{Z}$ uniques tels que

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < |b|.$$

Les nombres q et r sont appelés le quotient et le reste de la division de b par a, respectivement.

Preuve 4.
Supposant il existe deux couples (q, r) et (q', r') tels que

$$\left.\begin{array}{l} a = bq + r \\ a = bq' + r' \end{array}\right\} \Rightarrow b(q - q') = r' - r.$$

Alors, $|b(q - q')| = |r' - r| \Rightarrow |b|.|q - q'| = |r' - r| < |b|$.
Autrement dit $|b|.|q - q'| < |b| \Rightarrow 0 \leq |q - q'| < 1$, donc $|q - q'| = 0 \Leftrightarrow q - q' = 0$, autrement dit $q = q'$.
Maintenant on montre que $r = r'$, déjà on a $b(q - q') = r' - r$ et comme $q = q'$ on trouve $r' - r = 0 \Rightarrow r = r'$.
D'où il existe $q, r \in \mathbb{Z}$ uniques tels que

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < |b|.$$

$\blacksquare$

Définition 3. *Soit $n > 1$, un entier n est appelé composé si il existe deux entiers positifs a et b tels que $n = ab$.*
Un entier $n > 1$ est dit premier s'il n'est pas composé, i.e, le nombre de ces diviseurs égal à 2.

Théoréme 1. *Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ qui ne sont pas les deux égaux à zéro. Alors, le plus grand commun diviseur de a et b est une combinaison linéaire de a et b, i.e, il existe deux entiers u et v tels que*

$$pgcd(a, b) = au + bv.$$

Preuve 5.
Le cas où $a = 0$ ou $b = 0$ est facile $pgcd(0; b) = b = 0 + b.1$.
Supposons maintenant que a et b ne sont pas zéro. Sans perde de généralité, on peut supposer que $a, b \in \mathbb{N}$.
Donc, en utilisant la notation au-dessus, on a que $pgcd(a, b) = b_n$, où

$$\begin{aligned} b_0 &= b_1q_1 + b_2 \\ b_1 &= b_2q_2 + b_3 \\ b_2 &= b_3q_3 + b_4 \\ &\vdots \\ b_{n-4} &= b_{n-3}q_{n-3} + b_{n-2} \\ b_{n-3} &= b_{n-2}q_{n-2} + b_{n-1} \\ b_{n-2} &= b_{n-1}q_{n-1} + b_n. \end{aligned}$$

Avec $b_0 = b$ *et* $b_1 = a$, $pgcd(a,b) = b_n = b_{n-2} - b_{n-1}q_{n-1}$ *est une combinaison linéaire de* b_{n-1} *et de* b_{n-2}.
Puisque, $b_{n-1} = b_{n-3} - b_{n-2}q_{n-2}$ *est une combinaison linéaire de* b_{n-2} *et de* b_{n-3}, *on trouve que* $pgcd(a,b)$ *a la même propriété. On continue en remplaçant* b_{n-2} *par* $b_{n-4} - b_{n-3}q_{n-3}$ *pour trouver que* $pgcd(a,b)$ *est une combinaison linéaire de* b_{n-3} *et de* b_{n-4}. *De façon inductive, on conclut que* $pgcd(a,b)$ *est une combinaison linéaire de* b_0 *et de* b_1, *comme affirmé.* ■

Exemple 1.

> *Calculer* $pgcd(88,27)$
> *Avec l'algorithme d'Euclide j'obtiens :*
> $88 = 27 \times 3 + 1$
> $27 = 7 \times 3 + 6$
> $7 = 6 \times 1 + 1$
> $6 = 6 \times 1 + 0.$
> *Donc* $pgcd(88,27) = 1 = 7 - 6 = 7 - (27 - 7 \times 3) = 7 \times 4 - 27 = (88 - 3 \times 27) \times 4 - 27 = 88 \times 4 - 27 \times 13.$

Théoréme 2. *(Bézout)*
Deux entiers positifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe deux entiers u et v tels que $ua + vb = 1$, *i.e*

$$pgcd(a,b) = 1 \Leftrightarrow ua + vb = 1.$$

Preuve 6.

- *L'implication* $pgcd(a,b) = 1 \Rightarrow ua + vb = 1$ *ci clair (par le théorème 1 d=1).*

- *On montre maintenant que* $ua + vb = 1 \Rightarrow pgcd(a,b) = 1$. *Supposons que il existe* $u, v \in \mathbb{Z}$ *tel que* $ua + vb = 1$ *et on montre que* $pgcd(a,b) = 1$.
  Soit $pgcd(a,b) = d$, $d \in \mathbb{Z}$, *on a*
  $$\begin{aligned} pgcd(a,b) = d &\Rightarrow d|a \quad et \quad d|b \\ &\Rightarrow d|au + bv \qquad (u,v) \in \mathbb{Z} \quad (par\ le\ lemme\ 1) \\ &\Rightarrow d|1 \\ &\Rightarrow d = 1. \end{aligned}$$
  Donc $pgcd(a,b) = 1$. ■

Théoréme 3. *(Gausse)*
Soient a, b *et* c *des entiers tels que a et b sont premiers entre eux. Si a divise bc, alors a divise c.*

Preuve 7.
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 - \{0,0,0\}$, *on a*

$$a|bc \quad \Rightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ bc = ak$$

et a et b sont premiers entre eux ça veux dire pgcd(a,b)=1, alors par le théorème de Bézout il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ *telle que*

$$ua + vb = 1.$$

En multipliant cette dernière égalité par c , on obtient

$$\begin{aligned} acu + bcv &= c \qquad \text{mais } bc = ak, \\ acu + kav &= c \\ a(cu + kv) &= c. \end{aligned}$$

Donc a divise c $\quad$ *(car* $(cu + kv) = k' \in \mathbb{Z}$*)*. ■

1.2.2 Congruences

Définition 4. *Soient a et b deux entiers et n entier naturel.*
On dit que a est congru à b modulo n ou que a et b sont congrus modulo n si : a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.
On écrit

$$a \equiv b[n] \quad ou \quad b \equiv a[n].$$

Remarque 1. *On peut utilisé la notation suivante* $a \equiv b mod(n)$ *à la place de* $a \equiv b[n]$.

Lemme 3. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On dit que deux nombres* $a, b \in \mathbb{Z}$ *sont congruents modulo n si et seulement si* $n|(a-b)$, *i.e*

$$a \equiv b[n] \Leftrightarrow n|(a-b).$$

Preuve 8.
1) Soient a et b congrus modulo n. Il existe q, q' *et* r *entiers tels que* $a = n.q + r$ *et* $b = n.q' + r$ *avec* $0 \leq r < n$ *et b.*
D'où $a - b = n.q - n.q' = n.(q - q')$, *donc n divise* $(a - b)$.
2) Supposons que n divise $(a - b)$. *Alors il existe un entier k tel que* $a - b = nk$.
Soit r le reste dans la division euclidienne de a par n : $a = n.q + r$ *avec* $0 \leq r < n$.
Alors $b = a - nk = n.(q - k) + r$ *avec* $0 \leq r < n$ *et* $q - k$ *entier, donc r est le reste dans la division euclidienne de b par n. D'où a et b ont le même reste donc* $a \equiv b[n]$. ■

Définition 5. *Une partie S de* $\mathbb{Z}$ *est un système de résidus complet mod n si et seulement si*

(i) S à n élément,

(ii) Si a_i,$a_j \in S$ *alors* $a_i \not\equiv a_j[n]$ *pour tout* $i \neq j$.

Exemple 2.

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *l'ensemble* $\{0, 1, \ldots n - 1\}$ *est un système complet de résidus modulo n.*

2. *$\{0,1,2,3\}$ est un système complète de résidus modulo 4. D'autres systèmes complets de résidus modulo 4 sont : $\{1,2,3,4\}$; $\{13,14,15,16\}$; $\{-2,-1,0,1\}$; $\{-13,4,17,18\}$; $\{31,36,41,46\}$.*

3. *Les deux ensembles suivants ne sont pas des systèmes de résidus complet modulo 4 :*
   (a) *$\{-5,0,6,22\}$ car 6 est congru à 22 modulo 4.*

   (b) *$\{5,15\}$ car un système complet de résidus modulo 4 contient exactement 4 éléments.*

Lemme 4. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a,b \in \mathbb{Z}$. Si $PGCD(a,n)=1$, alors l'ensemble*

$$\{aj+b : 0 \leq j \leq n-1\}$$

est un système complet de résidus modulo n.

