REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE DJILALI BOUNAÂMA-KHEMIS MILIANA

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

MÉMOIRE

Pour obtenir

LE DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

SPÉCIALITÉ : ANALYSE MATHÉMATIQUE ET APPLICATIONS

Présenté par

MEFTAH KENZA

SUR LES SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES

Soutenu le 08/07/ 2019 devant les membres du jury :

Dr. CHAOUCHI BELKASEM	*Univ. de Khemis Miliana*	*Président*
Dr. SLIMANE LEILA	*Univ. de Khemis Miliana*	*Encadreur*
Dr. SAID ABDERRAZAK	*Univ. de Khemis Miliana*	*Examiateur*
Dr. SADAOUI BOUALAM	*Univ. de Khemis Miliana*	*Examiateur*

Année Universitaire : ***2018/2019***

Dédicace

Je dédie ce travail modeste :

À ma chére défunt mère ***ZOHRA*** *qui a toujours souhaité que mon chemin soit plein de réussite et qui était la plus grande motivation de mes études pour réaliser son rêve.*

Mon cher père ***MOHAMMED*** *.*

À mon mari ***HAMZA*** *qui était à côté de moi dans mes moments les plus difficiles .*
À ma famille surtout : ***FATIMA, FATMA , KARIMA.,SARA, MOUSTAPHA AHMED , ABD ALKADER MOHAMMED*** *.*

À mes très amis surtout : ***Iman, Fatima, Fadila , Ahlem ,Baya.***

À mes professeurs qui m'ont amené à ce niveau .

Remerciement

*En premier lieu, je remercie "**ALLAH**" le tout puissant qui m'a donné la force, la volonté et le courage pour accomplir ce modeste travail.*

*Je remercie **Mme. SLIMANE LEILA** , mon encadreur de mémoire de fin d'étude, pour ses précieux conseils et son orientation ficelée tout au long de notre travail.*

Je veux exprimer mes remerciements les plus dévoués aux membres de jury qui m'ont honorées en acceptant d'évaluer ce travail.

Mes remerciements s'étendent également à tous mes enseignants durant mes années d'études.

À mes familles et mes amis qui par leurs prières et leur encouragements, on a pu surmonter tous les obstacles.

Je profite l'occasion ainsi à adresser mes remerciements à mes collègues de Master 2 et 1, et aussi de Master 2 de l'année passer.

Je remercie toute personne qui a participé et contribué de prés ou de loin à l'exécution de ce modeste travail.

Merci

Résumé

L'objectif de ce mémoire est de trouver la forme explicite des suites récurrentes qui sont définies par des relations de récurrence à coefficients constants dans les cas homogène et non homogène . On étudie aussi la suite de Fibonacci et le nombre d'or où on présente leurs propriétés et applications.

Mots clés : Suite récurrente linéaire, Relation de récurrence linéaire, Relation homogène, Relation non homogène, Opérateur d'avancement, Fonction génératrice, Suite de Fibonacci, Nombre d'Or .

ملخص

هدفنا في هذه المذكرةهو عرض طرق حل العلاقات المتكررة الخطية المتجانسة و غير المتاجنسة مع المعاملات الثابتة . ندرس ايضا متتالية فيبوناشي و الرقم الذهبي اين نقدم خصائصها وتطبيقاتها .

الكلمات المفتاحية : المتتالية الخطية المتكررة، علاقة خطية متكررة ، العلاقة المتجانسة ، العلاقة غير المتجانسة ، المؤثرالمقدم، تسلسل فيبوناشي ، الرقم الذهبي.

Abstract

The objective of this thesis is the presentation of resolution methods of linear recurrente relations with constants coefficients in the homogeneous and the non homogeneous cases. We study also , the sequance of Fibonacci and the golden number , where we present their properties and applications .

Keywords : Linear recursive sequence, Linear recurrence relation, Homogeneous relations, Nonhomogeneous relation, Forward operator, Generator function, Fibonacci sequence, Golden number.

Table des matières

Introduction

Le concept de suite récurrente se trouve au centre de l'analyse de plusieurs problèmes en mathématiques et informatique (le factoriel, le binomial, la résolution numérique des équations différentielles et les problèmes de point fixe,le nombre total d'étapes qu'un algorithme doit accomplir, le temps, d'exuction, $\cdots$ etc). De plus les suites récurrentes apparaissent dans plusieurs modèles en finance, chimie, biologie, physique, $\cdots$ etc [10]

Dans ce mémoire on s'intéresse à une classe des suites récurrentes qui sont définies par des relations de récurrence linéaires avec des coefficients constants [10] . L'objectif est de trouver une forme explicite de la suite, car quoique la définition par récurrence soit une définition tout à fait rigoureuse, elle n'est pas très pratique. On note que trouver une solution analytique dans le cas non linéaire n'est pas évident [5] , [6]

Note travail est partagé en trois chapitres :
Le premier chapitre est consacré à présenter quelques modèles qui font appelle aux relations récurrentes . On présente aussi une méthode de résolution des relations linéaires d'ordre p à des coefficients constantes dans les cas homogènes et non homogènes .

Dans le deuxième chapitre, on expose, les fonctions génératrices et leur utilité dans la résolution des relations de récurrence . Une autre méthode pour traiter le cas non homogène est présenté où le cas non homogène est ramené après certaines transformations à un cas homogène. On termine ce mémoire par montrer la relations entre la suite de Fibonacci et le nombre d'or ainsi que leurs propriétés et leurs apparitions dans la nature .

Chapitre 1

Les relations de récurrence linéaires à coefficients constants

Dans ce chapitre nous allons présenter la notion et la résolution des relations de recurrence lineaires homogène et non homogène[10].

Définition 1.1. *Une suite récurrente est une suite qui est définie par une relation de récurrence c.à . d une équation où le terme a_n est exprime par des précédents termes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, pour $n \geq n_0$ ou $n_0 \in \mathbb{N}$. Une suite est appelée une solution d'une relation de récurrence si ses termes vérifient la relation de récurrence.*

1.1 Modélisation avec des relations de récurrence

Dans cette section on présente quelques modèles où les relations de récurrence apparaissent .

Exemple 1.1. *La tour de Hanoi est un casse-tête populaire de la fin du XIX ème siècle inventé par les Français. Le mathématicien Édouard Lucas, appelé la tour de Hanoi, ce jeu est constitué de trois pions montés sur une planche avec des disques de différentes tailles. Initialement, ces disques sont placés sur le premier cheville par ordre de taille, le plus grand en bas (voir Figure 1). Les règles du jeu permettent aux disques d'être déplacés les uns après les autres d'un piquet à l'autre tant qu'un disque n'est jamais placé sur un disque plus petit.*

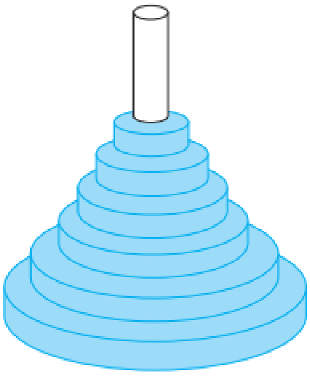


Figure 1 *: POSITION INITIALE DE TOUR DE HANOI*

Le but du puzzle est d'avoir tous les disques sur la deuxième cheville en ordre de taille, avec le plus grand en bas.

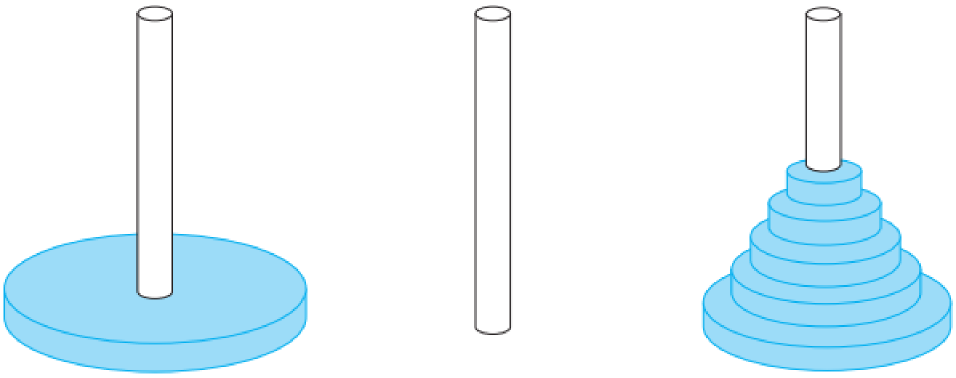


Figure 2 *: POSITION INTERMÉDIAIRE DE TOUR DE HANOI*

Soit H_n *le nombre de déplacements nécessaires pour résoudre le problème de la tour de Hanoi avec* n *disques. Cherchons une relation de récurrence pour la suite* $\{H_n\}$ *.*

Commençons par n *disques sur la cheville* 1*. Nous pouvons transférer les* $n-1$ *premiers disques en respectant les règles du puzzle à la cheville 3 en utilisant* H_{n-1} *déplacement (voir la Figure 2 pour une illustration des chevilles et des disques). À ce point nous gardons le* *plus grand disque fixé pendant ces déplacements. Ensuite, nous utilisons un mouvement pour transférer le disque le plus grand sur la deuxième cheville. Nous pouvons transférer les* $n-1$ *disques de la cheville 3 à la cheville 2 en utilisant* H_{n-1} *mouvements supplémentaires, en les plaçant sur le disque le plus grand, qui reste toujours fixé sur le fond de la cheville 2. En outre, il est facile de voir que le casse-tête ne peut pas être résolu en utilisant moins d'étapes. Cela montre que :*

$$H_n = 2H_{n-1} + 1.$$

La condition initiale est $H_1 = 1$*, car un disque peut être transféré de la cheville* 1 *à la cheville* 2*, selon les règles du puzzle, en un seul mouvement.*

Nous pouvons utiliser une approche itérative pour résoudre cette relation de récurrence. Notez que :

$$\begin{aligned}
H_n &= 2H_{n-1} + 1 \\
&= 2\left(2H_{n-2} + 1\right) + 1 = 2^2 H_{n-2} + 2 + 1 \\
&= 2^2\left(2H_{n-3} + 1\right) + 2 + 1 = 2^3 H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\
&\vdots \\
&= 2^{n-1}H_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + 1 \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 \\
&= 2^n - 1.
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé la relation de récurrence à plusieurs reprises pour exprimer H_n *en termes de termes précédents de la suite. Dans l'avant-dernière égalité, la condition initiale* $H_1 = 1$ *a été utilisée. La dernière l'égalité est basée sur la formule de la somme des termes d'une série géométrique. L'approche itérative a produit la solution à la relation de récurrence* $H_n = 2H_{n-1}+1$ *avec la condition initiale* $H_1 = 1$ *cette formule peut être prouvée par induction mathématique.*

Un mythe créé pour accompagner le puzzle raconte l'histoire d'une tour de Hanoi où des moines se rendent 64 *disques d'or d'une cheville à l'autre, selon les règles du puzzle. Le mythe dit que le monde finira quand ils finiront le puzzle. Combien de temps faut-il pour les moines pour finir le jeu si les moines prennent une seconde pour déplacer un disque ?*
À partir de la formule explicite, les moines ont besoin :

$$2^{64} - 1 = 18,446,744,073,709,551,615$$

déplacements pour transférer les disques. En faisant un mouvement par seconde, il leur faudra plus de 500 milliards années pour terminer le transfert.
Les exemples suivants illustrent les application des suites récurrentes dans le domaine de finance .

Exemple 1.2. ***Intérêt composé*** *Supposons qu'une personne dépose* $\$10,000$ *dans un compte d'épargne dans une banque avec rendement de 11*$\%$ *par an où les intérêts sont composés annuellement. Combien sera dans le compte après 30 ans ?*

Pour résoudre ce problème, notons P_n *le montant du compte après* n *années. Parce-que le montant du compte après* n *années est égal au montant du compte après* $n-1$ *ans, plus intérêt pour la nième année, on voit que la suite* P_n *satisfait la relation de récurrence*

$$P_n = P_{n-1} + 0.11P_{n-1} = (1.11)P_{n-1} \quad .$$

La condition initiale est $P_0 = 10,000$ *. Nous pouvons utiliser une approche itérative pour trouver une formule pour* P_n*. Notez que :*

$$\begin{aligned}
P_1 &= (1.11)P_0 \\
P_2 &= (1.11)P_1 = (1.11)^2 P_0 \\
P_3 &= (1.11)P_2 = (1.11)^3 P_0 \\
&\vdots \\
P_n &= (1.11)P_{n-1} = (1.11)^n P_0.
\end{aligned}$$

Lorsque nous insérons la condition initiale $P_0 = 10,000$ *, la formule* $P_n = (1.11)^n 10,000$ *est obtenue. L'insertion de* $n = 30$ *dans la formule* $P_n = (1.11)^n 10,000$ *montre qu'après 30 ans le compte contient :*

$$P_{30} = (1.11)^{30} 10,000 = \$228,922.97 \quad .$$

Exemple 1.3. *Un dépôt de* $\$100,000$ *est versé dans un fonds de placement au début d'une année. Le dernier jour de chaque année deux dividendes sont attribués. Le premier dividende correspond à 20*$\%$ *du montant dans le compte au cours de cette année. Le deuxième dividende 45*$\%$ *du montant du compte de la précédente année. Trouvez une relation de récurrence pour* $\{P_n\}$*, où* P_n *est le montant dans le compte à la fin de n années si on a rien retiré de cet argent .*

Le montant P_n *sur le compte à la fin de la nième année est égal au montant à la fin de la l'année précédente* (P_{n-1}) *, plus le dividende de 20*$\%$*, sur ce montant* $(0.2P_{n-1})$ *et le dividende de 45*$\%$ *sur le montant à la fin de l'année précédente* $(0.45P_{n-2})$ *. Nous avons donc* $P_n = 1.2P_{n-1} + 0.45P_{n-2}$*. Nous avons besoin de deux conditions initiales, puisque l'équation est d'ordre 2. Clairement* $P_0 = 100000$*. L'autre condition initiale est que* $P_1 = 120000$*, puisqu'il n' est y 'a qu'un dividende à la fin de la première année.*

Exemple 1.4. *Trouver une relation de récurrence et donner les conditions initiales pour le nombre de chaînes de bits de longueur n qui n'ont pas deux 0 consécutifs. Combien y a-t-il de* *telles chaînes de bits de longueur cinq ?*

Soit a_n le nombre de chaînes de bits de longueur n qui n'ont pas deux 0 consécutifs. Pour obtenir une relation de récurrence pour a_n, notez que, le nombre de chaînes de bits de longueur n qui ne possède pas deux 0 consécutifs est égal au nombre de chaînes de bits se terminant par un 0 plus le nombre de ces chaînes de bits se terminant par un 1. Nous supposerons que $n \geq 3$, de sorte que la chaîne de bits a au moins trois bits. Les chaînes de bits de longueur n se terminant par 1 qui n'ont pas deux 0 consécutifs sont précisément les chaînes de bits de longueur $n-1$ sans deux 0 consécutifs avec un 1 ajouté à la fin. Par conséquent, il y a une telle chaîne de bits. Les chaînes de bits de longueur n se terminant par un 0 sans deux 0 consécutifs doivent en avoir 1 comme leur $(n-1)$ premier bit; sinon ils finiraient avec une paire de 0. Il s'ensuit que le bit string de longueur n se terminant par un 0 qui n'ont pas deux 0 consécutifs sont précisément les chaînes de bits de longueur $n-2$ sans deux 0 consécutifs, avec 10 ajoutés à la fin. Par conséquent, il y a a_{n-2} ces chaînes de bits. Nous concluons, que

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad \textit{pour } n \geq 3.$$

Les conditions initiales sont $a_1 = 2$, car les deux chaînes de bits de longueur un, 0 et 1 n'ont pas 0 consécutifs, et $a_2 = 3$, car les chaînes de bits valides de longueur deux sont $01, 10$ et 11. Pour obtenir a_5, nous utilisons la relation de récurrence trois fois pour constater que

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5 \\ a_4 &= a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8 \\ a_5 &= a_4 + a_3 = 8 + 5 = 13. \end{aligned}$$

Les méthodes itératives on donné la forme explicite dans le cas des exemples 1.1 et 1.2 car l'ordre est 1, mais malheureusement ça sera plus compliqué de l'appliquer pour les exemples 1.3 et 1.4 pour cela on va présenter une autre méthode qui nous donne la forme explicite dans le cas gènèral [10].

