République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Djilali Bounâama-Khemis Miliana

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Mémoire

Pour obtenir

Le diplôme de master en mathématiques
Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Thème

Zêta de Riemann avec des dérivées fractionnaires et quelques fonctions analogues

Présenté par

Dounia ABDESSEMED

Soutenu le 2020 devant le jury :

Examinateur 1	**Dr. M. BEZZIOU**	Université Djilali BOUNAAMA
Examinateur 2	**Dr. F. CHITA**	Université Djilali BOUNAAMA
Encadreur	**Dr. B. SADAOUI**	Université Djilali BOUNAAMA
Co-encadreur	**Dr. Y. ADJABI**	Université M'hamed Bougara Boumerdes

Année Universitaire : 2019/2020

Remerciements et Dédicaces

Tout d'abord, merci à ***Dieu*** *qui ma donné la patience pour finir ce modeste travail, après cela, je remercie très sincèrement mes directeurs de travail les professeurs* ***"Mr. Boualem SADAOUI" et "Mr. Yacine ADJABI"*** *pour la bonne direction et précieux conseils tout au long du travail .*

Je remercie également tous les professeurs du département du mathématiques qui ont donné des leçons de la manière la plus simple tout au long du cours universitaire.

Je remercie ma famille et mes amies qui ont ma aidé pour obtenir des bons résultats, et je remercie tous les personnes qui ont contribué au succès de ce travail proche ou lointain.

Je dédie ce modeste travail à toute ma famille ;

À ma chère amie Ines ;

À ma chère amie Naima ;

À ma chère amie Chaima ;

À mes chères amies et camarades de classe Ahlem, Aziza, Feriel, Fatma, Hanane, Nadjet ;

À tous mes Enseignants ;

À tous mes camarades de Université de Khemis Miliana.

Dounia ABDESSEMED

Table des matières

Introduction générale **6**

1 Préliminaires **11**

1 Coéfficients binomiaux 11

2 Fonction Gamma 13

3 Fonction Bêta 14

4 Contour de Hankel 15

2 Introduction au calcul fractionnaire **16**

1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville 16

2 Dérivée factionnaire au sens de Grunwald-Letnikov 18

2.1 Propriétés de la dérivée fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov . 18

2.2 Exemples 20

3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville 22

3.1 Propriétés de dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . . 23

3.2 Exemples 25

4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo 27

4.1 Propriétés de dérivée fractionnaire au sens de Caputo 27

4.2 Exemples 30

5 Dérivée fractionnaire au sens d'Ortigueira 31

5.1 Propriétés de dérivée fractionnaire au sens d'Ortigueira 31

5.2 Exemples 33

6 Dérivée fractionnaire au sens d'Ortigueira-Caputo 35

7 Dérivée fractionnaire au sens de Marchaud 35
8 Dérivée fractionnaire au sens de Hilfer 36

3 Fonction Zêta de Riemann et ses fonctions analogues 37
1 Rappels sur les Séries des Dirichlet 37
1.1 Motivation 37
1.2 Convergence des séries de Dirichlet ordinaire 38
1.3 Théorème fondamentale de la convergence uniforme 42
1.4 Produit de deux séries de Dirichlet 44
2 Fonction Zêta de Riemann 45
2.1 Convergence de la fonction Zêta de Riemann 45
2.2 Différentes formules de la fonction Zêta 46
3 Fonctions analogues de la fonction Zêta 48
3.1 Fonction de Hurwitz 48
3.2 Fonction de Lerch 50

4 Dérivées fractionnaires de la fonction Zêta de Riemann 51
1 Dérivée fractionnaire de la fonction Zêta de Riemann au sens de Grunwald-Letnikov 51
1.1 Propriétés de la fonction dérivée fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov de la fonction Zêta 53
2 Dérivée fractionnaire de la fonction Zêta de Riemann au sens de Riemann-Liouville 55
3 Dérivée fractionnaire de la fonction Zêta de Riemann au sens de Ortigiera-Caputo 56

5 Fonction Zêta de Lerch et de Riemann définies par les dérivées fractionnaires 59
1 Fonction Zêta de Lerch définie par la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville 59
2 Fonction Zêta de Lerch définie par la dérivée fractionnaire au sens de Marchaud 61
3 Fonction Zêta de Lerch définie par la dérivée fractionnaire au sens de Hilfer . 64
4 Fonction Zêta de Riemann définie par la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville 68
5 Fonction Zêta de Riemann définie par la dérivée fractionnaire au sens de Marchaud 70
6 Fonction Zêta de Riemann définie par la dérivée fractionnaire au sens de Hilfer 72
7 Lien entre la dérivée fractionnaire de la fonction Zêta au sens de Grunwald-Letnikov et les nombres premiers 73

Conclusion **76**

Bibliographie **76**

Résumé

Zêta de Riemann avec des dérivées fractionnaires et quelques fonctions analogues

---

Un rappel historique et quelques concepts préliminaires seront introduits comme les dérivées fractionnaires, la fonction Zêta de Riemann et certaines fonctions analogues, qui jouent un rôle important dans des domaines des sciences.

Ce mémoire porte essentiellement sur la contribution des dérivées fractionnaires à l'étude d'une fonction importante en analyse complexe et en théorie analytique des nombres et quelques propriétés des fonctions analogues.

Nous nous intéresserons à la fonction Zêta de Riemann, la fonction de Hurwitz et la fonction de Lerch avec des dérivées fractionnaires au sens de Grünwald-Letnikov et autres, ainsi que certaines propriétés.

Le but de ce travail est, d'une part essayé de développer, et de comprendre les articles [4,6,12,13]. D'autre part, une tentative de faire apparaître une approche faisant appel à la dérivée au sens Marchaud, Hilfer.

Mots clés : *Dérivée fractionnaire, fonctions spéciales, Zêta de Riemann, fonction de Hurwitz, fonction de Lerch, séries de Dirichlet.*

Abstract

Riemann's Zêta function and certain similar functions with fractional derivatives

– –

A historical reminder and some preliminary concepts will be introduced as fractional derivatives, Riemann's Zêta function and certain similar functions, which play an important role in fields of science.

This thesis mainly deals with the contribution of derivatives fractional analysis to study an important function in complex analysis and analytical number theory and some properties of functions analogues.

We are interested in Riemann's Zêta function, the function of Hurwitz and Lerch's function with fractional derivatives in the sense de Grünwald-Letnikov et al., as well as some properties.

The goal of this work is, on the one hand, to try to develop, and include the articles [4,6,12,13]. On the other hand, a attempt to reveal an approach using the derivative at meaning Marchaud, Hilfer.

Keywords : *Fractionl derivative, special functions, Zêta function of Riemann, Hurwitz function, Lerch function, Dirichlet series.*

– –

Notation

On regroupe quelques notations qui seront utiles dans ce travail :

- $\mathbb{N}$: L'ensemble des entiers naturels positifs $\{0, 1, 2, 3, ...\}$.

- $\mathbb{N}^*$: L'ensemble des entiers naturels positifs non nul $\{1, 2, 3, ...\}$.

- $\mathbb{Z}^+$: L'ensemble des nombres entiers relatifs positifs $\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$.

- $\mathbb{Z}$: L'ensemble des nombres entiers relatifs $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

- $\mathbb{R}_0^+$: L'ensemble des nombres réels positifs contenant le zero.

- $\mathbb{R}$: L'ensemble des nombres réels .

- j : Le nombre imaginaire qui vérifie $j^2 = -1$.

- $\mathbb{C}$: L'ensemble des nombres complexes tel que :

$$\mathbb{C} = \{s = x + jy, \ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- $s = x + jy$, désigne un nombre complexe, tel que :

  - $\mathrm{Re}(s) = x$: est la partie réelle de nombre complexe s.
  - $\mathrm{Im}(s) = y$: est la partie imaginaire de nombre complexe s.

- C^m : L'ensemble des fonctions dérivables jusqu'à l'ordre $m, m \in \mathbb{N}$, et les fonctions dérivées sont continues.

- $\eta(s)$: La fonction êta qui définie par ; $\eta(s) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m^s}$.

Introduction générale

La théorie de calcul fractionnaire [(1)] est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du $XVII^{ème}$ siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\dfrac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la $n^{ème}$ dérivée d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu : Que signifié $\dfrac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \dfrac{1}{2}$?

Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques. Les dérivées non entières possèdent un effet de mémoire qu'elles partagent avec plusieurs matériaux tels que les matériaux viscoélastiques ou polymères. Ce fait est également une des raisons pour lesquelles le calcul fractionnaire a connu récemment un grand intérêt.

Une liste de mathématiciens qui ont fourni des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du $XX^{ième}$ siècle, inclut :

P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-67), A.K. Grunwald (1867-1872), A.V.Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J.Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912) S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E.Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. Lévy (1923), A. Marchaud (1927), H.T.Davis (1924-1936), A. Zygmund (1935-1945) E.R. Amour (1938-1996), A. Erdélyi (1939-1965), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949).

(1). Il ne signifie pas le calcul des fractions. Il ne signifie pas non plus une fraction de n'importe quel calcul différentiel, intégral ou calcul de variations. Le calcul fractionnaire est un nom pour la théorie d'intégrales et de dérivées d'ordre arbitraire, qui unifient et généralisent les notions de différentiation d'ordre entier et d'intégration répétées n-fois.

Cependant, cette théorie peut être considérée comme un sujet nouveau aussi, depuis seulement un peu plus de trente années elle a été objet de conférences spécialisées. Pour la première conférence, le mérite est attribué à B.Ross qui a organisé la première conférence sur les calculs fractionnaires et ses applications à l'université de New Haven en juin 1974, et il a édité les débats. Pour la première monographie le mérite est attribué à K.B. Oldham et J. Spanier, qui ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974 après une collaboration commune, commencé en 1968.

Dans ce cadre et pour notre support bibliographique nous nous sommes appuyés principalement sur les ouvrages de Samko, Kilbas et Marichev (1993), ainsi que Kilbas, Srivastava et Trujillo (2006) et ses références.

D'autre part, certaines fonctions introduites en Analyse se retrouvent constamment dans les branches les plus diverses des mathématiques. La raison en est qu'elles possèdent des propriétés extrêmement variées et sont liées à des questions très différentes. Telle est la fonction Zêta de Riemann.

C'est en 1644 que Pietro Mengoli pose une question qui va mener tout droit à la fonction Zêta : combien vaut la somme de la série numérique

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Leonhard Euler [(2)] en 1743 par une intervention série intégrale obtient la première justification de la conjecture :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

mais il ne s'arrête pas à ce résultat, il trouve la formule générale en utilisant les nombres de Bernoulli :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{|B_{2k}| 2^{2k-1} \pi^{2k}}{2k!}.$$

L'étude des nombres premiers est du domaine de la théorie analytique des nombres. Cette théorie a passionné les scientifiques depuis des siècles.

Euler a montré en 1749 que la série des inverses des nombres premiers est divergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \ln \ln (\infty)\,,\ p \text{ premier}.$$

(2). **Leonhard Euler :** (1707-1783) . Mathématicien suisse. Contribua profondément dans les trois domaines fondamentaux de la science de son époque : l'astronomie, les sciences physiques (champs magnétiques, optique...), et les mathématiques, dans toutes ses branches, de l'arithmétique à la géométrie différentielles en passant par l'analyse numérique et fonctionnelle, le calcul des probabilités et la topologie.

Au dix-huitième siècle, Euler a découvert la formule célèbre

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \; \forall \sigma = Re\,(s) > 1,$$

qui relie une somme portant sur tous les entiers, a un produit portant sur tous les nombres premiers (P parcourt l'ensemble des nombres premiers.), avec $n = p_1^{l_1} p_2^{l_2} p_3^{l_3} ... p_r^{l_r}, \; l_i > 0$.

La fonction Zêta de Riemann est la fonction complexe définie par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \; s \in \mathbb{C} \tag{1}$$

et étendue à tout le plan complexe par prolongement analytique, sauf au point $s = 1$, où $\zeta(s)$ a un pôle simple de résidu 1. Elle satisfait à l'équation fonctionnelle $\zeta^*(s) = \zeta^*(s-1)$ pour $s \in \mathbb{C} \diagdown \{0, 1\}$, où $\zeta^*(s)$ est la fonction zêta complétée, définie par

$$\zeta^*(s) = \pi^{-s/2} \Gamma\,(s/2)\, \zeta(s),$$

où $\Gamma(s)$ est la fonction gamma. Cette nouvelle fonction a deux pôles simples, en $s = 0, s = 1$, de résidus 1.

La fameuse conjecture de Riemann, ou ce que l'on appelle l'hypothèse de Riemann (3) (4)est l'un des plus grand problèmes non résolu aujourd'hui ; elle affirme que les zéros non-triviaux de ζ sont situés sur la droite $Re\,(s)$=$\frac{1}{2}$ (appelée la droite critique), les zéros "triviaux" :

$$s = -2, -4, \ldots, -2n, \ldots.$$

L'hypothèse de Riemann, selon laquelle les zéros non triviaux de se trouvent tous dans la droite $Re\,(s)$=$\frac{1}{2}$, est a ce jour une conjecture ouverte et constitue l'un des problèmes les plus importants, aussi bien pour les mathématiciens que pour les physiciens. Elle constitue également l'un des 23 problèmes de Hilbert, énoncés en août 1900 dans le deuxième congrès international des mathématiciens, on peut voir les monographies de [3].

L'étude de la fonction ζ occupent l'esprit de nombreux mathématiciens, notamment après l'apparition de la conjecture de Riemann que n'a pas encore démontré et ça à cause du rôle très important que la fonction ζ joue dans la théorie des nombres (les théorèmes des nombres premiers, la sommation des séries numériques, les zéros des fonctions arithmétiques...). Avec la modernité et le développement du calcul fractionnaire, plusieurs mathématiciens pensent à intervenir les dérivées fractionnaires sur la fonction Zêta, et celui est l'objet de notre étude dans ce mémoire.

(3). La fonction zêta, introduite par M. Bernhard Riemann au XIX ème siècle.

(4). Hypothèse de Riemann :

- Les zéros (i.e les points d'annulation) non triviaux de la fonction zêta de Riemann ont une partie réelle égale à 1.
- Les zéros non triviaux de la fonction zêta sont les entiers négatifs pairs.

Ce mémoire comporte cinq chapitres :

Le premier chapitre réunit un ensemble de définitions et résultats qui nous serons utiles pour la suite de ce mémoire notamment, les coefficients binomiaux, certaines fonctions spéciales.

Le second chapitre, sous le titre "Introduction au calcul fractionnaire", sera consacrée aux définitions et lemmes importants concernant la théorie du calcul fractionnaire. Nous allons aborder la dérivation fractionnaire en présentent les approches célèbres. Nous étudions des déférents type de dérivée fractionnaire (Granwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo, Ortigueira, Ortigueira-Caputo, Marchaud, Hilfer et autres). On donne aussi quelques exemples d'applications. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [1].

Le but de troisième chapitre est de faire une brève introduction a la théorie de la fonction zêta de Riemann, ainsi que certaines propriétés de celle-ci. Dans ce chapitre nous rappelons quelques notions sur les séries de Dirichlet, convergence des séries de Dirichlet ordinaire et définir la fonction zêta de Riemann et nous allons établir quelques fonctions analogues, la fonction de Hurwitz, la fonction de Lerch.

Ensuite, dans le quatrième chapitre, nous nous intéresserons, au cas traité par les articles [6,12,13]. Nous essayons de démontrer l'expression de la dérivée fractionnaire de Zêta de Riemann au sens de Granwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Ortigueira-Caputo.

Le dernier chapitre est analogue au précédent, porte sur l'application et l'adaptation de ces outils à l'étude de la fonction Zêta de Lerch et de Riemann définies par les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville, Marchaud, Hilfer. Nous terminerons ce chapitre par une relation entre la dérivée fractionnaire de la fonction Zêta au sens de Grunwald-Letnikov et les nombres premiers.

A la fin de ce mémoire, une conclusion et une bibliographie.

Parmi les théorèmes établis dans ce mémoire ont été trouvés par différents auteurs, alors que d'autres théorèmes sont nouveaux.

Chapitre 1

Préliminaires

1 Coéfficients binomiaux

Définition 1.1. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. on appelle combinaison de $p \in \mathbb{N}$ éléments de E, toute partie de E à p éléments. on note $\left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right)$ le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble en contenant n.
$\left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right)$ sont appelés **les coefficients binomiaux**, avec $\left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right) = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.
Dans le cas générale on prend $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\left(\begin{array}{c} \alpha \\ p \end{array} \right) = \frac{\alpha(\alpha-1)..(\alpha-p+1)}{p!}$.

Théorème 1.1.1. (formule binome de Newton)
Soient a, b deux éléments dans $\mathbb{R}$ alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) a^k b^{n-k} \quad , n \in \mathbb{N}$$

Corollaire 1.1.1. On a les égalités suivantes :

$$\mathbf{1)} \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = 2^n, \mathbf{2)} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = 0$$

Démonstration. **1)**on utilise le théorème 1.1.1 avec $a = 1$ et $b = 1$.
2)on utilise le théorème 1.1.1 avec $a = -1$ et $b = 1$. ∎

Proposition 1. Pour tous entiers n, m et p tels que $p \leqslant m + n$ on a l'égalité :

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}$$

Démonstration. On sait que :

$$(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n} = \sum_{p=0}^{m+n} \binom{m+n}{p} x^p \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

or :

$$\begin{aligned}
(1+x)^m(1+x)^n &= \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i\right) \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j\right) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \binom{m}{i} \binom{n}{j} x^{i+j} \\
&= \left[\binom{m}{0}\binom{n}{0}\right] + \left[\binom{m}{0}\binom{n}{1} + \binom{m}{1}\binom{n}{0}\right] x \\
&+ \left[\binom{m}{0}\binom{n}{2} + \binom{m}{2}\binom{n}{0} + \binom{m}{1}\binom{n}{1}\right] x^2 + \ldots \\
&= \sum_{p=0}^{m+n} \left[\left(\sum_{i,j>0} \binom{m}{i}\binom{n}{j}\right) x^p\right]
\end{aligned}$$

par identification on trouve :

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{\substack{i,j>0| \\ i+j=p}} \binom{m}{i}\binom{n}{j} = \sum_{i=0}^{p} \binom{m}{i}\binom{n}{p-i}$$

■

Théorème 1.1.2. (formule générale de binôme de Newton)
Soient a, b deux éléments dans $\mathbb{R}$ alors :

$$(a+b)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} a^k b^{\alpha-k} \quad , \alpha \in \mathbb{R}$$

Avec : $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)..(\alpha-k+1)}{k!}$

2 Fonction Gamma

Définition 2.1. Pour $\alpha > 0$ on définit la fonction Gamma d'Euler par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Proposition 1. Pour tout $\alpha > 0$ on a l'égalité suivante :

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx \\
&= \left[-x^{\alpha}e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\
&= \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\
&= \alpha\Gamma(\alpha)
\end{aligned}$$

■

Corollaire 1.2.1. Grâce à la relation récursive , la fonction gamma est prolongeable sur $\mathbb{R} - \{0, -1, -2, -3, ...\}$.