Preuve 9.
Il suffit de montrer que si $aj+b \equiv aj'+b[n]$ et $0 \leq j,j' \leq n-1$, alors $j=j'$.
En effet, on a que $n|(aj+b)-(aj'+b) = a(j-j')$. Puisque $PGCD(a,n)=1$, alors par le théorème de Gausse $n|(j-j')$.
Mais $|j-j'| \leq n-1$, donc $j-j' \in [-(n-1), n-1]$, et comme $n|(j-j')$, alors $j-j'=0$, d'où $j=j'$. ■

1.3 Identité de Hermite

Théoréme 4. *Soit x un nombre réel. Pour tout entier $n \geq 1$, on a*

$$\lfloor nx \rfloor = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor . \tag{1.1}$$

Preuve 10.
Soit $f(x)$ la différence entre le côté droit et le côté gauche de (1.1)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor .$$

Pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
f\left(x+\frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{1}{n}+\frac{k}{n}\right\rfloor - \left\lfloor n\left(x+\frac{1}{n}\right)\right\rfloor \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k+1}{n}\right\rfloor - \lfloor nx+1\rfloor \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor - \lfloor nx+1\rfloor \\
&= \lfloor x+1\rfloor + \sum_{k=1}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor - \lfloor nx+1\rfloor
\end{aligned}$$

et comme pour tout réel z *et pour tout entier* k, *on a*

$$\lfloor z+k\rfloor = \lfloor z\rfloor + k.$$

Alors

$$\begin{aligned}
f\left(x+\frac{1}{n}\right) &= \lfloor x\rfloor + 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor - \lfloor nx\rfloor - 1 \\
&= \lfloor x\rfloor + \sum_{k=1}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor - \lfloor nx\rfloor \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor - \lfloor nx\rfloor \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

D'où , $f\left(x+\frac{1}{n}\right) = f(x)$.
Cette dernière formule montre que la fonction f *est* $\frac{1}{n}$*- périodique, alors il suffit de prouver qu'elle est nulle sur l'intervalle* $\left[0, \frac{1}{n}\right[$. *Remarquons tout d'abord que*

$$0 \leq \frac{k}{n} \leq 1-\frac{1}{n} \Longrightarrow 0 \leq x \leq \frac{k}{n}+x < 1-\frac{1}{n}+x,$$

donc, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right[$ *on a*

$$1-\frac{1}{n}+x < 1 \Longrightarrow 0 \leq \frac{k}{n}+x < 1.$$

Par suite,

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant x < \frac{1}{n} \\ 0 \leqslant k \leqslant n-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant x < \frac{1}{n} \\ 0 \leqslant \frac{k}{n} \leqslant 1-\frac{1}{n} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant nx < 1 \\ 0 \leqslant x+\frac{k}{n} < 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lfloor nx\rfloor = 0 \\ \left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor = 0. \end{array}\right.$$

D'où, $f(x) = 0$ *sur* $\left[0, \dfrac{1}{n}\right[$, *donc pour tout réel* $x, f(x) = 0$. *Par conséquent*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor .$$

■

Exemple 3.

Prouver que $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor \geq \lfloor x + y \rfloor + \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.
Il faut admettre qu'il existe des moyens plus simples de prouver cette inégalité.
Par l'identité d'Hermite n $= 2$ *on a pour tout réel* x $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.*Alors*

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor + \lfloor y \rfloor + \left\lfloor y + \frac{1}{2} \right\rfloor \geq \lfloor x + y \rfloor + \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \Rightarrow \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor y + \frac{1}{2} \right\rfloor \geq \lfloor x + y \rfloor$$

et on a $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ *et* $y = \lfloor y \rfloor + \{y\}$, *donc*

$$\left\lfloor \lfloor x \rfloor + \{x\} + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \lfloor y \rfloor + \{y\} + \frac{1}{2} \right\rfloor \geq \lfloor \lfloor x \rfloor + \{x\} + \lfloor y \rfloor + \{y\} \rfloor.$$

Maintenant il suffit de montrer que

$$\left\lfloor \{x\} + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \{y\} + \frac{1}{2} \right\rfloor \geq \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor.$$

Par symétrie, on peut supposer que $\{x\} \geq \{y\}$. *Notez que* $0 \leq \{x\} < 1$, *donc*
$2\{x\} \geq \{y\} + \{x\} \Rightarrow \lfloor 2\{x\} \rfloor \geq \lfloor \{y\} + \{x\} \rfloor$.
Alors, $\lfloor 2\{x\} \rfloor = \lfloor \{x\} \rfloor + \lfloor \{x\} + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor \{x\} + \frac{1}{2} \rfloor \geq \lfloor \{y\} + \{x\} \rfloor$.
D'où

$$\left\lfloor \{x\} + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \{y\} + \frac{1}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \{x\} + \frac{1}{2} \right\rfloor \geq \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor.$$

Par conséquent

$$\left\lfloor \{x\} + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \{y\} + \frac{1}{2} \right\rfloor \geq \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor.$$

Exemple 4.

Soit x *est un nombre réel pour lequel*

$$\left\lfloor x + \frac{14}{100} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{15}{100} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{16}{100} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{84}{100} \right\rfloor = 614.$$

Trouvons $\lfloor 100x \rfloor$.

La somme donnée à exactement $84 - 14 + 1 = 71$ *termes, dont chacun est égal* $\lfloor x \rfloor$ *ou* $\lfloor x \rfloor + 1$*, si tous les termes sont égaux à* 8*, la somme totale est* $8 \times 71 = 568 < 614$*, si tous les termes sont égaux à* 9*, la somme totale est* $9 \times 71 = 639 > 614$*. Donc certains termes prennent la valeur* 8 *et les autres en prennent* 9*.*
Ça signifie $\lfloor x \rfloor = 8$*, supposons que les premiers termes* i *prennent la valeur* 8 *et les autres termes* $71 - i$ *prennent la valeur* 9*. Alors,* $8i + 9(71 - i) = 614$*, résoudre cela, obtient* $i = 25$*.*
Cela signifie que $\lfloor x + \frac{38}{100} \rfloor = 8$ *et* $\lfloor x + \frac{39}{100} \rfloor = 9$*.*
Donc

$$\begin{aligned}\lfloor 100x \rfloor &= \lfloor x \rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{38}{100} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{39}{100} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{99}{100} \right\rfloor \\ &= 39\ .\ 8 + 61\ .\ 9 \\ &= 861.\end{aligned}$$

Exemple 5.

Soit $x \in \mathbb{R}$*, montrons que*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{x + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Si on prendre $n = 2$ *dans l'identité d'Hermite ce qui donne*

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor,$$

ou

$$\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor.$$

Cela nous permet d'écrire l'égalité

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor &= \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\left\lfloor \frac{x}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} \right\rfloor \right) \\ &= \lfloor x \rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^2} \right\rfloor \ldots + \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2^{n+1}} \right\rfloor \\ &= \lfloor x \rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2^{n+1}} \right\rfloor.\end{aligned}$$

Donc si n *tend vers l'infini, alors*

$$\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exemple 6.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que n vérifier $(\frac{1}{3} - \frac{n}{3^{k+1}}) \notin \mathbb{Z}$.
Évaluons la différence :

$$\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{3^k + n}{3^{k+1}} \right\rfloor - \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{3^k - n}{3^{k+1}} \right\rfloor.$$

On peut écrire chaque terme de la différence en question comme

$$\left\lfloor \frac{1}{3} + v_k \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1}{3} - v_k \right\rfloor \quad \text{tel que} \quad v_k = \frac{n}{3^{k+1}},$$

et comme on a

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1, & \text{si } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Alors, $\forall x \notin \mathbb{Z} : \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1 \Leftrightarrow -\lfloor x \rfloor = \lfloor -x \rfloor + 1$, et comme $\underbrace{\frac{1}{3} - v_k}_{x}$ n'est jamais un entier, donc on peut écrire la différence comme suivant :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\left\lfloor v_k + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor v_k - \frac{1}{3} \right\rfloor + 1 \right).$$

En prend $n = 3$ dans l'identité d'Hermite, alors

$$\begin{aligned} \lfloor 3x \rfloor &= \sum_{k=0}^{2} \left\lfloor x + \frac{k}{3} \right\rfloor \\ &= \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Remplaçons $x = v - \dfrac{1}{3}$
$\lfloor 3v - 1 \rfloor = \left\lfloor v - \frac{1}{3} \right\rfloor + \lfloor v \rfloor + \left\lfloor v + \frac{1}{3} \right\rfloor \Leftrightarrow \lfloor 3v \rfloor - \lfloor v \rfloor = \left\lfloor v + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor v - \frac{1}{3} \right\rfloor + 1.$
Par conséquent, la différence entre les nombres ce qui donne

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \left(\left\lfloor \frac{1}{3} + v_k \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1}{3} - v_k \right\rfloor \right) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\left\lfloor v_k + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor v_k - \frac{1}{3} \right\rfloor + 1 \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\lfloor 3v_k \rfloor - \lfloor v_k \rfloor \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\left\lfloor \frac{n}{3^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{3^{k+1}} \right\rfloor \right) \\ &= \lfloor n \rfloor - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3^2} \right\rfloor - \ldots - \left\lfloor \frac{n}{3^{n+1}} \right\rfloor \\ &= n - \left\lfloor \frac{n}{3^{n+1}} \right\rfloor \end{aligned}$$

et comme $n < 3^{n+1}$, alors $\left\lfloor \frac{n}{3^{n+1}} \right\rfloor = 0$, *donc*