1.2 Cas linéaire homogène à coefficients constants

Dans cette section on étudie les relations de récurrence linéaires homogènes d'ordre k à coefficients constants où on présente une méthode pour les résoudre [10].

Définition 1.2. *Une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre k à coefficients constants est une relation de récurrence de la forme :*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

où $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sont des nombres réels et $c_k \neq 0$.

Exemple 1.5. *Les relations suivantes sont des relations récurrentes homogènes linéaires à coefficients constants :*

1/ $a_n = 3a_{n-1} + 5a_{n-2}$ *ici d'ordre 2.*

2/ $a_n = a_{n-1} + a_{n-4}$ *ici d'ordre 4.*

3/ $a_n = a_{n-7}$ *ici d'ordre 7.*

Exemple 1.6.

1/ *La relation de récurrence* $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-3}^2$ *n'est pas linéaire car il existe un terme carré.*

2/ *La relation de récurrence* $a_n = 2a_{n-1} + 1$ *est non homogène car il existe un coefficient sans terme.*

3/ *Dans la relation de récurrence* $a_n = 2na_{n-1} + n^3a_{n-2}$ *les coefficients ne sont pas constants.*

1.2.1 Résolution des relations de récurrence homogènes linéaires à coefficients constant

L'approche de base pour résoudre les relations de récurrence linéaires homogènes consiste à rechercher des solutions de la forme $a_n = r^n$, où r est une constante non nulle. Notez que $a_n = r^n$ est une solution de la relation de récurrence
$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k}$ si et seulement si :

$$r^n = c_1r^{n-1} + c_2r^{n-2} + \cdots + c_kr^{n-k}.$$

Lorsque les deux côtés de cette équation sont divisés par r^{n-k} et que le côté droit est soustrait de celui à gauche, on obtient l'équation :

$$r^k - c_1r^{k-1} - c_2r^{k-2} - \cdots - c_{k-1}r - c_k = 0\ .$$

En conséquence, la suite $\{a_n\}$ avec $a_n = r^n$ est une solution si et seulement si r est une solution de cette dernière équation, que nous appelons l'équation caractéristique de la relation de récurrence.

Les solutions de cette équation sont appelées les racines caractéristiques de la relation de récurrence. Comme nous le verrons, ces racines caractéristiques peuvent être utilisées pour donner une formule explicite pour toutes les solutions de la relation récurrente.
Nous allons d'abord développer des résultats qui traitent des relations de récurrence linéaires homogènes avec coefficients constants d'ordre deux. Puis des résultats généraux

correspondants lorsque l'ordre peut être plus de deux seront indiqués. Parce que les preuves nécessaires pour établir les résultats dans le cas général sont plus compliqués, ils ne seront pas donnés dans ce travail.

1.2.1.1 Cas d'ordre deux

Nous nous tournons maintenant vers les relations de récurrence linéaires homogènes d'ordre deux. En Premier, considérons le cas où il y a deux racines caractéristiques distinctes.

Théorème 1.1. *Soit c_1 et c_2 des nombres réels. Supposons que $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ ait deux racines distinctes r_1 et r_2. Alors la suite $\{a_n\}$ est une solution de la relation de récurrence $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ si et seulement si $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$ où α_1 et α_2 sont des constantes.*

Preuve :

Nous devons faire deux choses pour prouver le Théorème 1.1. Premièrement, il faut montrer que si r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique, et α_1 et α_2 sont des constantes, alors la suite $\{a_n\}$ avec $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ est une solution de la relation de récurrence. Deuxièmement, il faut montrer que si la suite $\{a_n\}$ est une solution, alors $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ pour certaines constantes α_1 et α_2 .

1. Maintenant, nous allons montrer que si $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, alors la suite $\{a_n\}$ est une solution de la relation de récurrence. Puisque r_1 et r_2 sont des racines de $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ il en résulte que $r_1^2 = c_1 r_1 + c_2$ et $r_2^2 = c_1 r_2 + c_2$. De ces équations, on obtient :

$$\begin{aligned} c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= c_1 \left(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}\right) + c_2 \left(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}\right) \\ &= \alpha_1 r_1^{n-2} \left(c_1 r_1 + c_2\right) + \alpha_2 r_2^{n-2} \left(c_1 r_2 + c_2\right) \\ &= \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2 \\ &= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \\ &= a_n. \end{aligned}$$

   Cela montre que la suite $\{a_n\}$ avec $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ est une solution de la relation de récurrence.

2. Pour montrer que chaque solution $\{a_n\}$ de la relation de récurrence s'écrit sous la forme $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$ pour certaines constantes α_1 et α_2, supposons que $\{a_n\}$ est un solution de la relation de récurrence et les conditions initiales $a_0 = C_0$ et $a_1 = C_1$ sont vérifiées.

On va montrer qu'il existe deux constantes α_1 et α_2 telles que la suite $\{a_n\}$ avec $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ satisfait ces mêmes conditions initiales. Cela nécessite que :

$$a_0 = C_0 = \alpha_1 + \alpha_2$$
$$a_1 = C_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2.$$

Nous pouvons résoudre ces deux équations pour α_1 et α_2 . De la première équation, il s'ensuit que $\alpha_2 = C_0 - \alpha_1$. Insérer cette expression dans la deuxième équation donne :

$$C_1 = \alpha_1 r_1 + (C_0 - \alpha_1)\, r_2.$$

Par conséquent :

$$C_1 = \alpha_1 (r_1 - r_2) + C_0 r_2.$$

Cela montre que :

$$\alpha_1 = \tfrac{C_1 - C_0 r_2}{r_1 - r_2}$$

et

$$\alpha_2 = C_0 - \alpha_1 = C_0 - \tfrac{C_1 - C_0 r_2}{r_1 - r_2} = \tfrac{C_0 r_1 - C_1}{r_1 - r_2},$$

où ces expressions pour α_1 et α_2 dépendent du fait que $r_1 \neq r_2$. (Lorsque $r_1 = r_2$ ce théorème n'est pas vrai) . Ainsi, avec ces valeurs pour α_1 et α_2 , la suite $\{a_n\}$ avec $\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ satisfait les deux conditions initiales. Nous savons que $\{a_n\}$ et $\{\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n\}$ sont deux solutions de la relation de récurrence $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ et les deux satisfont les conditions initiales lorsque $n = 0$ et $n = 1$. Parce qu'il existe une solution issue unique d'une relation de récurrence homogène linéaire d'ordre deux avec deux conditions initiales, il s'ensuit que les deux solutions sont les mêmes, c'est-à-dire, $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ pour tous les entiers positif n. Nous avons complété la démonstration en montrant qu'une solution de relation de récurrence linéaire homogène à coefficients constants d'ordre deux doit être de la forme $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, où α_1 et α_2 sont des constantes.

□

Exemple 1.7. *Quelle est la solution de la relation de récurrence suivante :*

$$a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n \textit{ avec } a_0 = 0, a_1 = 3\,?$$

On utilise le Théorème 1.1 pour résoudre ce problème. Alors l'équation caractéristique est $r^2 + r - 2 = 0$ *. Elle admet pour solutions les réels* 1 *et* -2 *. Par conséquent :*

$$a_n = \alpha_1 + \alpha_2(-2)^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ .$$

En remplaçant n *par* 0 *puis par* 1*, nous obtenons le système suivant :*

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = 3. \end{cases}$$

Donc : $\alpha_1 = 1$ *et* $\alpha_2 = -1$.
Conclusion : $a_n = 1 - (-2)^n$, $\qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.8. *Quelle est la solution de la relation de récurrence suivante :*

$$2a_n = 4a_{n-1} + a_{n-2}\ ?$$

On utilise le Théorème 1.1 pour résoudre ce problème, alors l'équation caractéristique est $2r^2 - 4r - 1 = 0$*. Elle admet pour solutions les réels* $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ *. Par conséquent :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \alpha_1(1 + \tfrac{\sqrt{2}}{2})^n + \alpha_2(1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2})^n\ .$$

Les racines caractéristiques d'une relation de récurrence homogène linéaire à coefficients constants peuvent être des nombres complexes. Le Théorème 1.1 nous a donné la solution dans le cas de deux racines distincts sans spécifier si ils sont des réelles où complexes le théorème suivant nous donne la forme de la solution dans le cas où les racines sont complexes.

Théorème 1.2. *Soit* c_1 *et* c_2 *des nombres réels. Supposons que* $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ *a deux racines distinctes et complexes conjuguées* ω *et* $\overline{\omega}$ *avec* $r = |\omega|$ *et* $\theta = \arg\omega$ *alors la suite* $\{a_n\}$ *est une solution de la relation de récurrence* $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ *si et seulement si*
$a_n = \alpha_1 r^n \cos(n\theta) + \alpha_2 r^n \sin(n\theta)$ *pour* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *où* α_1 *et* α_2 *sont des constantes.*

Preuve :
Pour démontrer le Théorème 1.2 supposons que l'équation caractéristique $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ d'ordre deux admette deux racines complexes (non réelles) conjuguées $\omega = re^{i\theta}$ et $\overline{\omega} = re^{-i\theta}$ avec $r > 0$ telle que : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ et c , d sont des nombre réels avec θ un angle on a :

$$\begin{aligned} a_n &= c\omega^n + d\omega^{-n} \\ &= cr^n e^{in\theta} + dr^n e^{-in\theta} \\ &= r^n(c+d)\cos(n\theta) + ir^n(c-d)\sin(n\theta)). \end{aligned}$$

Pour les nouvelle constantes :

$$\alpha_1 = c + d$$
$$\alpha_2 = i(c + d),$$

on obtient : $a_n = \alpha_1 r^n \cos(n\theta) + \alpha_2 r^n \sin(n\theta) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Exemple 1.9. *Résoudre la relation de récurrence suivante :*

$$a_{n+2} = -9a_n \textit{ avec } a_0 = 5 \textit{ et } a_1 = 1.$$

L'équation caractéristique est $r^2 + 9 = 0$. *Elle admet pour solutions* $3i$ *et* $-3i$. *Par conséquent :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \alpha_1 3^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \alpha_2 3^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

En remplaçant n *par 0 puis par 1, nous obtenons le système suivant :*

$$\begin{cases} \alpha_1 = 5 \\ 3\alpha_2 = 1. \end{cases}$$

Donc : $\alpha_1 = 5$ *et* $\alpha_2 = \frac{1}{3}$.
Conclusion : $a_n = 5 \cdot 3^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot 3^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right), \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.3. *Soit* c_1 *et* c_2 *des nombres réels avec* $c_2 \neq 0$. *Supposons que* $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ *à une seule racine* $r_0 \neq 0$. *La suite* $\{a_n\}$ *est une solution de la relation de récurrence* $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ *si et seulement si* $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$ *, pour* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *où* α_1 *et* α_2 *sont des constantes.*

Preuve :

Nous devons faire deux choses pour prouver le Théorème 1.3 . Premièrement, il faut montrer que si r_0 est une racine double de l'équation caractéristique, et α_1 et α_2 sont des constantes, alors la suite $\{a_n\}$ avec $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$ est une solution de la relation de récurrence. Deuxièmement, il faut montrer que si la suite $\{a_n\}$ est une solution, alors $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$ pour certaines constantes α_1 et α_2 .

1) Maintenant, nous allons montrer que si $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$, alors la suite $\{a_n\}$ est une solution de la relation de récurrence. Puisque r_0 est une racine double de $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ il en résulte que $r_0^2 = c_1 r_0 + c_2$. De ces équations, nous avons :

$$\begin{aligned}
c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= c_1 \left(\alpha_1 r_0^{n-1} + \alpha_2 n r_0^{n-1}\right) + c_2 \left(\alpha_1 r_0^{n-2} + \alpha_2 n r_0^{n-2}\right) \\
&= \alpha_1 r_0^{n-2} \left(c_1 r_0 + c_2\right) + \alpha_2 n r_0^{n-2} \left(c_1 r_0 + c_2\right) \\
&= \alpha_1 r_0^{n-2} r_0^2 + \alpha_2 n r_0^{n-2} r_0^2 \\
&= \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n \\
&= a_n.
\end{aligned}$$

Cela montre que la suite $\{a_n\}$ avec $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ est une solution de la relation de récurrence.

2) Pour montrer que chaque solution $\{a_n\}$ de la relation de récurrence s'écrit sous la forme $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ pour certaines constantes α_1 et α_2, supposons que $\{a_n\}$ est une solution de la relation de récurrence et les conditions initiales $a_0 = C_0$ et $a_1 = C_1$. Ce sera à montrer qu'il existe des constantes α_1 et α_2 telles que la suite $\{a_n\}$ avec $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$ satisfait ces mêmes conditions initiales. Cela nécessite que :

$$a_0 = C_0 = \alpha_1$$
$$a_1 = C_1 = \alpha_1 r_0 + \alpha_2 r_0.$$

Nous pouvons résoudre ces deux équations pour α_1 et α_2. De la première équation, il s'ensuit que $\alpha_1 = C_0$.
Insérer cette expression dans la deuxième équation donne :

$$C_1 = \alpha_1 r_0 + \alpha_2 r_0.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
C_1 = a_1 &= \alpha_1 r_0 + \alpha_2 r_0 \\
C_1 = a_1 &= C_0 r_0 + \alpha_2 r_0 \\
C_1 = a_1 &= (C_0 + \alpha_2) r_0 \\
\tfrac{C_1}{r_0} &= C_0 + \alpha_2 \\
\tfrac{C_1}{r_0} &= \alpha_2
\end{aligned}$$

où ces expressions pour α_1 et α_2 dépendent du fait que $r_0 \neq 0$. Ainsi, avec ces valeurs pour α_1 et α_2 , la suite $\{a_n\}$ avec $\alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$ satisfait les deux conditions initiales. Nous savons que $\{a_n\}$ et $\{\alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n\}$ sont deux solutions de la relation de récurrence $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ et les deux satisfont les conditions initiales lorsque

$n = 0$ et $n = 1$. Parce qu'il existe une solution unique d'une relation de récurrence homogène linéaire de degré deux avec deux conditions initiales il s'ensuit que :

$$a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n, \qquad \forall n \geqslant 0 .$$

□

Exemple 1.10. *Résoudre la relation de récurrence suivante :*

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n \qquad \textit{avec} \qquad a_0 = 5 \qquad \textit{et} \qquad a_1 = 6$$

.

On utilise le Théorème 1.3 pour résoudre ce problème, alors l'équation caractéristique est $r^2 - 6r + 9 = 0$ *. Elle admet pour solution double le réel* 3 *.*
Par conséquent :

$$a_n = (\alpha_1 + \alpha_2 n)3^n , \qquad \forall n \in \mathbb{N} .$$

En remplaçant n *par 0 puis par 1, nous obtenons le système suivant :*

$$\begin{cases} \alpha_1 = 5 \\ 3(\alpha_1 + \alpha_2) = 6 \end{cases} .$$

Donc : $\alpha_1 = 5$ *et* $\alpha_2 = -3$*.*
Conclusion : $a_n = 3^n(-3n + 5)$ *,* $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ *.*

1.2.1.2 Cas général

On va donner maintenant le résultat général de la solution de la relation de récurrence linéaire homogène avec des coefficients constants dont l'ordre peut être plus grand que 2 [10].

Théorème 1.4. *Soit $c_1, c_2, \ldots, c_k$ des nombres réels. Supposons que l'équation caractéristique :*

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0$$

a k racines distinctes $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Alors une suite $\{a_n\}$ est une solution de la relation de récurrence :

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \tag{1.1}$$

si et seulement si :

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + \alpha_k r_k^n$$

pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont des constantes.

Exemple 1.11. *Trouver la solution de la relation de récurrence suivante :*
$a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$ *avec* $a_0 = 7, a_1 = -4,$ *et* $a_2 = 8$.

