République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

Université Djilali Bounâama Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et d'Informatique

Mémoire Présenté pour l'obtention de Diplôme de **MASTER en Mathématiques**

Spécialité:

Analyse mathématiques et applications

Réalisé par:

BELARIBI Horiya

Thème:

Sur Les Sommes Exponentielles

Soutenu Publiquement le : Juillet 2019

Devant le jury composé de:

Mr. M. Houasni	Président
Mr. M.Bouderbala	Encadreur
Mr. M. Krras	Examinateur 1
Mr. B. Chaouchi	Examinateur 2

ANNÉE UNIVERSITAIRE: 2018-2019

Table des matières

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à étudier des problèmes qui jouent un rôle très important dans la théorie analytiques des nombres, ces problèmes étroitement liés au problèmes de majoration des sommes exponentielles par la méthode de Van der Corput et les méthodes des paires d'exposants.

Abstract

In this thesis, we are interested in studying problems that play a very important role in the analytic theory of numbers, these problems closely related to the problem of exponential sum expansions by the Van der Corput method and the methods of the pairs of exhibitors.

ملخص

في هذه المذكرة إهتمامنا يكون حول بعض المشكلات المطروحة في مجال نظرية الأعداد وخاصة المرتبطة بمجاميع أسية، نذكر منها نظرية Van der Corput ونظرية الأزواج الأسية ودورها في تحديد إرتياب الخطأ لبعض المجاميع التي سنظهرها من خلال بعض الأمثلة.

Remerciements

*Je remercie d'abord Dieu qui m'a donné le courage et la patience pour réaliser ce travail. Je tiens tout particulièrement à exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur, M. BOUDERBALA Mihoub de m'avoir proposé ce sujet, accompagné d'une documentation précieuse, et de m'avoir appris le raisonnement assez techniques en théorie analytique des nombres, ainsi que son orientation tout au long de la réalisation de ce travail. Je remercie sincèrement M.*HOUASNI M *de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance de mon mémoire. Je vous remercie beaucoup, M.* KARRAS M *et M.* CHAOUCHI B *pour avoir accepté de lire et examiner mon travail. Et je tiens à remercier tous les étudiants de la promotion 2018/ 2019 de l'Université Djilali Bounaâma Khemis Miliana.*

B.HORIYA

Notations

1. $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers ($\mathbb{N}^*$ désigne les entiers naturels non nuls).
2. $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
3. $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
4. $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres relatifs.
5. p l'ensemble des nombres premiers.
6. Pour deux entiers $n > 0$ et $m > 0$ on a (n, m) désigne le $pgcd(n, m)$.
7. Pour tout nombre réel x on désigne
   • $[x]$ la partie entière de x qui est l'unique nombre entier k vérifiant $x - 1 < k \leq x$.
   • $\{x\}$ la partie fractionnaire de x où $\{x\} = x - [x] \quad (0 \leq \{x\} < 1)$.

8. Si $g(x) > 0$, pour $x \geq a$ nous écrivons $f(x) = \mathrm{O}(g(x))$ ($f(x)$ est un grand O de $g(x)$) s'il existe une constante $M > 0$ telle que
$$\forall x \geq a, |f(x)| \leq M|g(x)|$$
   Une équation de la forme
$$f(x) = h(x) + O(g(x))$$
   signifie que $f(x) - h(x) = O(g(x))$. Nous notons que $f(t) = O(g(t))$ pour $t \geq a$, implique
$$\int_a^x f(t)dt = O\left(\int_a^x g(t)dt\right) \quad pour \quad x \geq a$$
9. Pour tout nombre réel x; $\|x\| = \min\limits_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$ désigne la distance de x à l'entier le plus proche de x.
10. La constante d'Euler est le nombre γ définie par
$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \simeq 0.577215663 \cdots$$
11. La notation de Vinogradov $\ll$. Si f et g sont deux fonction, g étant à valeurs réelle positive,
   • $f \ll g$ signifie $| f | \leq K | g |$, où K est une constante indépendante des paramètres entrant en jeu.
   • $f \approx g$ signifiera que $f \ll g$ et $g \ll f$.
12. $f(x) \sim g(x)$ quand $(x \to \infty)$ signifie $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

1 INTRODUCTION

Dans le contexte suivant, nous allons voir les détails préliminaires de la méthode de van der Corput. En éspérant d'après cette méthode d'obtenir des majorations pour les sommes exponentielles, particulièrement les sommes qui se trouvent dans les problématiques de la Théorie analytique des nombres.
Une somme exponentielle est une somme de la forme :

$$S = \sum_{n \in I} e(f(n)). \tag{1.1}$$

Où $I =]a, b]$. (a et b sont des entiers.)

Où $f(n)$ est une fonction réelle et on utilise la notation $e(x)$ pour désigner $e^{2\pi i x}$. Ces sommes se semblent dans plusieurs articles de la théorie analytique des nombres. Un des plus célèbre problèmes est dans les estimations de la fonction zêta de Riemann. Le problème de l'obtention d'une majoration pour $\zeta(\sigma + it)$ est peut être réduit au problème de l'obtention d'une majoration pour la somme

$$\sum_{N < n \leqslant 2N} n^{-\sigma - it}. \tag{1.2}$$

Le $n^{-\sigma}$ peut être enlevé par une sommation partielle, et il nous reste une somme de (1.1) avec $f(n) = -\frac{t}{2\pi} \log n$. Un autre exemple simple où des sommes exponentielles apparaissent est le problème du diviseur de Dirichlet. Soit $d(n)$, la fonction nombre de diviseurs d'un nombre entier positif n, et soit

$$\Delta(x) = \sum_{n \leq x} d(n) - x \log x - (2\gamma - 1)x. \tag{1.3}$$

où γ est la constante d'Euler. Voronoi (1903,[6]) a montré que le terme d'erreur pouvait être amélioré en $O\left(x^{1/3}\right)$. Comme nous le verrons au **Chapitre 1**, que

$$\Delta(x) = -2 \sum_{n\leq x^{1/2}} \psi(x/n) + O(1). \tag{1.4}$$

Où $\psi(t) = t - [t] - \frac{1}{2}$. Maintenant, ψ est une fonction 1-périodique et elle peut être exprimé comme une série de Fourier. Cela explique comment reformuler (1.4) en termes de sommes exponentielles. Il existe d'autres problèmes qui permettent à détecter des sommes de la forme $\sum_n \psi(n)$, et nous en discuterons au **chapitre 1**.

L'application des sommes exponentielles dans théorie analytique des nombres est une des nombreuses idées nouvelles introduites par Weyl [6] était une transformation utile qui se pose lors de la quadrature d'une somme exponentielle. Soit $S = \sum_{n\in I} e(f(n))$. Alors

$$\begin{aligned} |S|^2 &= \sum_{a<m,n\leq b} e(f(m) - f(n)) \\ &= \sum_{|h|<b-a} \sum_{n\in I_h} e(f(n+h) - f(n)). \end{aligned} \tag{1.5}$$

tel que $I_h = \{n : a < n, n+h \leq b\}$. Ceci est utile parce que la fonction différenciée $f(n+h) - f(n)$ apparaissant à la somme intérieure est plus facile à manipuler que la fonction originale $f(n)$. Par exemple, si $f(n)$ est un polynôme de degré k, alors $f(n+h) - f(n)$ est un polynôme de degré $k-1$. Après des applications $k-1$ de (1.5) le problème se réduit à étudie des sommes exponentielles des fonctions linéaires. Ces derniers sont faciles à manipuler car ils sont des séries géométriques.
Van der Corput (1922,[6]) a modifié et amélioré la méthode de Weyl comme suit. Soit H un entier positif quelconque. Alors

$$HS = \sum_{h=1}^{H} \sum_{a-h<n\leq b-h} e(f(n+h)) \tag{1.6}$$

En élevant au carré les deux côtés de (1.6) et en appliquant l'inégalité de Cauchy, on obtient