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\left\lfloor \frac{1}{3} + v_k \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1}{3} - v_k \right\rfloor \right) = n.$$

Exemple 7 (1985 AIME Problems)**.**
Combien des 1000 premiers entiers positifs peuvent être exprimés sous la forme

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor \tag{1.2}$$

où x est un nombre réel

Soit $f(x) = \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor$. Remarquons que pour tout entier positif $n \geq 1$. Alors

$$f(x+n) = f(x) + 20n. \tag{1.3}$$

On sait que $\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$, alors on écrit $f(x)$ comme suit

$$\begin{aligned} f(x) =& 4\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{8} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{6} \right\rfloor + 2\left\lfloor x + \frac{1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{3}{8} \right\rfloor + 4\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{5}{8} \right\rfloor \\ & + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor + 2\left\lfloor x + \frac{3}{4} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{5}{6} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{7}{8} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Dans cette somme il y a 12 termes, on utilise l'identité d'Hermite sur cette somme comme suit

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \tfrac{1}{2} \rfloor = \begin{cases} 0 & si\ x = \left\{\frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}\right\} \\ 1 & si\ x = \left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}\right\} \\ 2 & si\ x = 1 \end{cases}$$

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \tfrac{1}{4} \rfloor + \lfloor x + \tfrac{2}{4} \rfloor + \lfloor x + \tfrac{3}{4} \rfloor = \begin{cases} 0 & si\ x = \left\{\frac{1}{8}, \frac{1}{6}\right\} \\ 1 & si\ x = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}\right\} \\ 2 & si\ x = \left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}\right\} \\ 3 & si\ x = \left\{\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}\right\} \\ 4 & si\ x = 1 \end{cases}$$

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \tfrac{1}{6} \rfloor + \lfloor x + \tfrac{2}{6} \rfloor + \lfloor x + \tfrac{3}{6} \rfloor + \lfloor x + \tfrac{4}{6} \rfloor + \lfloor x + \tfrac{5}{6} \rfloor = \begin{cases} 0 & si\ x = \left\{\frac{1}{8}\right\} \\ 1 & si\ x = \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right\} \\ 2 & si\ x = \left\{\frac{3}{8}, \frac{1}{3}\right\} \\ 3 & si\ x = \left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right\} \\ 4 & si\ x = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right\} \\ 5 & si\ x = \left\{\frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right\} \\ 6 & si\ x = 1 \end{cases}$$

$$\lfloor x\rfloor+\lfloor x+\tfrac{1}{8}\rfloor+\lfloor x+\tfrac{2}{8}\rfloor+\lfloor x+\tfrac{3}{8}\rfloor+\lfloor x+\tfrac{4}{8}\rfloor+\lfloor x+\tfrac{5}{8}\rfloor+\lfloor x+\tfrac{6}{8}\rfloor+\lfloor x+\tfrac{7}{8}\rfloor=\begin{cases}1 & si\ x=\left\{\frac{1}{8},\frac{1}{6}\right\}\\ 2 & si\ x=\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right\}\\ 3 & si\ x=\left\{\frac{3}{8}\right\}\\ 4 & si\ x=\left\{\frac{1}{2}\right\}\\ 5 & si\ x=\left\{\frac{5}{8},\frac{2}{3}\right\}\\ 6 & si\ x=\left\{\frac{3}{4},\frac{5}{6}\right\}\\ 7 & si\ x=\left\{\frac{7}{8}\right\}\\ 8 & si\ x=1.\end{cases}$$

Car on peut l'attention pour déterminer lesquels des 20 premiers entiers positifs sont générés par $f(x)$ lorsque x varie sur l'intervalle $]0,1]$.
Plus remarquant que si la valeur de x est élevée, la valeur de $f(x)$ change uniquement lorsque les valeurs $2x, 4x, 6x$ ou $8x$ atteints une valeur intégrale, et que le changement de $f(x)$ est toujours à une nouvelle valeur plus élevée dans l'intervalle $]0,1]$, de tels changements se produisent précisément lorsque x est de la forme $\frac{m}{n}$, où $1\leq m\leq n$ et $n=2,4,6,$ ou 8.
Il existe donc 12 de ces fractions ; par ordre croissant, ils sont

$$\frac{1}{8},\frac{1}{6},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{3}{8},\frac{1}{2},\frac{5}{8},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{5}{6},\frac{7}{8}\quad ou\quad 1.$$

$$Donc,\ f(x)=\begin{cases}1 & si\ x=\left\{\frac{1}{8}\right\}\\ 2 & si\ x=\left\{\frac{1}{6}\right\}\\ 4 & si\ x=\left\{\frac{1}{4}\right\}\\ 5 & si\ x=\left\{\frac{1}{3}\right\}\\ 6 & si\ x=\left\{\frac{3}{8}\right\}\\ 10 & si\ x=\left\{\frac{1}{2}\right\}\\ 11 & si\ x=\left\{\frac{5}{8}\right\}\\ 12 & si\ x=\left\{\frac{2}{3}\right\}\\ 14 & si\ x=\left\{\frac{3}{4}\right\}\\ 15 & si\ x=\left\{\frac{5}{6}\right\}\\ 16 & si\ x=\left\{\frac{7}{8}\right\}\\ 20 & si\ x=1.\end{cases}$$

Par conséquent, seuls 12 des 20 premiers entiers positifs peuvent être représentés sous la forme 1.2, et comme on a $1000=50.20$, et par 1.3 (ça veut dire pour tout x varie sur l'intervalle $]n,n+1]$ avec $n=0,1,2,\ldots,$ on trouve exactement 12 nombres positives), cela implique que dans chacune des 50 groupes de 20 entiers consécutifs, seulement 12 peuvent être ainsi exprimés.
D'où $\dfrac{12}{20}\times 1000=600$. C'est ce qui est demandé.

CHAPITRE 2

GÉNÉRALITÉ DE L'IDENTITÉ D'HRMITE ET APPLICATIONS

Dans ce chapitre, nous commençons par des simples généralisations de l'identité d'Hermite. Puis nous étendons ces généralisations à ce dernier et nous appliquons une des théorèmes que nous mentionnerons dans ce chapitre sur la somme $S_{a,b,m}(N) = \sum_{k=0}^{N} f_{a,b,m}(k)$ introduite par Jacobsthal [7] et généralisée par Tverberg [14] pour prouver cette inégalité $S_{a,b,m}(N) \geq 0$ pour tout $N \geq 1$, tel que :

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \; et \; m \in \mathbb{Z}^* \quad f_{a,b;m}(k) = \left\lfloor \frac{a+b+k}{m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a+k}{m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{b+k}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor .$$

Sachant que Jacobsthal a obtenu les bornes inférieures et supérieures de $S_{a,b,m}(N)$:

$$0 \leq S_{a,b,m}(N) \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor .$$

Il existe une méthode analytique pour démontrer $S_{a,b,m}(N) \geq 0$, mais nous utilisons ce que nous étudions dans ce chapitre pour démontrer ceci.

2.1 Simple généralisation de l'identité d'Hermite

Théoréme 5. *Soit* $x \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{Z}$ *et* $0 \leq m \leq n$. *Alors*

$$\sum_{0 \leq k \leq m-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \max\{m\lfloor x \rfloor, m\lfloor x \rfloor + m - n + \lfloor n\{x\} \rfloor\}. \tag{2.1}$$

Preuve 11.
Il y a deux cas pour le nombre m, *le cas* $m = 0$ *et le cas* $m \geq 1$. *Donc pour le cas* $m = 0$, *la somme* $\sum_{0 \leq k \leq m-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor$ *est une somme vide et donc égale à 0. Le deuxième terme aussi égal à* 0 *car* $n\{x\} < n$.
Pour le cas $m \geq 1$, *la définition de* $\{x\}$ *et la proposition 1, donnent*

$$\left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \lfloor x \rfloor + \{x\} + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{n\{x\} + k}{n} \right\rfloor,$$

et aussi

$$\sum_{0 \leq k \leq m-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = m\lfloor x \rfloor + \sum_{0 \leq k \leq m-1} \left\lfloor \frac{n\{x\} + k}{n} \right\rfloor,$$

et comme $0 \leq n\{x\} < n$, *alors il existe un entier* $r \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ *tel que* $r \leq n\{x\} < r + 1$. *D'autre part, par la définition de la partie entière, on a* $r = \lfloor n\{x\} \rfloor$.
Pour $0 \leq k \leq m-1$, *on a*

$$0 \leq \frac{k}{n} \leq \frac{n\{x\} + k}{n} < \frac{n + k}{n} < 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Donc, $\left\lfloor \frac{n\{x\} + k}{n} \right\rfloor = 0$ *ou* 1. *i.e,* $\left\lfloor \frac{n\{x\} + k}{n} \right\rfloor = 1 \Longleftrightarrow \frac{n\{x\} + k}{n} \geq 1.$
Si $k \geq n - r$, *alors*

$$2 > \frac{n\{x\} + k}{n} \geq \frac{n + n\{x\} - r}{n} \geq 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq k < m \leq n.$$