Proposition 2. **(les coefficients binomiaux avec la fonction gamma)**
Soit $\alpha > 0$ avec $\alpha \notin \mathbb{N}$ et pour $j \in \mathbb{N}$ on a :

$$(-1)^j \begin{pmatrix} \alpha \\ j \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(-\alpha+j)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-\alpha)}$$

Démonstration. On a :

$$(-1)^j \begin{pmatrix} \alpha \\ j \end{pmatrix} = \frac{-\alpha(-\alpha+1)(-\alpha+2)(-\alpha+3)...(-\alpha+j-1))}{j!}$$

D'après la relation récursive on a :

$$\begin{aligned}
\Gamma(-\alpha+j) &= \Gamma(-\alpha+j-1+1) \\
&= (-\alpha+j-1)\Gamma(-\alpha+j-1) \\
&= (-\alpha+j-1)(-\alpha+j-2)\Gamma(-\alpha+j-2) \\
&= (-\alpha+j-1)(-\alpha+j-2)(-\alpha+j-3)..(-\alpha+1)\Gamma(-\alpha+1) \\
&= (-\alpha+j-1)(-\alpha+j-2)(-\alpha+j-3)..(-\alpha+1)(-\alpha)\Gamma(-\alpha)
\end{aligned}$$

Alors :

$$-\alpha(-\alpha+1)(-\alpha+2)..(-\alpha+j-3)(-\alpha+j-2)(-\alpha+j-1) = \frac{\Gamma(-\alpha+j)}{\Gamma(-\alpha)}$$

Donc :

$$(-1)^j \left(\begin{array}{c} \alpha \\ j \end{array} \right) = \frac{\Gamma(-\alpha+j)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)}$$

■

3 Fonction Bêta

Définition 3.1. Pour $p > 0, q > 0$ on définie la fonction Bêta d'Euler par :

$$\mathcal{B}(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$$

Remarque 1. On peut écrire la fonction Bêta aussi sous la forme trigonométrique suivante :

$$\mathcal{B}(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin\theta)^{2p-1}(cos\theta)^{2q-1}d\theta$$

Proposition 1. Pour $p > 0, q > 0$ on a :

$$\mathcal{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Démonstration. On remarque que :

$$\Gamma(p) = 2\int_0^{+\infty} y^{2p-1}e^{-y^2}dy$$

et

$$\Gamma(q) = 2\int_0^{+\infty} y^{2q-1}e^{-y^2}dy$$

Alors :

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{2q-1}y^{2p-1}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

En utilisant les cordonnées polaires on trouve :

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(r\cos\theta)^{2q-1}(r\sin\theta)^{2p-1}e^{-r^2}rdrd\theta \\
&= 4\int_0^{+\infty} r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2q-1}(\sin\theta)^{2p-1}d\theta \\
&= 4\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}dr2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2q-1}(\sin\theta)^{2p-1}d\theta \\
&= 2\int_0^{+\infty} r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}dr2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2q-1}(\sin\theta)^{2p-1}d\theta \\
&= \Gamma(p+q)\mathcal{B}(p,q)
\end{aligned}$$

D'où :

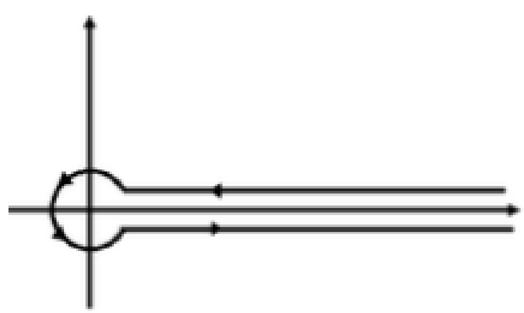
$$\mathcal{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

■

4 Contour de Hankel

Définition 4.1. Le contour de Hankel peut être définie par un cercle centré sur l'origine du plan complexe du rayon ϵ, avec ϵ est un réel strictement positif arbitrairement petit, connecté avec deux demi droites en parallèles avec l'axe des réels positifs.

Remarque 1. ce contour est utilisé pour exprimer la fonction gamma pour toute valeur complexe, car la forme de ce contour est convenable avec la relation récursive de la fonction gamma $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.



Chapitre 2

Introduction au calcul fractionnaire

1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.1. Soient $\alpha > 0$, $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ et $f \in L_1([a, b], \mathbb{R})$ .l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α à gauche et à droite de le fonction f est données respectivement par :

$$I_{a^+}^{\alpha} f(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^s (s-t)^{\alpha-1} f(t) dt \qquad , s > a$$

$$I_{b^-}^{\alpha} f(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_s^b (t-s)^{\alpha-1} f(t) dt \qquad , s < b$$

Avec $s \in [a, b]$.

Remarque 1. On utilise souvent l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α à gauche et on le note I_a^{α}.

Proposition 1. Soit $f \in C^0([a, b])$, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Re}(\alpha) > 0, \mathrm{Re}(\beta) > 0$ on a :

$$I_a^{\alpha}\left(I_a^{\beta} f\right)(s) = I_a^{\alpha+\beta} f(s)$$

et pour $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\alpha) > 1$ on a :

$$\frac{d}{ds}\left(I_a^{\alpha} f(s)\right) = I_a^{\alpha-1} f(s)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha\left(I_a^\beta f\right)(s) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^s (s-t)^{\alpha-1}\left(I_a^\beta f\right)(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^s (s-t)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-x)^{\beta-1}f(x)dx\right)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^s\int_a^t (s-t)^{\alpha-1}(t-x)^{\beta-1}f(x)dxdt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^s f(x)\left[\int_x^s (s-t)^{\alpha-1}(t-x)^{\beta-1}dt\right]dx
\end{aligned}$$

on pose $t = x + (s-x)\tau$, alors :

$$\begin{gathered}
dt = (s-x)d\tau \\
t = x \Longrightarrow x + (s-x)\tau = x \Longrightarrow \tau = 0 \\
t = s \Longrightarrow x + (s-s)\tau = s \Longrightarrow \tau = 1
\end{gathered}$$

alors :

$$\begin{aligned}
\int_x^s (s-t)^{\alpha-1}(t-x)^{\beta-1}dt &= \int_0^1 \left(s-(x+(s-x)\tau)\right)^{\alpha-1}(x+(s-x)\tau-x)^{\beta-1}(s-x)d\tau \\
&= \int_0^1 [(s-x)(1-\tau)]^{\alpha-1}[(s-x)\tau]^{\beta-1}(s-x)d\tau \\
&= (s-x)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}d\tau
\end{aligned}$$

et comme :

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\beta,\alpha) &= \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha\left(I_a^\beta f\right)(s) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^s f(x)\left[(s-x)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right]dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^s (s-x)^{(\alpha+\beta)-1}f(x)dx \\
&= \left(I_a^{\alpha+\beta}f\right)(s)
\end{aligned}$$

pour la deuxième identité de la proposition on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left(I_a^\alpha f\right)(s) &= \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^s (s-t)^{\alpha-1}f(x)dx\right) \\
&= \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^s (s-t)^{\alpha-2}f(x)dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^s (s-t)^{\alpha-2}f(x)dx = I^{\alpha-1}f(s)
\end{aligned}$$

■

2 Dérivée factionnaire au sens de Grunwald-Letnikov

Définition 2.1. Soit f une fonction complexe, la dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Grunwald-Letnikov en avant et en arrière est donnée par :

$$_{GL}D_d^\alpha f(s) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} (-1)^k f(s-kh)}{h^\alpha}$$

$$_{GL}D_g^\alpha f(s) = \lim_{h\to 0^+} e^{-i\pi\alpha} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} (-1)^k f(s+kh)}{h^\alpha}$$

respectivement.
où :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque 1. Dans ce mémoire on utilise la formule générale suivante :

$$_{GL}D^\alpha f(s) = e^{-i\theta\alpha} \lim_{|h|\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} (-1)^k f(s-kh)}{|h|^\alpha}$$

avec $h = |h|e^{i\theta}, \theta \in \{0, \pi\}$.
1)si $\theta = 0$ alors $_{G-L}D^\alpha f(s) =_{G-L} D_d^\alpha f(s)$.
2)si $\theta = \pi$ alors $_{G-L}D^\alpha f(s) =_{G-L} D_g^\alpha f(s)$.

2.1 Propriétés de la dérivée fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov

Propriété 2.1. Soient f, g deux fonctions complexes alors pour tout $s \in \mathbb{C}$ on a :

$$_{GL}D^\alpha [f+g](s) =_{GL} D^\alpha f(s) +_{GL} D^\alpha g(s)$$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
{}_{GL}D^{\alpha}\left[f(s)+g(s)\right] &= e^{-i\theta\alpha}\lim_{|h|\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right)(-1)^k(f+g)(s-kh)}{|h|^{\alpha}}\\
&= e^{-i\theta\alpha}\lim_{|h|\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right)(-1)^k\left[f(s-kh)+g(s-kh)\right]}{|h|^{\alpha}}\\
&= e^{-i\theta\alpha}\lim_{|h|\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right)(-1)^k f(s-kh)}{|h|^{\alpha}}\\
&+ e^{-i\theta\alpha}\lim_{|h|\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right)(-1)^k g(s-kh)}{|h|^{\alpha}}\\
&={}_{GL}D^{\alpha}f(s)+{}_{GL}D^{\alpha}g(s)
\end{aligned}
$$

■

Propriété 2.2. Soit f une fonction complexe, on a :

$$
{}_{GL}D^{\alpha}f(as)=a^{\alpha}{}_{GL}D^{\alpha}f(\tau)|_{\tau=as}
$$

où $s\in\mathbb{C}$, et $a\in\mathbb{R}$.

Démonstration. on pose $g(s)=f(as) \quad ; s\in\mathbb{C}, a\in\mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
{}_{GL}D^{\alpha}g(s) &={}_{GL}D^{\alpha}f(as)e^{-i\theta\alpha}\lim_{|h|\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right)g(s-kh)}{|h|^{\alpha}}\\
&= a^{\alpha}e^{-i\theta\alpha}\lim_{|h|\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right)f(as-kah)}{(|ah|)^{\alpha}}\\
&= a^{\alpha}{}_{GL}D^{\alpha}f(\tau)|_{\tau=as}
\end{aligned}
$$

■

Propriété 2.3. Soit f une fonction complexe, pour tout $s\in\mathbb{C}$ et $a\in\mathbb{R}$ on a :

$$
{}_{GL}D^{\alpha}f(s-a)={}_{GL}D^{\alpha}f(\tau)|_{\tau=s-a}
$$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
{}_{GL}D^{\alpha}f(s-a) &= e^{-i\theta\alpha}\lim_{|h|\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}f(s-a-kh)}{|h|^{\alpha}}\\
&= {}_{GL}D^{\alpha}f(\tau)|_{\tau=s-a}
\end{aligned}
$$

■

Propriété 2.4. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et f une fonction complexe, pour tout $s \in \mathbb{C}$ on a :

$$_{GL}D^{\alpha}\left[_{GL}D^{\beta}f(s)\right] =_{GL} D^{\beta}\left[_{GL}D^{\alpha}f(s)\right] =_{GL} D^{\alpha+\beta}f(s).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
_{GL}D^{\alpha}\left[_{GL}D^{\beta}f(s)\right] &= e^{-i\theta\alpha}\lim_{|h|\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ k\end{pmatrix}(-1)^{k}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\beta\\ n\end{pmatrix}(-1)^{n}f[s-(k+n)h]\right]}{|h|^{\alpha+\beta}}\\
&= e^{-i\theta\alpha}\lim_{|h|\to 0}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\beta\\ n\end{pmatrix}(-1)^{n}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ k\end{pmatrix}(-1)^{k}f[s-(k+n)h]\right]}{|h|^{\alpha+\beta}}\\
&= e^{-i\theta\alpha}\lim_{|h|\to 0}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\beta\\ n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ k\end{pmatrix}(-1)^{n+k}f[s-(k+n)h]}{|h|^{\alpha+\beta}}
\end{aligned}$$

on pose $m = n + k$ alors $k = m - n$ donc :

$$_{GL}D^{\alpha}\left[_{GL}D^{\beta}f(s)\right] = e^{-i\theta\alpha}\lim_{|h|\to 0}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\beta\\ n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ m-n\end{pmatrix}(-1)^{m}f[s-mh]}{|h|^{\alpha+\beta}}$$

et comme :(voir proposition 1)

$$\sum_{n=0}^{m}\begin{pmatrix}\beta\\ m-n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta\\ n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ m\end{pmatrix}$$

alors :

$$_{GL}D^{\alpha}\left[_{GL}D^{\beta}f(s)\right] = e^{-i\theta\alpha}\lim_{|h|\to 0}\frac{\sum_{m=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ m\end{pmatrix}(-1)^{m}f[t-mh]}{|h|^{\alpha+\beta}} =_{GL} D^{\alpha+\beta}f(s)$$

■

2.2 Exemples

Example 1. $f(s) = e^{as}, \forall s, a \in \mathbb{R}$

i) si $a > 0$:

$$
\begin{aligned}
{}_{GL}D^{\alpha}e^{as} ={}_{GL} D_d^{\alpha}e^{as} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\k\end{pmatrix}(-1)^k e^{as-akh}}{h^{\alpha}}\\
&= e^{as}\lim_{h\to 0^+} \frac{\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\k\end{pmatrix}(-1)^k e^{-akh}}{h^{\alpha}}
\end{aligned}
$$

d'après la formule générale de binôme de Newton on a :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\k\end{pmatrix}(-1)^k e^{-akh} = \sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\k\end{pmatrix}(-e^{-ah})^k = \left(1-e^{-ah}\right)^{\alpha}$$

alors :

$$
\begin{aligned}
{}_{GL}D_d^{\alpha}e^{as} &= \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{\left(1-e^{-ah}\right)^{\alpha}}{h^{\alpha}}\right)e^{as}\\
&= \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1-e^{-ah}}{h}\right)^{\alpha}e^{as}\\
&= \lim_{h\to 0^+} a^{\alpha}\left(\frac{1-e^{-ah}}{ah}\right)^{\alpha}e^{as}\\
&= \lim_{h\to 0^+} a^{\alpha}\left(\frac{e^{-ah}-1}{-ah}\right)^{\alpha}e^{as}
\end{aligned}
$$

on pose $-ah = x$, lorsque $h \to 0^+$,$x \to 0^-$ donc :

$$
\begin{aligned}
{}_{GL}D^{\alpha}e^{as} &= \lim_{x\to 0^-} a^{\alpha}\left(\frac{e^{x}-1}{x}\right)^{\alpha}e^{as}\\
&= a^{\alpha}e^{as}
\end{aligned}
$$

ii) Si $a < 0$:

$$
\begin{aligned}
{}_{GL}D^{\alpha}e^{as} ={}_{GL} D_g^{\alpha}e^{as} &= \lim_{h\to 0^+} e^{-i\pi\alpha}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\k\end{pmatrix}(-1)^k e^{as+akh}}{h^{\alpha}}\\
&= \lim_{h\to 0^+} e^{-i\pi\alpha}e^{as}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\k\end{pmatrix}(-1)^k e^{akh}}{h^{\alpha}}
\end{aligned}
$$

de même on a :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\k\end{pmatrix}(-1)^k e^{akh} = \left(1-e^{ah}\right)^{\alpha}$$

en suivant la même procédure on obtient :

$${}_{GL}D_g^{\alpha}e^{as} = a^{\alpha}e^{as}$$

Example 2. $f(s) = c \quad, \forall s \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}.$

$$
\begin{aligned}
{}_{GL}D^{\alpha} f(s) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} (-1)^k c}{h^{\alpha}} \\
&= c \lim_{h \to 0^+} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} (-1)^k}{h^{\alpha}}
\end{aligned}
$$

d'abord calculons la limite de $\sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} (-1)^k$:

d'après la proposition 2 On a :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} (-1)^k &= \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ n \end{pmatrix} (-1)^n \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(-\alpha + n + 1)}{\Gamma(n+1)}
\end{aligned}
$$

$$
\to_{n \to +\infty} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ \infty, & \alpha < 0 \end{cases}
$$

donc :

$$
{}_{GL}D^{\alpha} f(s) = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ \infty, & \alpha < 0 \end{cases}
$$

3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 3.1. Soit f une fonction complexe continue et soit $m - 1 < \alpha < m$ avec $m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, on appelle dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de f, la fonction définie par :

$$
\begin{aligned}
\left({}^{RL}D_a^{\alpha} f \right)(s) &= \left(\frac{d}{ds} \right)^m \left[\left(I_a^{m-\alpha} f \right)(s) \right] \\
&= \left(\frac{d}{ds} \right)^m \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^s (s-t)^{m-\alpha-1} f(t) dt
\end{aligned}
$$

avec $s \in \mathbb{C}$.