Il s'agit d'une relation de récurrence d'ordre trois. L'équation caractéristique est $r^3 - 2r^2 - 5r + 6 = 0$. Par le test des racines rationnels , les racines rationnelles possibles sont $\pm 1, \pm 2, \pm 3. \pm 6$. Nous constatons que $r = 1$ est une racine. Diviser $r - 1$ en $r^3 - 2r^2 - 5r + 6$, nous trouvons que $r^3 - 2r^2 - 5r + 6 = (r - 1)\left(r^2 - r - 6\right)$. Par inspection nous factorisons le reste nous obtenons $r^3 - 2r^2 - 5r + 6 = (r - 1)(r - 3)(r + 2)$, d'où les racines sont 1, 3, et -2, donc la solution générale est $a_n = \alpha_1 1^n + \alpha_2 3^n + \alpha_3(-2)^n$, ou plus simplement $a_n = \alpha_1 + \alpha_2 3^n + \alpha_3(-2)^n$. Pour trouver ces coefficients, nous utilisons les conditions initiales :

$$\begin{aligned} 7 &= a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ -4 &= a_1 = \alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 \\ 8 &= a_2 = \alpha_1 + 9\alpha_2 + 4\alpha_3. \end{aligned}$$

Résolvant ce système d'équations, nous obtenons $\alpha_1 = 5, \alpha_2 = -1,$ et $\alpha_3 = 3$. Par conséquent, la solution spécifique est $a_n = 5 - 3^n + 3(-2)^n$, $\quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Nous énonçons maintenant un résultat plus général où les racines de l' equation caractéristique peuvent être multiples.

Théorème 1.5. *Soit $c_1, c_2, \ldots, c_k$ des nombres réels. Supposons que l'équation caractéristique :*

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0$$

a t racines distinctes $r_1, r_2, \ldots, r_t$ avec des multiplicités $m_1, m_2, \ldots, m_t$ respectivement ou $m_i \geq 1$ pour $i = 1, 2, \ldots, t$ et $m_1 + m_2 + \cdots + m_t = k$. Alors une suite $\{a_n\}$ est une solution de la relation de récurrence (1.1) si seulement si :

$$\begin{aligned} a_n = &\left(\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + \cdots + \alpha_{1,m_1-1} n^{m_1-1}\right) r_1^n \\ &+ \left(\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} n + \cdots + \alpha_{2,m_2-1} n^{m_2-1}\right) r_2^n \\ &+ \cdots + \left(\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1} n + \cdots + \alpha_{t,m_t-1} n^{m_t-1}\right) r_t^n \end{aligned}$$

pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, où $\alpha_{i,j}$ sont des constantes pour $1 \leq i \leq t$ et $0 \leq j \leq m_i - 1$.

Exemple 1.12. *Trouver la solution de la relation de récurrence suivante :*
$a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$ *avec* $a_0 = 5, a_1 = -9,$ *et* $a_2 = 15$.

Il s'agit d'une relation de récurrence du troisième ordre. L'équation caractéristique est $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$. Nous pouvons facilement reconnaître ce polynôme comme $(r+1)^3$. D'où la seule racine est -1, avec la multiplicité 3, de sorte que la solution générale est (par Théorème 1.5) $a_n = \alpha_1(-1)^n + \alpha_2 n(-1)^n + \alpha_3 n^2(-1)^n$. Pour trouver ces coefficients, nous utilisons les conditions initiales :

$$\begin{aligned} 5 &= a_0 = \alpha_1 \\ -9 &= a_1 = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \\ 15 &= a_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3. \end{aligned}$$

Résolvant ce système d'équations, nous obtenons $\alpha_1 = 5, \alpha_2 = 3,$ et $\alpha_3 = 1$. Par conséquent, la réponse est $a_n = 5(-1)^n + 3n(-1)^n + n^2(-1)^n$. Nous pourrions aussi écrire ceci sous forme factorisée, bien sûr, comme $a_n = (n^2 + 3n + 5)(-1)^n\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.13. *Résoudre l'équation suivante :*

$$a_{n+3} - 7a_{n+2} + 16a_{n+1} - 12a_n, \forall n \geq 3 \text{ avec } a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2.$$

L'équation caractéristique de cette relation est :

$$r^3 - 7r^2 + 16r - 12 = 0 \, .$$

Les racines de cette équation sont :

$$\begin{aligned} r_1 &= 3; \ \textit{racine simple, et} \\ r_2 &= 2; \ \textit{racine double.} \end{aligned}$$

Par conséquent, la solution générale :

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + (\alpha_2 + \alpha_3 n)\, r_2^n$$

Autrement dit :

$$a_n = \alpha_1 3^n + (\alpha_2 + \alpha_3 n)\, 2^n.$$

Les constantes α_1 et α_2 et α_3 sont déterminées par les conditions initiales comme suit :

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ a_1 &= \alpha_1 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 1 \\ a_2 &= 9\alpha_1 + 4\alpha_2 + 8\alpha_1 3 = 2. \end{aligned}$$

En résolvant ce système à trois équations et trois inconnues, on obtient :

$$\alpha_1 = -2 \qquad , \qquad \alpha_2 = 2 \qquad , \qquad \alpha_3 = 3/2$$

La solution finale est alors

$$a_n = -2.3^n + 2^{n+1} + 3n2^{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \, .$$

On présente dans la suite un exemple d'un système de trois relations de récurrence à trois suites récurrentes .

Exemple 1.14. *Résoudre le système suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 = 1 \\ q_0 = 1 \\ r_0 = 1 \end{array} \right. \ \textit{et} \left\{ \begin{array}{l} p_n = 3p_{n-1} + q_{n-1} \\ q_n = r_{n-1} - 3p_{n-1} \\ r_n = p_{n-1} \end{array} \right. \ \textit{pour}\, n \geq 1$$

Ce système est de 3 suites récurrentes croisées. En commençant par chercher l'équation de récurrence qui gouverne p_n On a :

$$\begin{aligned} p_n &= 3p_{n-1} + q_{n-1} \\ &= 3p_{n-1} + (r_{n-2} - 3p_{n-2}) \\ &= 3p_{n-1} + p_{n-3} + 3p_{n-2}. \end{aligned}$$

Donc :

$$p_n = 3p_{n-1} + p_{n-3} + 3p_{n-2}.$$

L'équation caractéristique est : $r^3 - 3r^2 - 3r + 1 = 0$ *admet une seule racine (triple)* $r = 1$ *donc :*

$$p_n = An^2 + Bn + C,$$

où A, B, C *des constantes réelles. Comme* $p_0 = 0$, $p_1 = 1$ *et* $p_2 = 3$ *on trouve :* $A = \frac{1}{2}$ *et* $B = \frac{1}{2}$ *et* $C = 0$ *donc* $p_n = \frac{n(n+1)}{2}$ *on déduit* $q_n = 1 - n^2$ *et* $r_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

1.3 Cas linéaire non homogène avec coefficients constants

Cette section sera consacrée au cas non homogène [10].

Définition 1.3. *Une relation de récurrence linéaire non homogène à coefficients constants, est une relation de récurrence de la forme :*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$$

où $c_1, c_2, \ldots, c_k$ *sont des nombres réels et* $F(n)$ *est une fonction non identiquement nulle dépend seulement de* n. *La relation de récurrence :*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

s'appelle la relation de récurrence homogène associée. Elle joue un rôle important dans la résolution de la relation de récurrence non homogène.

Exemple 1.15.

1) $a_n = 2a_{n-1} + 5^n$ *cette relation est non homogène avec* $F(n) = 5^n$ *et la relation homogène associée est* $a_n = 2a_{n-1}$.
2) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^3$ *cette relation est non homogène avec* $F(n) = n^3$ *et la relation associée est* $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.
3) $a_n = 9 + a_{n-1} + 2a_{n-1} + (n+2)!$ *cette relation est non homogène avec* $F(n) = 9 + (n+2)!$ *et la relation homogène associée est* $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-1}$.

Théorème 1.6. *Si* $\left\{a_n^{(p)}\right\}$ *est une solution particulière de la relation de récurrence linéaire non homogène avec coefficients constants :*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n).$$

Alors chaque solution est de la forme $\left\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\right\}$ *où* $\left\{a_n^{(h)}\right\}$ *est une solution de la relation homogène associée.*

Preuve :

Parce que $\left\{a_n^{(p)}\right\}$ est une solution particulière de la relation de récurrence non homogène, on a :

$$a_n^{(p)} = c_1 a_{n-1}^{(p)} + c_2 a_{n-2}^{(p)} + \cdots + c_k a_{n-k}^{(p)} + F(n).$$

On suppose que $\{b_n\}$ est une deuxième solution de la relation récurrente non homogène donc :

$$b_n = c_1 b_{n-1} + c_2 b_{n-2} + \cdots + c_k b_{n-k} + F(n).$$

Par soustraction, on obtient :

$$b_n - a_n^{(p)} = c_1 \left(b_{n-1} - a_{n-1}^{(p)}\right) + c_2 \left(b_{n-2} - a_{n-2}^{(p)}\right) + \cdots + c_k \left(b_{n-k} - a_{n-k}^{(p)}\right).$$

Il s'ensuit que $\{b_n - a_n^p\}$ est une solution de la récurrence linéaire homogène associée , disons $\left\{a_n^{(h)}\right\}$. Par conséquent, $b_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

□

Le Théorème 1.6 nous dit que la solution générale de la relation de récurrence linéaire non homogène peut être trouvée en trouvant une solution particulière de cette relation de récurrence et en l'ajoutant à la solution générale de la relation de récurrence homogène correspondante. Si on laisse $a_n^{(p)}$ la solution particulière à la relation de récurrence non homogène et $a_n^{(h)}$ la solution générale à la relation de récurrence homogène (qui aura des paramètres non spécifiés $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$), alors la solution générale à la relation de récurrence non homogène est $a_n^{(p)} + a_n^{(h)}$ (elle aura donc aussi des paramètres non spécifiée$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$).

Exemple 1.16. *Considérons la relation de récurrence linéaire non homogène :*

$$a_n = 3a_{n-1} + 2^n .$$

1) *Montrer que* $a_n = -2^{n+1}$ *est une solution de cette relation récurrence .*

2) *Utilisez le Théorème 1.6 pour trouver toutes les solutions de cette relation de récurrence.*

3) *Trouver la solution avec* $a_0 = 1$.

1) *Pour montrer que* $a_n = -2^{n+1}$ *est une solution à* $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$ *, nous la substituons simplement dans le côté droit nous obtenons :*

$$3a_{n-1} + 2^n = 3\left(-2^n\right) + 2^n = 2^n(-3+1) = -2^{n+1}$$

qui est précisément le côté gauche.

2) *Selon le Théorème 1.6 et les commentaires ci-dessus* $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$*, nous devons trouver la solution générale au problème homogène correspondant :* $a_n = 3a_{n-1}\cdot$*. Ceci est facilement trouvé comme* $a_n^{(h)} = \alpha 3^n$ *(soit par la méthode itérative ou par la méthode de la section présidente avec une équation caractéristique linéaire). Les assembler comme discuté ci-dessus, nous trouvons la solution générale à la relation de récurrence donnée :* $a_n = \alpha 3^n - 2^{n+1}$ *.*

3) *Pour trouver la solution avec* $a_0 = 1$ *, nous devons intégrer cette condition initiale (où* $n = 0$*) à notre réponse.à la partie 2). Cela donne l'équation* $1 = \alpha - 2$ *, d'où* $\alpha = 3$ *. Par conséquent, la solution à la relation de récurrence et la condition initiale est* $a_n = 3 \cdot 3^n - 2^{n+1} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$ *.*

Par le Théorème 1.6, nous voyons que la résolution des relations de récurrence non homogènes avec coefficients constants, c'est trouver une solution particulière. Alors chaque solution est la somme de cette solution et une solution de la relation de récurrence homogène associée. Bien qu'il n'y ou pas une méthode général pour trouver une telle solution qui fonctionne pour chaque fonction $F(n)$, il existe des techniques qui fonctionnent pour certains types de fonctions $F(n)$, tels que les polynômes et les puissances des constantes.

Théorème 1.7. *Supposons que $\{a_n\}$ vérifie la relation de récurrence non homogène linéaire :*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)\ .$$

où $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sont des nombres réels, et

$$F(n) = \left(b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \cdots + b_1 n + b_0\right) s^n$$

où $b_0, b_1, \ldots, b_t$ et s sont des nombres réels. Quand s n'est pas une racine de l'équation caractéristique de la relation de récurrence homogène linéaire associée, il existe une solution particulière de la forme suivante :

$$\left(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_1 n + p_0\right) s^n\ .$$

Lorsque s est une racine de cette équation caractéristique et que sa multiplicité est m, il existe une solution particulière de la forme :

$$n^m \left(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_1 n + p_0\right) s^n\ .$$

Exemple 1.17. *Quelle est la forme générale de la solution particulière garantie d'exister par le Théorème 1.7 de la relation de récurrence non homogène linéaire :*
$a_n = 8a_{n-2} - 16a_{n-4} + F(n)$ *si*

a) $F(n) = n^3$?

b) $F(n) = n2^n$?

c) $F(n) = (n^2 - 2)(-2)^n$?

Nous devons utiliser le Théorème 1.7, et donc nous devons trouver les racines du polynôme caractéristique de la relation de récurrence homogène. L'équation caractéristique est $r^4 - 8r^2 + 16 = 0$ et $r = \pm 2$ sont les seules racines, chacune avec une multiplicité 2.

a) Puisque 1 n'est pas une racine du polynôme caractéristique de la relation de récurrence homogène associée, le Théorème 1.7 nous dit que la solution particulière sera de la forme $p_3 n^3 + p_2 n^2 + p_1 n + p_0$. Notez que ici $s = 1$, dans la notation du Théorème 1.7.

b) Puisque 2 est une racine de multiplicité 2 du polynôme caractéristique de récurrence homogène associée, le Théorème 1.7 nous dit que la solution particulière sera de la forme $n^2 (p_1 n + p_0) 2^n$.

c) Puisque -2 est une racine de multiplicité 2 du polynôme caractéristique de récurrence homogène associée, le Théorème 1.7 nous dit que la solution particulière sera de la forme

$n^2\left(p_2n^2+p_1n+p_0\right)(-2)^n$. *Notez que nous avions besoin d'un polynôme du second degré dans l'expression entre parenthèses, car le polynôme dans* $F(n)$ *était du deuxième degré.*

Exemple 1.18. *Trouver toutes les solutions de la relation de récurrence :*

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n. \tag{1.2}$$

La relation de récurrence homogène associée est $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$. *L'équation caractéristique est :* $r^2 - 5r + 6 = 0$ *, donc* $r = 2$ *et* $r = 3$ *sont ses solutions.*
D'après le Théorème 1.7 $F(n) = F_1(n) + F_2(n)$ *telle que* $F_1(n) = 2^n$ *et* $F_2(n) = 3n$ *et de plus* $s = 2$ *est une racine de l'équation caractéristique donc* $a_n^{(p1)} = cn \cdot 2^n$
et $s = 1$ *n'est pas une racine de l'équation caractéristique alors* $a_n^{(p2)} = dn + e$ *d'où* $a_n^{(p)} = a_n^{(p1)} + a_n^{(p2)}$ *est une suite de la forme :*

$$a_n^{(p)} = cn \cdot 2^n + dn + e$$

On remplace $a_n^{(p)} = cn \cdot 2^n + dn + e$ *dans (1.1) on obtient :*

$$cn\cdot 2^n+dn+e = 5c(n-1)\cdot 2^{n-1}+5d(n-1)+5e-6c(n-2)\cdot 2^{n-2}-6d(n-2)-6e+2^n+3n$$

Pour que l'équation soit vraie, les parties exponentielles doivent être égales et les parties polynomiales doivent être égales. Donc nous avons :
$c\cdot 2^n = 5c(n-1)\cdot 2^{n-1}-6c(n-2)\cdot 2^{n-2}+2^n$ *et* $dn+e = 5d(n-1)+5e-6d(n-2)-6e+3n$.
Pour résoudre la première de ces équations, on divise par 2^{n-1} *en obtenant :*
$2c = 5c(n-1) - 3c(n-2) + 2$, *d'où un peu d'algèbre donne* $c = -2$. *Pour résoudre la deuxième équation, notons que les coefficients de* n *ainsi que les termes constants doivent être égaux de chaque côté, nous avons donc que* $d = 5d - 6d + 3$ *et*
$e = -5d + 5e + 12d - 6e$.
Ceci nous dit que $d = 3/2$ *et* $e = 21/4$. *La solution particulière que nous recherchons est donc la suivante :* $a_n^{(p)} = -2n \cdot 2^n + 3n/2 + 21/4$.
La solution générale est donc la somme de la solution homogène et de la solution particulière, à savoir :

$$a_n = \alpha 2^n + \beta 3^n - 2n \cdot 2^n + 3n/2 + 21/4 = \alpha 2^n + \beta 3^n - n \cdot 2^{n+1} + 3n/2 + 21/4$$

.