Si $k < n - r$, *alors*

$$0 \leq \frac{n\{x\} + k}{n} \leq \frac{n\{x\} + n - r - 1}{n} < 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq k < m \leq n.$$

Donc,

$$\begin{cases} \left\lfloor \dfrac{n\{x\} + k}{n} \right\rfloor = 1 & \text{si et seulement si } k \geq n - r \\[2ex] \left\lfloor \dfrac{n\{x\} + k}{n} \right\rfloor = 0 & \text{si et seulement si } k < n - r. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{n\{x\} + k}{n} \right\rfloor = \sum_{k=n-r}^{m-1} 1 = \begin{cases} m - n + r, & \text{si } m \geq n - r + 1 \\ 0, & \text{si } m \leq n - r (0 \leq k \leq m - 1 \leq n - r - 1 < n - r). \end{cases}$$

Donc, si $m-n+r \geq 1$ *on a* $\sum_{0\leq k\leq m-1} \left\lfloor x+\frac{k}{n} \right\rfloor = m\lfloor x\rfloor + m - n + r$ *et si* $m-n+r \leq 0$, *on a* $\sum_{0\leq k\leq m-1} \left\lfloor x+\frac{k}{n} \right\rfloor = m\lfloor x\rfloor$. *Par conséquent*

$$\sum_{0\leq k\leq m-1} \left\lfloor x+\frac{k}{n} \right\rfloor = \max\{m\lfloor x\rfloor, m\lfloor x\rfloor + m - n + \lfloor n\{x\}\rfloor\}.$$

■

Remarque 2. *En particulier, si* $m = n$ *sont des entiers positifs, alors l'égalité 2.1 est identique à l'identité d'Hermite. En effet, si on a* $m = n$, *alors peut écrivons*

$$\begin{aligned}\sum_{0\leq k\leq m-1} \left\lfloor x+\frac{k}{m} \right\rfloor &= \max\{m\lfloor x\rfloor, m\lfloor x\rfloor + \lfloor m\{x\}\rfloor\}\\ &= \max\{m\lfloor x\rfloor, \lfloor m(\lfloor x\rfloor + \{x\})\rfloor\}\\ &= \max\{m\lfloor x\rfloor, \lfloor mx\rfloor\},\end{aligned}$$

et comme on a par la définition de la partie fractionnaire $m\lfloor x\rfloor = mx - m\{x\}$ *et* $\lfloor mx\rfloor = mx - \{mx\}$, *mais on a* $m\{x\} \geq \{mx\}$. *Donc*

$$\begin{aligned}\sum_{0\leq k\leq m-1} \left\lfloor x+\frac{k}{m} \right\rfloor &= \max\{m\lfloor x\rfloor, \lfloor mx\rfloor\}\\ &= \lfloor mx\rfloor.\end{aligned}$$

Remarque 3. *On peut étendre le théorème précédent comme suit.*

Théoréme 6. *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *et* $n, m \in \mathbb{N}$ $(n > 0)$. *Alors*

$$\begin{aligned}\sum_{0\leq k\leq m-1} \left\lfloor x+\frac{k}{n} \right\rfloor =& \frac{n}{2}\left\lfloor \frac{m}{n}\right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{m}{n}\right\rfloor - 1\right) + \left\lfloor \frac{m}{n}\right\rfloor \lfloor nx\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{n}\right\rfloor r\\ &+ \max\{r\lfloor x\rfloor, r\lfloor x\rfloor + r - n + \lfloor n\{x\}\rfloor\},\end{aligned} \tag{2.2}$$

oú $r = m - n\left\lfloor \frac{m}{n}\right\rfloor$ *est le reste de la division de* m *par* n.

Preuve 12.
- *Si* $m < n$, *alors* $\lfloor \frac{m}{n}\rfloor = 0$, $r = m$, *et donc on tombe sur le dernier théorème.*
- *Si* $m = n$ $(\lfloor \frac{m}{n}\rfloor = 1)$, *alors* $r = 0$ *et le terme droite dans l'égalité 2.2 est égale à* $\lfloor nx\rfloor + \max\{0, -n + \lfloor n\{x\}\rfloor\} = \lfloor nx\rfloor$.

Les deux conditions précédentes sont montrer que si $m \leq n$, *alors l'égalité 2.2 se réduit à l'égalité 2.1. Maintenant*
- *Si* $m > n$, *par l'algorithme de division euclidienne, il existe* $q \in \mathbb{N}$ *et* $r \in \mathbb{Z}$ *tell que* $m = qn + r$ *et* $0 \leq r < n$. *Alors,* $\lfloor \frac{m}{n}\rfloor = \lfloor q + \frac{r}{n}\rfloor = q + \lfloor \frac{r}{n}\rfloor = q$ *et* $r = m - nq = m - n\lfloor \frac{m}{n}\rfloor$

$$\begin{aligned} et\ \ k \in [0; m-1] &= [0; (qn+r)-1] \\ &= [0; qn-1] \cup [nq; nq+r-1] \\ &= [0; \ldots; n-1] \cup [n; n+1; \ldots; 2n-1] \cup [2n; 2n+1; \ldots; 3n-1] \\ &\cup \ldots \cup [(q-1)n; (q-1)n+1; \ldots; \underbrace{(q-1)n+n-1}_{=qn-1}] \cup [qn; qn+r-1]. \end{aligned}$$

Donc, soit $0 \leq \ell \leq q-1$ *on a*

$$\begin{aligned} \sum_{0\leq k\leq m-1} \left\lfloor x+\frac{k}{n} \right\rfloor &= \sum_{0\leq k\leq qn+r-1} \left\lfloor x+\frac{k}{n} \right\rfloor \\ &= \sum_{\ell=0}^{q-1} \sum_{\ell n\leq k\leq (\ell+1)n-1} \left\lfloor x+\frac{k}{n} \right\rfloor + \sum_{qn\leq k\leq qn+r-1} \left\lfloor x+\frac{k}{n} \right\rfloor. \end{aligned}$$

On change k *par* $k+\ell n$ *dans la première somme et* k *par* $k+qn$ *dans la deuxième somme sur le côté droit de l'équation ci-dessus, on obtient*

$$\sum_{0\leq k\leq m-1} \left\lfloor x+\frac{k}{n} \right\rfloor = \sum_{\ell=0}^{q-1} \sum_{0\leq k\leq n-1} \left\lfloor x+\frac{k+\ell n}{n} \right\rfloor + \sum_{0\leq k\leq r-1} \left\lfloor x+\frac{k+qn}{n} \right\rfloor \tag{2.3}$$

avec $\left\lfloor x+\frac{k+\ell n}{n} \right\rfloor = \left\lfloor x+\frac{k}{n}+\ell \right\rfloor = \ell + \left\lfloor x+\frac{k}{n} \right\rfloor$ $(\forall x \in \mathbb{R}, \ell \in \mathbb{N})$, *et par le théorème 5 avec* $m = n$ *la première somme sur le côté droit de l'égalité 2.3 est devenue comme suit*

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{q-1} \sum_{0\leq k\leq n-1} \left\lfloor x+\frac{k+\ell n}{n} \right\rfloor &= \sum_{\ell=0}^{q-1} \left(\sum_{0\leq k\leq n-1} \ell + \overbrace{\sum_{0\leq k\leq n-1} \left\lfloor x+\frac{k}{n} \right\rfloor}^{l'identitd'Hermite} \right) \\ &= \sum_{\ell=0}^{q-1} (n\ell + \lfloor nx \rfloor) = \frac{nq(q-1)}{2} + q\lfloor nx \rfloor \end{aligned} \tag{2.4}$$

et on a $\left\lfloor x+\frac{k+qn}{n} \right\rfloor = q + \left\lfloor x+\frac{k}{n} \right\rfloor, \forall x \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{N}$ *et par le théorème 5* $(r < n)$ *la deuxième somme sur le côté droit de l'égalité 2.3 peut également est devenue comme suit*

$$\begin{aligned} \sum_{0\leq k\leq r-1} \left\lfloor x+\frac{k+qn}{n} \right\rfloor &= \sum_{0\leq k\leq r-1} \left(q + \left\lfloor x+\frac{k}{n} \right\rfloor \right) \\ &= qr + \overbrace{\sum_{0\leq k\leq r-1} \left\lfloor x+\frac{k}{n} \right\rfloor}^{r<n} \\ &= qr + \max\{r\lfloor x \rfloor, r\lfloor x \rfloor + r - n + \lfloor n\{x\} \rfloor\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Puis, en remplaçant l'égalité 2.4 ,2.5 dans l'éalité 2.3 ce qui donne

$$\sum_{0\leq k\leq m-1} \left\lfloor x+\frac{k}{n} \right\rfloor = \frac{n}{2}q(q-1) + q\lfloor nx \rfloor + qr + \max\{r\lfloor x \rfloor, r\lfloor x \rfloor + r - n + \lfloor n\{x\} \rfloor\}.$$