3.1 Propriétés de dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Propriété 3.1. Soit $m-1 < \alpha < m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ et I_a^α l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α on a :

$$^{RL}D_a^\alpha \circ I_a^\alpha = id$$

Démonstration. Soit f une fonction complexe, et $s \in \mathbb{C}$ on a :

$$\begin{aligned}\left[^{RL}D_a^\alpha \left(I_a^\alpha f\right)\right](s) &= \left(\frac{d}{ds}\right)^m \left[\left(I_a^{m-\alpha}\left(I_a^\alpha f\right)\right)(s)\right] \\ &= \left(\frac{d}{ds}\right)^m \left[\left(I_a^m f\right)(s)\right] \\ &= f(s)\end{aligned}$$

■

Propriété 3.2. Soit $m-1 < \alpha < m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction complexe continue tel que : $\left[^{RL}D_a^\alpha f\right](s) = 0$ alors :

$$f(s) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+\alpha+1-m)}(s-a)^{j+\alpha-m}$$

avec $s \in \mathbb{C}$.

Démonstration.

$$\left[^{RL}D_a^\alpha f\right](s) = 0 \Longrightarrow \left(\frac{d}{ds}\right)^m \left[I_a^{m-\alpha} f\right](s) = 0$$

alors :

$$\left[I_a^{m-\alpha} f\right](s) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (s-a)^j$$

donc :

$$\begin{aligned}f(s) &= I_a^{\alpha-m}\left[\sum_{j=0}^{m-1} c_j (s-a)^j\right] \\ &=^{RL} D_a^{m-\alpha}\left[\sum_{j=0}^{m-1} c_j (s-a)^j\right] \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} c_j \;^{RL}D_a^{m-\alpha}(s-a)^j\end{aligned}$$

on va voir dans la suite que :

$$^{RL}D_a^{m-\alpha}(s-a)^j = \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-m+\alpha+1)}(s-a)^{j-m+\alpha}$$

d'où :

$$f(s) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+\alpha+1-m)}(s-a)^{j+\alpha-m}$$

■

Lemme 3.1.1. Si f une fonction analytique sur $]a,b[$ alors :

$$^{RL}D_{a^+}^{\alpha} f(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array} \right) \frac{(s-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} f^{(n)}(x) \quad , s \in]a,b[, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. (livre [1] page 277). ■

Propriété 3.3. (Formule Générale de Leibniz) Soient φ, ψ deux fonctions définies sur $]a,b[$, pour tout $s \in]a,b[, \alpha \in \mathbb{R}$ on a :

$$^{RL}D^{\alpha}\left(\varphi(s)\psi(s)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array} \right) \varphi^{(n)}(s)^{RL}D^{\alpha-n}\psi(s)$$

Démonstration. Soient φ, ψ deux fonction analytiques sur un intervalle $]a,b[$, d'après le lemme 3.1.1 on a :

$$^{RL}D^{\alpha}\left(\varphi\psi\right)(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ k \end{array} \right) \frac{(s-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} \left(\varphi\psi\right)^{(k)}(s) \quad , s \in]a,b[.$$

en utilisant la formule de Leibniz classique on obtient :

$$\begin{aligned} ^{RL}D^{\alpha}\left(\varphi\psi\right)(s) =& \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ k \end{array} \right) \frac{(s-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} \left[\sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) \varphi^{(k-j)}(s)\psi^{(j)}(s) \right] \quad , s \in]a,b[\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ k \end{array} \right) \frac{(s-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) \varphi^{(k-j)}(s)\psi^{(j)}(s) \quad , s \in]a,b[. \end{aligned}$$

on pose :$m = k - j$, alors :

$$^{RL}D^{\alpha}\left(\varphi\psi\right)(s) = \sum_{m=-j}^{+\infty} \sum_{j=0}^{m+j} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ m+j \end{array} \right) \frac{(s-a)^{m+j-\alpha}}{\Gamma(m+j+1-\alpha)} \left(\begin{array}{c} m+j \\ j \end{array} \right) \varphi^{(m)}(s)\psi^{(j)}(s) \quad , s \in]a,b[$$

on reprend la notation de k alors :

$$^{RL}D^{\alpha}\left(\varphi\psi\right)(s)=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{k+j}\left(\begin{array}{c}\alpha\\ k+j\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}k+j\\ j\end{array}\right)\frac{(s-a)^{k+j-\alpha}}{\Gamma(k+j+1-\alpha)}\varphi^{(k)}(s)\psi^{(j)}(s)\quad ,s\in]a,b[$$

comme :

$$\left(\begin{array}{c}\alpha\\ k+j\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}k+j\\ j\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\alpha\\ j\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\alpha-j\\ k\end{array}\right)$$

et en tendant k vers $+\infty$ on obtient :

$$\begin{aligned}^{RL}D^{\alpha}\left(\varphi\psi\right)(s)&=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\begin{array}{c}\alpha\\ j\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\alpha-j\\ k\end{array}\right)\frac{(s-a)^{k+j-\alpha}}{\Gamma(k+j+1-\alpha)}\varphi^{(k)}(s)\psi^{(j)}(s)\quad ,s\in]a,b[\\ &=\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\begin{array}{c}\alpha\\ j\end{array}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\begin{array}{c}\alpha-j\\ k\end{array}\right)\frac{(s-a)^{k+j-\alpha}}{\Gamma(k+j+1-\alpha)}\varphi^{(k)}(s)\psi^{(j)}(s)\quad ,s\in]a,b[\end{aligned}$$

on réutilise le lemme 3.1.1 on trouve :

$$^{RL}D^{\alpha}\left(\varphi(s)\psi(s)\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\alpha\\ j\end{array}\right)\varphi^{(j)}(s)^{RL}D^{\alpha-j}\psi(s)$$

■

3.2 Exemples

Example 1. $f(s)=(s-a)^{\beta},s\in\mathbb{R}$

$$^{RL}D_a^{\alpha}(s-a)^{\beta}=\left(\frac{d}{ds}\right)^{m}\left[\left(I_a^{m-\alpha}(s-a)^{\beta}\right)\right]$$

On calcul $I_a^{m-\alpha}(s-a)^{\beta}$:

On a :

$$I_a^{\alpha}(s-a)^{\beta}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^s(s-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\beta}dt$$

on pose $t=a+(s-a)\tau$, alors :

$$\begin{gathered}dt=(s-a)d\tau\\ t=a\Longrightarrow a+(s-a)\tau=a\Longrightarrow\tau=0\\ t=s\Longrightarrow a+(s-a)\tau=s\Longrightarrow\tau=1\end{gathered}$$

alors :

$$\begin{aligned}
I_a^{\alpha}(s-a)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^s (s-a-(s-a)\tau)^{\alpha-1}(a+(s-a)\tau-a)^{\beta}(s-a)d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (s-a)^{\alpha-1}(1-\tau)^{\alpha-1}(s-a)^{\beta}\tau^{\beta}(s-a)d\tau \\
&= \frac{(s-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta}d\tau \\
&= \frac{(s-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\beta(\alpha,\beta+1) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)}(s-a)^{\alpha+\beta} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(s-a)^{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

par suite :

$$\begin{aligned}
I_a^{m-\alpha}(s-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha+\beta+1)}(s-a)^{m-\alpha+\beta} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1+m)}(s-a)^{\beta-\alpha+m}
\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{\alpha}(s-a)^{\beta} &= \left(\frac{d}{ds}\right)^m I_a^{m-\alpha}(s-a)^{\beta} \\
&= \left(\frac{d}{ds}\right)^m \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}(s-a)^{\beta+m-\alpha}\right] \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}\left(\frac{d}{ds}\right)^m (s-a)^{\beta+m-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+m-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(s-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(s-a)^{\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 4.1. Soit $f \in C^m(\mathbb{C})$ et soit $0 < m-1 < \alpha < m \quad ,m \in \mathbb{N}$. on appelle dérivée fractionnaire de f d'ordre α au sens de Caputo, la fonction définie par :

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha f(s) &= I_a^{m-\alpha} f^{(m)}(s) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^s (s-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t)dt \end{aligned}$$

Où $a, s \in \mathbb{C}$.

4.1 Propriétés de dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Propriété 4.1. Soit $f \in C^1(\mathbb{C})$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $0 < \alpha + \beta < 1$ et $a \in \mathbb{C}$ alors :

$$\left({}^C D_a^\alpha \circ^C D_a^\beta\right) f(s) = \left({}^C D_a^\beta \circ^C D_a^\alpha\right) f(s) =^C D_a^{\alpha+\beta} f(s)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \left({}^C D_a^\alpha \circ^C D_a^\beta\right) f(s) &= \left(\left(I_a^{1-\alpha} \circ D^1\right) \circ \left(I_a^{1-\beta} \circ D^1\right)\right) f(s) \\ &= (I_a^{1-\alpha-\beta} \circ \underbrace{I_a^\beta \circ D^1}_{{}^C D_a^{1-\beta}} \circ I_a^{1-\beta} \circ D^1) f(s) \\ &= (I^{1-\alpha-\beta_0} \circ \underbrace{{}^C D_a^{1-\beta} \circ I_a^{1-\beta}}_{id} \circ D^1) f(s) \\ &= \left(I^{1-(\alpha+\beta)} \circ D^1\right) f(s) \\ &=^C D_a^{\alpha+\beta} f(s) \end{aligned}$$

■

Propriété 4.2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $m-1 < \alpha < m$,$m \in \mathbb{N}$ et $f \in C^m(\mathbb{C})$ alors :

$${}^C D_a^\alpha \left[I_a^\alpha f\right](s) = f(s)$$

avec $s \in \mathbb{C}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
{}^{C}D_a^{\alpha}\left[I_a^{\alpha}f\right](s) &= I_a^{m-\alpha}\left[\left(\frac{d}{ds}\right)^m\left(I_a^{\alpha}f\right)(s)\right]\\
&= I_a^{m-\alpha}\left[\left(\frac{d}{ds}\right)^m\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^s(s-t)^{\alpha-1}f(t)dt\right)\right]\\
&= I_a^{m-\alpha}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^s\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-m)}(s-t)^{\alpha-1-m}f(t)dt\right]\\
&= I_a^{m-\alpha}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha-m)}\int_a^s(s-t)^{(\alpha-m)-1}f(t)dt\right]\\
&= \left(I_a^{m-\alpha}\left[I_a^{\alpha-m}f\right]\right)(s)\\
&= I_a^0 f(s)\\
&= f(s)
\end{aligned}$$

■

Propriété 4.3. Soit $f \in C^m(\mathbb{C})$ tel que ${}^{C}D_a^{\alpha}f(s) = 0$ alors :

$$f(s) = \sum_{j=0}^{m-1}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(s-a)^j$$

avec $s \in \mathbb{C}$.

Lemme 4.1.1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $f \in C^m(\mathbb{C})$, pour tout $s \in \mathbb{C}$ on a :

$$\left[I_a^m f^{(m)}\right](s) = f(s) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{f^{(j)}(a)(s-a)^j}{j!}$$

Démonstration. **(de lemme 4.1.1)**

On fait la démonstration par récurrence :

pour $m = 1$:

$$\begin{aligned}
f(s) - \frac{f^{(0)}(a)(s-a)^0}{0!} &= f(s) - f(a)\\
&= \left[I_a^1 f'\right](s)
\end{aligned}$$

Supposons que :

$$\left[I_a^m f^{(m)}\right](s) = f(s) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{f^{(j)}(a)(s-a)^j}{j!}$$

Montrons que :

$$\left[I_a^{m+1} f^{(m+1)}\right](s) = f(s) - \sum_{j=0}^{m} \frac{f^{(j)}(a)(s-a)^j}{j!}$$

$$\begin{aligned}
\left[I_a^{m+1} f^{(m+1)}\right](s) &= \left[I_a^{m+1} f'^{(m)}\right](s) \\
&= I_a^1 \left[I_a^m g^{(m)}\right](s) \qquad\qquad (g = f') \\
&= I_a^1 \left\{ g(s) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{g^{(j)}(a)(s-a)^j}{j!} \right\} \\
&= \int_a^s g(t)dt - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{g^{(j)}(a)}{j!} \frac{(s-a)^{j+1}}{j+1} \\
&= \int_a^s f'(t)dt - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j+1)}(a)(s-a)^{j+1}}{(j+1)!} \\
&= f(s) - f(a) - \sum_{j=1}^{m} \frac{f^{(j)}(a)(s-a)^j}{j!} \\
&= f(s) - \sum_{j=0}^{m} \frac{f^{(j)}(a)(s-a)^j}{j!}
\end{aligned}$$

■

Démonstration. **(du propriété 4.3)**

${}^{C}D_a^{\alpha} f(s) = 0$ donne $I_a^{m-\alpha} f^{(m)}(s) = 0$

on fait la composition par I_a^{α} de deux membres on trouve :

$$I_a^{\alpha} I_a^{m-\alpha} f^{(m)}(s) = I_a^{\alpha} 0 = 0$$

ce qui donne :

$$I_a^m f^{(m)}(s) = 0$$

or d'après le lemme 4.1.1 on a : $\left[I_a^m f^{(m)}\right](s) = f(s) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(s-a)^j}{j!}$

où :

$$f(s) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(s-a)^j$$

■

4.2 Exemples

Example 1. $f(s) = (s-a)^{\beta}, s \in \mathbb{R}$
on pose $\beta > \alpha$, on a :

$$^{C}D_a^{\alpha}(s-a)^{\beta} = I_a^{m-\alpha}\left[\left(\frac{d}{ds}\right)^m (s-a)^{\beta}\right]$$

d'abord on calcul :$\left(\frac{d}{ds}\right)^m (s-a)^{\beta}$

on a :

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{ds}\right)^m (s-a)^{\beta} &= \beta(\beta-1)(\beta-2)...(\beta-m+1)(s-a)^{\beta-m} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)}(s-a)^{\beta-m}\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}^{C}D_a^{\alpha}(s-a)^{\beta} &= I_a^{m-\alpha}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)}(s-a)^{\beta-m}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)} I_a^{m-\alpha}(s-a)^{\beta-m}\end{aligned}$$

maintenant on calcul :$I_a^{m-\alpha}(s-a)^{\beta-m}$

on a :

$$I_a^{\alpha}(s-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^s (s-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\beta}dt$$

on pose le changement $t = a + (s-a)\tau$ on obtient :

$$\tau = \frac{t-a}{s-a} \qquad dt = (s-a)d\tau$$

$$t = a \Longrightarrow \tau = 0$$
$$t = s \Longrightarrow \tau = 1$$

alors :

$$\begin{aligned}I_a^{\alpha}(s-a)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^s (s-a-(s-a)\tau)^{\alpha-1}(a+(s-a)\tau-a)^{\beta}(s-a)d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (s-a)^{\alpha-1}(1-\tau)^{\alpha-1}(s-a)^{\beta}\tau^{\beta}(s-a)d\tau \\ &= \frac{(s-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta}d\tau \\ &= \frac{(s-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\beta(\alpha,\beta+1) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)}(s-a)^{\alpha+\beta} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(s-a)^{\alpha+\beta}\end{aligned}$$

par suite :

$$\begin{aligned} I_a^{m-\alpha}(s-a)^{\beta-m} &= \frac{\Gamma(\beta-m+1)}{\Gamma(m-\alpha+\beta-m+1)}(s-a)^{m-\alpha+\beta-m} \\ &= \frac{\Gamma(\beta-m+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(s-a)^{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} {}^C D_a^{\alpha}(s-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)} I_a^{m-\alpha}(s-a)^{\beta-m} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)} \frac{\Gamma(\beta-m+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(s-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(s-a)^{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

Remarque 1. La dérivée au sens de Caputo d'une fonction constante est **nulle**.

En effet , soit $c \in \mathbb{R}$, alors :

$$ {}^C D_a^{\alpha} c = I_a^{m-\alpha} \left(\frac{d}{ds}\right)^m c = I_a^{m-\alpha} 0 = 0 $$

5 Dérivée fractionnaire au sens d'Ortigueira

Définition 5.1. Soit f une fonction complexe, on appelle dérivée fractionnaire de f dans la direction de θ du plan complexe d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}$ au sens d'Ortigueira la fonction définie par :

$$ oD^{\alpha} f(s) = \frac{e^{j(\pi-\theta)\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{f\left(te^{j\theta}+s\right) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(s)}{k!} e^{jk\theta} t^k}{t^{\alpha+1}} dt $$

où $\theta \in (0, 2\pi)$ et $n = [\alpha]$.

5.1 Propriétés de dérivée fractionnaire au sens d'Ortigueira

Propriété 5.1. Soit f une fonction analytique sur une partie contient le contour de Hankel, pour $\theta \in [0, 2\pi[$ et $n-1 < \alpha < n \in \mathbb{Z}$ on a :

1) $\lim_{\alpha \to n^-} {}_O D^{\alpha} f(s) = f_{\theta}^{(n)}(s)$, $\forall s \in \mathbb{C}$.

2) $\lim_{\alpha \to (n-1)^+} {}_O D^{\alpha} f(s) = f_{\theta}^{(n-1)}(s)$, $\forall s \in \mathbb{C}$.

Démonstration. **1)**

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to n^-} oD^\alpha f(s) &= oD^n f(s)\\
&= \lim_{\alpha\to n^-} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi-\theta)\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \frac{\left[f\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}+s\right) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(s)}{k!}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\theta}t^k\right]}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t\\
&= \lim_{\alpha\to n^-} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\pi j}\int_{\mathrm{C}} f(w)\frac{1}{(w-s)^{\alpha+1}}\mathrm{d}w\\
&= \lim_{\alpha\to n^-} \frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right) f(s-kh)}{h^\alpha} - \mathrm{hg}(h)\\
&= \lim_{\alpha\to n^-} \frac{\Delta^\alpha f(s)}{h^\alpha} - hg(h)\\
&= \frac{\Delta^n f(s)}{h^n} - hg(h)
\end{aligned}$$

avec g une fonction bornée.
on fait tendre h vers 0 on obtient :

$$\lim_{\alpha\to n^-} oD^\alpha f(s) = \lim_{\alpha\to n^-}\frac{\Delta^\alpha f(s)}{h^\alpha} = \lim_{\alpha\to n^-}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right) f(s-kh)}{h^\alpha} = f_\theta^{(n)}(s).$$

2) de même on a :

$$\lim_{\alpha\to(n-1)^+} oD^\alpha f(s) = \lim_{\alpha\to(n-1)^+}\lim_{\alpha\to n^-}\frac{\Delta^\alpha f(s)}{h^\alpha} - hg(h) = \frac{\Delta^n f(s)}{h^n} - hg(h)$$

et g une fonction bornée.
on fait tendre h vers 0 on obtient :

$$\lim_{\alpha\to n^-} oD^\alpha f(s) = \lim_{\alpha\to(n-1)^+}\frac{\Delta^\alpha f(s)}{h^\alpha} - hg(h) = \frac{\Delta^n f(s)}{h^n} = f_\theta^{(n-1)}(s).$$

■

Propriété 5.2. Soit f une fonction complexe vérifie :

$$\frac{d^k}{ds^k}\int_0^\infty f(xe^{j\theta}+s)dx = \int_0^\infty \frac{d^k}{ds^k} f(xe^{j\theta}+s)dx$$

alors :

$$\frac{d^k}{ds^k}({}_O D^\alpha f(s)) ={}_O D^\alpha(\frac{d^k}{ds^k}f(s))$$

avec $\theta \in [0, 2\pi[$, $k \in \mathbb{Z}^+, s \in \mathbb{C}$.