$$|S|^2 \leq \frac{|b-a|+H}{H} \sum_{|h|<H} \left(1 - \frac{|h|}{H}\right) \sum_{n\in I_h} e(f(n+h) - f(n)). \tag{1.7}$$

notez que (1.7) est très similaire à (1.5) lorsque $H = b-a$.
Une autre innovation de van der Corput était une combinaison de la formule sommatoire de Poisson et la méthode de la phase stationnaire. Avec des conditions appropriées sur f, on peut montrer que

$$\sum_{n\in I} e(f(n)) = \sum_{\alpha\leq\nu\leq\beta} \frac{e(-\phi(\nu) - 1/8)}{|f''(x_\nu)|^{1/2}} + T. \tag{1.8}$$

où α et β sont définis en termes de f', x_ν est définie par la relation $f'(x_\nu) = \nu$ et $\phi(\nu) = -f(x_\nu) + \nu x_\nu$
Van der Corput a utilisé sa méthode pour prouver que

$$\Delta(x) \ll x^{33/100}. \tag{1.9}$$

(Effectivement, il a prouvé (1.9) avec le plus petit exposant $\frac{163}{494}$). Walfisz (1924) a utilisé la même méthode pour montrer que

$$\zeta(\frac{1}{2}+it) \ll t^{163/998}. \tag{1.10}$$

Van der Corput (1928) a amélioré l'exposant du problème des diviseurs à $\frac{27}{82}$. Titchmarsh (1931) a affiné l'exposant de (1.10) à $\frac{27}{164}$. Et Phillips (1933) réduit encore l'exposant à $\frac{229}{1392}$. L'aspect le plus important du papier de Phillips en 1933 était son raffinement des systèmes d'exposants. Van der Corput (1922) a définie un système d'exposants comme un ensemble des paires ordonnées $\{(k_1,\ell_1),\ldots,(k_r,\ell_r)\}$ tel que, si $|f'| \approx y$ et $N_1 \leq 2N$, puis

$$\sum_{N<n\leq N_1} e(f(n)) \ll y^{k_1}N^{\ell_1}+\ldots+y^{k_r}N^{\ell_r}.$$

À condition que f satisfasse un certain ensemble d'hypothèses. Phillips a donné une forme de cette théorie dans laquelle une seule paire (k,ℓ) est requis. Ainsi, il fait référence à des paires d'exposants plutôt qu'à des systèmes d'exposants. La borne triviale de $\sum\limits_{N<n\leq N_1} e(f(n))$ montre que $(0,1)$ est une paire d'exposants. Phillips a montré que si (k,ℓ) est une paire d'exposants, il en est de même pour

$$A(k,\ell) = \left(\frac{k}{2k+2}, \frac{k+\ell+1}{2k+2}\right).$$

et

$$B(k,\ell) = (\ell-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}).$$

Le résultat A découle de (1.7) et le résultat B découle de (1.8). La théorie des paires d'exposants sera discuté au **chapitre 3**. On peut montrer que si (k,ℓ) est une paire d'exposants et que $\theta(k,\ell) = \frac{(k+\ell-\frac{1}{2})}{2}$ alors

$$\zeta(\frac{1}{2}+it) \ll t^{\theta(k,\ell)}\log t.$$

Par exemple, l'exposant de Phillips $\frac{229}{1392}$ est égal à $\theta(k,\ell)$ lorsque

$$(k,\ell) = ABA^3BA^2BA^2B(0,1) = \left(\frac{97}{696}, \frac{480}{696}\right).$$

Cela conduit naturellement à la question de trouver le minimum de $\theta(k,\ell)$ pour tous les paires d'exposants qui pouvent être obtenus à partir de $(0,1)$ par A-transformation et B-transformation. Rankin (1955,[6]) a trouvé ce minimum. Graham (1985,[6]) a donné plus de détails et a examiné le problème correspondant lorsque θ est une fonction rationnelle de k et ℓ.

2

RAPPELS ET DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES

2.1 Fonctions arithmétiques

Définition 2.1

On appelle fonction arithmétique, toute application f définie de $\mathbb{N}^*$ dans le corps $\mathbb{C}$.

Remarque

On noter par $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions arithmétiques.

Exemples

La fonction nombre des diviseurs

Pour tout entier $n \geq 1$, on note par $d(n)$ La fonction nombre des diviseurs d'un entier n qui est :

$$\begin{aligned} d(n) &= \text{card}\left\{d \in \mathbb{N}^*, d|n\right\} \\ &= \sum_{d|n} 1. \end{aligned}$$

Quelques valeurs de la fonction $d(n)$:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	25	2000
$d(n)$	2	2	3	2	4	2	4	3	4	6	3	20

La fonction φ d'Euler

$$\varphi(n) = \sum_{1\le m\le n \ et \ (m,n)=1} 1$$
$$= Card\{m/1 \le m \le n \ \ et \ \ (m,n) = 1\}.$$

Quelques valeurs de la fonction $\varphi(n)$:

n	2	3	5	8	10	11	13	19	25	50	70	100
$\varphi(n)$	1	2	4	4	5	5	12	18	10	20	30	40

La fonction somme des diviseurs

Pour tout entier $n \ge 1$, la fonction $\sigma(n)$, la somme de diviseurs de l'entier n est définie par :

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Quelques valeurs de la fonction $\sigma(n)$:

n	1	2	3	4	5	8	10	15	20	25	100
$\sigma(n)$	1	3	4	7	6	15	18	24	42	31	182

Fonction sommatoire d'une fonction arithmétique

Définition 2.2

Soit f une fonction arithmétique, la fonction sommatoire de f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$F(x) = \sum_{n\le x} f(n).$$

Exemple

Pour tout réel $x \ge 0$, on note par $\pi(x)$ le nombre des entiers premiers $\le x$:

$$\pi(x) = \text{ Card } \{p, \text{ tel que } p \text{ premier et } p \le x\}$$
$$= \sum_{p\le x} 1 \quad .$$

(on a $\pi(x) \quad = 0 \quad$ pour $0 \le x < 2$)

Legendre et Gauss ont conjecturé qu'ils y en a à peu près $\dfrac{x}{lnx}$ nombres premiers $\le x$. En 1896 Hadamard et De La Vallée Poussin ont démontré indépendamment le Théorème des Nombres Premiers sous la forme minimale $(x \to \infty)$

$$\pi(x) \sim \frac{x}{lnx}. \text{ [4]}$$

quelques valeurs de $\pi(x)$:

x	3	4	5	6	7	8	9	10	1000	10000	10^5	10^6	10^7
$\pi(x)$	2	2	3	3	4	4	4	4	25	168	1229	9592	664579

2.1.1 La fonction zêta de Riemann

Théorème 2.1

La fonction ζ de Riemann est une fonction méromorphe, définie pour tout nombre complexe s tel que $\Re(s) > 1$, par la série de Dirichlet[Riemann] :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

La série ne converge pas en $s = 1$ car on a

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \geq \int_1^{m+1} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln(m+1).$$

qui tend vers l'infini avec m, La valeur $s = 1$ est donc une singularité de la fonction. Donc la fonction zêta de Riemann est la fonction définie sur $]1, +\infty[$.

Démonstration .

Pour $t \in [n, n+1]$, on a $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{n}$.

Donc,

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dt = \frac{1}{n} \int_n^{n+1} dt = \frac{1}{n}. \tag{2.1}$$

Pour $t \in [n-1, n]$, on a $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{t}$.