Sachant que $q = \lfloor \frac{m}{n} \rfloor$ *et* $r = m - n \lfloor \frac{m}{n} \rfloor$ *est le reste de la division euclidienne de* m *par* n*. D'où*

$$\sum_{0 \leq k \leq m-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \frac{n}{2} \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor - 1 \right) + \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor \lfloor nx \rfloor + \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor r + \max\{r\lfloor x \rfloor, r\lfloor x \rfloor + r - n + \lfloor n\{x\} \rfloor\}.$$

■

Corollaire 1. *Soient* $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*, a, b \in \mathbb{Z}$ *et* $a < b$*. Alors*

$$\sum_{a \leq k < b} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \frac{n}{2} \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor - 1 \right) + \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor r + \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor \lfloor nx \rfloor + \max \left\{ r \left\lfloor x + \frac{a}{n} \right\rfloor, r \left\lfloor x + \frac{a}{n} \right\rfloor + r - n + \left\lfloor n \left\{ x + \frac{a}{n} \right\} \right\rfloor \right\}.$$

Théoréme 7. *Soient* $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$*. Supposons que l'ensemble* $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ *est un système complet de résidus modulo* n*. Alors*

$$\sum_{0 \leq k \leq n-1} \left\lfloor x + \frac{a_k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor - \frac{n-1}{2} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k.$$

En particulier, si $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$*, alors c'est la même chose que l'identité d'Hermite. Car,* $\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{n}{2}(n-1)$*).*

Preuve 13.

Peut supposer que pour chaque $k = 0, 1, \ldots, n-1$*, on a,* $a_k \equiv k[n]$ *si et seulement si* a_k *et* k *ont le même reste lorsqu'ils sont divisés par* n*.*

Alors, $a_k = qn + k \Rightarrow \frac{a_k - k}{n} = q$*,* q *est un entier tel que* $0 \leq q < n$ *et par la proposition* 1 *on trouve*

$$\left\lfloor x + \frac{a_k}{n} \right\rfloor = \left\lfloor x + \frac{a_k}{n} + \frac{k}{n} - \frac{k}{n} \right\rfloor = \frac{a_k - k}{n} + \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor \qquad \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*.$$

De cela et du théorème 5 $(m = n)$*, alors*

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k \leq n-1} \left\lfloor x + \frac{a_k}{n} \right\rfloor &= \sum_{0 \leq k \leq n-1} \left(\frac{a_k - k}{n} + \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{0 \leq k \leq n-1} (a_k - k) \right) + \overbrace{\sum_{0 \leq k \leq n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor}^{l'identitd'Hermite} \\ &= \lfloor nx \rfloor - \frac{n-1}{2} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Corollaire 2. *Soient $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et pgcd$(a,n) = 1$. Alors*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{ka}{n} \right\rfloor = \frac{(a-1)(n-1)}{2} + \lfloor nx \rfloor.$$

En particulier, on trouve l'identité d'Hermite si $a = 1$.

Preuve 14.
Soit pgcd$(a,n) = 1$, alors l'ensemble $\{ka : \ k = 0,1,2,\ldots,n-1\}$ est un système complet de résidus modulo n (par le lemme 4 avec $b = 0$), et par le théorème 7 on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{0\leq k\leq n-1} \left\lfloor x + \frac{ka}{n} \right\rfloor &= \lfloor nx \rfloor - \frac{n-1}{2} + \frac{a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= \lfloor nx \rfloor - \frac{n-1}{2} + \frac{a}{2}(n-1) \\ &= \lfloor nx \rfloor + \frac{(a-1)(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

■

2.2 Généralisation de l'identité d'Hermite

Nous présentons une généralisation du corollaire 2, mais avant cela, nous mentionnons quelques outils de bases qui nous aident à généraliser.

Définition 6. *On appelle période d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tout nombre réel T, tel que*

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t+T) = f(t).$$

On dit que f est périodique si elle admet une période non nulle, et plus précisément qu'elle est T-périodique si T est une période strictement positive.

Remarque 4.
a) S'il existe une plus petite période T, elle est appelée la période de f et on écrit $T = 2L \Rightarrow L = \frac{T}{2}$.
b) Si f est T-périodique, elle est aussi kT-périodique pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 8.
La fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est périodique de période 1.
En effet, soit $f : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ et soit x un nombre réel. On note k sa partie entière, $\lfloor x \rfloor = k$, c'est-à-dire que k est l'unique nombre entier tel que $k \leq x < k+1$. Alors l'entier $n = k+1$ vérifie $n \leq x+1 < n+1$, de sorte que $n = \lfloor x+1 \rfloor$.
Il s'ensuit que $\lfloor x+1 \rfloor = n = k+1 = \lfloor x \rfloor + 1$.
On a donc : $f(x+1) = (x+1) - \lfloor x+1 \rfloor = (x+1) - (\lfloor x \rfloor + 1) = x - \lfloor x \rfloor = f(x)$.

Définition 7. *Une fonction linéaire par morceaux est une fonction numérique définie sur les nombres réels ou un segment de celui-ci, dont le graphe est composé de sections en ligne droite. Elle est une fonction définie par morceaux , dont chacun des morceaux est une affine fonction.*

Rappel 2.2.0.1 (Séries de Fourier et ces coefficients)**.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, une fonction continue par morceaux et $2L$-périodique. On définit les coefficients de Fourier exponentiels f de par

$$\begin{cases} a_0(f) = a_0 = \dfrac{1}{L} \int\limits_{-L}^{L} f(x)dx \\ b_0(f) = b_0 = 0 \\ \textit{pour } n > 0, \; a_n(f) = a_n = \dfrac{1}{L} \int\limits_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right) dx \\ \textit{pour } n > 0, \; b_n(f) = b_n = \dfrac{1}{L} \int\limits_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{cases}$$

Avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, et on définit sa série de Fourier par

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right).$$

Exemple 9.
La sérier de Fourier de la fonction partie fractionnaire $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.
Soit x un réel et noter que la fonction est une fonction linéaire par morceaux périodique, discontinue à chaque point entier (voir la figure 1.2).
On pose $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ et comme f est de période 1 ($L = \frac{1}{2}$), donc nous écrivons

$$S_n(f) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos(2n\pi x) + b_n(f) \sin(2n\pi x),$$

òu

$$a_0(f) = 2 \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} x - \lfloor x \rfloor dx = 2 \left[\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} x dx - \overbrace{\int_{\frac{-1}{2}}^{0} \lfloor x \rfloor dx}^{\lfloor x \rfloor = -1} - \overbrace{\int_{0}^{\frac{1}{2}} \lfloor x \rfloor dx}^{\lfloor x \rfloor = 0} \right]$$
$$= 2\,[x]_{-1/2}^{0} = 1.$$

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x - \lfloor x \rfloor)\sin(2n\pi x)dx \\
&= 2\left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\sin(2n\pi x)dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \lfloor x \rfloor \sin(2n\pi x)dx - \int_{0}^{\frac{1}{2}} \lfloor x \rfloor \sin(2n\pi x)dx\right] \\
&= 2\left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\sin(2n\pi x)dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (-1)\sin(2n\pi x)dx - \int_{0}^{\frac{1}{2}} 0.\sin(2n\pi x)dx\right] \\
&= 2\left[-\frac{\cos n\pi}{2\pi n} - \frac{1}{2n\pi} + \frac{\cos n\pi}{2n\pi}\right] \\
&= -\frac{1}{n\pi}. \\
a_n(f) &= 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x - \lfloor x \rfloor)\cos(2n\pi x)dx \\
&= 2\left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\cos(2n\pi x)dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (-1)\cos(2n\pi x)dx - \int_{0}^{\frac{1}{2}} (0)\sin(2n\pi x)dx\right] \\
&= \frac{\cos n\pi}{4n^2\pi^2} - \frac{\cos n\pi}{4n^2\pi^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$S_n(f) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n}.$$

Corollaire 3 (Généralisation du corollaire 2)**.**
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n, m \in \mathbb{N}$ $(m > 0)$, alors

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left\lfloor \frac{x+nk}{m} \right\rfloor = \frac{(m-1)(n-1)}{2} + \frac{d-1}{2} + d\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor,$$

tel que $d = pgcd(n, m)$.