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
\frac{d^k}{ds^k}\int_0^\infty f(te^{j\theta}+s)dt &= \frac{d^k}{ds^k}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi-\theta)\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^\infty \frac{\left[f\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}+s\right)-\sum_{m=0}^{n}\frac{f^{(m)}(s)}{m!}\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\theta}t^m\right]}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi-\theta)\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^\infty \frac{d^k}{ds^k}\frac{\left[f\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}+s\right)-\sum_{m=0}^{n}\frac{f^{(m)}(s)}{m!}\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\theta}t^k\right]}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi-\theta)\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^\infty \frac{\frac{d^k}{ds^k}f\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}+s\right)-\sum_{m=0}^{n}\frac{f^{(k+m)}(s)}{m!}\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\theta}t^m}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t \\
&={}_O\, D^\alpha(f^{(k)}(s)).
\end{aligned}
$$

■

5.2 Exemples

Example 1. $f(s)=e^{as}$ avec $a,s\in\mathbb{C}$:

$$
\begin{aligned}
oD^\alpha f(s) =& \frac{e^{j(\pi-\theta)\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^\infty \frac{e^{a(te^{j\theta}+s)}-\sum_{k=0}^{n}\frac{\frac{d^k}{ds^k}e^{as}}{k!}e^{jk\theta}t^k}{t^{\alpha+1}}dt \\
&= \frac{e^{j(\pi-\theta)\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^\infty \frac{e^{ate^{j\theta}}e^{as}-\sum_{k=0}^{n}\frac{a^ke^{as}}{k!}e^{jk\theta}t^k}{t^{\alpha+1}}dt \\
&= \frac{e^{j(\pi-\theta)\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}e^{as}\int_0^\infty \frac{e^{ate^{j\theta}}-\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}e^{jk\theta}t^k}{t^{\alpha+1}}dt \\
&= \frac{e^{j(\pi-\theta)\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}e^{as}\int_0^\infty \frac{e^{ate^{j\theta}}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(ate^{j\theta})^k}{k!}}{t^{\alpha+1}}dt
\end{aligned}
$$

On pose $y=-ate^{j\theta}$ alors, $t=\frac{-y}{ae^{j\theta}}$, donc, on obtient :

$$
\begin{aligned}
oD^\alpha f(s) &= \frac{e^{j(\pi-\theta)\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}e^{as}\frac{a^{\alpha+1}(e^{j\theta})^{\alpha+1}(-1)^{\alpha+1}}{-ae^{j\theta}}\int_0^\infty \frac{e^{-y}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-y)^k}{k!}}{y^{\alpha+1}}dy \\
&= (-1)^\alpha\frac{e^{j\pi\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}a^\alpha e^{as}\int_0^\infty \frac{e^{-y}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-y)^k}{k!}}{y^{\alpha+1}}dy \\
&= \frac{e^{2\pi j\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}a^\alpha e^{as}\Gamma(-\alpha) \\
&= e^{2\pi j\alpha}a^\alpha e^{as}
\end{aligned}
$$

Example 2. $f(s) = \cos(as)$ avec $a, s \in \mathbb{C}$

on prend la fonction $g(s) = e^{jas}$.
d'après l'exemple 1 on a :

$$\begin{aligned}
{}_OD^{\alpha}g(s) &= (ja)^{\alpha}e^{2\pi j\alpha}e^{ias} \\
&= j^{\alpha}a^{\alpha}e^{2\pi j\alpha}e^{jas} \\
&= e^{j\frac{\pi}{2}\alpha}e^{\alpha\log a}e^{2\pi j\alpha}e^{jas} \\
&= e^{(\frac{5\pi}{2}j\alpha+as)}e^{\alpha\log a} \\
&= \left[\cos(\frac{5\pi}{2}\alpha + as) + j\sin(\frac{5\pi}{2}\alpha + as)\right]e^{\alpha\log a}
\end{aligned}$$

de l'autre coté on a :

$$\begin{aligned}
{}_OD^{\alpha}g(s) &={}_O D^{\alpha}e^{jas} \\
&= o_OD^{\alpha}\left[\cos(as) + j\sin(as)\right] \\
&={}_O D^{\alpha}\cos(as) + j_OD^{\alpha}\sin(as) \\
&= \left[\cos(\frac{5\pi}{2}\alpha + as) + j\sin(\frac{5\pi}{2}\alpha + as)\right]e^{\alpha\log a} \\
&= \cos(\frac{5\pi}{2}\alpha + as)e^{\alpha\log a} + j\sin(\frac{5\pi}{2}\alpha + as)e^{\alpha\log a}
\end{aligned}$$

par identification on obtient :

$${}_OD^{\alpha}\cos(as) = \cos(\frac{5\pi}{2}\alpha + as)e^{\alpha\log a}$$

Example 3. $f(s) = \sin(as)$ avec $a, s \in \mathbb{C}$
d'après l'exemple 1 on conclue :

$${}_OD^{\alpha}\sin(as) = \sin(\frac{5\pi}{2}\alpha + as)e^{\alpha\log a}$$

6 Dérivée fractionnaire au sens d'Ortigueira-Caputo

Définition 6.1. La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}$ de la fonction f de variable complexe dans $\mathbb{C}$ au sens de Ortigueira-Caputo est donné par :

$$ {}_cDf(s) = oD^{\alpha-m}\left(f^{(m)}(s)\right) = \frac{e^{j(\pi-\theta)(\alpha-m)}}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f^{(m)}\left(te^{j\theta}+s\right)}{t^{\alpha-m+1}} dt $$

$[\alpha] = m.$

7 Dérivée fractionnaire au sens de Marchaud

Définition 7.1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.on appelle dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Marchaud en avant et en arrière les fonctions définie pour tout $s \in \mathbb{R}$ par :

$$ \mathbf{D}_+^\alpha f(s) = \frac{1}{K(\alpha,k)} \int_0^\infty \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} f(s-jt)}{t^{\alpha+1}} \mathrm{d}t $$

$$ \mathbf{D}_-^\alpha f(s) = \frac{1}{K(\alpha,k)} \int_0^\infty \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} f(s+jt)}{t^{\alpha+1}} \mathrm{d}t $$

respectivement.
avec :

$$ K(\alpha,k) = \int_0^\infty \frac{(1-e^{-u})^k}{u^{\alpha+1}} \mathrm{d}u $$

et $k > 0$.

Remarque 1.

$$ \left(\mathbf{D}_+^\alpha c\right)(s) = \left(\mathbf{D}_-^\alpha c\right)(s) = 0 \qquad , c \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(\alpha) > 0. $$

En effet :

$$ \begin{aligned} \left(\mathbf{D}_+^\alpha c\right)(s) &= \frac{1}{K(\alpha,k)} \int_0^\infty \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} c}{t^{\alpha+1}} \mathrm{d}t \\ &= \frac{c}{K(\alpha,k)} \int_0^\infty \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix}}{t^{\alpha+1}} \mathrm{d}t \end{aligned} $$

d'après la formule de Binôme 1.1.1 on a :

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} (-1)^j 1^{k-j} = (-1+1)^k = 0$$

donc :

$$\left(\mathbf{D}_{+}^{\alpha} c\right)(s) = 0$$

de même on a :

$$\left(\mathbf{D}_{-}^{\alpha} c\right)(s) = 0$$

8 Dérivée fractionnaire au sens de Hilfer

Définition 8.1. Soient $n-1<\alpha<n$ avec $n \in \mathbb{N}$, $0<\beta<1$ et $I=[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ et soit $f \in C^n(I,\mathbb{R})$. la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Hilfer de f à gauche et à droite est définie respectivement par :

$${}^{H}\mathbb{D}_{a^+}^{\alpha,\beta} f(s) = I_{a^+}^{\beta(n-\alpha)} \left(\frac{d}{ds}\right)^n I_{a^+}^{(1-\beta)(n-\alpha)} f(s)$$

$${}^{H}\mathbb{D}_{b^-}^{\alpha,\beta} f(s) = I_{b^-}^{\beta(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{ds}\right)^n I_{b^-}^{(1-\beta)(n-\alpha)} f(s)$$

Pour tout $s \in [a,b]$.
Avec I^α est l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α.

Chapitre 3

Fonction Zêta de Riemann et ses fonctions analogues

1 Rappels sur les Séries des Dirichlet

1.1 Motivation

Les séries de Dirichlet ont une grande importance dans les applications de l'analyse de la théories des nombres, ils sont plus compliqués par rapport au séries entières, en effet le disque de convergence, le disque de convergence absolue et le disque de définition de la fonction limite ont tous le même sens pour les séries entières. cependant, pour les séries de Dirichlet ils sont différents et on remplace le disque de convergence par le demi-plan de convergence.

Définition 1.1. Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres complexes par :

$$f(s)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

Où (λ_n) est une suite croissante dans $\mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to+\infty}\lambda_n=+\infty$ et $s=\sigma+jt$ avec $\sigma,t\in\mathbb{R}$, et (a_n) une suite de nombres complexes.

Remarque 1. • f est dite **série de Dirichlet de type** λ_n.
• si $\lambda_n=\log n$ alors $f(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^s}$ est dit **série de Dirichlet ordinaire**.
• si $\lambda_n=\log n$ et $a_n=1, \forall n\in\mathbb{N}^*$ alors $f(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$ est la fonction **Zêta de Riemann**.
• si $\lambda_n=n$ alors $f(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\left(e^{-s}\right)^n$ est **une série entière** de la forme $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n z^n$ tel que : $z=e^{-s}$.

Remarque 2. Dans notre étude on considère les séries de Dirichlet **ordinaire** sous la forme :

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

1.2 Convergence des séries de Dirichlet ordinaire

Définition 1.2. On dit que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ est convergente en $s = \sigma + it$ si

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s} \right| < +\infty$$

et s'il existe une fonction f tel que :

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

Lemme 1.2.1. Si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ est convergente pour $s_0 = \mathrm{Re}(s_0) + j\,\mathrm{Im}(s_0)$ alors elle est convergente pour tout valeur s tel que $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$.

Démonstration. Soient $s_0, s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$.
on suppose que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{s_0}}$ converge, avec $s_0 = \mathrm{Re}(s_0) + j\,\mathrm{Im}(s_0)$.
comme la fonction $x \mapsto n^x$ est croissante pour tout réel x avec $n \geq 1$ alors :

$$|n^s| = n^{\mathrm{Re}(s)} \geq n^{\mathrm{Re}(s_0)} = |n^{s_0}|$$

donc :

$$\frac{1}{|n^s|} \leq \frac{1}{|n^{s_0}|}$$

et par suite :

$$\frac{|a_n|}{|n^s|} \leq \frac{|a_n|}{|n^{s_0}|}$$

par comparaison en déduire que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{|n^s|}$ converge donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ converge.
∎

Lemme 1.2.2. (l'abscisse de convergence) :

Soit la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$, $s \in \mathbb{C}$:
• si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ est divergente alors

$$\sigma_0 = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\log|S_n|}{\log n}$$

où $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$.
• si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ est convergente alors :

$$\sigma_0 = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\log|R_n|}{\log n}$$

où $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ...$
• on note σ_0 **l'abscisse de convergence**.

Démonstration. (On va démontrer la première partie du lemme 1.2.2, la deuxième partie a une démonstration similaire).
On suppose que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge, et on note :

$$\alpha := \limsup_{n\to\infty} \frac{\log|s_n|}{\log n}$$

et on montre que $\sigma_0 = \alpha$.
la première étape, On suppose que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-\sigma}$ converge avec $0 < \sigma = \mathrm{Re}(s)$,$s \in \mathbb{C}$ et on montre que $\sigma \geqslant \alpha$.
On pose $b_n = a_n n^{-\sigma}$ et $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k k^{-\sigma}$ avec $B_0 = 0$. On suppose que B_n est bornée alors $|B_n| \leqslant M$, $M > 0$.
On a :

$$\begin{aligned} s_N &= \sum_{n=1}^{N} a_n \\ &= \sum_{n=1}^{N} b_n n^{\sigma} \\ &= \sum_{n=1}^{N} (B_n - B_{n-1}) n^{\sigma} \\ &= B_N N^{\sigma} + \sum_{n=1}^{N-1} B_n n^{\sigma} - \sum_{n=1}^{N} B_{n-1} n^{\sigma} \end{aligned}$$

on pose $m = n - 1$ on trouve :

$$\begin{aligned} s_N &= B_N N^\sigma + \sum_{n=1}^{N-1} B_n n^\sigma - \sum_{m=0}^{N-1} B_m (m+1)^\sigma \\ &= B_N N^\sigma + \sum_{n=1}^{N-1} B_n n^\sigma - \sum_{n=1}^{N-1} B_n (n+1)^\sigma \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} B_n \left[n^\sigma - (n+1)^\sigma \right] + B_N N^\sigma \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} |s_N| &= \left| \sum_{n=1}^{N-1} B_n \left[n^\sigma - (n+1)^\sigma \right] + B_N N^\sigma \right| \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{N-1} |B_n| \left| n^\sigma - (n+1)^\sigma \right| + |B_N| N^\sigma \\ &\leqslant M \sum_{n=1}^{N-1} (n+1)^\sigma - (n)^\sigma + M N^\sigma = M(N^\sigma - 1) + M N^\sigma \\ &\leqslant M N^\sigma + M N^\sigma = 2 M N^\sigma \end{aligned}$$

alors :

$$\log |s_N| \leqslant \log 2 M N^\sigma = \log 2M + \sigma \log N$$

donc :

$$\frac{|s_N|}{\log N} \leqslant \frac{\log 2M}{\log N} + \sigma$$

alors :

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{|s_N|}{\log N} \leqslant \sigma$$

donc :

$$\alpha \leqslant \sigma$$

maintenant, pour la deuxième étape, on suppose que $\alpha \leqslant \sigma$ et on montre que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-\sigma}$ converge.
on choisit $\epsilon > 0$ tel que : $\alpha + \epsilon < \sigma$.
on a par définition

$$\frac{|s_N|}{\log N} \leqslant \alpha \quad ; \forall n \geqslant n_0, n_0 \in \mathbb{N}$$

alors :

$$\frac{|s_N|}{\log N} \leqslant \alpha + \epsilon \quad ; \forall n \geqslant n_0, n_0 \in \mathbb{N}$$

ce qui implique :

$$\log |s_N| \leqslant (\alpha + \epsilon) \log n = \log(n^{\alpha+\epsilon})$$

donc :

$$|s_N| \leqslant n^{\alpha+\epsilon} \quad ; \forall n \geqslant n_0, n_0 \in \mathbb{N}$$

aussi on remarque que :

$$\frac{1}{n^\sigma} - \frac{1}{(n+1)^\sigma} = \sigma \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{\sigma+1}} \leqslant \sigma \int_n^{n+1} \frac{du}{n^{\sigma+1}} = \sigma(\frac{1}{n^{\sigma+1}})$$

on a donc :

$$\begin{aligned}\sum_{n=M+1}^{N} a_n n^{-\sigma} &= \sum_{n=M+1}^{N} (s_n - s_{n-1})\, n^{-\sigma} \\ &= \sum_{n=M+1}^{N} s_n n^{-\sigma} - \sum_{n=M+1}^{N} s_{n-1} n^{-\sigma}\end{aligned}$$

on pose $k = n - 1$ on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{n=M+1}^{N} a_n n^{-\sigma} &= \sum_{n=M+1}^{N-1} s_n n^{-\sigma} - \sum_{k=M}^{N} s_k (k+1)^{-\sigma} \\ &= \sum_{n=M+1}^{N-1} s_n n^{-\sigma} - \sum_{n=M}^{N} s_n (n+1)^{-\sigma} \\ &= \sum_{n=M}^{N} s_n \left[\frac{1}{n^\sigma} - \frac{1}{(n+1)^\sigma}\right] + s_N (N+1)^{-\sigma} - s_M M^{-\sigma} \\ &\leqslant \sum_{n=M}^{N} n^{\alpha+\epsilon} \left[\frac{\sigma}{n^{\sigma+1}}\right] + N^{\alpha+\epsilon} N^{-\sigma} + M^{\alpha+\epsilon} M^{-\sigma} \\ &\leqslant \sigma \sum_{n=M}^{N} n^{\alpha+\epsilon-\sigma-1} + N^{\alpha+\epsilon-\sigma} + M^{\alpha+\epsilon-\sigma}\end{aligned}$$

comme :$\alpha \leqslant \sigma$ alors pour $M \to +\infty$, le terme droit de l'inégalité tend vers 0, ce qui donne la convergence de la série.
d'après les deux étapes de démonstration on conclue que $\sigma_0 = \alpha$.