Donc,

$$\int_{n-1}^{n} \frac{1}{n} dt \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t} dt.$$

$$\frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t} dt. \tag{2.2}$$

Il en résulte que :

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t} dt.$$

On fait la somme jusqu'au N on obtient :

$$\sum_{1}^{N}\int_{n}^{n+1}\frac{1}{t}dt \leq \sum_{1}^{N}\frac{1}{n} \leq \sum_{1}^{N}\int_{n-1}^{n}\frac{1}{t}dt.$$

$$\int_{1}^{N+1}\frac{1}{t}dt \leq \sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{n} \leq \int_{0}^{N}\frac{1}{t}dt.$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k} \geq \int_{1}^{N+1}\frac{1}{t}dt = \ln(N+1).$$

On fait N tends vers $+\infty$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} \geq \lim_{N\longrightarrow+\infty}\int_{1}^{N+1}\frac{1}{t}dt = \ln(N+1) = +\infty.$$

Ce qui implique

$$\zeta(1) \to +\infty$$

□

Remarque

Soit $s=\sigma+it$, la série de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ diverge si $\sigma\leq 0$, $\left|\frac{1}{\mathrm{n}^s}\right| = \left|\frac{1}{\mathrm{n}^\sigma e^{it\ln n}}\right| = \frac{1}{n^\sigma}$, la série de terme général $\frac{1}{\mathrm{n}^s}$ converge absolument si et seulement si $\sigma>1$ et diverge si $t=0$ et $\sigma\in]0,1]$.

Quelques valeurs de la fonction $\zeta(s)$:

s	2	3	4	$\frac{3}{2}$
$\zeta(s)$	1,644934	1,202056903	1,0823	2,612375

2.2 La formule sommatoire d'Euler Mac-Laurin

Théorème 2.2

Si f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[y,x]$, où $0<y<x$ alors

$$\sum_{y\le n\le x} f(n) = \int_y^x f(t)dt + \int_y^x (t-[t])f'(t)dt + f(x)([x]-x) - f(y)([y]-y). \tag{2.3}$$

Démonstration .

Soit $m=[y]$, $k=[x]$. pour les entières n et $n-1$ dans $[y,x]$, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_{n-1}^n [t]f'(t)dt &= \int_{n-1}^n (n-1)f'(t)dt = (n-1)\{f(n)-f(n-1)\}\\ &= \{nf(n)-(n-1)f(n-1)\} - f(n).\end{aligned}$$

Pour tout $n=m+1$ a $n=k$, on a alors :

$$\begin{aligned}\int_m^k [t]f'(t)dt &= \sum_{n=m+1}^{k} \{nf(n)-(n-1)f(n-1)\} - \sum_{y\le n\le x} f(n)\\ &= kf(k) - mf(m) - \sum_{y\le n\le x} f(n).\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\sum_{y\le n\le x} f(n) &= -\int_m^k [t]f'(t)dt + kf(k) - mf(m)\\ &= -\int_y^x [t]f'(t)dt + kf(x) - mf(y).\end{aligned} \tag{2.4}$$

L'intégration par partie donne :

$$\int_y^x f(t)dt = xf(x) - yf(y) - \int_y^x tf'(t)dt$$

alors en substituant dans (2.4), on trouve (2.3). $\square$

2.3 Série de Fourier

Théorème 2.3

Soit f une fonction complexe périodique de période 2π continue par morceau et dérivable par morceau sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de la fonction f est définie par :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right).$$

Où a_n et b_n $\forall n \in \mathbb{N}$ sont appelés coefficients de Fourier et définie par :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx.$$

et

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

converge et l'on a

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right).$$

En plus la convergence de la série de Fourier est uniforme dans tout intervalle fermé ne contenant aucun point de discontinuité et les sommes de ces suites partielles sont $S_N(x)$ sont majorées en valeur absolue dans tels intervalles par un nombre M indépendant de N et x .
Supposons que f est de période $\mathrm{T} > 0$ quelconque. Dans ce cas on considère la fonction $g(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ et l'on a $f(x) = g\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$ et

$$\frac{g(x^+)+g(x^-)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right).$$

avec

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{\mathrm{T}}{2\pi}t\right)dt \\
&= \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} f(u)du. \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\cos(nt)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{\mathrm{T}}{2\pi}t\right)\cos(nt)dt \\
&= \frac{2}{\mathrm{T}}\int_0^{T} f(u)\cos\left(\frac{2nu\pi}{\mathrm{T}}\right)du.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\sin(nt)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{\mathrm{T}}{2\pi}t\right)\sin(nt)dt \\ &= \frac{2}{\mathrm{T}}\int_0^{T} f(u)\sin\left(\frac{2nu\pi}{\mathrm{T}}\right)du. \end{aligned}$$

(le changement de variable $\frac{\mathrm{T}}{2\pi}t = u$).

On aura alors

$$\begin{aligned} \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} &= \frac{f\left(\frac{2\pi}{T}x^+\right)+f\left(\frac{2\pi}{T}x^-\right)}{2} \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\right). \end{aligned}$$

Noter que

$$f(x^+) = \lim_{t \overset{>}{\to} x} f(t) \ , \ f(x^-) = \lim_{t \overset{<}{\to} x} f(t).$$

2.4 La fonction ψ

Définition 2.3

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\psi(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2} = \{x\} - \frac{1}{2}.$$

ou $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ désigne la partie fractionnaire du nombre réel x, et $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière. la fonction $\psi(x)$ est appelée la premier fonction de Bernoulli.

Proposition 2.1.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

1. *La fonction $\psi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ est périodique de période 1 et vérifie $-\frac{1}{2} \leq \psi(x) < \frac{1}{2}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ et $\psi(n) = -\frac{1}{2}$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$.*

2. *Pour deux réels x et y, on a*

$$\psi(x+y) - y \leqslant \psi(x) \leqslant \psi(x-y) + y, \ \ si \ \ y \geqslant 0.$$

3. $\psi(x) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2\pi nx)}{n}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Démonstration .

1. On note que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique nombre entier n vérifiant $n \le x < n+1$ $(n = [x])$ et l'on a $\{x\} = x - n = g(x)$. La fonction $g(x)$ est périodique de période 1 car :
$$g(x+k) = x + k - [x+k] = x + k - [x] - k = g(x) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$
Ceci implique que $(\forall k \in \mathbb{Z})$
$$\psi(x+k) = g(x+k) - \frac{1}{2} = g(x) - \frac{1}{2} = \psi(x).$$
Donc la plus petite valeur positive T qui vérifie $\psi(x+T) = \psi(x)$ est $T = 1$ qui représente la période de $\psi(x)$. Si $x \in [0,1[$, on a $-\frac{1}{2} \le \psi(x) < \frac{1}{2}$ et il en est de même pour tout $x \in \mathbb{R}$ à cause de la périodicité de la fonction $\psi(x)$. Il est clair que
$$\psi(n) = n - [n] - \frac{1}{2} = n - n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{Z}).$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-\lfloor x \rfloor \le -\lfloor x - y \rfloor$ et $-\lfloor x + y \rfloor \leqslant -\lfloor x \rfloor$ si y un réel positif. D'où $\psi(x) \leqslant \psi(x-y) + y$ et $\psi(x+y) - y \leqslant \psi(x)$ si $y \geqslant 0$.

3. On considère $p_1(x) = x - \frac{1}{2}$ et $\psi(x) = p_1(x - [x]) = \{x\} - \frac{1}{2}$, La fonction $\psi(x)$ est périodique d'une période T = 1, elle coinside avec $p_1(x)$ sur l'intervalle $[0,1[$, elle est discontinue sur les nombres entiers $x \in \mathbb{Z}$. La fonction $\psi(x)$ satisfait aux conditions du **Proposition 2.1** alors
$$\begin{aligned}\frac{\psi(x^+) + \psi(x^-)}{2} &= \frac{f\left(\frac{2\pi}{T}x^+\right) + f\left(\frac{2\pi}{T}x^-\right)}{2} \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right).\end{aligned}$$
où
$$\begin{aligned}a_0 &= \int_0^1 \psi(t)\,dt = 0 \\ a_n &= 2\int_0^1 \psi(t)\cos(2n\pi t)\,dt = 2\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)\cos(2n\pi t)\,dt = 0 \\ b_n &= 2\int_0^1 \psi(t)\sin(2n\pi t)\,dt = 2\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)\sin(2n\pi t)\,dt = -\frac{1}{n\pi}.\end{aligned}$$
Donc
$$\frac{\psi(x^+) + \psi(x^-)}{2} = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi n x)}{n} (x \in \mathbb{R}).$$