Preuve 15.
On a deux cas, le premier si $\left(\frac{x+nk}{m}\right) \notin \mathbb{Z}$ et le deuxième si $\left(\frac{x+nk}{m}\right) \in \mathbb{Z}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n, m, d \in \mathbb{N}$ $(m > 0)$, et comme la LA fonction partie fractionnaire est une fonction linéaire par morceaux, périodique ,discontinue à chaque point entier, alors l'expansion de Fourier (voir l'exemple précédent) est

$$\lfloor x \rfloor = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi jx)}{j}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}. \tag{2.6}$$

On note

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi jx)}{j}.$$

Alors $f(n) = n - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad n = f(n) + \frac{1}{2}$, *et ainsi :* $\lfloor n \rfloor = n = f(n) + \frac{1}{2}$.
À partie de l'égalité 2.6, on obtient :

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{x+nk}{m} \right\rfloor &= \frac{x+nk}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\sin\left(2\pi j\left(\frac{x+nk}{m}\right)\right)}{j} \\ &= \frac{x}{m} + \frac{nk}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\sin\left(2\pi j\left(\frac{x+nk}{m}\right)\right)}{j}.\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1}\left\lfloor \frac{x+nk}{m} \right\rfloor &= \sum_{k=0}^{m-1}\frac{x}{m} + \sum_{k=0}^{m-1}\frac{n}{m}k - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{m-1}\sin\left(2\pi j\left(\frac{x+nk}{m}\right)\right)}{j} \\ &= x + \frac{(m-1)n}{2} - \frac{m}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{m-1}\sin\left(2\pi j\left(\frac{x+nk}{m}\right)\right)}{j}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Car $\sum_{k=0}^{m-1} k = \frac{(m-1)m}{2}$, *alors*
Pour le Premier cas : $\left(\frac{x+nk}{m}\right) \notin \mathbb{Z}$. *On utilise la formule*

$$\sum_{k=0}^{p}\sin(z+ak) = \csc\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{a(p+1)}{2}\right)\sin\left(z+\frac{ap}{2}\right), \quad \text{telle que } \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)} \quad (\text{voir } [15]).$$

On trouve :

$$\sum_{k=0}^{m-1}\sin\left(\frac{2\pi j}{m}x + \frac{2\pi jn}{m}k\right) = \frac{\sin(\pi jn)}{\sin\left(\pi j\frac{n}{m}\right)}\sin\left(\pi jn - \pi j\frac{n}{m} + 2\pi j\frac{x}{m}\right). \tag{2.8}$$

Notez que la somme ci-dessus disparait sauf, éventuellement lorsque le dénominateur à droite disparaît également.
On note : $d = \text{pgcd}(n,m)$, $m' = \frac{m}{d}$ *et* $n' = \frac{n}{d}$, *donc l'égalité 2.8 peut diffère de zéro uniquement lorsque* $j\frac{n}{m} = j\frac{n'}{m'} \in \mathbb{Z}$, *à savoir quand* $j = lm' = l\frac{m}{d}$ $(l = 1,2,3,....)$.
Dans cet dernier, l'égalité 2.7 se transform finalement en

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1}\left\lfloor \frac{x+nk}{m} \right\rfloor &= x + \frac{(m-1)n}{2} - \frac{m}{2} + \frac{d}{\pi}\sum_{l=1}^{+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{m-1}\sin\left(2\pi l n' k + 2\pi l\frac{x}{d}\right)}{lm} \\ &= \frac{(m-1)(n-1)}{2} - \frac{1}{2} + \frac{d}{2} + d\left(\frac{x}{d} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(2\pi l\frac{x}{d}\right)}{l}\right) \\ &= \frac{(m-1)(n-1)}{2} - \frac{1}{2} + \frac{d}{2} + d\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Car, $\sin\left(2\pi l n' k + 2\pi l \frac{x}{d}\right) = \sin\left(2\pi l n' k\right)\cos\left(2\pi l \frac{x}{d}\right) + \cos\left(2\pi l n' k\right)\sin\left(2\pi l \frac{x}{d}\right) = \sin\left(2\pi l \frac{x}{d}\right),$
et $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \sin\left(2\pi l \frac{x}{d}\right) = m \sin\left(2\pi l \frac{x}{d}\right).$

Pour le deuxième cas : *si* $\left(\dfrac{x+nk_0}{m}\right) \in \mathbb{Z}$*, pour certains* $0 \leq k_0 \leq m-1$*, tel que* $pgcd(n,m) = d$*, il est alors facilement de vérifier que :*

- $\dfrac{x}{d} \in \mathbb{Z}$*, en effet : si certains* $l_0 \in \mathbb{Z}$ *existe tel que* $\frac{x+nk_0}{m} = l_0)$*, alors* $\frac{x+n'dk_0}{m'd} = l_0$ *tel que* $pgcd(n',m') = 1$*, ce qui implique*
$$\frac{x}{d} = m' l_0 - n' k_0 \in \mathbb{Z}.$$
- *Si* $k_1 \neq k_0$ *vérifie que* $0 \leq k_1 \leq m-1$ *et aussi* $\left(\frac{x+nk_1}{m} = l_1 \in \mathbb{Z}\right)$*, alors* $|k_1 - k_0|$ *est un multiple de* m' *pour le vérifier. Il suffit d'utiliser le fait que*
$$\left(\tfrac{x+nk_0}{m} = l_0\right) \quad et \quad \left(\tfrac{x+nk_1}{m} = l_1\right),$$
pour voir que $x = l_0 m - nk_0$ *et* $x = l_1 m - nk_1$ *donc* $l_0 m - nk_0 = l_1 m - nk_1$*, d'où* $n(k_1 - k_0) = m(l_1 - l_0)$*,*
et finalement, $n'(k_1 - k_0) = m'(l_1 - l_0)$*, et comme* $pgcd(n',m') = 1$*, alors par le théorème de Gauss* n' *divise* $(l_1 - l_0)$*.*
Par conséquent, $(k_1 - k_0) = sm'$ *pour certaine entier* s*, et aussi* $k_1 = k_0 + sm'$*.*
- *Pour chaque entier* r *tel que* $k_r = k_0 + rm' \in \{1, 2, \ldots m-1\}$*, on a aussi*
$$\left(\frac{x+nk_r}{m}\right) \in \mathbb{Z}.$$
Pour démontrer ça, on utilise le fait que
$$\left(\frac{x+nk_0}{m}\right) = l_0 \ et \ \left(\frac{x+n'dk_0}{m'd}\right) = l_0,$$
pour voir que
$$\begin{aligned}\frac{x}{d} &= m'l_0 - n'k_0 = m'l_0 + m'rn' - n'k_0 - m'rn' \\ &= m'(l_0 + rn') - n'(k_0 + rm') \quad \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Ces trois éléments ci-dessus montrent qu'il existe exactement j *entiers distincts noté* k_j *dans* $\{1, 2, \ldots m-1\}$ *pour qui* $\left(\dfrac{x+nk_j}{m}\right) \in \mathbb{Z}$*.*
Ainsi, l'égalité 2.9 est également vrai dans ce cas, car :

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{x+nk}{m} \right\rfloor = \left(x + \frac{(m-1)n}{2} - \frac{m}{2} + \frac{d}{\pi} \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{m-1} \sin\left(2\pi l n' k + 2\pi l \frac{x}{d}\right)}{lm} \right) + \frac{d}{2}.$$

Nous avons ajouté $\frac{d}{2}$ *pour corriger la valeur de* $f(.)$ *dans les cas* $\left(\frac{x+nk}{m}\right) \in \mathbb{Z}$.
Par conséquent,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1}\left\lfloor\frac{x+nk}{m}\right\rfloor &= \frac{(m-1)(n-1)}{2} - \frac{1}{2} + \frac{d}{2} + d\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(2\pi l\frac{x}{d}\right)}{l} + \frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{(m-1)(n-1)}{2} + \frac{d-1}{2} + d\left(f\left(\frac{x}{d}\right) + \frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{(m-1)(n-1)}{2} + \frac{d-1}{2} + d\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Exemple 10.

Pour tous entiers m *et* n *strictement positifs, on calculons* $\sum_{k=1}^{m-1}\left\lfloor\frac{kn}{m}\right\rfloor$.
Nous appliquons directement le corollaire 2, on trouve

$$\sum_{k=1}^{m-1}\left\lfloor\frac{kn}{m}\right\rfloor = \frac{(m-1)(n-1)+\mathrm{pgcd}(m,n)-1}{2}.$$

2.3 Suites de Fibonacci

En mathématiques, la suite de Fibonacci est une suite d'entiers dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent. Elle commence par les termes 0 et 1. Les termes de cette suite sont appelés nombres de Fibonacci.
La suite est définie par

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0\\ 1 & \text{si } n = 1\\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

Cette suite est liée au nombre d'or, α : ce nombre intervient dans l'expression du terme général de la suite. Inversement, la suite de Fibonacci intervient dans l'écriture des réduites de l'expression de α en fraction continue : les quotients de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont les meilleures approximations du nombre d'or.
Tel que $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ son conjugué et α est la racine positive de l'équation quadratique $x^2 - x - 1 = 0$ (pour plus détail voir [8]).

Lemme 5. *Pour toute solution* x *de* $x^2 - x - 1$, $P(n) : x^n = xF_n + F_{n-1}, n \geq 1$.