La résolution de ce type de relation récurrentes ressemble à la résolution des équations différentielles linéaires ordinaires. Les tableaux A et B nous présente cette ressemblance dans les cas homogène d'ordre 2 .

TABLEAU A : Équations Différentielles	
problème $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$	solution
l'équation caractéristique de cette E.D.O : $ar^2 + br + c_2 = 0$ admet deux racines réels r_1 et r_2	$y(x) = \alpha_1 e^{r_1 x} + \alpha_2 e^{r_2 x}$
l'équation caractéristique de cette E.D.O : $ar^2 + br + c_2 = 0$ admet une racine double r_0	$y(x) = (\alpha_1 + \alpha_2 x)\, e^{r_0 x}$
l'équation caractéristique de cette E.D,O : $ar^2 + br + c_2 = 0$ admet deux racines complexes $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$	$y(x) = e^{\alpha}\left(\alpha_1 \cos \beta x + \alpha_2 \sin \beta x\right)$

TABLEAU B : Relation de Récurrence	
problème $aa_n + ba_{n-1} + ca_{n-2} = 0$	solution
L'équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ admet deux racines réels r_1 et r_2	$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$
L'équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ admet une racine double r_0	$a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$
L'équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ admet deux racines complexes $r_1 = re^{i\theta}$ et $r_2 = re^{-i\theta}$	$a_n = \alpha_1 r^n \cos(n\theta) + \alpha_2 r^n \sin(n\theta)$

A l'exception des relations récurrence linéaires à coefficients constants il n'existe pas de méthodes systématiques pour résoudre les autres. L'idéal est d'arriver à l'aide des transformations sur la relation à résoudre à une autre équivalente dont on peut la résoudre.

Exemple 1.19. *Soit* $\sqrt{a_n} = \sqrt{a_{n-1}} + 2\sqrt{a_{n-2}} \qquad n > 1$ *avec* $a_0 = a_1 = 1$.

1) *Ramener cette relation à une relation linéaire.*
2) *Résoudre la relation linéaire*
3) *En déduire la solution de la relation initiale.*

On remarque que la relation donnée n'est pas linéaire.

1) *On pose* $b_n = \sqrt{a_n}$ *ce qui donne :*

$$b_n - b_{n-1} - 2b_{n-2} = 0,$$

Avec conditions initiales :

$$b_0 = b_1 = 1\ .$$

2) *L'équation caractéristique est* $r^2 - r - 2 = 0$*; ses racines sont* -1 *et* 2*. La solution générale est* $b_n = a(-1)^n + b2^n$*.*
   Les conditions initiales donnent $a + b = 1$ *et* $-a + 2b = 1$*et donc* $b = 2/3$ *et* $a = 1/3$ *et donc :*
$$b_n = 1/3(-1)^n + 2/3 \cdot 2^n \ .$$

3) *Comme* $a^n = b_n^2$ *alors :*
$$a_n = (1/3(-1)^n + 2/3 \cdot 2^n)^2 \qquad \forall n \geqslant 0 \ .$$

Exemple 1.20.
$$a_n = -2na_{n-1} + 3n(n-1)a_{n-2} \quad n > 1$$
$$a_0 = 1, \ \ a_1 = 2.$$

Dans cet exemple la relation est linéaire mais les coefficients ne sont pas constants. En posant $b_n = a_n/n!$ *, on obtient :*
$$b_n = -2b_{n-1} + 3b_{n-2}, \qquad n > 1.$$
$$b_0 = 1, b_1 = 2$$

d'équation caractéristique $r^2 + 2r - 3 = (r-1)(r+3) = 0$*. On obtient :*
$$b_n = -\frac{1}{4}(-3)^n + \frac{5}{4}.$$

et par la suite :
$$a_n = \frac{1}{4}\left[5 - (-3)^n\right] n!.$$

Chapitre 2

Fonctions génératrices- Opérateur D'avancement

Dans ce chapitre on présente deux autres méthodes de résolution pour les relations de récurrences linéaires non homogène avec des coefficients constants. La première consiste à utiliser les fonctions génératrice. La deuxième méthode consiste à transformer la relation non homogène à une autre qui est homogène en utilisant un opérateur appelé opérateur d'avancement. D'abord on comonce par donner certains notions et propriété qui concert les fonctions génératrices [8] et [10].

2.1 Fonctions génératrices

On commence par donner certaines notions et propriétés qui concernent les fonctions génératrices.

Définition 2.1. *La fonction génératrice de la suite $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$ des nombres réels est la série infinie :*

$$G(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Exemple 2.1. *Trouver la fonction génératrice pour la suite finie 2, 2, 2, 2, 2, 2.*

Par définition, nous avons la fonction $f(x) = 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 = 2\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right)$, nous voyons que l'expression entre parenthèses peut également être écrite sous la forme $\left(x^6 - 1\right)/(x - 1)$. Ainsi on peut écrire la réponse sous la forme $\left(x^6 - 1\right)/(x - 1)$.

Exemple 2.2. *Les fonctions génératrices pour les suites $\{a_k\}$ avec $a_k = 7, a_k = k + 2$, et $a_k = 3^k$ sont $\sum_{k=0}^{\infty} 7x^k$, $\sum_{k=0}^{\infty}(k + 2)x^k$, et $\sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k$, respectivement.*

Théorème 2.1. *Soit* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *et* $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ *alors :*

$$f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k \quad \textit{et} \quad f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) x^k$$

Exemple 2.3. *Soit la fonction génératrice* $f(x) = 2(1/(1-x)^2)$*. Donner une formule pour la suite qu'elle détermine.*

On sait que :

$1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$.

Donc :

$$(1/(1-x))^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} 1 \right) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k.$$

Alors :

$$2(1/(1-x)^2) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} 1 \right) x^k = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k.$$

Remarque :

On rappelle que si $n, k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$, alors :

$$C(n,k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \, .$$

Définition 2.2. *Soit* u *un nombre réel et* k *un entier positif, le coefficient binomial étendu* $\begin{pmatrix} u \\ k \end{pmatrix}$ *est défini par :*

$$\begin{pmatrix} u \\ k \end{pmatrix} = \begin{cases} u(u-1)\cdots(u-k+1)/k! & \textit{si } k > 0 \\ 1 & \textit{si } k = 0 \end{cases}$$

Exemple 2.4. *Trouver les valeurs des coefficients binomiaux étendus* $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 5/2 \\ 3 \end{pmatrix}$*.*

Prenant $u = -1$ *et* $k = 3$ *dans la définition 2.2 nous donne :*

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)(-4)(-3)}{3!} = -2 \, .$$

De même, en prenant $u = 5/2$ et $k = 3$ nous donne :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 5/2 \\ 3 \end{pmatrix} &= \frac{(5/2)(5/2-1)(5/2-2)}{3!} \\ &= (1/2)(3/2)(1/2)/6 \\ &= 5/16.\end{aligned}$$

Théorème 2.2. *Théorème Binomial Étendu Soit x un nombre réel avec $|x| < 1$, k un entier positive, u un nombre réel alors :*

$$(1+x)^u = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} u \\ k \end{pmatrix} x^k \ .$$

Exemple 2.5. *Trouver les fonctions génératrices pour $(1+x)^{-u}$ et $(1-x)^{-u}$ où u est un entier positif, en utilisant le théorème binomial étendu.*

Selon le Théorème binomial étendu 2.2, il s'ensuit que
$(1+x)^{-u} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -u \\ k \end{pmatrix} x^k.$

D'après la Définition 2.2 on a :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} -u \\ r \end{pmatrix} &= \frac{(-u)(-u-1)\cdots(-u-r+1)}{r!} \\ &= \frac{(-1)^r u(u+1)\cdots(u+r-1)}{r!} \\ &= \frac{(-1)^r (u+r-1)(u+r-2)\cdots u}{r!} \\ &= \frac{(-1)^r (u+r-1)!}{r!(u-1)!} \\ &= (-1)^r \begin{pmatrix} u+r-1 \\ r \end{pmatrix} \\ &= (-1)^r C(u+r-1, r).\end{aligned}$$

Alors $\begin{pmatrix} -u \\ k \end{pmatrix} = (-1)^r C(u+r-1, r) = (-1)^r C(u+r-1, r)$ *et on obtient :*

$$(1+x)^{-u} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k C(u+k-1, k) x^k \ .$$

En remplaçant x par $-x$, on trouve que :

$$(1-x)^{-u} = \sum_{k=1}^{\infty} C(u+k-1, k) x^k \ .$$

Tableau 1 : Fonctions génératrices utiles

$G(x)$	a_k
$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{N} C(n,k)x^k = 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + x^n$	$C(n,k)$
$(1+ax)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^k x^k = 1 + C(n,1)ax + C(n,2)a^2x^2 + \cdots + a^n x^n$	$C(n,k)a^k$
$(1+x^r)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{rk} = 1 + C(n,1)x^r + C(n,2)x^{2r} + \cdots + x^{rn}$	$C(n,k)$ si $k \leqslant n$; 0 autrement
$\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$	1 si $k \leq n$; 0 autrement
$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots$	1
$\dfrac{1}{1-ax} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k = 1 + ax + a^2x^2 + \cdots$	a_k
$\dfrac{1}{1-x^r} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{rk} = 1 + x^r + x^{2r} + \cdots$	1
$\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$	$k+1$
$\dfrac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)x^k = 1 + C(n,1)x + C(n+1,2)x^2 + \cdots$	$C(n+k-1,k) = C(n+k-1,n-1)$
$\dfrac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)(-1)^k x^k = 1 - C(n,1)x + C(n+1,2)x^2 - \cdots$	$(-1)^k C(n+k-1,k) = (-1)^k C(n+k-1,n-1)$
$\dfrac{1}{(1-ax)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)a^k x^k = 1 + C(n,1)ax + C(n+1,2)a^2x^2 + \cdots$	$C(n+k-1,k)a^k = C(n+k-1,n-1)a^k$
$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$	$1/k!$
$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots$	$(-1)^{k+1}/k$

Exemple 2.6. *Trouver une formule fermée pour la fonction génératrice de la suite $\{a_n\}$, où*

1) $a_n = 5$ *pour tout* $n = 0, 1, 2, \ldots$
2) $a_n = 3^n$ *pour tout* $n = 0, 1, 2, \ldots$
3) $a_n = 2$ *pour tout* $n = 3, 4, 5, \ldots$ *et* $a_0 = a_1 = a_2 = 0$
4) $a_n = 2n + 3$ *pour tout* $n = 0, 1, 2, \ldots$
5) $a_n = \begin{pmatrix} 8 \\ n \end{pmatrix}$ *pour tout* $n = 0, 1, 2, \ldots$
6) $a_n = \begin{pmatrix} n+4 \\ n \end{pmatrix}$ *pour tout* $n = 0, 1, 2, \ldots$

Pour trouver les solutions on utilise le Tableau 1 :

1) *Comme la suite $a_n = 1$ pour tout n a la fonction génératrice $1/(1-x)$, cette suite a comme fonction génératrice $5/(1-x)$.*
2) *Du Tableau 1 la réponse est $1/(1-3x)$.*
3) *On peut soustraire les termes manquants et écrire cette fonction génératrice sous la forme $(2/(1-x)) - 2 - 2x - 2x^2$, où nous pouvons factoriser x^3 et l'écrire $2x^3/(1-x)$.*
4) *Nous devons scinder cela en deux parties. Puisque nous savons que la fonction génératrice de la suite $n+1$ est $1/(1-x)^2$, nous écrivons $2n+3 = 2(n+1)+1$. La fonction génératrice est donc $2/(1-x)^2 + 1/(1-x)$. Nous pouvons combiner des termes et écrire cette fonction sous la forme $(3-x)/(1-x)^2$.*
5) *Du Tableau 1 , la réponse est $(1+x)^8$. Notez que $C(8,n) = 0$ par définition pour tout $n > 8$.*
6) *Selon Tableau 1, la fonction génératrice est $1/(1-x)^5$.*

2.1.1 Utilisation des fonctions génératrices pour résoudre les relations de récurrence

Nous pouvons trouver la solution à une relation de récurrence et ses conditions initiales en trouvant une formule pour la fonction génératrice associée.

Exemple 2.7. *Résoudre la relation de récurrence $a_k = 3a_{k-1}$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$ et la condition initial $a_0 = 2$.*

Soit $G(x)$ la fonction génératrice de la suite $\{a_k\}$.
Tout d'abord on remarque :

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

$$xG(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k.$$

On a :

$$a_k - 3a_{k-1} = 0$$

$$a_k x^k - 3a_{k-1} x^k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 3a_{k-1} x^k = 0$$

$$((a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k) - a_0) - \sum_{k=1}^{\infty} 3a_{k-1} x^k = 0$$

$$((2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k) - 2) - \sum_{k=1}^{\infty} 3a_{k-1} x^k = 0$$

$$G(x) - 2 - 3xG(x) = 0$$

$$G(x) - 3xG(x) = 2$$

$$G(x)(1 - 3x) = 2$$

$$G(x) = \frac{2}{1 - 3x}$$

$$G(x) = 2\frac{1}{1 - 3x} = 2\sum_{k=0}^{\infty}(3x)^k = 2\sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(2 \cdot 3^k) x^k.$$

Donc :

$$a_k = 2 \cdot 3^k \qquad k \geq 0.$$

Exemple 2.8. *Résoudre la relation de récurrence* $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$ *avec la condition initiale* $a_0 = 1$ *.*

Soit $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *est la fonction génératrice de la suite* $a_0, a_1, a_2, \ldots$*, On multiplie par* x^n *et on somme les deux côtés de la dernière équation commençant par* $n = 1$*, pour trouver que :*

$$\begin{aligned}
G(x)-1=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(8a_{n-1}x^n+10^{n-1}x^n\right)\\
&=8\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}10^{n-1}x^n\\
&=8x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1}+x\sum_{n=1}^{\infty}10^{n-1}x^{n-1}\\
&=8x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n+x\sum_{n=0}^{\infty}10^n x^n\\
&=8xG(x)+x/(1-10x).
\end{aligned}$$

Par la suite , on a :

$$G(x)-1=8xG(x)+x/(1-10x).$$

$$G(x)-8xG(x)=1+x/(1-10x).$$

$$G(x)(1-8x)=1+x/(1-10x).$$

Alors :

$$G(x)=\frac{1-9x}{(1-8x)(1-10x)}.$$

On pose :

$$\frac{1-9x}{(1-8x)(1-10x)}=\frac{A}{1-8x}+\frac{B}{(1-10x)}.$$

Par identification on obtient : $A=\frac{1}{2}$ *et* $B=\frac{1}{2}$.

$$G(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-8x}+\frac{1}{1-10x}\right).$$

Utilisons Tableau 1 on obtient :

$$\begin{aligned}
G(x)&=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}8^n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}10^n x^n\right)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(8^n+10^n\right)x^n.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons montré que :

$$a_n=\frac{1}{2}\left(8^n+10^n\right)\qquad n\geq 0.$$

Exemple 2.9. *Utiliser les fonctions génératrices pour résoudre la relation de récurrence* $a_k=5a_{k-1}-6a_{k-2}$ *avec les condition initiale* $a_0=6$ *et* $a_1=30$.