■

Théorème 3.1.1. (Demi plan de convergence)
Soit σ_0 l'abscisse de convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$.
alors :
• la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ est convergente pour tout $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$.
• la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ est divergente pour tout $\mathrm{Re}(s) < \sigma_0$.
l'ensemble :

$$D = \{s = \mathrm{Re}(s) + j\,\mathrm{Im}(s) \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > \sigma_0\}$$

est dite **le demi plan de convergence**

Démonstration. On suppose que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ ne converge pas sur $\mathbb{C}$ tout entier et aussi ne diverge pas sur $\mathbb{C}$ tout entier .posons D l'ensemble des nombres complexes tel que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ converge.D n'est pas vide car $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ ne diverge pas sur $\mathbb{C}$ tout entier. d'après le lemme 1.2.2,D a une borne inférieur noté σ_0 donc :
• si $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ alors $s \in D$ i.e. la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ converge.
• si $\mathrm{Re}(s) < \sigma_0$ alors $s \notin D$ i.e. la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ diverge. ■

Example 1. • On prend la fonction zêta de Riemann définie par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.
on a $a_n = 1, \forall n \geq 1$, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge ,donc :

$$\sigma_0 = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\log \mid \sum_{k=1}^{n} 1 \mid}{\log n} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\log n}{\log n} = 1$$

alors ζ est bien définie si $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Remarque 3. Dans le cas où $\mathrm{Re}(s) = \sigma_0$ on ne peut rien dire i.e. la série peut être converge ou peut être diverge.

1.3 Théorème fondamentale de la convergence uniforme

Théorème 3.1.2. Si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ est convergente pour certain $s_0 \in \mathbb{C}$ alors elle est uniformément convergente pour tout $s = \sigma + jt \in \mathbb{C}$ tel que $\mid \arg(s - s_0) \mid \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta$ où $0 \leqslant \delta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Démonstration. Sans perte de généralité, on prend $s_0 = 0$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.
Soit $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$, on fixe $\epsilon > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|r_n| < \epsilon$, $\forall n \geqslant n_0$.
on a :

$$\begin{aligned} a_n &= \{a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + ...\} - \{a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + ...\} \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} a_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \\ &= r_{n-1} - r_n \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \sum_{n=M}^{N} a_n n^{-s} &= \sum_{n=M}^{N} (r_{n-1} - r_n)\, n^{-s} \\ &= \sum_{n=M}^{N} r_{n-1} n^{-s} - \sum_{n=M}^{N} r_n n^{-s} \end{aligned}$$

on pose $k = n - 1$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=M}^{N} a_n n^{-s} &= \sum_{k=M-1}^{N-1} r_k (k+1)^{-s} - \sum_{n=M}^{N} r_n n^{-s} \\
&= \sum_{n=M-1}^{N-1} r_n (n+1)^{-s} - \sum_{n=M}^{N} r_n n^{-s} \\
&= r_{M-1} M^{-s} - r_N (N+1)^{-s} + \sum_{n=M}^{N} r_n (n+1)^{-s} - \sum_{n=M}^{N} r_n n^{-s} \\
&= \sum_{n=M}^{N} r_n \left(\frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{n^s} \right) + \frac{r_{M-1}}{M^s} - \frac{r_N}{(N+1)^s}
\end{aligned}$$

comme :

$$\frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{n^s} = \int_n^{n+1} \frac{-s}{x^{s+1}} dx$$

alors :

$$\left| \frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{n^s} \right| \leqslant |s| \int_n^{n+1} \frac{dx}{|x^{s+1}|} = |s| \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{\sigma+1}} = \frac{|s|}{\sigma} \left[\frac{1}{n^\sigma} - \frac{1}{(n+1)^\sigma} \right]$$

donc :

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=M}^{N} a_n n^{-s} \right| &= \left| \sum_{n=M}^{N} r_n \left(\frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{n^s} \right) + \frac{r_{M-1}}{M^s} - \frac{r_N}{(N+1)^s} \right| \\
&\leqslant \sum_{n=M}^{N} \left| r_n \left(\frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{n^s} \right) + \frac{r_{M-1}}{M^s} - \frac{r_N}{(N+1)^s} \right| \\
&\leqslant \sum_{n=M}^{N} \epsilon \frac{|s|}{\sigma} \left[\frac{1}{n^\sigma} - \frac{1}{(n+1)^\sigma} \right] + \frac{\epsilon}{M^s} - \frac{\epsilon}{(N+1)^s} \\
&= \frac{\epsilon |s|}{\sigma} \left[\frac{1}{M^\sigma} - \frac{1}{(N+1)^\sigma} \right] + \frac{\epsilon}{M^s} - \frac{\epsilon}{(N+1)^s} \\
&\leqslant \frac{2\epsilon |s|}{\sigma} + 2\epsilon
\end{aligned}$$

supposons :$| \arg(s)| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta$
alors :

$$\frac{t}{\sigma} \leqslant \tan(\frac{\pi}{2} - \delta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \delta)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \delta)} = \frac{\cos \delta}{\sin \delta} = \cot \delta$$

et :

$$\frac{|s|}{\sigma} = \frac{\sqrt{t^2 + \sigma^2}}{\sigma} = \sqrt{1 + \frac{t^2}{\sigma^2}} \leqslant cosec\delta$$

en effet : $\frac{t}{\sigma} \leqslant \cot\delta$ donne :$\frac{t^2}{\sigma^2} \leqslant \cot^2\delta$
par suite on a :

$$1+\frac{t^2}{\sigma^2} \leqslant 1+\cot^2\delta = 1+\frac{\cos^2\delta}{\sin^2\delta} = \frac{\cos^2\delta+\sin^2\delta}{\sin^2\delta} = \frac{1}{\sin^2\delta} = cosec^2\delta$$

ce qui donne :

$$\frac{|s|}{\sigma} \leqslant cosec\delta$$

alors :

$$\left|\sum_{n=M}^{N} a_n n^{-s}\right| \leqslant 2\epsilon(cosec\delta+1)$$

d'où la convergence uniforme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^s}$.
si $s_0 \neq 0$ alors on pose $s' = s - s_0$.
pour $s = s_0$ la série converge ,donc pour $s' = 0$ la série converge donc on utilise la même méthode.

■

1.4 Produit de deux séries de Dirichlet

Théorème 3.1.3. Soient $s \in \mathbb{C}$ et F, G deux séries de Dirichlet définie comme suit :

$$\begin{cases} F(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}, & \text{Re}(s) > a \quad ,a \in \mathbb{R} \\ G(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{n^s}, & \text{Re}(s) > b \quad ,b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

alors :

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)*g(n)}{n^s}$$

où : $f(n)*g(n) \overset{\text{def}}{=} \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$ où $d|n$ signifie que la somme porte sur les entiers positives d diviseurs de n.

Démonstration. comme les séries $F(s), G(s)$ convergent absolument alors :

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= (\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)n^{-s})(\sum_{m=1}^{+\infty} g(m)m^{-s}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} f(n)g(m)(nm)^{-s} \end{aligned}$$

on pose $mn = d$ alors :

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \sum_{d=1}^{+\infty} (\sum_{mn=d} f(n)g(m))d^{-s} \\ &= \sum_{d=1}^{+\infty} \sum_{m=\frac{d}{n}} f(n)g(\frac{d}{n})d^{-s} \\ &= \sum_{d=1}^{+\infty} \sum_{n|d} f(n)g(\frac{d}{n})d^{-s} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})n^{-s} \end{aligned}$$

d'où :

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) * g(n)}{n^s}$$

■

2 Fonction Zêta de Riemann

Définition 2.1. la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$ est définie par la fonction :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

avec $s \in \mathbb{C}$ où $\mathrm{Re(s)} > 1$.

2.1 Convergence de la fonction Zêta de Riemann

Proposition 1. la fonction zêta de Riemann est absolument convergente pour tout $\mathrm{Re(s)} > 1$.

Démonstration. On a :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

On pose $s = \sigma + jt$ avec $\sigma, t \in \mathbb{R}$;alors :

$$\begin{aligned} \mid \zeta(s) \mid &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma+jt}} \right| \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mid n^{\sigma+jt} \mid} \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma} \mid e^{jt\log n} \mid} \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} \end{aligned}$$

supposons $\sigma > 1$; d'après le critère de Riemann et par comparaison la fonction $\zeta(s)$ converge absolument. ■

2.2 Différentes formules de la fonction Zêta

Produit eulérien

Théorème 3.2.1. Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re(s)} > 1$ on a :

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

Où $\mathbb{P}$ est l'ensemble des nombres premiers.
On appelle ce produit **le produit eulérien**.

Démonstration. on a :

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + ... \qquad (1)$$

on divise les deux membres par 2^s :

$$\frac{\zeta(s)}{2^s} = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s}... \qquad (2)$$

on soustrait (2) du (1) on obtient :

$$(1 - \frac{1}{2^s})\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{11^s} + ... \qquad (3)$$

maintenant on divise (3) par 3^s on obtient :

$$(1 - \frac{1}{2^s})\frac{\zeta(s)}{3^s} = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \frac{1}{21^s} + ... \qquad (4)$$

on soustrait (4) du (3)on trouve :

$$(1-\frac{1}{3^s})(1-\frac{1}{2^s})\zeta(s) = 1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}+...$$

on répète la même procédure jusqu'à le nombre premier p et on trouve :

$$(1-\frac{1}{p^s})...(1-\frac{1}{11^s})(1-\frac{1}{7^s})(1-\frac{1}{5^s})(1-\frac{1}{3^s})(1-\frac{1}{2^s})\zeta(s) = 1$$

alors :

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{1}{(1-\frac{1}{p^s})...(1-\frac{1}{11^s})(1-\frac{1}{7^s})(1-\frac{1}{5^s})(1-\frac{1}{3^s})(1-\frac{1}{2^s})} \\ &= \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\end{aligned}$$

■

Formule intégrale

Théorème 3.2.2. Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re(s)} > 1$ on a :

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t-1}$$

avec Γ est la fonction gamma.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}\zeta(s)\Gamma(s) &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}\right)\left(\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt\right) \\ &= \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}t^{s-1}e^{-t}dt \\ &= \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{s-1}}{n^{s-1}}e^{-t}\frac{dt}{n}\end{aligned}$$

On pose :$y = \frac{t}{n}$ on obtient :

$$\begin{aligned}\zeta(s)\Gamma(s) &= \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} y^{s-1}e^{-ny}dy \\ &= \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-ny}y^{s-1}\end{aligned}$$

comme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-ny} = \frac{e^{-y}}{1-e^{-y}}$$

alors :

$$\begin{aligned}\zeta(s)\Gamma(s) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{1-e^{-y}} y^{s-1} dy \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{y^{s-1}}{e^y - 1} dy\end{aligned}$$

d'où :

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

■

3 Fonctions analogues de la fonction Zêta

3.1 Fonction de Hurwitz

Définition 3.1. on définie la fonction de Hurwitz par la fonction :

$$\zeta(s,a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^s}$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re(s)} > 1$ avec a un nombre complexe quelconque.

Remarque 1. pour $a = 1$ on obtient la fonction zêta de Riemann.

En effet :

$$\zeta(s,1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^s}$$

on pose $k = n+1$ alors :

$$\zeta(s,1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \zeta(s).$$

Convergence de la fonction de Hurwitz

Théorème 3.3.1. la série $\zeta(s,a)$ converge absolument pour $\mathrm{Re(s)} > 1$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} |(n+a)^{-s}| &\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |(n+a)^{-(\mathrm{Re(s)}+j\,\mathrm{Im(s)})}| \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} (n+a)^{-\mathrm{Re(s)}}\end{aligned}$$

pour $\mathrm{Re(s)} > 1$ la séries $\sum_{n=1}^{+\infty}(n+a)^{-\mathrm{Re(s)}}$ converge d'après le critère de Riemann, d'où par comparaison la série $\sum_{n=1}^{+\infty}|(n+a)^{-s}|$ est convergente. ∎

Représentation intégrale de la fonction de Hurwitz

Théorème 3.3.2. pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re(s)} > 1$ on a :

$$\zeta(s,a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}} dx$$

avec $a \in \mathbb{C}$ et Γ est la fonction gamma.

Démonstration. on prend la fonction gamma :

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$$

on pose $x = (n+a)t$ alors $t = \frac{x}{n+a}$ donc :

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \int_0^{+\infty} (n+a)^{s-1}t^{s-1}e^{-(n+a)t}(n+a)dt \\ &= (n+a)^s \int_0^{+\infty} e^{-nt}e^{-at}t^{s-1}dt\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\Gamma(s)(n+a)^{-s} = \int_0^{+\infty} e^{-nt}e^{-at}t^{s-1}dt$$

alors :

$$\Gamma(s)\sum_{n=0}^{+\infty}(n+a)^{-s} = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-nt}e^{-at}t^{s-1}dt$$

donc :

$$\Gamma(s)\zeta(s,a) = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}e^{-at}t^{s-1}dt$$

comme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \frac{1}{1-e^{-t}}$$

et par suite :

$$\zeta(s,a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}} dx.$$

■

3.2 Fonction de Lerch

Définition 3.2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $0 < \alpha \leqslant 1$, la fonction de Lerch L est définie par :

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{2\pi j \lambda n}}{(n+\alpha)^s}$$

Où $s \in \mathbb{C}$ tel que :$\mathrm{Re(s)} > 1$ si $\lambda \in \mathbb{Z}$, et $\mathrm{Re(s)} > 0$ si $\lambda \notin \mathbb{Z}$.

Remarque 2. **1.**Si $\lambda \in \mathbb{Z}$ la fonction de Lerch réduite à la fonction de Hurwitz.
2.Si $\lambda \in \mathbb{Z}$ et $\alpha = 1$ la fonction de Lerch réduite à la fonction Zêta de Riemann.

En effet :

1/Soit $\lambda \in \mathbb{Z}$,

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{2\pi j \lambda n}}{(n+\alpha)^s} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^s} = \zeta(s,a)$$

2/Soit $\lambda \in \mathbb{Z}$ et $\alpha = 1$,

$$L(\lambda, 1, s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{2\pi j \lambda n}}{(n+1)^s} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^s} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \zeta(s)$$

Chapitre 4

Dérivées fractionnaires de la fonction Zêta de Riemann

1 Dérivée fractionnaire de la fonction Zêta de Riemann au sens de Grunwald-Letnikov

Théorème 4.1.1. La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Grunwald-Letnikov en avant de la fonction ζ de Riemann est donnée par :

$$_{GL}\mathrm{D}_d^{\alpha}\zeta(s) = \mathrm{e}^{i\pi\alpha}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log^{\alpha} n}{n^s}$$

Démonstration. la dérivée fractionnaire d'ordre α de la fonction ζ au sens de Grunwald-Letnikov en avant est donnée par :

$$\begin{aligned}
_{GL}\mathrm{D}_d^{\alpha}\zeta(s) &= \lim_{h\to 0^+}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right)(-1)^k\zeta(s-kh)}{h^{\alpha}}\\
&= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right)(-1)^k\frac{1}{n^{s-kh}}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right)(-1)^k n^{kh}
\end{aligned}$$

avec $h > 0$.
d'après la formule générale de binôme 1.1.2 de Newton on a :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right)(-1)^k n^{kh} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right)(-n^h)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right)(-n^h)^k 1^{\alpha-k} = (-n^h+1)^{\alpha}$$

alors :

$$\mathrm{D}^{\alpha}\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^{\alpha}}(-n^h + 1)^{\alpha}$$

il reste à calculer la limite quand h tend vers 0 :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^{\alpha}}(-n^h + 1)^{\alpha} = \lim_{h\to 0^+} (\frac{1-n^h}{h})^{\alpha}$$

comme la fonction $g : x \to x^{\alpha}$ est continue alors :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^{\alpha}}(-n^h + 1)^{\alpha} = (\lim_{h\to 0^+} \frac{1-n^h}{h})^{\alpha}$$

d'après la règle d'Hopitale on a :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} \frac{1-n^h}{h} &= \lim_{h\to 0^+} -\log n e^{h\ln n} \\ &= -\lim_{h\to 0^+} n^h \log n \\ &= -\log n\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^{\alpha}}(-n^h + 1)^{\alpha} &= (\lim_{h\to 0^+} \frac{1-n^h}{h})^{\alpha} \\ &= (-\log n)^{\alpha} \\ &= (-1)^{\alpha}\log^{\alpha} n \\ &= e^{i\pi\alpha}\log^{\alpha} n\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}{}_{G-L}\mathrm{D}_d^{\alpha}\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} e^{i\pi\alpha}\log^{\alpha} n \\ &= e^{i\pi\alpha}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^{\alpha} n}{n^s}\end{aligned}$$

■

1.1 Propriétés de la fonction dérivée fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov de la fonction Zêta

Composition de la dérivée fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov de zêta avec des dérivées entières

Proposition 1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\frac{d^k}{ds^k}({}_{GL}\mathrm{D}_d^{\alpha}\zeta(s)) = \mathrm{e}^{i\pi(\alpha+k)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^{\alpha+k} n}{n^s} \qquad (P_k)$$

Démonstration. On fait la démonstration par récurrence,
Pour $k = 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}({}_{GL}\mathrm{D}_d^{\alpha}\zeta(s)) &= \frac{d}{ds}\mathrm{e}^{i\pi\alpha}(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^{\alpha} n}{n^s}) \\
&= \mathrm{e}^{i\pi\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} \log^{\alpha} n \frac{d}{ds} n^{-s} \\
&= \mathrm{e}^{i\pi\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} \log^{\alpha} n \frac{d}{ds}(\mathrm{e}^{-s\log n}) \\
&= -\mathrm{e}^{i\pi\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} \log^{\alpha} n \log n e^{-s\log n} \\
&= \mathrm{e}^{i\pi}\mathrm{e}^{i\pi\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} \log^{\alpha+1} n n^{-s} \\
&= \mathrm{e}^{i\pi(\alpha+1)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^{\alpha+1} n}{n^s}
\end{aligned}$$

donc (P_1) est vraie.
maintenant supposons que (P_k) est vraie et montrons que (P_{k+1}) est vraie :
on a :

$$
\begin{aligned}
\frac{d^{k+1}}{ds^{k+1}}({}_{GL}\mathrm{D}^{\alpha}_{d}\zeta(s)) &= \frac{d}{ds}(\frac{d^k}{ds^k}\mathrm{D}^{\alpha}_{d}\zeta(s)) \\
&= \frac{d}{ds}(\mathrm{e}^{i\pi(\alpha+k)}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log^{\alpha+k} n}{n^s}) \\
&= \mathrm{e}^{i\pi(\alpha+k)}\sum_{n=2}^{\infty}\log^{\alpha+k} n\frac{d}{ds}n^{-s} \\
&= -\mathrm{e}^{i\pi(\alpha+k)}\sum_{n=2}^{\infty}\log^{\alpha+k} n\log n n^{-s} \\
&= \mathrm{e}^{i\pi}\mathrm{e}^{i\pi(\alpha+k)}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log^{\alpha+k+1} n}{n^s} \\
&= \mathrm{e}^{i\pi(\alpha+k+1)}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log^{\alpha+k+1} n}{n^s}
\end{aligned}
$$

d'où (P_{k+1}) est vraie. ■

Produit de la fonction Zêta de Riemann par sa dérivée fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov

Proposition 2. Le produit de zêta de Riemann par sa dérivée fractionnaire d'ordre α est donné par :

$$({}_{GL}\mathrm{D}^{\alpha}_{d}\zeta(s))\,\zeta(s) = \mathrm{e}^{i\pi\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d|n}\frac{\log^{\alpha} d}{n^s}$$

Démonstration. en utilisant le théorème 3.1.3 on trouve :

$$
\begin{aligned}
({}_{GL}\mathrm{D}^{\alpha}_{d}\zeta(s))\,\zeta(s) &= \mathrm{e}^{i\pi\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^{\alpha} n}{n^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \\
&= \mathrm{e}^{i\pi\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^{\alpha} n * 1}{n^s} \\
&= \mathrm{e}^{i\pi\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d|n}\frac{\log^{\alpha} d}{n^s}
\end{aligned}
$$

■

2 Dérivée fractionnaire de la fonction Zêta de Riemann au sens de Riemann-Liouville

Théorème 4.2.1. La dérivée fractionnaire de la fonction zêta de Riemann au sens de Riemann-Liouville d'ordre α est donnée par :

$$^{RL}D^{\alpha}\zeta(s) = e^{i\pi\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\log^{\alpha} n}{n^s}$$

où $s \in \mathbb{C}$ tell que $\operatorname{Re}(s) > 1$.