Preuve 16.
La preuve est par récurrence. Par définition, de sorte qu'en effet $x^1 = x \cdot 1 + 0 = x$.
Pour $n = 2$, $F_2 = F_1 = 1$, *et* $x^2 = xF_2 + F_1 = x \cdot 1 + 1 = x + 1$.
Supposons maintenant que $p(n)$ *est vrai et montrer que* $p(n+1) : x^{n+1} = xF_{n+1} + F_n$.
Alors on a

$$\begin{aligned} x.x^n &= x.xF_n + xF_{n-1} \\ &= x^2F_n + xF_{n-1} \\ &= (x+1)F_n + xF_{n-1} \\ &= x\left(F_n + F_{n-1}\right) + F_n \\ &= xF_{n+1} + F_n \\ &= x^{n+1}. \end{aligned}$$

D'où le résultat ■

Lemme 6. *Soit α le numéro d'or et β son conjugué. Alors on a*

(i) $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ *pour tout $n \geq 0$ (formule de Binet)*

(ii) $F_n\alpha = F_{n+1} - \beta^n$ *pour tout $n \geq 0$.*

Preuve 17.

(i) Par le lemme 5 et comme α et β les racines de l'équation $x^2 - x - 1$, donc on a $\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}$ et $\beta^n = \beta F_n + F_{n-1}$.Alors

$$\alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta)F_n \Rightarrow F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

Pour obtenir la formule de Binet, observez que $\alpha - \beta = \sqrt{5}$.

(ii) Notez d'abord que $\alpha.\beta = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -1$ et

$$\begin{aligned} \beta^2 + 1 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1 &= \frac{5-\sqrt{5}}{2} \\ &= -\sqrt{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= -\sqrt{5}\beta. \end{aligned}$$

Donc par la formule de Binet $F_n\alpha$ est égal à

$$\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)\alpha = \frac{\alpha^{n+1} - \alpha\beta^n}{\alpha - \beta},$$

et comme $\alpha.\beta = -1 \Rightarrow \alpha = -\dfrac{1}{\beta}$ on multiplie égalité par β^n on trouve $\alpha\beta^n = -\beta^{n-1}$, donc

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)\alpha &= \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} + \frac{\beta^{n+1} + \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \\
&= F_{n+1} + \frac{\beta^{n+1} + \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \\
&= F_{n+1} + \frac{\beta^{n-1}\left(\beta^2 + 1\right)}{\alpha - \beta} \\
&= F_{n+1} + \frac{\beta^{n-1}(-\sqrt{5}\beta)}{\sqrt{5}} \\
&= F_{n+1} - \beta^n.
\end{aligned}$$

D'où $F_n\alpha = F_{n+1} - \beta^n$, *pour tout* $n \geq 0$. ■

2.4 Quelques applications sur l'identité d'Hermite

2.5 Application 1

Soit $(F_n)_{n\geq 0}$ est un suite de Fibonacci, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or et $3 \leq m \leq n$. on cherche de calculer la somme

$$\sum_{0\leq k\leq F_m - 1} \left\lfloor \alpha + \frac{k}{F_n} \right\rfloor \tag{B}$$

en fonction de F_n et F_m.

En écrivant $n\{x\} = nx - n\lfloor x\rfloor$, donc on a $\lfloor n\{x\}\rfloor = \lfloor nx\rfloor - n\lfloor x\rfloor$. Alors l'expression $m\lfloor x\rfloor + m - n + \lfloor n\{x\}\rfloor$ dans le théorème 5 peut être écrit comme $\lfloor nx\rfloor - (n-m)(\lfloor x\rfloor + 1)$. Ensuite, la somme B est égale à

$$\max\left\{F_m\lfloor\alpha\rfloor, \lfloor F_n\alpha\rfloor - (F_n - F_m)\left(\lfloor\alpha\rfloor + 1\right)\right\} = \max\left\{F_m, \lfloor F_n\alpha\rfloor - 2\left(F_n - F_m\right)\right\}. \tag{2.10}$$

Car $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618 \Rightarrow \lfloor\alpha\rfloor = 1$.
Soit $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Donc $-1 < \beta < 0$, alors $0 < \beta^n < 1$ si n est pair et $-1 < \beta^n < 0$ si n est impair. Donc par le lemme 6, nous obtenons $F_{n+1} < F_n\alpha < F_{n+1} + 1$ si n est impair et $F_{n+1} - 1 < F_n\alpha < F_{n+1}$ si n est pair. Par conséquent, $\lfloor F_n\alpha\rfloor = F_{n+1}$ si n est impair et $\lfloor F_n\alpha\rfloor = F_{n+1} - 1$ si n est pair. Nous considérons donc deux cas.
La premier cas si n est impair. Alors

$$\begin{aligned}
\lfloor F_n\alpha\rfloor - 2\left(F_n - F_m\right) &= F_{n+1} - 2\left(F_n - F_m\right) \\
&= \left(F_n + F_{n-1}\right) - 2\left(\left(F_{n-1} + F_{n-2}\right) - F_m\right) \\
&= \left(\left(F_{n-1} + F_{n-2}\right) + F_{n-1}\right) - 2\left(\left(F_{n-1} + F_{n-2}\right) - F_m\right) \\
&= 2F_m - F_{n-2},
\end{aligned}$$

et l'égalité 2.10 devient

$$\max\left\{F_m, 2F_m - F_{n-2}\right\} = \begin{cases} 2F_m - F_{n-2}, & \text{si } \ 2F_m - F_{n-2} \geq F_m \\ F_m, & \text{sinon}. \end{cases}$$

Rappeler que $3 \leq m \leq n$. Ainsi, nous avons $2F_m - F_{n-2} \geq F_m$ si et seulement si $m \geq n-2$. Par conséquent,

$$\sum_{0 \leq k < F_m} \left\lfloor \alpha + \frac{k}{F_n} \right\rfloor = \begin{cases} 2F_m - F_{n-2}, & \text{si } m \geq n-2 \text{ et } n \text{ est impair} \\ F_m, & \text{si } m < n-2 \text{ et } n \text{ est impair} \end{cases}$$

La deuxième cas si n est pair. Alors

$$\begin{aligned} \lfloor F_n \alpha \rfloor - 2(F_n - F_m) &= F_{n+1} - 1 - 2(F_n - F_m) \\ &= (F_n + F_{n-1}) - 1 - 2((F_{n-1} + F_{n-2}) - F_m) \\ &= ((F_{n-1} + F_{n-2}) + F_{n-1}) - 1 - 2((F_{n-1} + F_{n-2}) - F_m) \\ &= 2F_m - F_{n-2} - 1, \end{aligned}$$

et l'égalité 2.10 devient

$$\max\{F_m, 2F_m - F_{n-2} - 1\} = \begin{cases} 2F_m - F_{n-2} - 1, & \text{si} \quad 2F_m - F_{n-2} - 1 \geq F_m \\ F_m, & \text{sinon} \end{cases}$$

et on a aussi $3 \leq m \leq n$. Ainsi, nous avons $2F_m - F_{n-2} - 1 \geq F_m$ si et seulement si $m \geq n-2$, Par conséquent

$$\sum_{0 \leq k < F_m} \left\lfloor \alpha + \frac{k}{F_n} \right\rfloor = \begin{cases} 2F_m - F_{n-2} - 1, & \text{si } m \geq n-2 \text{ et } n \text{ est pair} \\ F_m, & \text{si } m < n-2 \text{ et } n \text{ est pair .} \end{cases}$$

2.6 Application 2

Nous présenterons deux définitions, la première introduite par Jacobsthal et la deuxième est généralise la première introduite par Tverber (plus détail voir [7, 14]).