□

2.4.1 problème du diviseur de Dirichlet

Soit $d(n)$ la fonction nombre de diviseurs de l'entier n. Dirichlet à utilisé une méthode élémentaire afin de prouver que

$$\sum_{n\leqslant x} d(n) = x(\log x + 2\gamma - 1) + O\left(x^{1/2}\right). \tag{2.5}$$

où γ est la constante d'Euler,

$$\begin{aligned}\gamma &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{n\leqslant N}\frac{1}{n} - \log N\right)\\ &= \frac{1}{2} - \int_1^{+\infty}\frac{\psi(t)}{t^2}dt\\ &= 1 - \int_1^{+\infty}\frac{\{t\}}{t^2}dt.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Le résultat de Dirichlet va conduit naturellement à la question de savoir si le terme d'erreur de (2.5) peut être réduit. La convention habituelle est de définir

$$\Delta(x) = \sum_{n\leqslant x} d(n) - x(\log x + 2\gamma - 1). \tag{2.7}$$

Dans la suit nous allons démontrer comment on définir $\Delta(x)$ en terme de la fonction $\psi(t) = \{t\} - \frac{1}{2}$, de manière à pouvoir observer la contribution des sommes exponentielles dans le problème de Dirichlet. Nous fournissons les deux lemmes préparatifs suivants

Lemme 2.1 Deuxième formule de la moyenne

Soit $a < b$ et $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions à valeurs réelles, f étant supposée intégrable sur l'intervalle $[a,b]$ et g positive décroissante. Alors

$$\exists c \in [a,b], \quad \int_a^b f(t)g(t)dt = g(a)\int_a^c f(t)dt.$$

Lemme 2.2

Soit γ définie dans (2.6), Si $y > 0$ alors

$$\sum_{n\leqslant y}\frac{1}{n} = \log y + \gamma - \frac{\psi(y)}{y} + O\left(\frac{1}{y^2}\right).$$

Démonstration .

D'après la formule sommatoire d'Euler, en posant $f(t) = \frac{1}{t}$,nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant n\leqslant y} \frac{1}{n} &= 1 + \sum_{1<n\leqslant y} \frac{1}{n} \\
&= 1 + \int_1^y \frac{du}{u} - \int_1^y \frac{u-\lfloor u\rfloor}{u^2} du - \frac{y-\lfloor y\rfloor}{y} \\
&= 1 + \log y - \int_1^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^2} du + \int_y^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^2} du - \frac{\{y\}}{y} \\
&= \log y + \gamma + \int_y^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^2} du - \frac{\{y\}}{y} \\
&= \log y + \gamma + \int_y^{+\infty} \frac{\{u\} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{u^2} du - \frac{\{y\}}{y} \\
&= \log y + \gamma + \int_y^{+\infty} \frac{\{u\} - \frac{1}{2}}{u^2} du - \left(\frac{\{y\}}{y} - \frac{\frac{1}{2}}{y}\right) \\
&= \log y + \gamma + \int_y^{+\infty} \frac{\psi(u)}{u^2} du - \frac{\psi(y)}{y}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.2.

Soit $\Delta(x)$ *la fonction définie dans* (2.5)*, alors*

$$\Delta(x) = -2 \sum_{n\leqslant\sqrt{x}} \psi\left(\frac{x}{n}\right) + O(1).$$

Démonstration .

Soit $x \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x} d(n) &= \sum_{n\leqslant x} \sum_{d|n} 1 \\
&= \sum_{md\leqslant x} 1 \\
&= \sum_{m\leqslant\sqrt{x}} \sum_{d\leqslant\frac{x}{m}} 1 + \sum_{d\leqslant\sqrt{x}} \sum_{m\leqslant\frac{x}{d}} 1 - \sum_{m\leqslant\sqrt{x}} \sum_{d\leqslant\sqrt{x}} 1 \\
&= \sum_1 + \sum_2 + \sum_3.
\end{aligned}$$

Par symétrie, remarquons que $\sum_1 = \sum_2$, et

$$\begin{aligned}
\sum_1 &= \sum_{m\leqslant\sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor = \sum_{m\leqslant\sqrt{x}} \left(\frac{x}{m} - \psi\left(\frac{x}{m}\right) - \frac{1}{2}\right) \\
&= x \sum_{m\leqslant\sqrt{x}} \frac{1}{m} - \sum_{m\leqslant\sqrt{x}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{x} + O(1).
\end{aligned}$$

D'une part, d'après le **lemme 2.2**, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_1 &= x\left(\log\sqrt{x}+\gamma-\frac{\psi(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)-\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\psi\left(\frac{x}{m}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{x}+O(1)\\ &= x\left(\frac{1}{2}\log x+\gamma\right)-\sqrt{x}\psi(\sqrt{x})-\frac{1}{2}\sqrt{x}-\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\psi\left(\frac{x}{m}\right)+O(1).\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\sum_3 &= \lfloor\sqrt{x}\rfloor^2\\ &= \left(\sqrt{x}-\psi(\sqrt{x})-\frac{1}{2}\right)^2\\ &= x-2\sqrt{x}\psi(\sqrt{x})-\sqrt{x}+O(1).\end{aligned}$$

par conjonction des sommes $\sum_1, \sum_2$ et $\sum_3$ on trouve

$$\sum_{n\leqslant x} d(n) = x\log x+(2\gamma-1)x-2\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\psi\left(\frac{x}{n}\right)+O(1).$$

Ainsi

$$\Delta(x)=\sum_{n\leqslant x} d(n)-x(\log x+2\gamma-1)=-2\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\psi\left(\frac{x}{n}\right)+O(1).$$

$\square$

3 La méthode de Van der Corput

Dans cette partie, notre but est d'obtenir une majoration de la somme $S = \sum_{n\in I} e(f(n))$.

l'inégalité triangulaire donne :

$$|S| \leq \sum_{n\in I} |e(f(n)| = |I| = b - a. \tag{3.1}$$

mais l'égalité n'est atteinte que si $f(n) = xn + y$,avec x est un entier.

Si x n'est pas un entier, alors

$$\left|\sum_{n\in I} e(xn+y)\right| = \frac{|e(bx) - e(ax)|}{|e(x)-1|} \leq \frac{1}{|\sin \pi x|}. \tag{3.2}$$

En utilisant le fait que $|\sin \pi x| \geq 2\|x\|$ pour tout x , on obtient

$$\left|\sum_{n\in I} e(xn+y)\right| \ll \|x\|^{-1}. \tag{3.3}$$

Ce résultat est généralise dans le théorème suivant :

3.1 Théorème de Kusmin-Landu

Théorème 3.1: [6]

Si f est continûement dérivable, et f' est monotone, vérifiant $\|f'\| \geq \lambda > 0$ sur I alors,

$$\sum_{n \in I} e(f(n)) \ll \lambda^{-1}.$$

Lemme 3.1

Soit f une fonction réelle définie sur $[a, b]$, avec une dérivée continue $f'(t)$. tel que $f'(t)$ est monotone, vérifiant $|f'(t)| \leq \nu < 1$, où ν est une constante fixe. Alors

$$\sum_{a<n\leq b} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} f(n)} = \int_a^b \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} f(t)} \mathrm{d}t + O(1). \tag{3.4}$$

Démonstration .
Si $b - a \leq 1$, le résultat est trivial.
On peut donc supposer que $b - a > 1$. En appliquant la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin, nous obtenons

$$\sum_{a<n\leq b} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} f(n)} = \int_a^b \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} f(t)} \mathrm{d}t + 2\pi \mathrm{i} \int_a^b \psi(t) f'(t) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} f(t)} \mathrm{d}t + O(1). \tag{3.5}$$