Soit $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$. *Alors* $xG(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{k-1}x^k$. *(En chan-*

geant de variable de k à $(k+1)$ et de manière similaire on a :
$x^2G(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2}x^k$ *. Ainsi :*

$$\begin{aligned} G(x) - 5xG(x) + 6x^2G(x) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 5a_{k-1}x^k + \sum_{k=2}^{\infty} 6a_{k-2}x^k \right) \\ &= a_0 + a_1x - 5a_0x + \sum_{k=2}^{\infty} (a_k - 5a_{k-1} + 6a_{k-2})x^k = 0. \end{aligned}$$

Donc :

$$a_0 + a_1x - 5a_0x + \left(\sum_{k=2}^{\infty} 0 \cdot x^k \right) = 6$$

en raison de la relation de récurrence donnée et des conditions initiales. Donc $G(x)\left(1 - 5x + 6x^2\right) = 6$ *, donc* $G(x) = 6/((1-3x)(1-2x))$ *. À ce stade, nous devons utiliser des fractions partielles :*

$$\frac{6}{(1-3x)(1-2x)} = \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{1-2x}.$$

En multipliant par le dénominateur commun et en égalisant les coefficients, on trouve que A = 18 et B = -12. Ainsi :

$$G(x) = \frac{18}{1-3x} + \frac{-12}{1-2x} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(18 \cdot 3^k - 12 \cdot 2^k\right) x^k.$$

(la dernière égalité provient de l'utilisation du tableau 1). Donc :

$$a_k = 18 \cdot 3^k - 12 \cdot 2^k, \qquad k \geqslant 0.$$

2.2 L'opérateur d'avancement

Rappelons qu'une relation récurrente linéaire non homogène à coefficients constants est telle que la fonction $F(n)$ n'est pas nulle. Autrement dit, elle est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} &c_0a_n + c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k} = F(n) \\ &a_0 = d_0, \ldots, a_k = d_k. \end{aligned}$$

Le principe de résolution, adopté dans cette section, consiste à éliminer d'abord la fonction $F(n)$, et ensuite résoudre la relation homogène [3], [8], Voyons ce procédé sur les exemples suivants.

Exemple 2.10. *Soit à résoudre la relation suivante :*

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 4. \tag{2.1}$$

Cette relation est aussi vraie pour n + 1, c'est-a-dire :

$$a_{n+3} - a_{n+2} - a_{n+1} = 4. \tag{2.2}$$

En soustrayant (2.1) de (2.2), on obtient la nouvelle équation suivante :

$$a_{n+3} - 2a_{n+2} + a_n = 0 .$$

Cette nouvelle équation est homogène. En appliquant la méthode de résolution décrite dans chapitre 1, on obtient la solution générale suivante :

$$a_n = c_1 + c_2(1+\sqrt{5})^n + c_3(1-\sqrt{5})^n.$$

Comme les conditions initiales ne sont pas données, les coefficients c_1, c_2 et c_3 ne peuvent pas être déterminés.

Définition 2.3. *Étant donnée une suite de nombres entiers, $F(n)$, l'opérateur d'avancement E est défini comme suit :*

$$\begin{aligned} &F(n) = c \text{ (une constante)} \Longrightarrow E(F(n)) = c \\ &F(n) \neq \text{ constante } \Longrightarrow E(F(n)) = F(n+1). \end{aligned}$$

Exemple 2.11.

$$\begin{aligned} &F(n) = 4 \Longrightarrow E(F(n)) = 4 \\ &F(n) = 4^n \Longrightarrow E(F(n)) = 4^{n+1}. \end{aligned}$$

D'autres opérateurs peuvent aussi être crées en combinant l'opérateur E à lui-même ou a des constantes. Pour ce faire, on définit pour la constante c l'opérateur de même nom c comme suit :

$$c(F(n)) = c \times F(n).$$

La multiplication et l'addition d'opérateurs sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} (E1 \times E2)F(n) &= E1(E2(F(n)) \\ (E1 + E2)F(n) &= E1(F(n)) + E2(F(n)). \end{aligned}$$

Exemple 2.12. *Illustrons l'application de ces opérateurs sur les fonctions suivantes :*

$$\begin{aligned} &(E-2)2^n = E\left(2^n\right) - 2\left(2^n\right) = 2^{n+1} - 2^{n+1} = 0 \\ &E(n+1) = n+2. \end{aligned}$$

Ainsi définies, il est facile de vérifier :

1) L'addition et la multiplication d'opérateurs sont commutatives :

$$(E1+E2)F(n)=(E2+E1)F(n)$$
$$(E1\times E2)F(n)=(E2\times E1)F(n).$$

2) L'addition et la multiplication d'opérateurs sont associatives :

$$((E1+E2)+E3)F(n)=(E1+(E2+E3))F(n)$$
$$(E1(E2\times E3))F(n)=((E1\times E2)E3)F(n).$$

L'intérêt de l'opérateur E réside dans sa capacité de rendre une équation non-homogène en une autre équation équivalente mais homogène, après un certain nombre de transformations. Voyons cela sur les exemples suivants.

Exemple 2.13. *Soit a résoudre l'équation suivante :*

$$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=n^2; \qquad \forall n\geq 2. \tag{2.3}$$

Appliquons l'opérateur E au terme n^2 comme suit :

$$\begin{aligned}
&E\left(n^2\right)=(n+1)^2=n^2+2n+1\\
&(E-1)\left(n^2\right)=E\left(n^2\right)-n^2=2n+1\\
&(E-1)(2n+1)=E(2n+1)-2n-1=2\\
&(E-1)(2)=E(2)-2=0.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Par conséquent, en appliquant l'expression $(E-1)^3$ aux deux membres de relation de récurrence (2.3), on obtient :

$$(E-1)^3\left(a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n\right)=(E-1)^3\left(n^2\right). \tag{2.5}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}
&(E-1)\left(a_{n+2}\right)=a_{n+3}-a_{n+2}\\
&(E-1)\left(a_{n+3}-a_{n+2}\right)=a_{n+4}-2a_{n+3}+a_{n+2}\\
&(E-1)\left(a_{n+4}-2a_{n+3}+a_{n+2}\right)=a_{n+5}-3a_{n+4}+3a_{n+3}+a_{n+2}.
\end{aligned}$$

Alors :

$$(E-1)^3\left(a_{n+2}\right)=a_{n+5}-3a_{n+4}+3a_{n+3}-a_{n+2}.$$

Donc :

$$(E-1)^3(-4a_{n+1}) = -4a_{n+4} + 12a_{n+3} - 12a_{n+2} - 4a_{n+1}.$$

D'une manière analogue on a :

$$(E-1)^3(4a_n) = 4a_{n+3} - 12a_{n+2} + 12a_{n+1} - 4a_n.$$

Développant l'équation (2.5), on obtient :

$$a_{n+5} - 7a_{n+4} + 19a_{n+3} - 25a_{n+2} + 16a_{n+1} - 4a_n = 0. \tag{2.6}$$

L'équation caractéristique de cette équation est :

$$r^5 - 7r^4 + 19r^3 - 25r^2 + 16r - 4 = 0. \tag{2.7}$$

qui peut encore s'écrire comme suit :

$$(r-1)^3(r-2)^2 = 0. \tag{2.8}$$

La solution finale est donc comme suit :

$$a_n = \left(c_0 + c_1 n + c_2 n^2\right)1^n + (c_3 + c_4 n)\,2^n, \qquad n \geqslant 0. \tag{2.9}$$

Le tableau ci-dessous résume l'expression à employer pour éliminer quelques fonctions $F(n)$ dans les relations non-homogènes. Dans le tableau qui suit, $P_k(n)$ et α représentent un polynôme en n de degré k et une valeur entière, respectivement.

Tableaux 2	
Fonction F(n)	éliminateur correspondant
$F(n) =$ constante	$(E-1)$
$F(n) = P_k(n)$	$(E-1)^{k+1}$
$F(n) = \alpha^n$	$(E-\alpha)$
$F(n) = \alpha^n P_k(n)$	$(E-\alpha)^{k+1}$

Remarque : Si E1 est l'annihilateur de F(n) alors les racines de l'équation caractéristique de

$$E1\left(c_k a_{n+k} + \cdots + c_0 a_n\right) = 0. \tag{2.10}$$

sont les valeurs qui annulent $E1$ et $c_k r^k + c_{k-1} r^{k-1} + \cdots + c_0$, Cela nous permet de ne pas développer l'équation (2.10), comme nous l'avons fait précédemment, et nous évite ainsi des calculs laborieux.

Exemple 2.14. *Résoudre l'équation suivante :*

$$\begin{aligned} &a_n = a_{n-1} + n2^n \\ &a_0 = 0. \end{aligned}$$

On utiliser le tableau 2 on a : $F(n) = n2^n$ *i.e .* $F(n) = \alpha^n P_k(n)$ *ou* $\alpha = 2$ *et* $P_k(n) = n$ *alors* $k = 1$ *donc on va utiliser l'éliminateur :* $(E-2)^{1+1}$ = $(E-2)^2$.
Par conséquent :

$$(E-2)^2(a_n - a_{n-1}) = 0.$$

L'équation caractéristique de cette relation est :

$$(r-2)^2(r-1) = 0.$$

La solution générale est :

$$a_n = \left(c_0 + c_1 n\right) 2^n + c_2.$$

Sachant que $a_1 = 2$ *et* $a_2 = 10$*, les valeurs de* c_0 *et* c_1 *sont :*

$$c_0 = -2, c_1 = 2, c_2 = 2.$$

La solution finale est donc comme suit :

$$a_n = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

Remarque :
On remarque que la méthode de résolution présentée dans le Chapitre 1 reste la plus pratique .

Chapitre 3

Suite de Fibonacci et le nombre d'Or

Dans ce chapitre on s'intéresse à la suite de Fibonacci et le nombre d'Or où, certaines de leurs propriétés et applications seront présentées ([3] , [4] , [7]) .

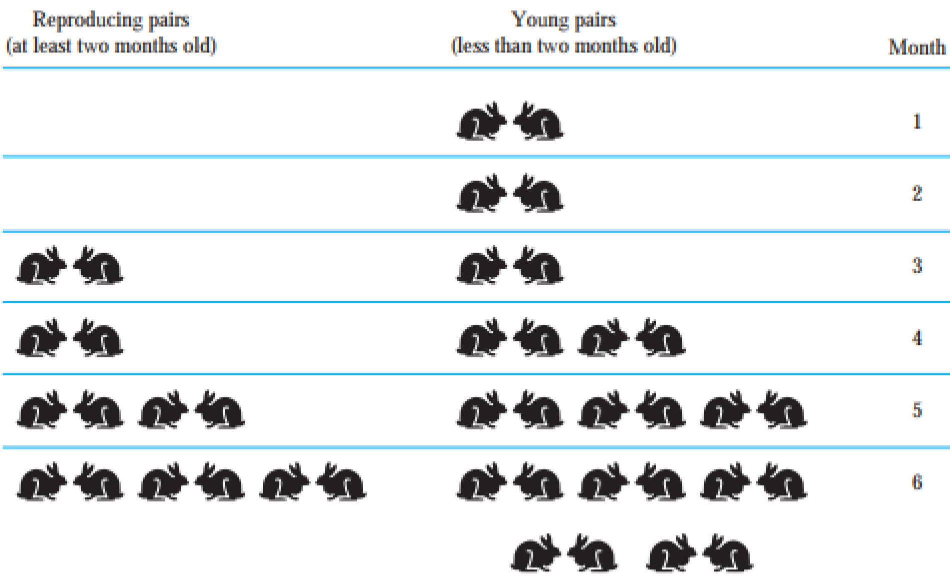
3.1 Suite de Fibonacci

Cette suite a été trouvée après l'expérience des lapins de Fibonacci suivante :

Exemple 3.1. ***Les lapins et les nombres de Fibonacci***. *Considérons ce problème posé à l'origine par Leonardo Pisano, également connu sous le nom de Fibonacci, au XIII ème siècle dans son livre Liber abaci. Une jeune paire de lapins (un de chaque sexe) est placé sur une île. Une paire de lapins ne se reproduit pas jusqu'à l'âge de* 2 *mois. À l'âge de 2 mois, chaque paire de lapins produit un autre chaque mois, comme illustré à la Figure* 3. *Trouvez une relation de récurrence pour le nombre de paires des lapins sur l'île après* n *mois, à supposer que les lapins sont immortels.*

Soit f_n *le nombre de paires de lapins après* n *mois. Nous allons montrer que* f_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *sont les termes de la suite de Fibonacci. La population de lapins peut être modélisée à l'aide d'une relation de récurrence. À la fin du premier mois, le nombre de paires de lapins sur l'île est* $f_1 = 1$. *Parce que cette paire ne se reproduisent au cours du deuxième mois,* $f_2 = 1$ *également. Pour trouver le nombre de paires après* n *mois, ajoutez le nombre sur l'île le mois précédent,* f_{n-1}, *et le nombre de paires de nouveau-nés, qui est égal à* f_{n-2}, *car chaque couple nouveau-né provient d'un couple âgé d'au moins 2 mois. En conséquence, la suite* f_n *vérifie la relation de récurrence suivante :*

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$



Month	Reproducing pairs	Young pairs	Total pairs
1	0	1	1
2	0	1	1
3	1	1	2
4	1	2	3
5	2	3	5
6	3	5	8

Figure : 3

pour $n \geqslant 3$ ainsi que les conditions initiale $f_0 = 1$ et $f_1 = 1$. Parce que cette relation de récurrence et les conditions initiales déterminent uniquement cette suite, le nombre de paires de lapins sur l'île après n mois est donné par le nième nombre de Fibonacci.

Lorsque le nombre total de lapins pour chaque mois est répertorié, l'un après l'autre, il génère la suite de nombres pour laquelle Fibonacci est célèbre :

$$0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 \ldots$$

Car par exemple :

- le troisième nombre, f_3, est égal à la somme de f_1 et de f_2 : $f_3 = 1 + 1 = 2$
- f_4 est égal à $f_2 + f_3$, donc $f_3 = 1 + 2 = 3$
- $f_5 = f_3 + f_4 = 2 + 3 = 5$
- $f_6 = f_4 + f_5 = 3 + 5 = 8$
- de la même façon, $f_7 = 13$, $f_8 = 21 \ldots$

3.1.1 Quelques propriétés de la suite de Fibonacci :

Nous présentons quelques-unes des très nombreuses propriétés de cette suite.

Proposition 3.1. *1) La somme de dix nombres de Fibonacci consécutifs résultera toujours en un nombre qui est divisible par onze.*

Par exemple :

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143 = 13 \cdot 11.$$

2) On a l'égalité suivante :

$$2 \cdot f_n - f_{n+1} = f_{n-2}.$$

Par exemple :

$$\begin{gathered} \ldots 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 \ldots \\ 2 \cdot f_6 - f_7 = (2 \cdot 8) - 13 = 16 - 13 = 3 = f_4 \\ 2 \cdot f_{11} - f_{12} = (2 \cdot 89) - 144 = 178 - 144 = 34 = f_9. \end{gathered}$$

Proposition 3.2. *La somme des n premiers nombres de Fibonacci est égale à :*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1. \tag{3.1}$$

Preuve :

On utilise la définition de suite de Fibonacci on obtient :

$$\begin{aligned} f_1 &= f_3 - f_2 \\ f_2 &= f_4 - f_3 \\ f_3 &= f_5 - f_4 \\ &\vdots \\ f_{n-1} &= f_{n+1} - f_{n+2} \\ f_n &= f_{n+2} - f_{n+1}. \end{aligned}$$

Nous additionnons maintenant ces équations on trouver :

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1} + f_n = f_{n+2} - f_2.$$

En rappelant que $f_2 = 1$, nous voyons que cette équation est équivalente à notre conjecture initiale de

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1} + f_n = f_{n+2} - 1.$$

□

Proposition 3.3. *La somme des termes impairs de la suite de Fibonacci :*

$$f_1 + f_3 + f_5 + \ldots f_{2n-1} = f_{2n} \tag{3.2}$$

Preuve :

En regardant à nouveau les termes individuels, nous voyons de la définition de la suite que :

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2 \\ f_3 &= f_4 - f_2 \\ f_5 &= f_6 - f_4 \\ &\vdots \\ f_{2n-1} &= f_{2n} - f_{2n-2} \end{aligned}$$

Si on additionné maintenant ces équations terme à terme, il nous reste le résultat requis d'en haut.