Définition 8 (Jacobsthal)**.** *Pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$ définir*

$$f_{a,b;m}(k) = \left\lfloor \frac{a+b+k}{m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a+k}{m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{b+k}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor, \tag{2.11}$$

et pour $N \geq 1$

$$S_{a,b,m}(N) = \sum_{k=0}^{N} f_{a,b;m}(k).$$

La somme ci-dessus est également considérée par Carlitz et Grimson, et est généralisée par Tverberg comme suit

Définition 9 (Tverberg)**.** *Soient m et ℓ des entiers positifs et soit C un ensemble multiple de ℓ entiers $a_1, a_2, \ldots, a_\ell$, i.e, $a_i = a_j$ est autorisé pour certains $i \neq j$.*
Définir $f_{C;m} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ et $S_{C;m} : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{Z}$ par

$$f_{C;m}(N) = \sum_{T \subseteq [1,\ell]} (-1)^{\ell - |T|} \left\lfloor \frac{k + \sum_{i \in T} a_i}{m} \right\rfloor,$$

et

$$S_{C;m}(N) = \sum_{k=0}^{N} f_{C;m}(N).$$

Nous écrivons parfois $f_{a_1,a_2,\dots,a_\ell;m}(N)$ *et* $S_{a_1,a_2\dots,a_\ell;m}(N)$ *au lieu de* $f_{C;m}(N)$ *et* $S_{C;m}(N)$*, respectivement. L'ensemble* $[1,\ell]$ *apparaissant dans la somme définissant* f *est* $\{1,2,3,\dots,\ell\}$ *et si* $T=\emptyset$*, puis* $\sum_{i\in T} a_i$ *est défini comme égal à zéro.*

Exemple 11.
Si $C=\{a,b\}$*, puis* $f_{C;m}(k)$ *donnée dans la définition 8 est la même comme* $f_{a,b;m}(N)$ *donné en l'égalité 2.11, et si* $C=\{a_1,a_2,a_3\}$*, on a* $T\subseteq\{1,2,3\}$*.*
En d'autres termes on a $T=\{1\}$*,* $T=\{2\}$*,* $T=\{3\}$*,* $T=\{1,2\}$*,* $T=\{1,3\}$*,* $T=\{2,3\}$*,* $T=\{1,2,3\}$ *ou* $T=\emptyset$*, alors* $f_{C;m}(N)$ *est*

$$\begin{aligned} f_{a_1,a_2,a_3;m}(k) &= \left\lfloor\frac{a_1+a_2+a_3+k}{m}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{a_1+a_2+k}{m}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{a_1+a_3+k}{m}\right\rfloor \\ &\quad - \left\lfloor\frac{a_2+a_3+k}{m}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{a_1+k}{m}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{a_2+k}{m}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{a_3+k}{m}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{k}{m}\right\rfloor. \end{aligned}$$

Lemme 7. *Pour tout* $N\geq 1$ *on a* $S_{a,b,m}(N)\geq 0$*.*

Preuve 18.
Tverberg observe que $f_{a,b,m}(k)$ *c'est invariant quand on remplace* a,b,m *par* $a\pm m$*,* $b\pm m$*,* $k\pm m$*, respectivement. On peut donc supposer que* $0\leq a,b<m$*. Depuis la somme* $S_{a,b,m}(N)$ *c'est prendre* $k=0,1,2,\dots,N$*, il suffit de considérer que le cas* $1\leq N\leq m-1$*. Par la définition de* $S_{a,b,m}(N)$ *on a*

$$S_{a,b,m}(N) = A_1+A_2+A_3+A_4,$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{0\leq k\leq N}\left\lfloor\frac{a+b}{m}+\frac{k}{m}\right\rfloor, \quad & A_2 &= \sum_{0\leq k\leq N}\left\lfloor\frac{a}{m}+\frac{k}{m}\right\rfloor \\ A_3 &= \sum_{0\leq k\leq N}\left\lfloor\frac{b}{m}+\frac{k}{m}\right\rfloor, & A_4 &= \sum_{0\leq k\leq N}\left\lfloor\frac{k}{m}\right\rfloor \end{aligned}$$

et maintenant par le théorème 5,

$$A_1 = \max\left\{(N+1)\left\lfloor\frac{a+b}{m}\right\rfloor, (N+1)\left\lfloor\frac{a+b}{m}\right\rfloor+\alpha_1\right\} = (N+1)\left\lfloor\frac{a+b}{m}\right\rfloor + \max\{0,\alpha_1\}.$$

où $\alpha_1 = N+1-m+\left\lfloor m\left\{\frac{a+b}{m}\right\}\right\rfloor$*. Donc* $\alpha_1 = N+1-m+a+b-m\left\lfloor\frac{a+b}{m}\right\rfloor$*, car* $m\left\{\frac{a+b}{m}\right\} = m\left(\frac{a+b}{m}-\left\lfloor\frac{a+b}{m}\right\rfloor\right) = a+b-m\left\lfloor\frac{a+b}{m}\right\rfloor\in\mathbb{Z}$*, et comme on a* $0\leq a,b<m$ *et* $1\leq N<m$*, on utilisons le même méthode on trouvons*
$A_2=\max\{0,\alpha_2\}$ *où* $\alpha_2=N+1-m+a$*,* $A_3=\max\{0,\alpha_3\}$ *où* $\alpha_3=N+1-m+b$ *et pour* A_4 *on a aussi* $0\leq k\leq N$*, alors* $A_4=0$*. Maintenant on peut écrire* $S_{a,b,m}(N)$ *comme suit*

$$S_{a,b,m}(N) = (N+1)\left\lfloor\frac{a+b}{m}\right\rfloor + \max\{0,\alpha_1\} - \max\{0,\alpha_2\} - \max\{0,\alpha_3\}, \tag{2.12}$$

et comme $0\leq a+b<2m$*, alors* $\left\lfloor\frac{a+b}{m}\right\rfloor=0$ *ou* 1*, donc on a deux cas.*
La premier cas *si* $\left\lfloor\frac{a+b}{m}\right\rfloor=0$*. Alors,* $\alpha_1=N+1-m+a+b$*, et on a* $\alpha_1\geq\alpha_2$*,* $\alpha_1\geq\alpha_3$*, et l'égalité 2.12 devient*

$$S_{a,b,m}(N) = \max\{0, \alpha_1\} - \max\{0, \alpha_2\} - \max\{0, \alpha_3\} \tag{2.13}$$

Si $\alpha_1 < 0$, alors α_2 et $\alpha_3 < 0$ et donc le côté droit de l'égalité 2.13 est nul.
On supposons $\alpha_1 \geq 0$, alors il existe quatre valeurs possibles pour l'égalité 2.13, à savoir α_1, $\alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_1 - \alpha_3$, ou $\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$.
Ils satisfont $\alpha_1 = \alpha_1$, $\alpha_1 - \alpha_2 = (N+1-m+a+b) - (N+1-m+a) = b \geq 0$, $\alpha_1 - \alpha_3 = (N+1-m+a+b) - (N+1-m+b) = a \geq 0$ et $\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = m - 1 - N \geq 0$, qui ne sont pas négatifs. Donc $S_{a,b,m}(N) \geq 0$.
***La deuxième cas** si $\left\lfloor \frac{a+b}{m} \right\rfloor = 1$. Alors $\alpha_1 = N+1-m+a+b-m$, $\alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_1 < \alpha_3$ et l'égalité 2.12 devient*

$$S_{a,b,m}(N) = (N+1) + \max\{0, \alpha_1\} - \max\{0, \alpha_2\} - \max\{0, \alpha_3\}. \tag{2.14}$$

Si $\alpha_1 \geq 0$, alors α_2 et $\alpha_2 \geq 0$ et donc le côté droit de l'égalité 2.14 est

$$\begin{aligned} N+1+\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3 &= N+1+(N+1-2m+a+b)-(N+1-m+a)-(N+1-m+b) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On supposons $\alpha_1 < 0$, alors il existe quatre valeurs possibles pour l'égalité 2.14, à savoir $N+1$, $N+1-\alpha_2$, $N+1-\alpha_3$, ou $N+1-\alpha_2-\alpha_3$.
Ils satisfont $N+1 = N+1$, $N+1-\alpha_2 = m-a \geq 0$, $N+1-\alpha_3 = m-b \geq 0$ ou $N+1-\alpha_2-\alpha_3 = -\alpha_1 \geq 0$, qui ne sont pas négatifs. Donc $S_{a,b,m}(N) \geq 0$.
Nous avons donc dans le premier et le deuxième cas $S_{a,b,m}(N) \geq 0$.
D'où le résultat ∎

BIBLIOGRAPHIE

[1] T.Andreescu, D.Andrica, Z.Feng, 104 number theory problems, from the training of the USA IMO team, page 57.

[2] T. M. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, Springer, 1976.

[3] L. Carlitz, Some arithmetic sums connected with the greatest integer function, Mathematica Scandinavica, 8.1 (1960), 59–64.

[4] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, Concrete Mathematics : A Foundation for Computer Science. Second edition. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts, 1994.

[5] R. C. Grimson, The evaluation of a sum of Jacobsthal, Norske Viden- skabers Selskabs Forhandlinger Trondheim, 4 (1974), 6 pp.

[6] D.Harari, Math 256-Séries de Fourier, 2016-2017.

[7] E. Jacobsthal, Über eine zahlentheoretische Summe, Norske Viden- skabers Selskabs Forhandlinger Trondheim, 30 (1957), 35–41.

[8] T. Koshy, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Wiley, 2001.

[9] D.Koukoulopoulos, Introduction à la théorie des nombres.

[10] A.Lesfari, distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace. Cours et exercices.

[11] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan,Multiplicative Number Theory I, Classical Theory, Cambridge University Press, 2007.

[12] P. Pongsriiam, The distribution of the divisor function in arithmetic progressions, Ph. D. Thesis, Pennsylvania State University, 2012.

[13] G. Tenenbaum, Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory, Cambridge University Press, 1995.

[14] H. Tverberg, On some number-theoretic sums introduced by Jacobsthal, Acta Arithmetica, 155.4 (2012), 349–351.

[15] The Wolfram Functions Site, http://functions.wolfram.com/ElementaryFunctions/Sin/23/01/0003/.