Dans le second terme du cote droite de (3.5), nous utilisons la série de Fourire de $\psi(t)$ tel que

$$\psi(t) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi\, nt}{n}$$

Et en intègrant terme par terme nous obtenons

$$\begin{aligned}
2\pi \mathrm{i} \int_a^b \psi(t) f'(t) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} f(t)} \mathrm{d}t &= -2\mathrm{i} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \int_a^b f'(t) \sin 2\pi \nu t \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} f(t)} \mathrm{d}t \\
&= \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{1}{\nu} \int_a^b f'(t) \left(\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \nu t} - \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \nu t} \right) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} f(t)} \mathrm{d}t \\
&= \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{1}{\nu} \int_a^b f'(t) \left(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(f(t)-\nu t)} - \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(f(t)+\nu t)} \right) \mathrm{d}t \\
&= \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{\nu} \int_a^b f'(t) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(f(t)-\nu t)} \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Comme la fonction $t \to \dfrac{f'(t)}{\left(f'(t) - \nu\right)}$ est monotone on peut appliquer la deuxième formule de la moyenne aux parties réelle et imaginaire de l'intégrale. On obtient donc

$$\int_a^b \frac{f'(t)}{f'(t)-\nu}\left(f'(t)-\nu\right)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(f(t)-\nu t)}\mathrm{d}t \ll \left|\frac{f'(a)}{f'(a)-\nu}\right| + \left|\frac{f'(b)}{f'(b)-\nu}\right|$$
$$\ll \frac{1}{\nu}.$$

et

$$2\pi\mathrm{i}\int_a^b \psi(t)f'(t)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}f(t)}\mathrm{d}t \ll \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2} \ll 1.$$

D'où

$$\sum_{a<n\leqq b} e^{2\pi i f(n)} = \int_a^b e^{2\pi i f(t)}dt + O(1). \tag{3.6}$$

Par conséquent, le résultat (3.4) découle de (3.5). □

Lemme 3.2

Soit f une fonction réelle définie sur $[a,b]$ et deux fois continûement dérivable, tel que $\left|f''(t)\right| \geq \lambda_2 > 0$, alors

$$\int_a^b \mathrm{e}^{\mathrm{i}f(t)}\mathrm{d}t \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}. \tag{3.7}$$

Démonstration .

Supposons que $\left|f''(t)\right| \geq \lambda_2 > 0$, alors $f'(t)$ est strictement croissante.
Par conséquent, l'intervalle $[a,b]$ est peut diviser au plus en deux parties, ou $f'(t)$ soit positive ou négative dans tout au long de l'intérieur de chaque parties. Supposons que $f' > 0$ tout au long de l'intervalle (a,b) ou $f' < 0$.
Soit $f' > 0$ de plus, nous supposons que $b-a > \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$, puisque sinon (3.7) est trivial.
Alors

$$\int_a^{a+\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}f(t)}\mathrm{d}t \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}. \tag{3.8}$$

et par la deuxième formule de la moyenne on a

$$\int_{a+\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}}^b e^{if(t)}dt \ll \frac{1}{f'\left(a+\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)}.$$

Donc il existe un réel c avec $a < c < a + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$ tel-que

$$\frac{f'\left(a+1/\sqrt{\lambda_2}\right)-f'(a)}{a+1/\sqrt{\lambda_2}-a} = f''(c) \geqq \lambda_2.$$

par conséquent

$$f'\left(a+1/\sqrt{\lambda_2}\right) \geqq f'(a)+\sqrt{\lambda_2} \geqq \sqrt{\lambda_2}.$$

et

$$\int_{a+1/\sqrt{\lambda_2}}^{b} e^{if(t)}\,dt \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}. \tag{3.9}$$

D'après (3.8) et (3.9) on obtient (3.7).
Dans le cas où $f'(t) < 0$ la preuve est similaire. □

Théorème 3.2

Soit f une fonction réelle définie sur $[a, b]$ et deux fois continûment dérivables,tel que $|f''(t)| \geq \lambda_2 > 0$ pour tout $t \in [a, b]$. Alors

$$\sum_{a<n\leq b} \mathrm{e}^{2\pi i f(n)} \ll \frac{|f'(b)-f'(a)|+1}{\sqrt{\lambda_2}}. \tag{3.10}$$

Démonstration .
Si $\lambda_2 \geq 1$, le résultat est triviale puisque nous avons

$$\sum_{a<n\leq b} e^{2\pi i f(n)} \ll (b-a)\sqrt{\lambda_2} \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\int_a^b |f''(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{|f'(b)-f'(a)|}{\sqrt{\lambda_2}}.$$

donc nous suppose que $0 < \lambda_2 < 1$. soit $f''(t) \geq \lambda_2 > 0$. soit $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ avec $\frac{h-1}{2} \leq f'(t) \leq \frac{h+1}{2}$, où h est un entier.On obtient de (3.4) et (3.7)

$$\sum_{\alpha<n\leq\beta} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}f(n)} = \sum_{\alpha<n\leq\beta} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(f(n)-hn)} = \int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(f(t)-ht)}\mathrm{d}t + O(1) \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}.$$

L'intervalle $[a, b]$ peut être divisé en au plus $O\left(|f'(b)-f'(a)|+1\right)$ sous-intervalles du type ci-dessus. Cela prouve l'estimation (3.10). □

Théorème 3.3

Soit f une fonction réelle définie sur $[a, b]$ et deux fois continûment dérivables, tel que $|f''(t)| \geq \lambda_2 > 0$, pour tout $t \in [a, b]$. Alors

$$\sum_{a<n\leq b} \psi(f(n)) \ll \frac{|f'(b)-f'(a)|}{\lambda_2^{2/3}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}. \tag{3.11}$$

Démonstration .
On en déduit a partir de (3.10)

$$\sum_{a<n\leq b} e^{2\pi i \nu f(n)} \ll |f'(b)-f'(a)|\sqrt{\frac{\nu}{\lambda_2}} + \frac{1}{\sqrt{\nu\lambda_2}}.$$

on prend

$$\sum_{n\in I}\psi(f(n)) \ll \sum_{n\in I}\frac{1}{z}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\min\left(\frac{z^s}{\nu^{s+1}},\frac{1}{\nu}\right)\left|\sum_{n\in I}e^{2\pi i\nu f(n)}\right| \qquad [9].$$

Avec $s=1$ on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{a<n\leqq b}\psi(f(n)) &\ll \frac{b-a}{z}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\min\left(\frac{z}{\nu^2},\frac{1}{\nu}\right)\left(\left|f'(b)-f'(a)\right|\sqrt{\frac{\nu}{\lambda_2}}+\frac{1}{\sqrt{\nu\lambda_2}}\right)\\ &\ll \frac{b-a}{z}+\left|f'(b)-f'(a)\right|\sqrt{\frac{z}{\lambda_2}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}.\end{aligned}$$

parce que $\left|f'(b)-f'(a)\right| = \int_a^b \left|f''(t)\right| \mathrm{d}t \geqq (b-a)\lambda_2$
on a

$$\sum_{a<n\leqq b}\psi(f(n)) \ll \left|f'(b)-f'(a)\right|\left(\frac{1}{z\lambda_2}+\sqrt{\frac{z}{\lambda_2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}.$$

les deux premiers termes sont du même ordre si on remplace $z=\lambda_2^{-1/3}$. □

3.2 Applications

3.2.1 Théorème de Van der corput

Théorème 3.4

Soit f une fonction réelle définie sur $[a,b]$ et deux fois continûment dérivables, et $f''(t)$ est une fonction monotone qui soit positive ou négative , pour tout $t\in[a,b]$. Alors

$$\sum_{a<n\leq b}\psi(f(n)) \ll \int_a^b \left|f''(t)\right|^{1/3}\mathrm{d}t+\frac{1}{\sqrt{\left|f''(a)\right|}}+\frac{1}{\sqrt{\left|f''(b)\right|}}. \qquad (3.12)$$

Démonstration .
Nous supposons que la fonction f croissante et monotone, on divise l'intervalle $[a,b]$ en sous intervalles $(t_\nu,t_{\nu+1}]$ tel que $(\nu=0,1,\ldots,N-1)$ et $(t_N,b]$ tel que $t_0=a$

$$2^\nu\left|f''(a)\right| \leq \left|f''(t)\right| \leq 2^{\nu+1}\left|f''(a)\right| \leq f''(b).$$

Si $t_\nu < t \leq t_{\nu+1}$,

$$N=\left[\frac{\log\left|f''(b)\right|-\log\left|f''(a)\right|}{\log 2}\right].$$