□

Proposition 3.4. *La somme des termes pairs de la suite de Fibonacci :*

$$f_2 + f_4 + f_6 + \ldots f_{2n} = f_{2n+1} - 1. \tag{3.3}$$

Preuve :

De la Proposition (3.2) , nous avons :

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1} + f_{2n} = f_{2n+2} - 1.$$

Nous soustrayons l'équation (3.2) de l'équation (3.1), nous obtenons :

$$f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+2} - 1 - f_{2n} = f_{2n+1} - 1.$$

□

Proposition 3.5. *Deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux.*

Preuve :
On démontre cette proposition par l'absurde.Admettons que deux termes consécutifs admettent un diviseur commun $d > 1$, alors par la relation de double récurrence de la suite, le terme précédent admet aussi d pour diviseur. En effet :

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\ d \times a &= d \times b + f_{n-1} \\ f_{n-1} &= d \times (a - b) \end{aligned}$$

En réitérant cette opération, on démontre que tous les termes précédents sont divisibles par d donc en particulier $f_2 = 1$. Or 1 n'est divisible que par lui-même. Donc d ne peut être que 1, et par suite, deux termes consécutifs sont premiers entre eux. □

Proposition 3.6. *f_p divise f_n si et seulement si p divise n.*

Ayant établi des relations pour diverses sommes de nombres de Fibonacci, nous allons maintenant considérer la somme des carrés des nombres de Fibonacci.
Ici nous verrons une autre relation étonnante qui continue à faire les nombres de Fibonacci spéciaux. Puisque nous parlons des "carrés", il convient de les regarder géométriquement .
Nous constatons que, en commençant par un carré de 1 x 1 (voir Figure : 4), nous pouvons générer une série de carrés dont les côtés sont des nombres de Fibonacci.
Nous pouvons continuer sur cette voie indéfiniment. Exprimons maintenant la surface de chaque rectangle en tant que somme de ses composants :

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 = 13 \cdot 21$$

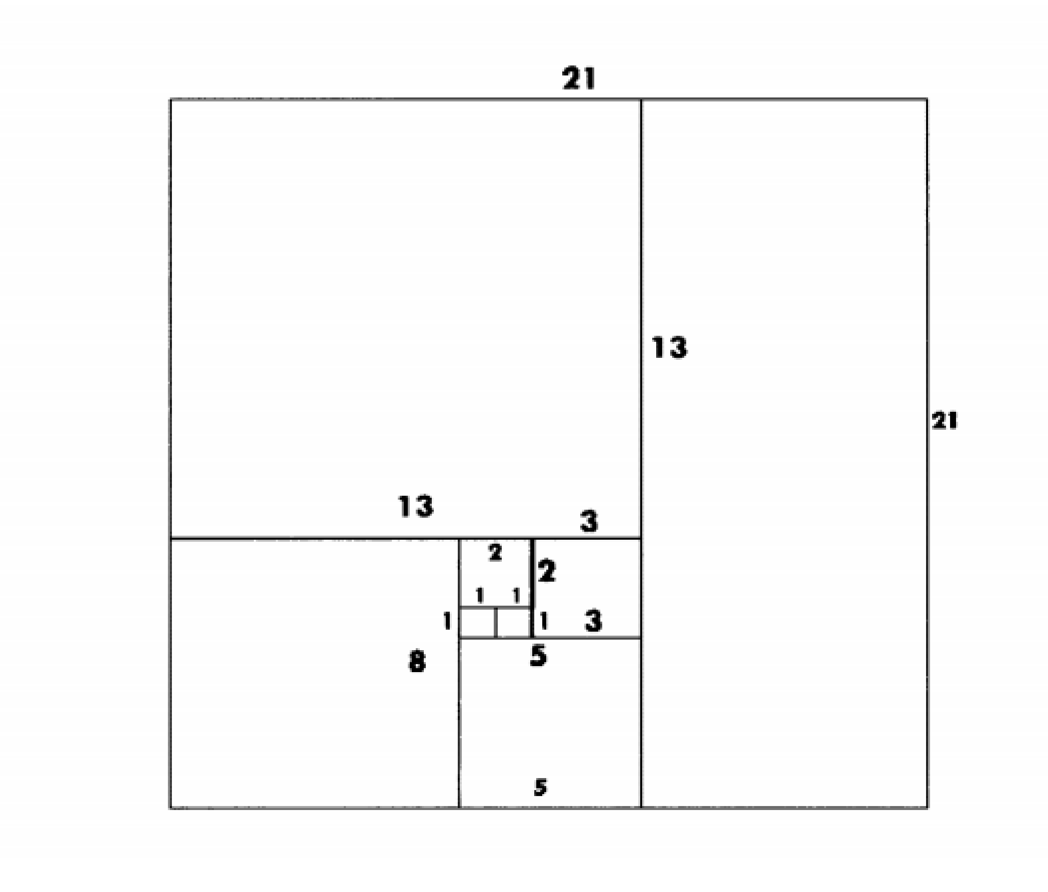


Figure : 4

Si on exprime la somme des carrés constituant Des petits rectangles, nous obtenons :

$$
\begin{gathered}
1^2 + 1^2 = 1 \cdot 2 \\
1^2 + 1^2 + 2^2 = 2 \cdot 3 \\
1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 3 \cdot 5 \\
1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 5 \cdot 8 \\
1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 = 8 \cdot 13 \\
1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 = 13 \cdot 21
\end{gathered}
$$

À partir de ce modèle, nous pouvons établir une règle : la somme des carrés des nombres de Fibonacci, jusqu'à un certain point de la suite est égale au produit du dernier nombre et le prochain numéro de la suite. C'est-à-dire si, par exemple, vous choisissez de trouver la somme des carrés de la portion suivante de la suite des nombres de Fibonacci : $1, 1, 2, 3, 5, 813, 21, 34$ on obtient :

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 + 21^2 + 34^2 = 1,870$$

D'où la formule générale :

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n f_{n+1} \,.$$

Cette formule peut être montrer par le principe de récurrence .

Proposition 3.7. *On a :*

1) $f_n \cdot f_{n+1} = f_n \pm 1.$
2) $f_n^2 - f_{n-2}^2 = f_{2n-2}.$

3.1.2 Applications de suite de Fibonacci

Les nombres de Fibonacci dans le monde végétal

Les nombres de Fibonacci apparaissent dans le monde végétal. Prenons comme exemple : l'ananas. On peut voir que les bractées hexagonales sur un ananas forment trois spirales de direction différentes. Dans les Figures 5.a , 5.b , 5.c , 5.d on remarque que dans les trois directions il y' a 5, 8 et 13 spirales. Ce sont trois nombres de Fibonacci consécutifs.

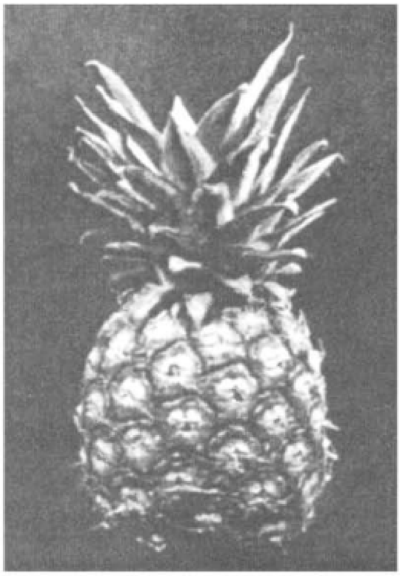
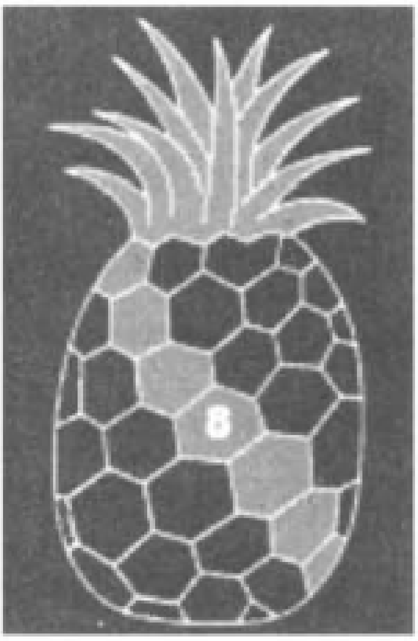


Figure : 5.a Figure : 5.b



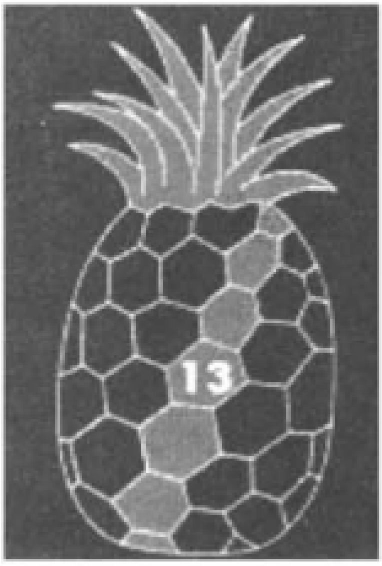


Figure : 5.d Figure : 5.c

Considérez le dessin d'un ananas (figure 6), où nous avons numéroté les hexagones. La numérotation a été faite par la règle suivante :

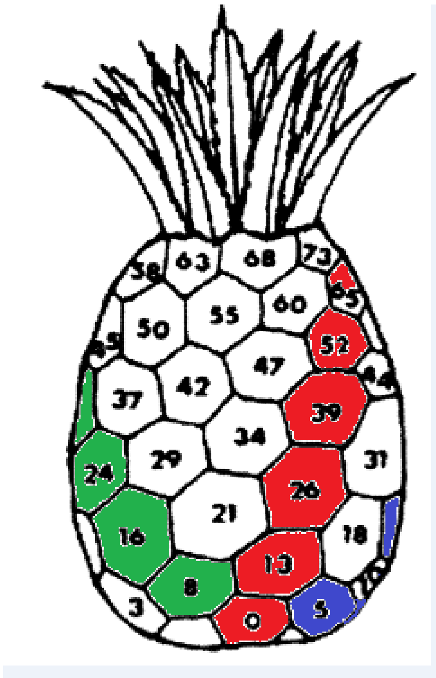


Figure : 6

l'hexagone le plus bas a été attribué le numéro 0, le prochain supérieur on obtient un 1 (souvenez-vous que cela continue le verso, non visible sur la photo), puis le prochain plus élevé est attribué le numéro 2, et ainsi de suite. Notez que l'hexagone 42 est légèrement plus haut que l'hexagone 37. Vous devrait être en mesure d'identifier trois distincts spirales : on aura les hexagones $0, 5, 10, \cdots$; le second aura des hexagones $0, 13, 26, 39, 52, \cdots$; et la troisième spirale inclurait hexagones $0, 8, 16, 24, \cdots$ Maintenant, Si on regarde la différence commune entre les numéros d'hexagones de chaque spirales et on trouve :5, 13 et 8 - encore une fois les nombres de Fibonacci.

La pomme de pin

Il existe différentes espèces de pommes de pin (l'épinette de Norvège ; Douglas sapin ou épinette ; mélèze). La plupart ont deux spirales de direction distinctes.

Les arrangements de spirales sont classés en fonction du nombre de spirales visibles (parastichies) qu'ils exposent. Le nombre de spirales dans chaque direction seront le plus souvent deux nombres de Fibonacci successifs.

Les deux images de la Figure 7 en témoignant.

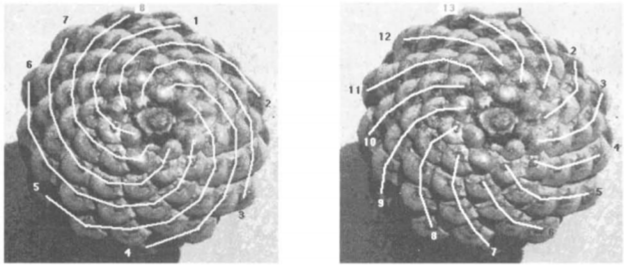


Figure : 7

Ces pommes de pin ont huit spirales dans une direction et treize dans l'autre direction. Encore une fois, vous remarquerez qu'il s'agit des nombres de Fibonacci :

Arbre (Espèce)	Nombre de spirales (Espèce) dans une direction	Nombre de spirales (Espèce) dans l'autre directions
Spruce de Norvège	13	8
Sapin de Douglas (épinette)	3	5
mélèze	5	3
pin	5	8

Les nombres de Fibonacci sont aussi présents le nombre spirales certains fleurs :

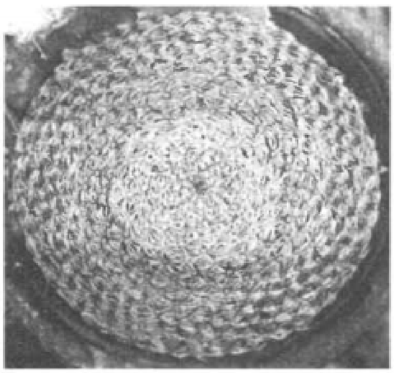


Figure :8.a Figure :8.b

Figure :8.c

Figure :8.d

Figure :8.e

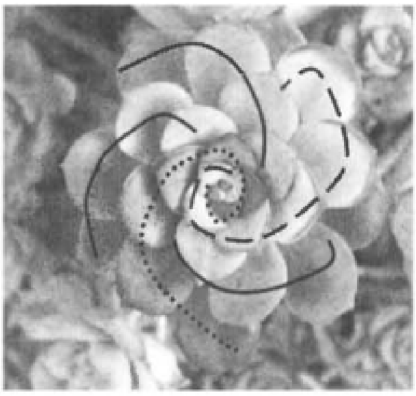


Figure :8.f

Figure :8.g

Figure 8.a : représente Mammilnria huitzilopochtli à 13 et 21 spirales .
Figure 8.b : représente Mammilnria Magnimamma à 8 et 13 spirales .
Figure 8.c : représente Marguerite à 21 ans et 34 spirales .
Figure 8.d : représente Gymnocalcium izozogsii à deux fois 5 et 8 spirales (i.e. 10 et 16 spirales).
Figure 8.e : représente Knautia arvensis a deux fois 2 et 5 spirales (i.e. 4 et 10 spirales).
Figure 8.f et 8.g : représente anonium a 3 et 5 spirales.

Le tournesol, en revanche, a une variété des nombres spirales différente. Plus les fleurs vieillissent, plus elles se développent en spirales. Dans tous les cas, cependant, le nombre de spirales sera un nombre de Fibonacci. Ils prendront généralement les paires suivantes de nombre de Fibonacci : 13 (spirales orientées à gauche) ; 21 (orienté à droite spirales), 21 : 34, 34 :55, 55 :89, 89 :144.

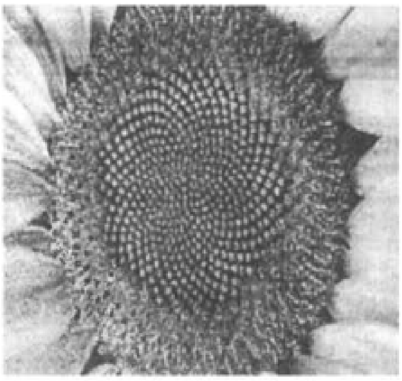
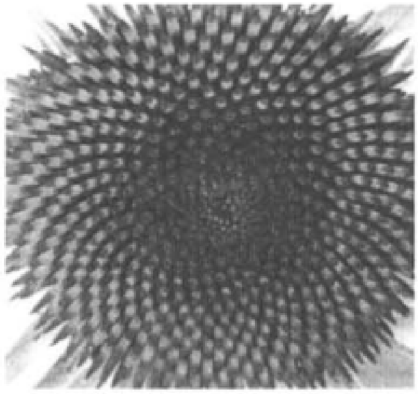



Figure :9.a Figure :9.b

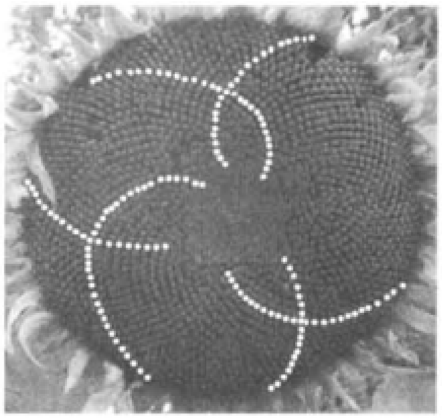
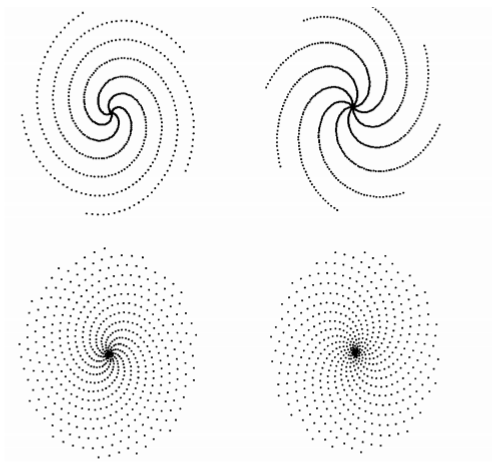



Figure :9.c Figure :9.d



Spirales artificielles de Fibonacci

Arrangement des feuilles - Phyllotaxis

Les Lis et les Iris ont 3 pétales ; Renoncules ont 5 pétales ; certains Delphiniums ont 8 pétales ; les Soucis ont 13 pétales ; certains Asters ont 21 pétales ; et les Marguerites peuvent être trouvées avec 34, 55, ou 89 pétales.