Démonstration. par définition on a pour tout s tel que $\operatorname{Re}(s) > 1$:

$$\begin{aligned}
^{RL}D^{\alpha}\zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^s (s-t)^{-\alpha-1}\zeta(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^s \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(s-t)^{-\alpha-1}}{n^t}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^s \frac{(s-t)^{-\alpha-1}}{n^t}dt
\end{aligned}$$

on peut changer le signe intégrale et somme à cause de la convergence absolue de la fonction zêta sous la condition $\operatorname{Re}(s) > 1$.
posons :

$$I(s) = \int_0^s \frac{(s-t)^{-\alpha-1}}{n^t}dt.$$

en utilisant le changement de variable $x = s - t$ on trouve :

$$\begin{aligned}
I(s) &= -\int_s^0 \frac{x^{-\alpha-1}}{n^{s-x}}dx \\
&= \int_0^s \frac{x^{-\alpha-1}}{n^{s-x}}dx \\
&= \int_0^s x^{-\alpha-1}e^{-(s-x)\log n}dx \\
&= \int_0^s x^{-\alpha-1}e^{-s\log n}e^{x\log n}dx \\
&= e^{-s\log n}\int_0^s x^{-\alpha-1}e^{x\log n}dx
\end{aligned}$$

en effectuant un autre changement de variable $y = -x \log n$ on obtient :

$$\begin{aligned} I(s) &= e^{-s\log n} \int_0^{-s\log n} (-\frac{y}{\log n})^{-\alpha-1} e^{-y} (\frac{-dy}{\log n}) \\ &= e^{-s\log n} (-\frac{1}{\log n})^{-\alpha} \int_0^{-s\log n} y^{-\alpha-1} e^{-y} dy \\ &= \frac{(-\log n)^{\alpha}}{n^s} \int_0^{-s\log n} y^{-\alpha-1} e^{-y} dy \end{aligned}$$

pour $n \to +\infty$ on obtient :

$$I(s) = \frac{(-\log n)^{\alpha}}{n^s} \int_0^{\infty} y^{-\alpha-1} e^{-y} dy = \frac{(-\log n)^{\alpha}}{n^s} \Gamma(-\alpha)$$

d'où :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{\alpha}\zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\log n)^{\alpha}}{n^s} \Gamma(-\alpha) \\ &= e^{i\pi\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log^{\alpha} n}{n^s} \end{aligned}$$

■

3 Dérivée fractionnaire de la fonction Zêta de Riemann au sens de Ortigiera-Caputo

Théorème 4.3.1. La dérivée fractionnaire d'ordre α de la fonction ζ-Riemann au sens de Ortigiera-Caputo est donnée par :

$$_{OC}D^{\alpha}\zeta(s) = (-1)^m e^{j\pi(\alpha-m)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^{\alpha} n}{n^s}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} {}_{OC}D^{\alpha}\zeta(s) &= \frac{e^{j(\pi-\theta)(\alpha-m)}}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{\zeta^{(m)}\left(te^{j\theta}+s\right)}{t^{\alpha-m+1}} dt \\ &= \frac{e^{j(\pi-\theta)(\alpha-m)}}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{d^m}{ds^m} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s-te^{j\theta}} \right) t^{m-\alpha-1} dt \\ &= \frac{e^{j(\pi-\theta)(\alpha-m)}}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{d^m}{ds^m} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} n^{-te^{j\theta}} t^{m-\alpha-1} \right) dt \\ &= \frac{e^{j(\pi-\theta)(\alpha-m)}}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{ds^m} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \int_0^{\infty} n^{-te^{j\theta}} t^{m-\alpha-1} dt \end{aligned}$$

calculons $I = \int_0^\infty n^{-te^{j\theta}} t^{m-\alpha-1} dt$.

on pose $z = te^{j\theta}$ alors $t = ze^{-j\theta}$,$dt = e^{-j\theta} dz$

donc :

$$\begin{aligned} I = \int_0^\infty n^{-z} (ze^{-j\theta})^{m-\alpha-1} e^{-j\theta} dz &= \int_0^\infty n^{-z} z^{m-\alpha-1} e^{-j\theta(m-\alpha)} dz \\ &= e^{j\theta(\alpha-m)} \int_0^\infty e^{-z\log n} z^{m-\alpha-1} dz \end{aligned}$$

on pose $y = z\log n$ alors $z = \frac{y}{\log n}$,$dz = \log n dy$

donc :

$$\begin{aligned} I = e^{j\theta(\alpha-m)} \int_0^\infty e^{-y} (\frac{y}{\log n})^{m-\alpha-1} \log n dy &= e^{j\theta(\alpha-m)} \log^{\alpha-m} n \int_0^\infty e^{-y} y^{m-\alpha-1} dy \\ &= e^{j\theta(\alpha-m)} \log^{\alpha-m} n \Gamma(m-\alpha). \end{aligned}$$

finalement on a :

$$I = \int_0^\infty n^{-te^{j\theta}} t^{m-\alpha-1} dt = e^{j\theta(\alpha-m)} \log^{\alpha-m} n \Gamma(m-\alpha).$$

alors :

$$\begin{aligned} cD^\alpha \zeta(s) &= \frac{e^{j(\pi-\theta)(\alpha-m)}}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{ds^m} \sum_{n=1}^\infty n^{-s} \int_0^\infty n^{-te^{j\theta}} t^{m-\alpha-1} dt \\ &= \frac{e^{j(\pi-\theta)(\alpha-m)}}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{ds^m} \sum_{n=1}^\infty n^{-s} e^{j\theta(\alpha-m)} \log^{\alpha-m} n \Gamma(m-\alpha) \\ &= e^{j(\pi-\theta)(\alpha-m)} e^{j\theta(\alpha-m)} \frac{d^m}{ds^m} \sum_{n=1}^\infty n^{-s} \log^{\alpha-m} n \\ &= e^{j\pi(\alpha-m)} \frac{d^m}{ds^m} \sum_{n=1}^\infty \frac{\log^{\alpha-m} n}{n^s} \\ &= e^{j\pi(\alpha-m)} \sum_{n=1}^\infty \log^{\alpha-m} n \frac{d^m}{ds^m} n^{-s}. \end{aligned}$$

calculons $\frac{d^m}{ds^m} n^{-s}$:

$$\frac{d}{ds}\left(n^{-s}\right) = -n^{-s}\log n$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(n^{-s}\right) = (-1)^2 n^{-s}\log^2 n$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^k}{ds^k}\left(n^{-s}\right) = (-1)^k n^{-s}\log^k n$$

donc :

$$\frac{d^m}{ds^m}\left(n^{-s}\right) = (-1)^m n^{-s}(\log n)^m$$

d'où :

$$cD^a\zeta(s) = (-1)^m e^{j\pi(\alpha-m)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^{\alpha} n}{n^s}$$

■

Chapitre 5

Fonction Zêta de Lerch et de Riemann définies par les dérivées fractionnaires

1 Fonction Zêta de Lerch définie par la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Lemme 1.0.1. Soient $\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ et $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ on a :

$$ {}_{-\infty}^{RL}D_s^{\alpha} e^{\lambda s} = \lambda^{\alpha} e^{\lambda s} \qquad , \forall s \in \mathbb{R} $$

avec ${}_{-\infty}^{RL}D_s^{\alpha}$ la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α.

Démonstration.

$$ {}_{-\infty}^{RL}D_s^{\alpha} e^{\lambda s} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{-\infty}^{s} (s-t)^{-\alpha-1} e^{\lambda t} \mathrm{d}t $$

on pose $v = s - t$, on obtient :

$$ \begin{aligned} {}_{-\infty}^{RL}D_s^{\alpha} \left(e^{\lambda s}\right) &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} e^{\lambda s} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-\alpha} \int_0^{\infty} v^{-\alpha-1} e^{-v} \mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} e^{\lambda s} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-\alpha} \Gamma(-\alpha) \\ &= \lambda^{\alpha} e^{\lambda s} \end{aligned} $$

∎

Théorème 5.1.1. La fonction zêta de Lerch peut s'écrire sous la forme :

$$L(t,x,s) = (2\pi)^s \exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2} - 2tx\right)\right] \; {}_{-\infty}^{R-L}D_t^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jtx}}{1-e^{2\pi jt}}\right)$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$ et pour t , x vérifient : $\mathrm{Im}(t) \geqslant 0$, $x \notin \mathbb{R}_0^+$.

Démonstration. on a :

$$L(t,x,s) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+x)^{-s}e^{2\pi jtn} = (2\pi j)^s e^{-2\pi jtx}\sum_{n=0}^{\infty}(2\pi j)^{-s}(n+x)^{-s}e^{2\pi jt(n+x)}$$

d'après le lemme 1.0.1

$${}_{-\infty}^{R-L}D_t^{-s}\left(e^{2\pi jt(n+x)}\right) = (2\pi j)^{-s}(n+x)^{-s}e^{2\pi jt(n+x)}$$

alors :

$$L(t,x,s) = (2\pi j)^s e^{-2\pi jtx}\sum_{n=0}^{\infty} {}_{-\infty}^{R-L}D_t^{-s}\left(e^{2\pi jt(n+x)}\right)$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi jt(n+x)}$ converge uniformément ce qui donne :

$${}_{-\infty}^{R-L}D_t^{-s}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi jt(n+x)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_{-\infty}^{R-L}D_t^{-s} e^{2\pi jt(n+x)}$$

et par suite :

$$\begin{aligned}
L(t,x,s) &= (2\pi j)^s e^{-2\pi jtx} \; {}_{-\infty}^{R-L}D_t^{-s}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi jt(n+x)}\right) \\
&= (2\pi j)^s e^{-2\pi jtx} \; {}_{-\infty}^{RL}D_t^{-s}\left(e^{2\pi jtx}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{2\pi jt}\right)^n\right) \\
&= (2\pi j)^s e^{-2\pi jtx} \; {}_{-\infty}^{RL}D_t^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jtx}}{1-e^{2\pi jt}}\right) \\
&= (2\pi)^s \exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2} - 2tx\right)\right] \; {}_{-\infty}^{RL}D_t^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jtx}}{1-e^{2\pi jt}}\right)
\end{aligned}$$

■

2 Fonction Zêta de Lerch définie par la dérivée fractionnaire au sens de Marchaud

Lemme 2.0.1. Soient $\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ et $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ on a :

$$\left(\mathbf{D}_{+}^{\alpha} e^{\lambda t}\right)(s) = \lambda^{\alpha} e^{\lambda s} \qquad , \forall s, t \in \mathbb{R}$$

$$\left(\mathbf{D}_{-}^{\alpha} e^{-\lambda t}\right)(s) = \lambda^{\alpha} e^{-\lambda s} \qquad , \forall s, t \in \mathbb{R}$$

avec $\mathbf{D}_{+}^{\alpha}, \mathbf{D}_{-}^{\alpha}$ les dérivées fractionnaires au sens de Marchaud en avant et en arrière respectivement d'ordre α.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{D}_{+}^{\alpha} e^{\lambda t}\right)(s) &= \frac{1}{K(\alpha, k)} \int_0^{\infty} \frac{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array}\right) e^{\lambda(s-jt)}}{t^{\alpha+1}} \mathrm{d}t \\
&= \frac{e^{\lambda s}}{K(\alpha, k)} \int_0^{\infty} \frac{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array}\right) e^{-\lambda jt}}{t^{\alpha+1}} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On pose $y = \lambda t$ alors :

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{D}_{+}^{\alpha} e^{\lambda t}\right)(s) &= \frac{e^{\lambda s}}{K(\alpha, k)} \int_0^{\infty} \frac{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array}\right) e^{-jy}}{(\frac{y}{\lambda})^{\alpha+1}} \frac{\mathrm{d}y}{\lambda} \\
&= \frac{e^{\lambda s}}{K(\alpha, k)} \int_0^{\infty} \frac{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array}\right) e^{-jy}}{y^{\alpha+1}} \lambda^{\alpha+1} \frac{1}{\lambda} \mathrm{d}y \\
&= \frac{\lambda^{\alpha} e^{\lambda s}}{K(\alpha, k)} \int_0^{\infty} \frac{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array}\right) e^{-jy}}{y^{\alpha+1}} \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

on a :

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array}\right) e^{-jy} = \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array}\right) (-e^{-y})^j 1^{k-j} = (1 - e^{-y})^k$$

alors :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array}\right) e^{-jy}}{y^{\alpha+1}} \mathrm{d}y = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-y})^k}{y^{\alpha+1}} \mathrm{d}y = K(\alpha, k)$$

d'où :

$$\left(\mathbf{D}_{+}^{\alpha} e^{\lambda t}\right)(s) = \frac{\lambda^{\alpha} e^{\lambda s}}{K(\alpha, k)} K(\alpha, k) = \lambda^{\alpha} e^{\lambda s}.$$

de même :

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{D}_{-}^{\alpha} e^{-\lambda t}\right)(s) &= \frac{1}{K(\alpha,k)} \int_0^{\infty} \frac{\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} e^{-\lambda(s+jt)}}{t^{\alpha+1}} \mathrm{d}t \\ &= \frac{e^{-\lambda s}}{K(\alpha,k)} \int_0^{\infty} \frac{\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} e^{-\lambda jt}}{t^{\alpha+1}} \mathrm{d}t\end{aligned}$$

on pose $y = \lambda t$ alors :

$$\left(\mathbf{D}_{-}^{\alpha} e^{-\lambda t}\right)(s) = \frac{\lambda^{\alpha} e^{-\lambda s}}{K(\alpha,k)} \int_0^{\infty} \frac{\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} e^{-jy}}{y^{\alpha+1}} \mathrm{d}y$$

comme :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} e^{-jy}}{y^{\alpha+1}} \mathrm{d}y = K(\alpha,k)$$

alors :

$$\left(\mathbf{D}_{-}^{\alpha} e^{-\lambda t}\right)(s) = \lambda^{\alpha} e^{-\lambda s}$$

■

Théorème 5.2.1. La fonction Zêta de Lerch peut s'écrire sous la forme :

$$L(t,x,s) = (2\pi)^s \exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2} - 2tx\right)\right] \; \mathbf{D}_{+}^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jtx}}{1-e^{2\pi jt}}\right)$$

$$L(t,x,s) = (-1)^s(2\pi)^s \exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2} - 2tx\right)\right] \; \mathbf{D}_{-}^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jtx}}{1-e^{2\pi jt}}\right)$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$ et pour t , x vérifient : $\mathrm{Im}(t) \geqslant 0$, $x \notin \mathbb{R}_0^+$.
avec $\mathbf{D}_{+}^{-s}, \mathbf{D}_{-}^{-s}$ les dérivées fractionnaires au sens de Marchaud en avant et en arrière d'ordre $-s$.