En appliquant (3.11) nous obtenons

$$\sum_{a<n\leq b}\psi(f(n))=\sum_{\nu=0}^{N-1}\sum_{t_\nu<n\leq t_{\nu+1}}\psi(f(n))+\sum_{t_N<n\leqq b}\psi(f(n))$$
$$\ll\sum_{\nu=0}^{N-1}\frac{\left|f'(t_{\nu+1})-f'(t_\nu)\right|}{\left(2^\nu\left|f''(a)\right|\right)^{2/3}}+\frac{\left|f'(b)-f'(t_N)\right|}{\left(2^N\left|f''(a)\right|\right)^{2/3}}+\sum_{\nu=0}^{N}\frac{1}{\sqrt{2^\nu\left|f''(a)\right|}}.$$

$$\ll\sum_{\nu=0}^{N-1}\left(2^\nu\left|f''(a)\right|\right)^{-2/3}\int_{t_\nu}^{t_\nu+1}\left|f''(t)\right|\mathrm{d}t+\left(2^N\left|f''(a)\right|\right)^{-2/3}\int_{t_N}^{b}\left|f''(t)\right|\mathrm{d}t+\frac{1}{\sqrt{\left|f''(a)\right|}}$$
$$\ll\int_a^b\left|f''(t)\right|^{1/3}\mathrm{d}t+\frac{1}{\sqrt{\left|f''(a)\right|}}.$$

□

Théorème 3.5

Soit f une fonction réelle définie et deux fois continûment dérivables sur I . Supposons aussi qu'il existe un réel $\lambda>0$ et un réel $\alpha\geq 1$ tel que $\lambda\leq\left|f''(x)\right|\leq\alpha\lambda$ sur I. Alors

$$\sum_{n\in I}e(f(n))\ll\alpha|I|\lambda^{1/2}+\lambda^{-1/2}.$$

Démonstration .
Soit $\delta<\frac{1}{2}$ un paramètre à choisir ultérieurement.

À partir de l'hypothèse, l'intervalle I peut divisé en $\leq\alpha|I|\lambda+2$ intervalles sur lesquels $\left\|f'\right\|\geq\delta$ et $\leq\alpha|I|\lambda+1$ autres intervalles, chacun desquels de longueur $\leq\frac{2\delta}{\lambda}$. Nous appliquons le **Théorème 3.1** au premier ensemble d'intervalles où l'estimation est triviale au deuxième ensemble. On a

$$\sum_{n\in I}e(f(n))\ll(\alpha|I|\lambda+1)(\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{\lambda}+1).$$

Nous choisissons $\delta=\lambda^{\frac{1}{2}}$; cela donne le résultat souhaité si $\lambda\leq\frac{1}{4}$. Si $\lambda>\frac{1}{4}$, le résultat découle de l'estimation triviale. □

3.2.2 Majoration de la fonction Zêta de Riemann

Pour $s=\sigma+it$, la fonction zêta de Riemann est définie par

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}.$$

avec $\sigma>1$. Cette fonction est analytiquement continue dans tout le plan, sauf pour un pôle simple à $s=1$. Nous avons besoin de cette continuité que pour $\sigma>0$, et nous faisons cela pour prouver le **lemme 3.4** . Ici nous allons travailler sur le domaine $\frac{1}{2}\leq\sigma\leq1$ et $t\geq3$. Cette dernière restriction nous permet d'éviter le pôle à $s=1$ et de considérer $\log t$ et $\log\log t$ comme des quantités positives. Nos deux premiers lemmes réduisent le problème à des estimations de sommes exponentielles finies.

Lemme 3.3

Si $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ et $N \leq M$ alors

$$\sum_{N<n\leq M} n^{-\sigma-it} \ll N^{-\sigma} \max_{N<u\leq M} \left| \sum_{N<n\leq u} n^{-it} \right|.$$

Démonstration .
Soit $S(u) = \sum_{N<n\leq u} n^{-it}$ Alors

$$\begin{aligned}\sum_{N<n\leq M} n^{-\sigma-it} &= \int_N^M u^{-\sigma} dS(u) = S(M)M^{-\sigma} + \sigma \int_N^M S(u)u^{-\sigma-1} du \\ &\ll N^{-\sigma} \max_{N<u\leq M} |S(u)|.\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Lemme 3.4

Si $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ et $t \geq 3$ alors

$$|\zeta(\sigma+it)| \ll \left| \sum_{n\leq t} n^{-\sigma-it} \right| + t^{1-2\sigma} \log t.$$

Démonstration .
Si $\sigma > 1$ et $M \geq 1$ alors

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \sum_{n\leq M} n^{-s} + \int_M^\infty u^{-s} d[u] \\ &= \sum_{n\leq M} n^{-s} + \int_M^\infty u^{-s} d(u-\{u\}) \\ &= \sum_{n\leq M} n^{-s} + \frac{M^{1-s}}{s-1} + s\int_M^\infty \frac{[u]-u}{u^{s+1}} du.\end{aligned}$$

La dernière intégrale converge pour $\sigma > 0$, ce qui donne une suite analytique de $\zeta(s)$ à la région $\sigma > 0, s \neq 1$. On définit $M = t^2$ et on utilise l'inégalité $|[u]-u| \leq 1$ pour obtenir

$$\zeta(s) = \sum_{n\leq t^2} n^{-s} + O\left(t^{1-2\sigma}\right)$$

La somme sur le domaine $t < n \leq t^2$ peut être divisée en $\ll \log t$ subsums du formulaire

$$\sum_{N<n\leq N_1} n^{-\sigma-it}$$

où $N_1 = \min\left(2N, t^2\right)$. À partir du **lemme 3.3** et **Théorème 3.1** nous voyons que chacun des subsums ci-dessus est $\ll N^{1-\sigma} t^{-1} \ll t^{1-2\sigma}$. □

4 La méthode des paires d'exposants

Dans cette partie, la notation $S = \sum_{n\in I} e(f(n))$ est conservée, mais on suppose qu'il existe un entier N tel que $I \subseteq [N, 2N]$. Nous travaillerons sur une certaine famille de fonctions (voir **Définition 4.2**), mais la caractéristique la plus importante est que $f' \approx yx^{-s}$, où y et s des réels strictement positifs. On obtient alors des majorations de S de la forme :

$$S \ll L^k N^\ell.$$

où $L = yN^{-s}$, (Noter que $f' \approx L$) nous montrons que si (k,ℓ) est une paire d'exposants, alors

$$A(k,\ell) = \left(\frac{k}{2k+2}, \frac{k+\ell+1}{2k+2}\right).$$

et

$$B(k,\ell) = (\ell - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}).$$

sont des paires d'exposants. Comme $(0,1)$ est trivialement une paire d'exposants (cela découle de (3.1)), on obtiendra de nouvelles paire d'exposants en appliquant A et B à cette paire.

4.1 Lemmes préliminaires

Dans cette section, nous aurons besoin des lemmes qui suivent :

Lemme 4.1

Soit
$$L(H)=\sum_{i=1}^{m}A_iH^{a_i}+\sum_{j=1}^{n}B_jH^{-b_j}.$$
où A_i, B_j, a_i, et b_j sont positifs. Supposons que $H_1 \leq H_2$. Alors il existe un $H\in[H_1,H_2]$ tel-que
$$L(H)\ll\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(A_i^{b_j}B_j^{a_i}\right)^{1/(a_i+b_j)}+\sum_{i=1}^{m}A_iH_1^{a_i}+\sum_{j=1}^{n}B_jH_2^{-b_j}.$$
La constante de majoration ne dépendant que de m et n.

Démonstration .
On suppose que
$$L_+(H)=\max(A_1H^{a_1},...,A_mH^{a_m}).$$
et
$$L_-(H)=\max(B_1H^{-b_1},...,B_mH^{-b_m}).$$
Comme $L\leq mL_++nL_-$, il suffit de majorer L_+ et L_-. On a donc
L_+ est une fonction croissante, et $L_+(0)=0$, $L_+(\infty)=\infty$.
L_- est une fonction décroissante, et $L_-(0)=\infty$, $L_-(\infty)=0$.