Voici une courte liste de quelques fleurs classées par numéro de pétales ils ont générae-ment :

3 pétales : Iris, perce-neige, Lis (certains Lis ont 6 pétales formés à partir de deux séries de 3)

5 pétales : Renoncule, Amarante (aquilegia), rose sauvage, larkspur, les roses ; aussi fleurs de pommier, hibiscus

8 pétales : Delphiniums, Cosmos bipinnatus, II Coreopsis tinctoria

13 pétales : Oeillets d'Inde, cineraria, quelques marguerites, ragwort

21 pétales : Aster, Chicorée, Helianthus annuus

34 pétales : Pyrèthre et autres Pâquerettes 55, 89 pétales.

Il existe aussi les nombres de Fibonacci dans un un corps humain exactement dans le bras voir les figure (10.a,10.b,10.c,10.d,10.e,10.f,10.g)

figure :10.a

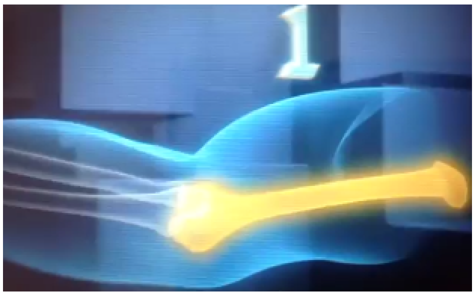


figure :10.b

figure :10.c

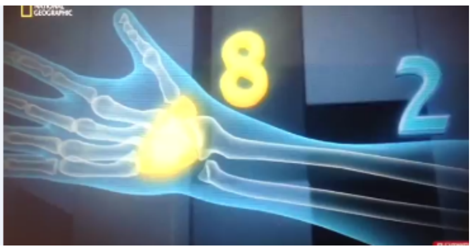


figure :10.d

figure :10.e figure :10.f

figure :10.g

3.2 Le nombre d'Or

Le mathématicien français Jacques-Philippe-Marie Binet découvrit une formule qui pourrait trouver n'importe quel nombre de Fibonacci sans avoir à trouver l'un des nombres précédents dans la suite. Cette formule trouve le nième nombre de Fibonacci en utilisant un nombre appelé le nombre d'or $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et son inverse $\frac{1}{\phi}$:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\phi^n - \left(-\frac{1}{\phi} \right)^n \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \qquad \forall n \geq 0.$$

La suite de Fibonacci définie par $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ avec $f_0 = 0, f_1 = 1$ est une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2, donc on peut trouver sa forme explicite en appliquent la méthode de résolution présentée en Chapitre 1 son équation caractéristique est : $r^2 - r - 1 = 0$ où ses racines sont : $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Alors : $f_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$

Pour trouver α_1 et α_2 on résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} f_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ f_1 = \alpha_1 (\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + \alpha_2 (\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1. \end{cases}$$

Donc : $\alpha_1 = -\alpha_2$ et $\alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.
On obtient :

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad \forall n \geq 0\,.$$

On remarque :

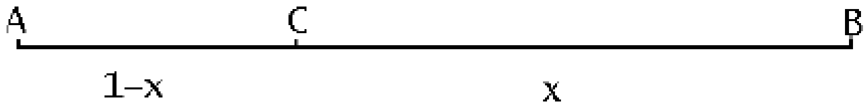
$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{(1-\sqrt{5}) \cdot (1+\sqrt{5})}{2 \cdot (1+\sqrt{5})} = \frac{1-5}{2+2\sqrt{5}} = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} = -\frac{1}{\phi}\,.$$

Donc :

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\phi^n - \left(-\frac{1}{\phi}\right)^n\right], \quad \forall n \geq 0\,.$$

Le nombre d'Or peut être trouve géométriquement en partitionnant un segment de ligne de longueur 1 en deux parties la plus longue de longueur x et la plus courte de longueur $1-x$ de telle façon d'avoir :

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$



L'équation précédente peut être écrite :

$$x^2 = 1 - x, \qquad \forall x \geq 0$$

Sa résolution nous donne : $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
Par la suite :

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi = 1.6180339887\ldots$$

ce qu'on appelle le proportion d'or .Fait intéressant, après que la réciproque de ϕ soit simplifiée, il s'avère qu'elle n'est que $\phi - 1$:

$$\frac{1}{\phi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1 = \phi - 1 = 0.6180339887\ldots$$

Cela révèle une relation unique entre ϕ et son réciproque : $\phi - \frac{1}{\phi} = 1$, mais il est également vrai que $\phi \cdot \frac{1}{\phi} = 1$. Le nombre ϕ et son inverse ϕ^{-1} sont les deux seuls nombres dont la différence et le produit sont tous deux égaux à un de plus on a : $\phi + \frac{1}{\phi} = \sqrt{5}$.

Examinons maintenant une autre relation qui relie ϕ et la suite de Fibonacci. Division un nombre de Fibonacci par le nombre de Fibonacci précédent donnera un nombre qui approche ϕ. Plus les chiffres utilisés sont importants, plus le résultat sera proche du résultat réel de la valeur de ϕ :

$$\frac{f_8}{f_7} = \frac{21}{13} = 1.6153846153\ldots$$

$$\frac{f_{14}}{f_{13}} = \frac{377}{233} = 1.6180257511\ldots$$

$$\frac{f_{20}}{f_{19}} = \frac{6,765}{4,181} = 1.6180339632\ldots$$

On peut montrer que cela est vrai en général en prenant la limite lorsque n tend vers l'infini de tout nombre de Fibonacci divisé par le précédent :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\phi^{n+1} - \left(-\frac{1}{\phi}\right)^{n+1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\phi^{n} - \left(-\frac{1}{\phi}\right)^{n}\right]} \\
= \lim_{n\to\infty} \frac{\phi^{n+1} - \left(-\frac{1}{\phi}\right)^{n+1}}{\phi^{n} - \left(-\frac{1}{\phi}\right)^{n}} \\
= \lim_{n\to\infty} \frac{\phi\left[\phi^{n} - \frac{1}{\phi}\left(-\frac{1}{\phi}\right)^{n+1}\right]}{\phi^{n} - \left(-\frac{1}{\phi}\right)^{n}} \\
= \phi \lim_{n\to\infty} \frac{\phi^{n} + \left(-\frac{1}{\phi}\right)^{n+2}}{\phi^{n} - \left(-\frac{1}{\phi}\right)^{n}} \cdot \frac{\frac{1}{\phi^n}}{\frac{1}{\phi^n}} \\
= \phi \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{(-1)^{n+2}}{\phi^{2n+2}}}{1 + \frac{(-1)^{n}}{\phi^{2n}}} \\
= \phi \cdot \frac{1+0}{1+0} = \phi \cdot 1 = \phi \\
\text{Donc : } \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi
\end{aligned}$$

Inversement, si un nombre de Fibonacci est divisé par le nombre de Fibonacci suivant, le résultat sera proche de l'inverse de ϕ . Encore une fois, plus les deux chiffres utilisés sont grands, plus le résultat sera proche de $\frac{1}{\phi}$:

$$\frac{f_7}{f_8} = \frac{13}{21} = 0.6190476190\ldots$$

$$\frac{f_{13}}{f_{14}} = \frac{233}{377} = 0.6180371353\ldots$$

$$\frac{f_{19}}{f_{20}} = \frac{4,181}{6,765} = 0.6180339985\ldots$$

3.2.1 Propriétés des puissances de nombre d'Or :

Il est intéressant d'examiner les puissances de ϕ. Ils relieront d'avantage les nombres de Fibonacci à ϕ. Pour ce faire, nous devons d'abord trouver la valeur de ϕ^2 en termes de ϕ :

$$\phi^2 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \frac{5+2\sqrt{5}+1}{4} = \frac{2\sqrt{5}+6}{4} = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 1 = \phi + 1$$

Nous utilisons maintenant cette relation ($\phi^2 = \phi + 1$) pour inspecter les puissances de ϕ :

$$\begin{aligned}
&\phi^3 = \phi \cdot \phi^2 = \phi(\phi+1) = \phi^2 + \phi = (\phi+1) + \phi = 2\phi + 1 \\
&\phi^4 = \phi^2 \cdot \phi^2 = (\phi+1)(\phi+1) = \phi^2 + 2\phi + 1 = (\phi+1) + 2\phi + 1 = 3\phi + 2 \\
&\phi^5 = \phi^3 \cdot \phi^2 = (2\phi+1)(\phi+1) = 2\phi^2 + 3\phi + 1 = 2(\phi+1) + 3\phi + 1 = 5\phi + 3 \\
&\phi^6 = \phi^3 \cdot \phi^3 = (2\phi+1)(2\phi+1) = 4\phi^2 + 4\phi + 1 = 4(\phi+1) + 4\phi + 1 = 8\phi + 5 \\
&\phi^7 = \phi^4 \cdot \phi^3 = (3\phi+2)(2\phi+1) = 6\phi^2 + 7\phi + 2 = 6(\phi+1) + 7\phi + 2 = 13\phi + 8 \ \text{ etc}
\end{aligned}$$

À ce stade on peut constater que le résultat final de chaque puissance de ϕ est effectivement égal à un multiple de ϕ plus une constante. Inspection supplémentaire montre que les coefficients de ϕ et les constantes sont tous nombres de Fibonacci. Non seulement cela, mais ils sont aussi dans l'ordre de la suite de Fibonacci :

$$\begin{array}{ll}
\phi = 1\phi + 0 & \phi^6 = 8\phi + 5 \\
\phi^2 = 1\phi + 1 & \phi^7 = 13\phi + 8 \\
\phi^3 = 2\phi + 1 & \phi^8 = 21\phi + 13 \\
\phi^4 = 3\phi + 2 & \phi^0 = 34\phi + 21 \\
\phi^5 = 5\phi + 3 & \phi^{10} = 55\phi + 34
\end{array}$$

Une fois encore, la suite de Fibonacci est apparue là où vous l'auriez peut-être le moins attendu. Les nombres de Fibonacci apparaissent à la fois comme les coefficients de ϕ et comme les constantes quand on prend les puissances de ϕ . De plus, nous pouvons écrire toutes les puissances de ϕ sous une forme linéaire : $\phi^n = a\phi + b$, où a et b sont des entiers spéciaux - les nombres de Fibonacci .

3.2.2 Relation entre Le Nombre D'or et π et l'exponentiel

Tout d'abord on note qu'il y'a une petite relation entre π et ϕ établi par Underwood Dudley [10] qui est juste une bonne approximation, mais rien de plus :

$$3.1415926535897932384\ldots = \pi \approx \frac{6}{5}\phi^2 = 3.1416407864998738178\ldots$$

Considérons maintenant l'équation d'Euler : $e^{\pi i} + 1 = 0$. La beauté de cette relation est qu'elle est simple mais elle contient chacune des valeurs les plus significatives en mathématiques : e est la base des logarithmes naturels (Nombre d'Euler), π est le rapport entre la circonférence d'un cercle et son diamètre (nombre de Ludolph 's), i est l'unité imaginaire du nombres complexes (racine carrée de - 1 ; $\sqrt{-1}$), 1 est l'unité des nombres naturels . On va insérer ϕ dans cette équation comme suit on sait que $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ et $1 = -e^{\pi i}$ (d'après l'équation d'Euler). Donc : $\phi = \frac{\sqrt{5}-e^{\pi i}}{2}$ ce qui relier ϕ à π, e et i .

3.2.3 Applications du nombre d'Or :

Le Rectangle D'or :

Depuis des siècles, artistes et architectes ont identifié ce qu'ils croyaient être le rectangle le plus parfaitement formé. Ce rectangle idéal, souvent appelé «rectangle d'or», s'est également avéré être le plus agréable à l'oeil. Le rectangle d'or est celui qui a le rapport suivant de sa longueur et de sa largeur :

$$\frac{w}{l} = \frac{l}{w+l}.$$

Considérons un rectangle (Figure 11) où la longueur l et le largeur,w , vérifient la proportion $\frac{w}{l} = \frac{l}{w+l}$:

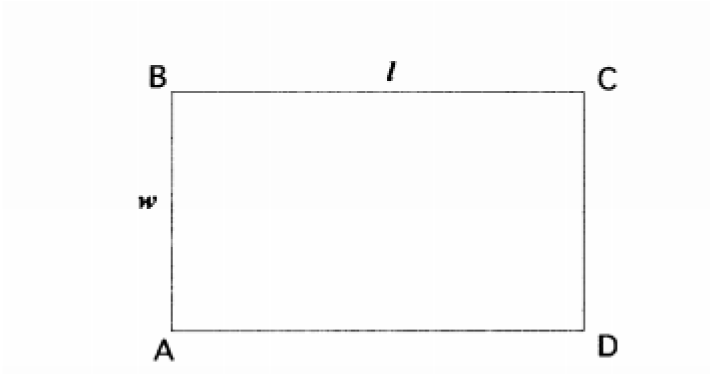


Figure : 11

En multipliant , nous obtenons : $w(w+1) = l^2$ ou $w^2 + wl = l^2$ c.à.d $w^2 + wl - l^2 = 0$ .Si on pose : $l = 1$, on obtient : $w^2 + w - 1 = 0$.
En utilisant la formule quadratique on obtient : $w = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Parce que nous traitons avec des longueurs, la valeur négative est sans intérêt ici. La solution est : $w = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\phi}$ et encore le nombre d'Or se dégage .
Donc nous avons maintenant le rapport des dimensions du rectangle qui est égale à :

$$\frac{w}{l} = \frac{l}{w+l} = \frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ or } \frac{l}{w} = \frac{w+l}{l} = \phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

nous donne un rectangle d'or .

Le rectangle d'or est de la longueur ϕ fois plus grand à la largeur. La propriété principale du rectangle d'or si quand on dessine un carré sur sa longueur on obtient un rectangle plus grand qui est lui aussi un rectangle d'or. En effet si on imagine que le premier rectangle d'or a une largeur égale 1 et de longueur égale ϕ alors le grand rectangle a une largeur égale ϕ et longueur égale $1 + \phi$ et comme $1 + \phi = \phi \times \phi$ d'après la propriété du nombre d'or . On peut répéter le processus de la même manière et obtenir un rectangle encore plus grand et il est toujours un rectangle d'Or.

Si maintenant on découpe à l'intérieur du rectangle un carré sur sa longueur. On obtient de cette façon un autre rectangle plus petit qui encore un rectangle d'Or. Si on répète ce processus à l'infini en produisant chaque fois des rectangles d'or qui sont plus en plus petit. Si on dessine dans chaque carré (Figure 12) un quart de cercle on obtient une spirale que l'appelle la spirale d'Or.