Démonstration. on a :

$$L(t,x,s) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+x)^{-s} e^{2\pi jtn} = (2\pi j)^s e^{-2\pi jtx} \sum_{n=0}^{\infty}(2\pi j)^{-s}(n+x)^{-s} e^{2\pi jt(n+x)}$$

comme :

$$\mathbf{D}_{+}^{-s}\left(e^{2\pi jt(n+x)}\right) = (2\pi j)^{-s}(n+x)^{-s} e^{2\pi jt(n+x)}$$

alors :

$$L(t,x,s) = (2\pi j)^s e^{-2\pi jtx} \sum_{n=0}^{\infty} \; \mathbf{D}_{+}^{-s}\left(e^{2\pi jt(n+x)}\right)$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi jt(n+x)}$ converge uniformément ce qui donne :

$$\mathbf{D}_{+}^{-s}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi jt(n+x)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{D}_{+}^{-s} e^{2\pi jt(n+x)}$$

et par suite :

$$\begin{aligned}
L(t,x,s) &= (2\pi j)^s e^{-2\pi jtx}\ \mathbf{D}_{+}^{-s}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi jt(n+x)}\right) \\
&= (2\pi j)^s e^{-2\pi jtx}\ \mathbf{D}_{+}^{-s}\left(e^{2\pi jtx}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{2\pi jt}\right)^n\right) \\
&= (2\pi j)^s e^{-2\pi jtx}\ \mathbf{D}_{+}^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jtx}}{1-e^{2\pi jt}}\right) \\
&= (2\pi)^s \exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2}-2tx\right)\right]\ \mathbf{D}_{+}^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jtx}}{1-e^{2\pi jt}}\right)
\end{aligned}$$

de même :

$$L(t,x,s) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+x)^{-s} e^{2\pi jtn} = (-1)^s (2\pi j)^s e^{-2\pi jtx}\sum_{n=0}^{\infty}(-2\pi j)^{-s}(n+x)^{-s} e^{2\pi jt(n+x)}$$

comme :

$$\mathbf{D}_{-}^{-s}\left(e^{2\pi jt(n+x)}\right) = (-2\pi j)^{-s}(n+x)^{-s} e^{2\pi jt(n+x)}$$

alors :

$$L(t,x,s) = (-1)^s (2\pi j)^s e^{-2\pi jtx}\sum_{n=0}^{\infty}\ \mathbf{D}_{-}^{-s}\left(e^{2\pi jt(n+x)}\right)$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi jt(n+x)}$ converge uniformément ce qui donne :

$$\mathbf{D}_{-}^{-s}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi jt(n+x)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{D}_{-}^{-s} e^{2\pi jt(n+x)}$$

et par suite :

$$\begin{aligned}
L(t,x,s) &= (-1)^s (2\pi j)^s e^{-2\pi jtx}\ \mathbf{D}_{-}^{-s}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi jt(n+x)}\right) \\
&= (-1)^s (2\pi j)^s e^{-2\pi jtx}\ \mathbf{D}_{-}^{-s}\left(e^{2\pi jtx}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{2\pi jt}\right)^n\right) \\
&= (-1)^s (2\pi j)^s e^{-2\pi jtx}\ \mathbf{D}_{+}^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jtx}}{1-e^{2\pi jt}}\right) \\
&= (-1)^s (2\pi)^s \exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2}-2tx\right)\right]\ \mathbf{D}_{+}^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jtx}}{1-e^{2\pi jt}}\right)
\end{aligned}$$

■

3 Fonction Zêta de Lerch définie par la dérivée fractionnaire au sens de Hilfer

Lemme 3.0.1. Soient $n-1<\alpha<n$ avec $n\in\mathbb{N}$, $0<\beta<1$, pour tout $s\in\mathbb{R}$. On a :

$$I^{\alpha}_{-\infty}e^{\lambda s}=\lambda^{-\alpha}e^{\lambda s}$$

$$I^{\alpha}_{+\infty}e^{\lambda s}=(-\lambda)^{-\alpha}e^{-\lambda s}$$

Où $\lambda\in\mathbb{R}$ et $I^{\alpha}_{-\infty}$, $I^{\alpha}_{+\infty}$ l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α à gauche et à droite respectivement.

Démonstration. On a :

$$I^{\alpha}_{-\infty}e^{\lambda s}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{s}(s-t)^{\alpha-1}e^{\lambda t}dt$$

On pose :$x=s-t$ on obtient :

$$\begin{aligned}I^{\alpha}_{-\infty}e^{\lambda s}&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{+\infty}^{0}x^{\alpha-1}e^{\lambda(s-x)}(-dx)\\&=\frac{e^{\lambda s}}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx\end{aligned}$$

On pose $y=\lambda x$ on obtient :

$$\begin{aligned}I^{\alpha}_{-\infty}e^{\lambda s}&=\frac{e^{\lambda s}}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\alpha-1}e^{-y}\frac{dy}{\lambda}\\&=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\alpha}\frac{e^{\lambda s}}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{+\infty}y^{\alpha-1}e^{-y}dy\\&=\lambda^{-\alpha}e^{\lambda s}.\frac{1}{\Gamma(\alpha)}.\Gamma(\alpha)\\&=\lambda^{-\alpha}e^{\lambda s}\end{aligned}$$

de même on a :

$$I^{\alpha}_{+\infty}e^{\lambda s}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{s}^{+\infty}(s-t)^{\alpha-1}e^{\lambda t}dt$$

On pose :$x=s-t$ on obtient :

$$\begin{aligned}I^{\alpha}_{+\infty}e^{\lambda s}&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{\lambda(x-s)}dx\\&=\frac{e^{-\lambda s}}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{\lambda x}dx\end{aligned}$$

on pose $y = -\lambda x$ on trouve :

$$\begin{aligned}
I^{\alpha}_{+\infty} e^{\lambda s} &= \frac{e^{-\lambda s}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{-y}{\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-y} \left(\frac{-1}{\lambda}\right) dy \\
&= \frac{e^{-\lambda s}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} \left(\frac{-1}{\lambda}\right)^{\alpha} dy \\
&= \left(\frac{-1}{\lambda}\right)^{\alpha} \frac{e^{-\lambda s}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy \\
&= (-1)^{\alpha} \lambda^{-\alpha} \frac{e^{-\lambda s}}{\Gamma(\alpha)} . \Gamma(\alpha) \\
&= (-1)^{\alpha} \lambda^{-\alpha} e^{-\lambda s} \\
&= (-\lambda)^{-\alpha} e^{-\lambda s}
\end{aligned}$$

■

Lemme 3.0.2. Soient $n-1 < \alpha < n$ avec $n \in \mathbb{N}$, $0 < \beta < 1$ et $I = \mathbb{R}(a = -\infty; b = +\infty)$.alors pour tout $s \in \mathbb{R}$ on a :

$$^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{-\infty} e^{\lambda s} = \lambda^{\alpha} e^{\lambda s}$$

$$^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{+\infty} e^{\lambda s} = (-1)^{n} (-\lambda)^{\alpha} e^{-\lambda s}$$

avec λ une constante dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. On a :

$$^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{-\infty} e^{\lambda s} = I^{\beta(n-\alpha)}_{-\infty^{+}} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} I^{(1-\beta)(n-\alpha)}_{-\infty^{+}} e^{\lambda s}$$

d'après le lemme 3.0.1 on a :

$$I^{(1-\beta)(n-\alpha)}_{-\infty} e^{\lambda s} = \lambda^{-(1-\beta)(n-\alpha)} e^{\lambda s}$$

alors :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{ds}\right)^{n} I^{(1-\beta)(n-\alpha)}_{-\infty} e^{\lambda s} &= \left(\frac{d}{ds}\right)^{n} \left(\lambda^{-(1-\beta)(n-\alpha)} e^{\lambda s}\right) \\
&= \lambda^{-(1-\beta)(n-\alpha)} \lambda^{n} e^{\lambda s} \\
&= \lambda^{-(1-\beta)(n-\alpha)+n} e^{\lambda s}
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
{}^{H}\mathbb{D}_{-\infty}^{\alpha,\beta} e^{\lambda s} &= I_{-\infty}^{\beta(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} I_{-\infty^{+}}^{(1-\beta)(n-\alpha)} e^{\lambda s} \\
&= I_{-\infty}^{\beta(n-\alpha)} \left(\lambda^{-(1-\beta)(n-\alpha)+n} e^{\lambda s}\right) \\
&= \lambda^{-(1-\beta)(n-\alpha)+n} I_{-\infty}^{\beta(n-\alpha)} e^{\lambda s} \\
&= \lambda^{-(1-\beta)(n-\alpha)+n} \lambda^{-\beta(n-\alpha)} e^{\lambda s} \\
&= \lambda^{-(1-\beta)(n-\alpha)+n-\beta(n-\alpha)} e^{\lambda s} \\
&= \lambda^{\alpha} e^{\lambda s}
\end{aligned}$$

de même on a :

$${}^{H}\mathbb{D}_{+\infty}^{\alpha,\beta} e^{\lambda s} = I_{+\infty}^{\beta(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{ds}\right)^{n} I_{+\infty}^{(1-\beta)(n-\alpha)} e^{\lambda s}$$

d'après le lemme 3.0.1 on a :

$$I_{+\infty}^{(1-\beta)(n-\alpha)} e^{\lambda s} = (-\lambda)^{-(1-\beta)(n-\alpha)} e^{-\lambda s}$$

alors :

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{d}{ds}\right)^{n} I_{+\infty}^{(1-\beta)(n-\alpha)} e^{\lambda s} &= \left(-\frac{d}{ds}\right)^{n} \left((-\lambda)^{-(1-\beta)(n-\alpha)} e^{-\lambda s}\right) \\
&= (-1)^{n}(-\lambda)^{-(1-\beta)(n-\alpha)}(-\lambda)^{n} e^{-\lambda s} \\
&= (-1)^{n}(-\lambda)^{-(1-\beta)(n-\alpha)+n} e^{-\lambda s}
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
{}^{H}\mathbb{D}_{+\infty}^{\alpha,\beta} e^{\lambda s} &= I_{+\infty}^{\beta(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{ds}\right)^{n} I_{+\infty}^{(1-\beta)(n-\alpha)} e^{\lambda s} \\
&= I_{+\infty}^{\beta(n-\alpha)} \left((-1)^{n}(-\lambda)^{-(1-\beta)(n-\alpha)+n} e^{-\lambda s}\right) \\
&= (-1)^{n}(-\lambda)^{-(1-\beta)(n-\alpha)+n} I_{+\infty}^{\beta(n-\alpha)} e^{-\lambda s} \\
&= (-1)^{n}(-\lambda)^{-(1-\beta)(n-\alpha)+n}(-\lambda)^{-\beta(n-\alpha)} e^{-\lambda s} \\
&= (-1)^{n}(-\lambda)^{-(1-\beta)(n-\alpha)+n-\beta(n-\alpha)} e^{-\lambda s} \\
&= (-1)^{n}(-\lambda)^{\alpha} e^{-\lambda s}
\end{aligned}$$

■

Théorème 5.3.1. La fonction Zêta de Lerch peut s'écrire sous la forme :

$$L(t,x,s)=(2\pi)^s\exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2}-2tx\right)\right]\ {}^{H}\mathbb{D}_{-\infty}^{-s,\beta}\left(\frac{e^{2\pi jtx}}{1-e^{2\pi jt}}\right)$$

pour tout $s\in\mathbb{C}$ tel que $n-1<\mathrm{Re(-s)}<n; n\in\mathbb{N}$ et pour t , x vérifient : $\mathrm{Im}(t)\geqslant 0$, $x\notin\mathbb{R}_0^+$.
Ou :

$$L(t,x,s)=(-1)^n(2\pi)^s\exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2}-2tx\right)\right]\ {}^{H}\mathbb{D}_{+\infty}^{-s,\beta}\left(\frac{e^{-2\pi jtx}}{1-e^{-2\pi jt}}\right)$$

pour tout $s\in\mathbb{C}$ tel que $n-1<\mathrm{Re(-s)}<n; n\in\mathbb{N}$ et pour t , x vérifient : $\mathrm{Im}(t)\leqslant 0$, $x\notin\mathbb{R}_0^-$.

Démonstration. on a :

$$L(t,x,s)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+x)^{-s}e^{2\pi jtk}=(2\pi i)^s e^{-2\pi jtx}\sum_{k=0}^{\infty}(2\pi j)^{-s}(k+x)^{-s}e^{2\pi jt(k+x)}$$

comme :

$${}^{H}\mathbb{D}_{-\infty}^{-s,\beta}\left(e^{2\pi jt(k+x)}\right)=(2\pi j)^{-s}(k+x)^{-s}e^{2\pi jt(k+x)}$$

alors :

$$L(t,x,s)=(2\pi j)^s e^{-2\pi jtx}\sum_{k=0}^{\infty}\ {}^{H}\mathbb{D}_{-\infty}^{-s,\beta}\left(e^{2\pi jt(k+x)}\right)$$

La série $\sum_{k=0}^{\infty}e^{2\pi jt(k+x)}$ converge uniformément ce qui donne :

$${}^{H}\mathbb{D}_{-\infty}^{-s,\beta}\left(\sum_{k=0}^{\infty}e^{2\pi jt(k+x)}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\ {}^{H}\mathbb{D}_{-\infty}^{-s,\beta}e^{2\pi jt(k+x)}$$

et par suite :

$$\begin{aligned}L(t,x,s)&=(2\pi j)^s e^{-2\pi jtx}\ {}^{H}\mathbb{D}_{-\infty^+}^{-s,\beta}\left(\sum_{k=0}^{\infty}e^{2\pi jt(k+x)}\right)\\&=(2\pi j)^s e^{-2\pi jtx}\ {}^{H}\mathbb{D}_{-\infty^+}^{-s,\beta}\left(e^{2\pi jtx}\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{2\pi jt}\right)^k\right)\\&=(2\pi j)^s e^{-2\pi jtx}\ {}^{H}\mathbb{D}_{-\infty^+}^{-s,\beta}\left(\frac{e^{2\pi jtx}}{1-e^{2\pi jt}}\right)\\&=(2\pi)^s\exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2}-2tx\right)\right]\ {}^{H}\mathbb{D}_{-\infty^+}^{-s,\beta}\left(\frac{e^{2\pi jtx}}{1-e^{2\pi jt}}\right)\end{aligned}$$

de même :

$$L(t,x,s)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+x)^{-s}e^{2\pi jtk}=(-1)^n(2\pi j)^s e^{-2\pi jtx}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n(2\pi j)^{-s}(k+x)^{-s}e^{2\pi jt(k+x)}$$

comme :

$$ {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{+\infty^-}\left(e^{-2\pi jt(k+x)}\right) = (-1)^n(2\pi j)^{-s}(k+x)^{-s}e^{2\pi jt(k+x)} $$

alors :

$$ L(t,x,s) = (-1)^n(2\pi j)^s e^{-2\pi jtx}\sum_{k=0}^{\infty} {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{+\infty^-}\left(e^{-2\pi jt(k+x)}\right) $$

La série $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\pi jt(k+x)}$ converge uniformément ce qui donne :

$$ {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\pi jt(k+x)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{+\infty} e^{-2\pi jt(k+x)} $$

et par suite :

$$ \begin{aligned} L(t,x,s) &= (-1)^n(2\pi j)^s e^{-2\pi jtx}\ {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{+\infty^-}\left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\pi jt(k+x)}\right) \\ &= (-1)^n(2\pi j)^s e^{-2\pi jtx}\ {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{+\infty}\left(e^{-2\pi jtx}\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-2\pi jt}\right)^k\right) \\ &= (-1)^n(2\pi j)^s e^{-2\pi jtx}\ {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{+\infty}\left(\frac{e^{-2\pi jtx}}{1-e^{-2\pi jt}}\right) \\ &= (-1)^n(2\pi)^s \exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2}-2tx\right)\right]\ {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta}_{+\infty}\left(\frac{e^{-2\pi jtx}}{1-e^{-2\pi jt}}\right) \end{aligned} $$

■

4 Fonction Zêta de Riemann définie par la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Lemme 4.0.1. Soit L la fonction zêta de Lerch et ζ la fonction zêta de Riemann. on a pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$ L\left(\frac{1}{2},1,s\right) = \left(1-2^{1-s}\right)\zeta(s) $$

Démonstration. On remarque que :

$$ L\left(\frac{1}{2},1,s\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-s}e^{i\pi n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{cos(n\pi)}{(n+1)^s} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \eta(s). $$

d'autre part :

$$\begin{aligned}\left(1-2^{1-s}\right)\zeta(s)=\zeta(s)-2^{1-s}\zeta(s)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{1-s}}{n^s}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(2n)^s}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^s}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^s}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^s}-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^s}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^s}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^s}\\&=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n)^s}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{2n}}{(2n)^s}\\&=-\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m^s}\\&=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m^s}=\eta(s).\end{aligned}$$

■

Théorème 5.4.1. La fonction Zêta de Riemann peut s'écrire sous la forme :

$$\zeta(s)=\frac{(2\pi j)^s}{2^{1-s}-1}\ {}_{-\infty}^{R-L}D_t^{-s}\left(\frac{1}{e^{-2\pi jt}-1}\right)\Bigg|_{t=\frac{1}{2}}$$

Démonstration. d'après le lemme 4.0.1 on a :

$$L\left(\frac{1}{2},1,s\right)=\left(1-2^{1-s}\right)\zeta(s)$$

or

$$L\left(\frac{1}{2},1,s\right)=\lim_{t\to1/2}L(t,1,s)$$

d'après le théorème 5.1.1 on a :

$$L(t,1,s)=(2\pi)^s\exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2}-2t\right)\right]\ {}_{-\infty}^{R-L}D_t^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jt}}{1-e^{2\pi jt}}\right)$$

alors :

$$\left(1-2^{1-s}\right)\zeta(s)=\lim_{t\to 1/2}(2\pi)^s\exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2}-2t\right)\right]\ {}_{-\infty}^{R-L}D_t^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jt}}{1-e^{2\pi jt}}\right)$$

donc :

$$\begin{aligned}\zeta(s)&=\frac{1}{1-2^{1-s}}\lim_{t\to\frac{1}{2}}(2\pi)^s\exp\left[i\pi\left(\frac{s}{2}-2t\right)\right]\ {}_{-\infty}^{R-L}D_t^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jt}}{1-e^{2\pi jt}}\right)\\&=\frac{1}{1-2^{1-s}}\lim_{t\to\frac{1}{2}}(2\pi)^s\exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2}-2t\right)\right]\lim_{t\to\frac{1}{2}}\ {}_{-\infty}^{R-L}D_t^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jt}}{1-e^{2\pi jt}}\right)\\&=\frac{(2\pi)^s e^{\frac{j\pi s}{2}}e^{-\pi j}}{1-2^{1-s}}\lim_{t\to\frac{1}{2}}\ {}_{-\infty}^{R-L}D_t^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jt}}{1-e^{2\pi jt}}\right)\\&=\frac{(2\pi j)^s}{2^{1-s}-1}\lim_{t\to\frac{1}{2}}\ {}_{-\infty}^{R-L}D_t^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jt}}{1-e^{2\pi jt}}\right)\end{aligned}$$

d'où :

$$\zeta(s)=\frac{(2\pi j)^s}{2^{1-s}-1}\ {}_{-\infty}^{R-L}D_t^{-s}\left(\frac{1}{e^{-2\pi jt}-1}\right)\Bigg|_{t=\frac{1}{2}}$$