Il y a donc un unique H_0 tel que $L_+(H_0)=L_-(H_0)$. Distinguons trois cas : $H_1\leq H_0\leq H_2$, $H_0<H_1$ et $H_0>H_2$.

1. Si $H_1\leq H_0\leq H_2$, alors il existe i et j tel-que $L_+(H_0)=A_iH^{a_i}=L_-(H_0)=B_jH^{-b_j}$, et donc
$$L_+(H_0)=L_-(H_0)=({A_i}^{bj}{B_j}^{ai})^{\frac{1}{(a_i+b_j)}}.$$

2. Si $H_0<H_1$,alors
$$L_-(H_1)<L_+(H_1)\leq\sum_{i=1}^{m}A_i{H_1}^{a_i}.$$

3. Si $H_0>H_2$,alors
$$L_-(H_2)<L_+(H_2)\leq\sum_{j=1}^{n}B_j{H_2}^{-b_j}.$$

□

Lemme 4.2 [6]

Soit f une fonction $\mathscr{C}^4$ sur $[a,b]$, avec $f'' < 0$ sur cet intervalle. et $[a,b] \subseteq [N,2N]$. Soit $\alpha = f'(b)$ et $\beta = f'(a)$. Supposons qu'il existe un $F > 0$ tel que

$$f^{(2)}(x) \approx FN^{-2}, f^{(3)}(x) \ll FN^{-3}, \text{ and } f^{(4)}(x) \ll FN^{-4}.$$

sur $[a,b]$. Soit x_ν définie par $f'(x_\nu) = \nu$, et soit $\phi(\nu) = -f(x_\nu) + \nu x_\nu$ Alors

$$\sum_{n\in I} e(f(n)) = \sum_{\alpha\le\nu\le\beta} \frac{e(-\phi(\nu)-1/8)}{\left|f''(x_\nu)\right|^{1/2}} + O\left(\log\left(FN^{-1}+2\right) + F^{-1/2}N\right).$$

4.2 Définitions

Définition 4.1

Soit N, y, s et ϵ des réels positifs avec $\epsilon < \frac{1}{2}$, soit P un entier positif. $\mathscr{F}(N,P,s,y,\epsilon))$ est l'ensemble des fonctions f telles que :

1. f est $\mathscr{C}^P$ sur un intervalle $[a,b]$, avec $[a,b] \subseteq [N,2N]$.

2. Si $0 \le p \le P-1$ et $a \le x \le b$ alors

$$\left|f^{(p+1)}(x) - (-1)^p (s)_p y x^{-s-p}\right| < \epsilon (s)_p y x^{-s-p}.$$

Définition 4.2

Soit $k \in [0, \frac{1}{2}]$ et $\ell \in [\frac{1}{2}, 1]$. (k,ℓ) est une paire d'exposants si pour tout $s > 0$, il existe P et $\epsilon < \frac{1}{2}$ tels que pour tout $N > 0$, $y > 0$ et $f \in \mathscr{F}(N,P,s,y,\epsilon)$, on ait

$$S \ll \left(yN^{-s}\right)^k N^\ell + y^{-1}N^s.$$

Nous supposerons en fait toujours dans nos démonstrations que $yN^{-s} \ge 1$ car si $yN^{-s} < \frac{1}{2}$, le **Théorème 3.1** donne

$$\sum_{n\in I} e\left(f(n)\right) \ll y^{-1}N^{-s}.$$

et si $\frac{1}{2} \le yN^{-s} < 1$ alors le **Théorème 3.5** donne

$$\sum_{n\in I} e\left(f(n)\right) \ll N^{\frac{1}{2}}.$$

4.3 Transformation A

Le fait que $A(k,\ell)$ soit une paire d'exposants découle de l'inégalité

$$|S|^2 \leq \frac{2|I|^2}{H} + \frac{4|I|}{H} \sum_{1\leq|h|\leq H} |S_1(h)| \tag{4.1}$$

et donc la démonstration fait intervenir la fonction $f_1(x) = f(x) - f(x+h)$. On aura donc besoin du lemme suivant :

Lemme 4.3

Supposons que $f \in \mathscr{F}(N,P,s,y,\epsilon)$ définie sur $[a,b]$, et $h \in [1,\min\{(b-a),\frac{2\epsilon N}{(s+P)}\}[$. Alors f_1 est définie sur $[a,b-h]$ et $f_1 \in \mathscr{F}(N,P-1,s+1,shy,3\epsilon)$

Démonstration .
soit

$$F(x) = \begin{cases} yx^{1-s}(1-s)^{-1} & \text{Si } s \neq 1 \\ y\log x & \text{Si } s = 1 \end{cases}$$

La condition
$S = e(-1/8) \sum_{\alpha\leq\nu\leq\beta} \frac{e(-\phi(\nu))}{|f''(x_\nu)|^{1/2}} +$ termes d'erreur .
peut être écrire comme

$$\left|f^{(p+1)}(x) - F^{(p+1)}(x)\right| < \epsilon\left|F^{(p+1)}(x)\right|.$$

supposons que $\mathscr{F}_1(x) = F(x) - F(x+h)$ et $G(x) = -hyx^{-s}$.

Nous allons montrer que

$$\left|f_1^{(p+1)}(x) - F_1^{(p+1)}(x)\right| < \epsilon\left|F_1^{(p+1)}(x)\right|. \tag{4.2}$$

et cela

$$\left|F_1^{(p+1)}(x) - G^{(p+1)}(x)\right| < \epsilon\left|G^{(p+1)}(x)\right|. \tag{4.3}$$

Lorsque $0 \leq p \leq P-2$. Le résultat souhaité suivra alors facilement. De nos définitions de f_1 et $\mathscr{F}_1$, nous voyons que

$$\left|f_1^{(p+1)}(x) - F_1^{(p+1)}(x)\right| = \left|\int_x^{x+h} f^{(p+2)}(u) - F^{(p+2)}(u)\,du\right|.$$

Lorsque $a \leq x \leq b-h$ et $0 \leq p \geq P-2$, ce qui précède est limité par

$$\epsilon \int_x^{x+h} \left|F^{(p+2)}(u)\right| du = \epsilon\left|F_1^{(p+1)}(x)\right|.$$

Cela prouve (4.2). Pour (4.3), on observe que le côté gauche est égal à

$$y(s)_{p+1}\left|\int_x^{x+h} \left(u^{-s-p-1} - x^{-s-p-1}\right) du\right| = y(s)_{p+2}\left|\int_x^{x+h}\int_x^{y} w^{-s-p-2}\,dw\,du\right|.$$

Ceci est à son tour

$$\leq \frac{1}{2}(s)_{p+2}yh^2x^{-s-p-2} < \epsilon(s+1)_p shyx^{-s-p-1}.$$

à condition que $h < \dfrac{2\epsilon x}{(s+p+1)}$. Cette dernière condition est garantie par notre hypothèse $h < \dfrac{2\epsilon N}{(s+p)}$.

Pour compléter la preuve, notons que

$$\left|F_1^{(p+1)}(x)\right| < (1+\epsilon)\left|G^{(p+1)}(x)\right|.$$

découle de (4.3). En combinant cela avec (4.2) et (4.3), on obtient

$$\left|f_1^{(p+1)}(x) - G^{(p+1)}(x)\right| < \left(2\epsilon+\epsilon^2\right)\left|G^{(p+1)}(x)\right|.$$

Notez que $2\epsilon+\epsilon^2 < 3\epsilon$ de puis $\epsilon < 1$. □

On pourra donc appliquer la définition de la paire d'exposants à (k,ℓ) et f_1.

Théorème 4.1

(k,ℓ) est une paire d'exposants, alors

$$(\kappa,\lambda) = A(k,\ell) = \Big(\frac{k}{(2k+2)}, \frac{(k+\ell+1)}{(2k+2)}\Big).$$

est une paire d'exposants .