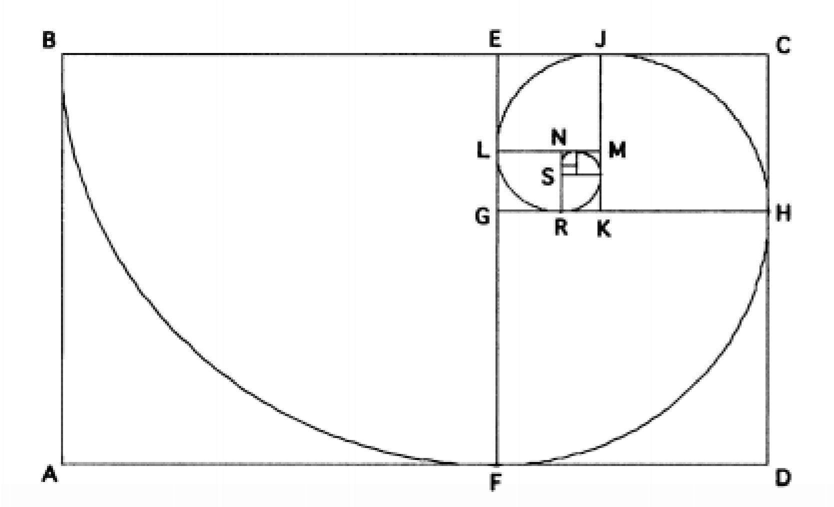


Figure : 12

On trouve la spirale d'or dans le corps humaine par exemple dans les oreilles et il se trouve très souvent dans la nature : dans les coquillages, les moules qui possède une coquille. On trouve aussi le schéma de spirale d'or et multitude de spirales d'or qui composent les galaxies dans l'univers les figures (13 .a) et (13 .b), (13 .c), (13 .d) cela explique.

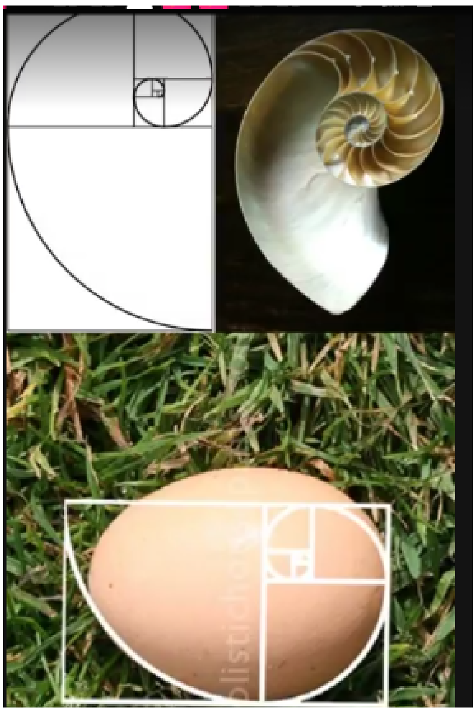


Figure : 13 .a

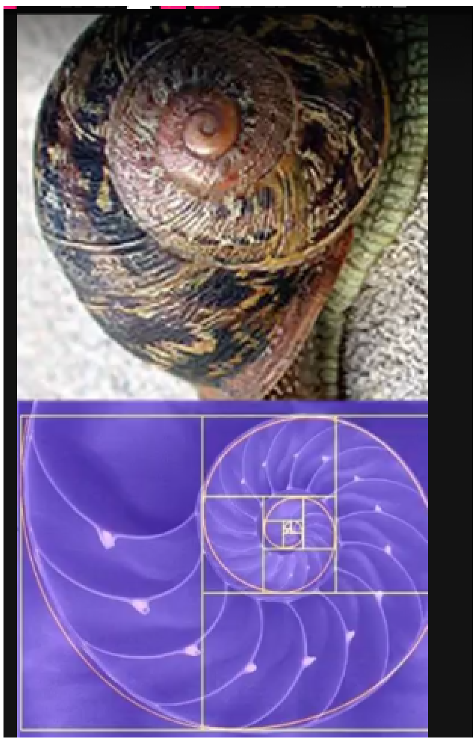


Figure : 13 .b

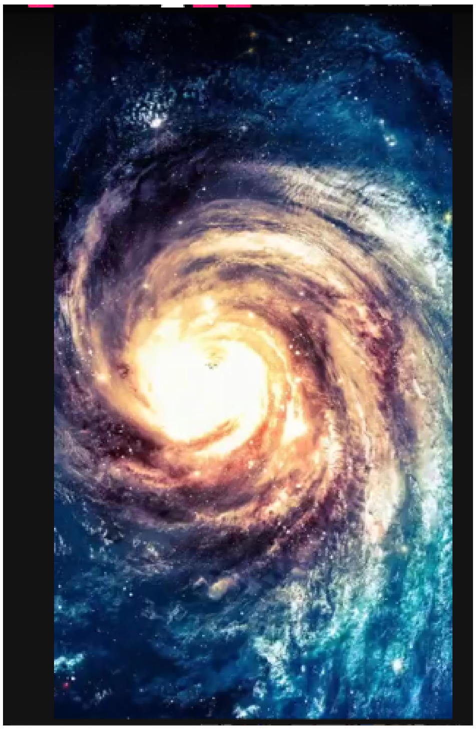


Figure : 13 .c Figure : 13 .d

Le pyramide de Cheops d' Égypte

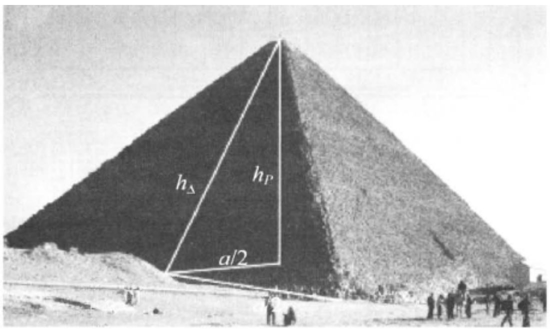


Figure : 14

La pyramide de Khufu (Cheops) à Giza a été construite dans une telle manière à ce que le carré de la hauteur soit égal à la surface de l'un des côtés latéraux. En utilisant notre triangle superposé à la Figure (14) (et théorème de Pythagore), on obtient ce qui suit :

$$h_\Delta^2 = \frac{a^2}{4} + h_P^2.$$

La surface de l'un des triangles latéraux est : $A = \frac{a}{2} \cdot h_\Delta$.
Selon le principe de construction introduit par Herodot (ci-dessus), où le carré de la hauteur

est égal à l'aire de la triangle latéral, on obtient :

$$h_P^2 = h_\Delta^2 - \frac{a^2}{4} = A = \frac{a}{2} \cdot h_\Delta.$$

Si on divise les deux côtés de l'équation $\frac{a}{2}h_\Delta = h_\Delta^2 - \frac{a^2}{4}$ par $\frac{a}{2}h_\Delta$, on obtient :

$$1 = \frac{h_\Delta}{\frac{a}{2}} - \frac{\frac{a}{2}}{h_\Delta}$$

On remplace $\frac{h_\Delta}{\frac{a}{2}} = x$ et $\frac{\frac{a}{2}}{h_\Delta} = \frac{1}{x}$ on obtient :

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Cette equation admet deux racine x_1 et x_2 tel que : $x_1 = \phi$ et $x_2 = \frac{-1}{\phi}$

Mais comme x_2 est négative donc elle est exclu.Le tableau suivant présente les mesures de cette pyramide

Pyramide de Cheops	Longueur du côté de la base a	Hauteur du triangle latéral h_Δ
les mesures	230.56 m	186.54 m

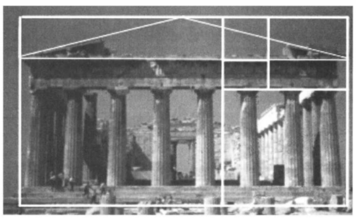
Pyramide de Cheops	hauteur de la pyramide h_P	$\frac{h_\Delta}{\frac{a}{2}}$
les mesures	146.65 m	1.61813471

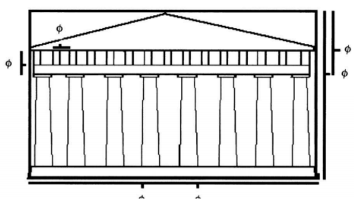
En plus :

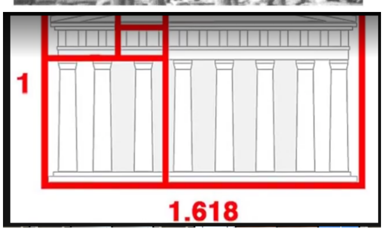
$$\frac{h_\Delta}{\frac{a}{2}} \simeq 1.61813471 = \phi.$$

Le parthénon

La civilisation de Grecs découvert le nombre d'Or . Il se trouve dans la construction de parthénon qui est tout simplement un enchainement de rectangles d'Or .







Les nombre d'Or et les poumons

Une étude réalisée en 1905 et 1907 par le physicien américain Boss et le professeur de médecine Arigle Bergaire révèle l'existence du nombre d'Or dans la structure des poumons. Une caractéristique des branches constituant les poumons est que la trachée se divise en deux principales une longue à gauche et une courte à droite. Cette division symétrique continue dans les subdivisions suivantes des branches. Ils ont déterminé que dans toute subdivision que la proportion de la branche longue à la branche courte est toujours $1.6180339887...$ voir la Figure (15) .

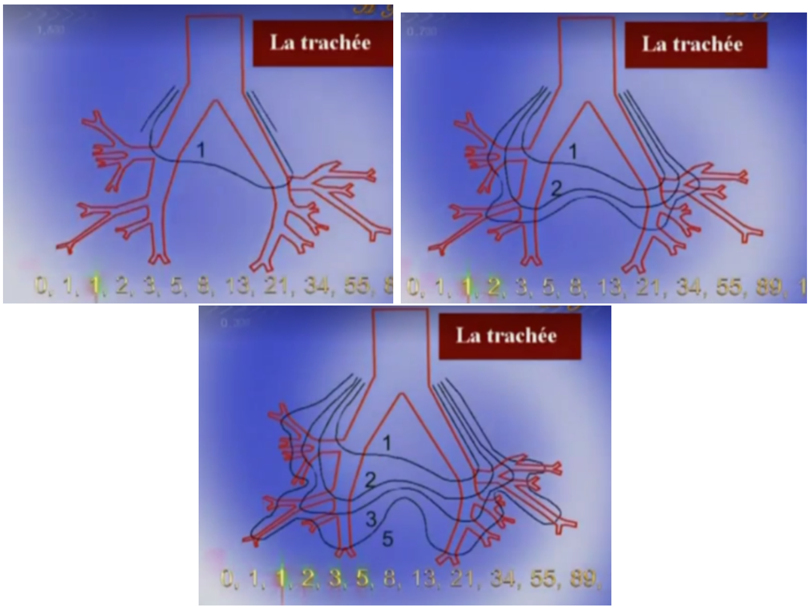


Figure : 15

Le nombre d'Or et la Mecque

Il s'est révélé que le point d'or de la terre, est la Mecque : la proportion de la dimension entre la ville de la Mecque et un point de pôle sud et celle entre la Mecque et le pôle nord est : $1.6180339887...$ c'est a dire le nombre d'or . Même la propostion entre la Mecque et le pôle sud et celle entre les deux pôles est égale au nombre d'Or. La même chose est vérifiée pour les distances orientales et occidentales (voir Figure 16).

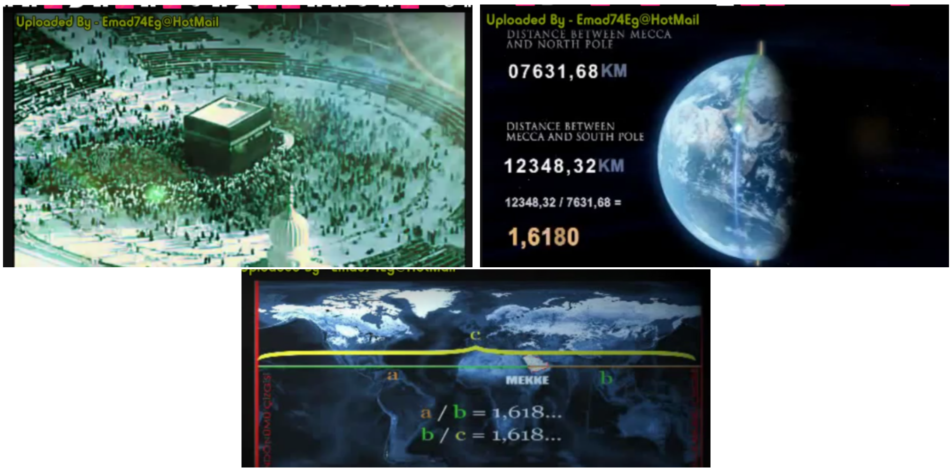


Figure : 16

Il existe le nombre d'Or aussi dans le corps humain voir la Figure (17).

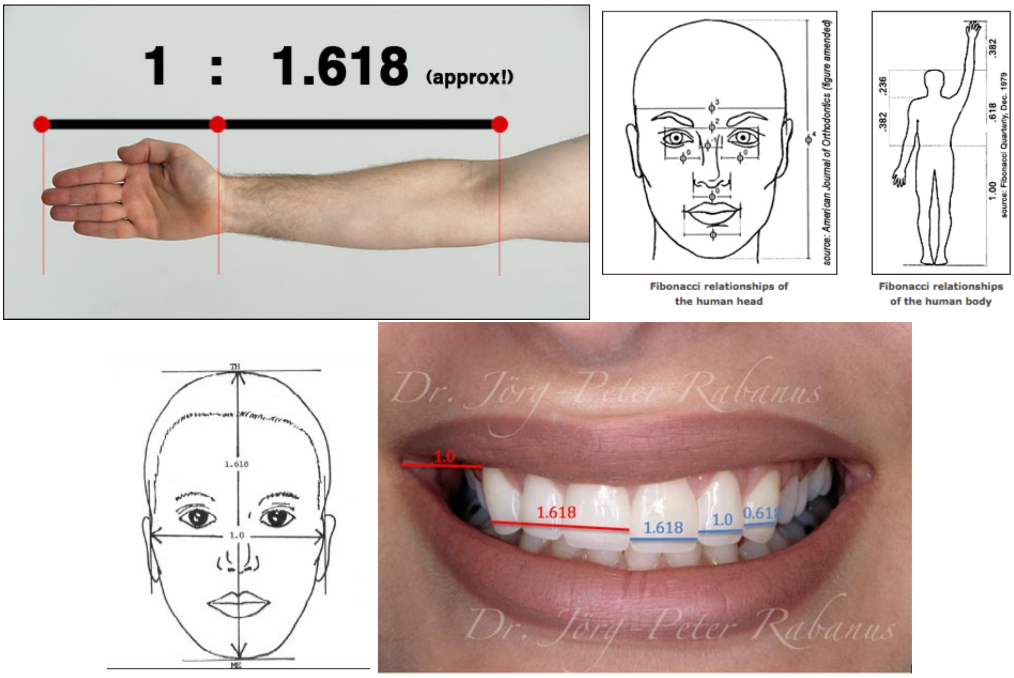


Figure : 17

Bibliographie

[1] **A. BAKER** , A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms, II.,Acta Arithm., Warszawa, t. 24, p. 33-36 , 1973.

[2] **J. BERSTEL**, Sur le calcul des termes d'une suite récurrente linéaire,Exposé fait à l'I. R. I.(Rocquencourt) en mars 1974.

[3] **R. A. Dunlap**, The Golden Ratio and Fibonacci Numbers, Prometheus Books, 2007.

[4] **A. C. Izuchukwu** British Journal of Science 62, Vol. 11 (2), September 2014.

[5] **S. Lattés** , Sur les suites récurrentes non linéaires et sur les fonctions génératrices de cas suites, annales de la faculté des sciences de tonlonce 3^e séries, tome 3 p.73- 124, 1911.

[6] **M. MIGNOTTE** , A note on linear recursive sequences, J. Austr. math. Soc, 1974.

[7] **A. S. Posamentier , I. Lehamenn** The (Fabulous) Fibounacci Numbers, world scientific Publishing Co. Pte, Ltd, 1997.

[8] **Dj. Rebaine**, Résolution des équations récurrentes,notes de cours,U Q A C, Dim, 2005.

[9] **S. Rabinouich, E. Berkolaiko, S. Havilin** (American, Instite of, physics).J. Math. phys. 37(11), Novembre 1996.

[10] **K. H. Rosen**, Discrete Mathematics and Its Applications, McGraw-Hill, seven edition, 2012 .