■

5 Fonction Zêta de Riemann définie par la dérivée fractionnaire au sens de Marchaud

Théorème 5.5.1. La fonction Zêta de Riemann peut s'écrire sous la forme :

$$\zeta(s)=\frac{(2\pi j)^s}{2^{1-s}-1}\ \mathbf{D}_{+}^{-s}\left(\frac{1}{e^{-2\pi jt}-1}\right)\Bigg|_{t=\frac{1}{2}}$$

ou sous la forme :

$$\zeta(s)=\frac{(-2\pi j)^s}{2^{1-s}-1}\ \mathbf{D}_{-}^{-s}\left(\frac{1}{e^{-2\pi jt}-1}\right)\Bigg|_{t=\frac{1}{2}}$$

Démonstration. On sait que :

$$L\left(\frac{1}{2},1,s\right)=\left(1-2^{1-s}\right)\zeta(s)$$

or

$$L\left(\frac{1}{2},1,s\right)=\lim_{t\to 1/2}L(t,1,s)$$

d'après le théorème 5.2.1 on a :

$$L(t,1,s) = (2\pi)^s \exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2}-2t\right)\right] \ \mathbf{D}_+^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jt}}{1-e^{2\pi jt}}\right)$$

donc :

$$\left(1-2^{1-s}\right)\zeta(s) = \lim_{t\to 1/2}(2\pi)^s \exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2}-2t\right)\right] \ \mathbf{D}_+^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jt}}{1-e^{2\pi jt}}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \frac{1}{1-2^{1-s}} \lim_{t\to\frac{1}{2}}(2\pi)^s \exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2}-2t\right)\right] \ \mathbf{D}_+^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jt}}{1-e^{2\pi jt}}\right) \\
&= \frac{1}{1-2^{1-s}} \lim_{t\to\frac{1}{2}}(2\pi)^s \exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2}-2t\right)\right] \lim_{t\to\frac{1}{2}} \ \mathbf{D}_+^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jt}}{1-e^{2\pi jt}}\right) \\
&= \frac{(2\pi)^s e^{\frac{j\pi s}{2}} e^{-\pi j}}{1-2^{1-s}} \lim_{t\to\frac{1}{2}} \ \mathbf{D}_+^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jt}}{1-e^{2\pi jt}}\right) \\
&= \frac{(2\pi j)^s}{2^{1-s}-1} \lim_{t\to\frac{1}{2}} \ \mathbf{D}_+^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jt}}{1-e^{2\pi jt}}\right)
\end{aligned}$$

d'où :

$$\zeta(s) = \frac{(2\pi j)^s}{2^{1-s}-1} \ \ \mathbf{D}_+^{-s}\left(\frac{1}{e^{-2\pi jt}-1}\right)\Bigg|_{t=\frac{1}{2}}$$

de même ; d'après le théorème 5.2.1 on a :

$$L(t,1,s) = (-1)^s(2\pi)^s \exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2}-2t\right)\right] \ \mathbf{D}_-^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jt}}{1-e^{2\pi jt}}\right)$$

donc :

$$\left(1-2^{1-s}\right)\zeta(s) = \lim_{t\to 1/2}(-1)^s(2\pi)^s \exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2}-2t\right)\right] \ \mathbf{D}_-^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jt}}{1-e^{2\pi jt}}\right)$$

donc :

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \frac{1}{1-2^{1-s}} \lim_{t\to\frac{1}{2}}(-1)^s(2\pi)^s \exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2}-2t\right)\right] \ \mathbf{D}_-^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jt}}{1-e^{2\pi jt}}\right) \\
&= \frac{1}{1-2^{1-s}} \lim_{t\to\frac{1}{2}}(-1)^s(2\pi)^s \exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2}-2t\right)\right] \lim_{t\to\frac{1}{2}} \ \mathbf{D}_-^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jt}}{1-e^{2\pi jt}}\right) \\
&= \frac{(-1)^s(2\pi)^s e^{\frac{j\pi s}{2}} e^{-\pi j}}{1-2^{1-s}} \lim_{t\to\frac{1}{2}} \ \mathbf{D}_-^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jt}}{1-e^{2\pi jt}}\right) \\
&= \frac{(-2\pi j)^s}{2^{1-s}-1} \lim_{t\to\frac{1}{2}} \ \mathbf{D}_-^{-s}\left(\frac{e^{2\pi jt}}{1-e^{2\pi jt}}\right)
\end{aligned}$$

d'où :

$$\zeta(s) = \frac{(-2\pi j)^s}{2^{1-s}-1} \ \ \mathbf{D}_-^{-s}\left(\frac{1}{e^{-2\pi jt}-1}\right)\Bigg|_{t=\frac{1}{2}}$$

■

6 Fonction Zêta de Riemann définie par la dérivée fractionnaire au sens de Hilfer

Théorème 5.6.1. La fonction Zêta de Riemann peut s'écrire sous la forme :

$$\zeta(s) = \frac{(2\pi j)^s}{2^{1-s}-1} \; {}^{H}\mathbb{D}^{-s,\beta}_{-\infty^+}\left(\frac{1}{e^{-2\pi jt}-1}\right)\Bigg|_{t=\frac{1}{2}}$$

ou sous la forme :

$$\zeta(s) = \frac{(-1)^n(2\pi j)^s}{2^{1-s}-1} \; {}^{H}\mathbb{D}^{-s,\beta}_{+\infty^-}\left(\frac{1}{e^{2\pi jt}-1}\right)\Bigg|_{t=\frac{1}{2}}$$

Démonstration. comme :

$$L\left(\frac{1}{2},1,s\right) = \left(1-2^{1-s}\right)\zeta(s)$$

d'après le théorème 5.3.1 on a :

$$L(t,1,s) = (2\pi)^s \exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2}-2t\right)\right] \; {}^{H}\mathbb{D}^{-s,\beta}_{-\infty^+}\left(\frac{e^{2\pi jt}}{1-e^{2\pi jt}}\right)$$

donc :

$$\left(1-2^{1-s}\right)\zeta(s) = \lim_{t\to 1/2}(2\pi)^s \exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2}-2t\right)\right] \; {}^{H}\mathbb{D}^{-s,\beta}_{-\infty^+}\left(\frac{e^{2\pi jt}}{1-e^{2\pi jt}}\right)$$

donc :

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \frac{1}{1-2^{1-s}}\lim_{t\to\frac{1}{2}}(2\pi)^s \exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2}-2t\right)\right] \; {}^{H}\mathbb{D}^{-s,\beta}_{-\infty^+}\left(\frac{e^{2\pi jt}}{1-e^{2\pi jt}}\right) \\
&= \frac{1}{1-2^{1-s}}\lim_{t\to\frac{1}{2}}(2\pi)^s \exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2}-2t\right)\right]\lim_{t\to\frac{1}{2}} \; {}^{H}\mathbb{D}^{-s,\beta}_{-\infty^+}\left(\frac{e^{2\pi jt}}{1-e^{2\pi jt}}\right) \\
&= \frac{(2\pi)^s e^{\frac{j\pi s}{2}} e^{-\pi j}}{1-2^{1-s}}\lim_{t\to\frac{1}{2}} \; {}^{H}\mathbb{D}^{-s,\beta}_{-\infty^+}\left(\frac{e^{2\pi jt}}{1-e^{2\pi jt}}\right) \\
&= \frac{(2\pi j)^s}{2^{1-s}-1}\lim_{t\to\frac{1}{2}} \; {}^{H}\mathbb{D}^{-s,\beta}_{-\infty^+}\left(\frac{e^{2\pi jt}}{1-e^{2\pi jt}}\right)
\end{aligned}$$

d'où :

$$\zeta(s) = \frac{(2\pi j)^s}{2^{1-s}-1} \; {}^{H}\mathbb{D}^{-s,\beta}_{-\infty^+}\left(\frac{1}{e^{-2\pi jt}-1}\right)\Bigg|_{t=\frac{1}{2}}$$

de même ; d'après le théorème 5.3.1 on a :

$$L(t,1,s) = (-1)^n(2\pi)^s \exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2}-2t\right)\right] \; {}^{H}\mathbb{D}^{-s,\beta}_{+\infty^-}\left(\frac{e^{-2\pi jt}}{1-e^{-2\pi jt}}\right)$$

donc :

$$\left(1-2^{1-s}\right)\zeta(s)=\lim_{t\to 1/2}(-1)^n(2\pi)^s\exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2}-2t\right)\right]\ {}^{H}\mathbb{D}_{+\infty^-}^{-s,\beta}\left(\frac{e^{-2\pi jt}}{1-e^{-2\pi jt}}\right)$$

donc :

$$\begin{aligned}\zeta(s)&=\frac{1}{1-2^{1-s}}\lim_{t\to\frac{1}{2}}(-1)^n(2\pi)^s\exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2}-2t\right)\right]\ {}^{H}\mathbb{D}_{+\infty^-}^{-s,\beta}\left(\frac{e^{-2\pi jt}}{1-e^{-2\pi jt}}\right)\\&=\frac{1}{1-2^{1-s}}\lim_{t\to\frac{1}{2}}(-1)^n(2\pi)^s\exp\left[j\pi\left(\frac{s}{2}-2t\right)\right]\lim_{t\to\frac{1}{2}}\ {}^{H}\mathbb{D}_{+\infty^-}^{-s,\beta}\left(\frac{e^{-2\pi jt}}{1-e^{-2\pi jt}}\right)\\&=\frac{(-1)^n(2\pi)^s e^{\frac{j\pi s}{2}}e^{-\pi j}}{1-2^{1-s}}\lim_{t\to\frac{1}{2}}\ {}^{H}\mathbb{D}_{+\infty^-}^{-s,\beta}\left(\frac{e^{-2\pi jt}}{1-e^{-2\pi jt}}\right)\\&=\frac{(-1)^n(2\pi j)^s}{2^{1-s}-1}\lim_{t\to\frac{1}{2}}\ {}^{H}\mathbb{D}_{+\infty^-}^{-s,\beta}\left(\frac{e^{-2\pi jt}}{1-e^{-2\pi jt}}\right)\end{aligned}$$

d'où :

$$\zeta(s)=\frac{(-1)^n(2\pi i)^s}{2^{1-s}-1}\ {}^{H}\mathbb{D}_{+\infty^-}^{-s,\beta}\left(\frac{1}{e^{2\pi it}-1}\right)\Bigg|_{t=\frac{1}{2}}$$

■

7 Lien entre la dérivée fractionnaire de la fonction Zêta au sens de Grunwald-Letnikov et les nombres premiers

Théorème 5.7.1. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\mathbb{P}$ est l'ensemble des nombres premiers.
pour tout $s\in\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s)<0$ on a :

$$_{GL}D^{\alpha}\zeta(s)\sim\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{t=0}^{+\infty}\frac{\log^{\alpha}p^t}{p^{-st}}$$

où le signe $\sim$ signifie que les deux séries sont équivalentes.

Démonstration.

$$\begin{aligned}{}_{GL}D_d^{\alpha}\zeta(s)&=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\alpha\\k\end{array}\right)(-1)^k\zeta(s-kh)}{h^{\alpha}}\\&=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\alpha\\k\end{array}\right)(-1)^k\prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{1-p^{kh-s}}\end{aligned}$$

on a ;

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{kh-s}} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1+\frac{p^{-s+kh}}{1-p^{-s+kh}}\right) \sim \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{p^{-s+kh}}{1-p^{-s+kh}}$$

alors ;

$$\begin{aligned}{}_{GL}D_d^{\alpha}\zeta(s) &\sim \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right) (-1)^k \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{p^{-s+kh}}{1-p^{-s+kh}} \\ &= \sum_{p\in\mathbb{P}} \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right) (-1)^k \frac{p^{-s+kh}}{1-p^{-s+kh}}\end{aligned}$$

et comme ;

$$\frac{1}{1-p^{s-kh}} = \sum_{t=0}^{+\infty} p^{(s-kh)t}$$

alors ;

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right) (-1)^k \frac{p^{-s+kh}}{1-p^{-s+kh}} &= -\sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right) (-1)^k \frac{1}{1-p^{s-kh}} \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right) (-1)^k \sum_{t=0}^{+\infty} p^{(s-kh)t} \\ &= -\sum_{t=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right) (-1)^k p^{(s-kh)t}\right) \\ &= -\sum_{t=0}^{+\infty} \left(p^{st} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right) (-1)^k p^{-kht}\right) \\ &= -\sum_{t=0}^{+\infty} p^{st}(1-p^{-ht})^{\alpha} \qquad voir 1.1.2\end{aligned}$$

donc ;

$$\begin{aligned}{}_{GL}D_d^{\alpha}\zeta(s) &\sim \sum_{p\in\mathbb{P}} \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right) (-1)^k \frac{p^{-s+kh}}{1-p^{-s+kh}} \\ &= -\sum_{p\in\mathbb{P}} \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{t=0}^{+\infty} p^{st}(1-p^{-ht})^{\alpha} \\ &= -\sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{t=0}^{+\infty} p^{st} \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{1-p^{-ht}}{h}\right)^{\alpha}\end{aligned}$$

on calcul $\lim_{h\to 0^+} \left(\frac{1-p^{-ht}}{h}\right)^{\alpha}$ en utilisant la règle d'Hopital ;

$$\lim_{h\to 0^+} \left(\frac{1-p^{-ht}}{h}\right)^{\alpha} = \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{1-e^{-ht\log(p)}}{h}\right)^{\alpha} = \lim_{h\to 0^+} -\left(-t\log(p)e^{-ht\log(p)}\right)^{\alpha} = \log^{\alpha} p^t$$

d'où ;

$$\begin{aligned}
{}_{GL}D_d^{\alpha}\zeta(s) &\sim -\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{t=0}^{+\infty} p^{st}\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1-p^{-ht}}{h}\right)^{\alpha} \\
&= -\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{t=0}^{+\infty} p^{st}\log^{\alpha} p^{t} \\
&= -\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{t=0}^{+\infty} \frac{\log^{\alpha} p^{t}}{p^{-st}}
\end{aligned}$$

■

Conclusion

Nous avons entamé notre mémoire par une étude bibliographique qui a englobé les notions de base du calcul fractionnaire et les fonctions spéciales.

Au premier chapitre, les outils mathématiques liés aux fonctions spéciales ont été présentés. Au second chapitre, les outils liés à l'intégration et à la dérivation fractionnaires ont été introduits, nous avons donné un aperçu du calcul fractionnaire. On a introduit trois approches des dérivées fractionnaires (l'approche de Riemann Liouville, de Grunwald-Letnikov et celle de Ortigiera-Caputo) ainsi que leurs propriétés.

Ensuite au troxième chapitre, les outils liés à la fonction Zêta ont été introduits. on a présenté une étude de la fonction Zêta de Riemann en tant que fonction a variable complexe, ainsi que certaines de ses conséquences.

Le quatrième chapitre, porte essentiellement sur les dérivées fractionnaires de la fonction Zêta de Riemann au sens de Grunwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Ortigueira-Caputo.

Le dernier chapitre, contribution à l'étude de la fonction Zêta de Lerch et de Riemann définies par les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville, Marchaud, Hilfer. Nous avons montré à la fin de ce chapitre une relation entre la dérivée fractionnaire de la fonction Zêta au sens de Grunwald-Letnikov et les nombres premiers.

Les deux derniers chapitres sont l'objet de notre contribution, porte sur l'application et l'adaptation de ces outils à l'étude de problème de l'hypothèse de Riemann fractionnaire, nous avons étudié les fonctions Zêta de Riemann et êta de Dirichlet avec certaines dérivées fractionnaires.

Trois résultats seront données : le premier (lemmes $(2.0.1), (3.0.2)$ *) est basé sur le lemme* $(1.0.1)$*, le second (théorèmes* $(5.2.1), (5.3.1)$*) repose sur le théorème* $(5.1.1)$*, le troisième (théorèmes* $(5.5.1), (5.6.1)$*) est basé sur le théorème* $(5.4.1)$.

Nos résultats peuvent être vus comme analogues à ceux obtenus dans les articles [4,6,12,13].

Ce travail est un initiation à un travail qui vise à étudier les fonctions de type de Zêta de Riemann avec des dérivées fractionnaires qui est nouveau et n'est pas été traité avant. Il reste beaucoup à faire avec le calcul fractionnaire dans les domaines de la théorie des nombres, des fonctions de variables complexes (fonctions de Weierstrass, fonctions elliptiques), des courbes Elliptiques (sur les corps finis, sur les corps locaux, invariants , etc.…).

Bibliographie

[1] A.A. Kilbas and H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amersterdam, 2006.

[2] A. Laurinčikas and R. Garunkštis , The Lerch Zeta-function , (z-lib.org).

[3] T.M. Apostol , Introduction to analytic number theory, (T)(ISBN 0387901639)(350s)(2), 1976.

[4] A. Fernandez, The Lerch zeta function as a fractional derivative, 2012.

[5] E. C. Titchmarsh and D. R. Heath-Brown, The Theory of the Riemann Zeta-function, Oxford Science Publications, New York, 1987.

[6] E. Guariglia Fractional Derivative of the Riemann Zeta Function , 2015.

[7] E. Guariglia and S. Silvestrov, A functional equation for the Riemann zeta fractional derivative, 1798.

[8] J. B. Keiper, Calculs Fractional-Fonction Zeta, 1975.

[9] J. Vanterler, J. Antonio and T. Machado, E C. de Oliveira, The psi-Hilfer fractional calculus of variable order and its applications, 2020.

[10] C. Li, X. Dao and P. Guo, Fractional derivatives in complex planes. Nonlinear Analysis : Theory,Methods Applications, 2009.

[11] Letnikov vs. MarchaudA Survey on Two Prominent Constructions of Fractional Derivatives.

[12] M.D. Ortigueira, A coherent approach to non-integer order derivatives, Signal Process., 86, 2505–2515, 2006.

[13] M.D. Ortigueira, Fractional Calculus for Scientists and EngineersLecture Notes in Electrical Engineering, springer, London, Volume 84, 2011.

[14] Paul L. Butzer, Anatoly A. Kilbas, and J. J. Trujillo, Stirling Functions of the Second Kind in the Setting of Difference and Fractional Calculus, 2003.

[15] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Maritchev, Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Application, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.