Démonstration .
On a bien $(\kappa,\lambda) \in [0,\frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2},1]$, Maintenant soit y, N et s positifs. Il suffit de montrer qu'il existe $P_1 > 0$ et $\epsilon_1 > 0$ tel que si $f \in \mathscr{F}\left(N, P_1, s, y, \epsilon_1\right)$ et $L = yN^{-s} \geq 1$ alors

$$S = \sum_{n\in I} e(f(n)) \ll L^\kappa N^\lambda.$$

1^{er} *Cas* : $L \geq \ln N$.
Soit $P > 0$ et $\epsilon \in]0,\frac{1}{2}[$ tel-que si $f \in \mathscr{F}\left(N, P_1, s, y, \epsilon\right)$, alors

$$S \ll \left(yN^{-s}\right)^k N^l + y^{-1}N^s.$$

Montrons que $P_1 = P+1$ et $\epsilon_1 = \epsilon/3$ conviennent. Soit $H \leq \min\left(b-a, \dfrac{2\epsilon N}{(s+P)}\right)$, L'inégalité (4.1) donne $|S|^2 \leq \dfrac{N^2}{H} + \dfrac{N}{H}\displaystyle\sum_{1\leq h\leq H}|S_1(h)|$.

D'après le **lemme 4.3**, $f_1 \in \mathscr{F}(N, P, shy, s+1, \epsilon)$ donc comme (k,ℓ)est une paire d'exposants on peut appliquée à $S_1(h)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}|S|^2 &\ll H^{-1}N^2 + H^{-1}N\sum_{1\leq h\leq H}\left\{\left(hLN^{-1}\right)^k N^l + h^{-1}L^{-1}N\right\}\\ &\ll H^{-1}N^2 + H^kL^kN^{l-k+1} + H^{-1}L^{-1}N^2\log N.\end{aligned}$$

Comme $L \geq \ln N$, le premier terme domine le troisième. En appliquant le **lemme 4.1** et en utilisant la borne supérieure $H \leq \min(b-a, 2\epsilon N/(s+P))$, on obtient

$$S \ll L^{\kappa} N^{\lambda} + N(b-a)^{-1/2}.$$

Si le premier terme domine, on a la majoration souhaitée. Sinon, l'inégalité (3.1) donne

$$S \ll \min\left(N(b-a)^{-1/2}, b-a\right) \ll N^{2/3}.$$

Depuis $k < \frac{1}{2}$ et $\ell > \frac{1}{2}$, nous avons

$$\lambda = \frac{1}{2} + \frac{\ell}{2k+2} \geq \frac{2}{3}.$$

et la majoration souhaitée $s \ll N^{\kappa} L^{\lambda}$.

$2^{eme} Cas: \quad 1 \leq L \leq \ln N$
En utilisons le **Théorème 3.5** , on obtient

$$S \ll N^{\frac{1}{2}} (\ln N)^{\frac{1}{2}} \ll N^{\frac{2}{3}} \ll L^{\kappa} N^{\lambda}.$$

□

4.4 Transformation B

Ici encore, nous avons besoin d'un lemme préliminaire qui nous assure que les fonction auxiliaires que nous utiliserons sont dans un ensemble $\mathscr{F}$ approprié.

Lemme 4.4

soit $f \in \mathscr{F}(N, P, s, y, \epsilon)$ définie sur $[a, b]$. soit $\alpha = f'(b)$ et $\beta = f'(a)$. Pour $v \in [\alpha, \beta]$, soit x_v définie par $f'(x_v) = v$ et définir $\phi(v) = v x_v - f(x_v)$. Soit $\sigma = \frac{1}{s}$ et $\eta = y^{\sigma}$. Alors il existe une constante $C = C(s, P)$ telle que

$$\left|\phi^{p+1}(v) - (-1)^p (\sigma)_p \eta v^{-\sigma-p}\right| < C\epsilon(\sigma)_p \eta v^{-\sigma-p}.$$

$\forall \;\; 0 \leq p \leq P-1$ et $\alpha \leq v \leq \beta$

Démonstration .
Comme dans la preuve de **Lemme 4.3**, soit

$$F(x) = \begin{cases} y x^{1-s}(1-s)^{-1} & \text{Si } s \neq 1 \\ y \log x & \text{Si } s = 1 \end{cases}$$

La condition

$$S_1(h) = \sum_{n < n+h \leq b} e\left(f_1(n, h)\right)$$

peut être écrite comme

$$\left|f^{p+1}(x) - F_{p+1}(x)\right| < \epsilon \left|F_{p+1}(x)\right|. \tag{4.4}$$

Soit X_ν définie par la relation $F'(X_\nu) = \nu$, et Soit $\Phi(\nu) = \nu X_\nu - F(X_\nu)$. Il est facile de voir que $x_\nu = \phi'(\nu)$ et $X_\nu = \Phi'(\nu) = \eta\nu^{-\sigma}$. Pour compléter la preuve, nous montrerons qu'il existe un constant $C = C(s, P)$ tel que

$$\left|\phi^{p+1}(\nu) - \Phi_{p+1}(\nu)\right| < C\epsilon\Phi_{p+1}(\nu)). \tag{4.5}$$

$\forall\ 0 \le p \le P-1$ et $\alpha \le \nu \le \beta$.

D'après nos définitions, nous notons que $f'\left(\phi'(\nu)\right) = \nu$.
En dériver les deux côtés en ce qui concerne ν, nous obtenons

$$\phi''(\nu) = \frac{1}{f''(x_\nu)}$$

Notez que pour $p \ge 1$, nous pouvons trouver les constantes $w\left(u_1, \ldots, u_{p-1}\right)$ tel que

$$\phi^{p+1}(\nu) = \frac{1}{\left(f''(x_\nu)\right)^{2p-1}} \sum w\left(u_1, \ldots, u_{p-1}\right) f^{(u_1+1)}(x_\nu) \ldots f^{(u_{p-1}+1)}(x_\nu). \tag{4.6}$$

où la somme est sur tout $u_1, \ldots, u_{p-1}$ tels que $1 \le u_j \le p$ et $u_1 + \ldots + u_{p-1} = 2p-2$. Les constantes $w\left(u_1, \ldots, u_{p-1}\right)$ dépendent uniquement de $u_1, \ldots, u_{p-1}$ et non sur f, donc nous avons aussi

$$\Phi_{p+1}(\nu)) = \frac{1}{(F''(x_\nu))^{2p-1}} \sum w\left(u_1, \ldots, u_{p-1}\right) F^{(u_1+1)}(x_\nu) \ldots F^{(u_{p-1}+1)}(x_\nu). \tag{4.7}$$

De (4.4), on voit que

$$\left|f'(x_\nu) - F'(x_\nu)\right| = \left|\nu - y x_\nu^{-s}\right| < \mathrm{e}y\, x_\nu^{-s}.$$

Par conséquent,

$$(1-\epsilon)^\sigma \eta\nu^{-\sigma} < x_\nu < (1+\epsilon)^\sigma \eta\nu^{-\sigma}.$$

et donc

$$|x_\nu - X_\nu| \ll \epsilon\eta\upsilon^{-\sigma}.$$

(Ici et dans le reste de cette preuve, toutes les constantes << – dépendent au plus de s et P.)
À partir de (4.4), on voit que si $0 < p < P-1$ alors

$$\left|f^{p+1}(x_\nu) - F_{p+1}(x_\nu)\right| < \epsilon\left|F_{p+1}(x_\nu)\right| \ll \epsilon y N^{-s-p}$$

En outre, il existe une partie de l'intervalle ouvert avec les points de terminaison x et X tels que

$$\left|F_{p+1}(x_\nu) - F_{p+1}(X_\nu)\right| = \left|F^{(p+2)}(t)(X_\nu - x_\nu)\right| \ll \epsilon y N^{-s-p-1}\eta\nu^{-\sigma} \ll \epsilon y N^{-s-p}$$

Les deux dernières estimations ensemble

$$\left|f^{p+1}(x_\nu) - F_{p+1}(X_\nu)\right| \ll \epsilon y N^{-s-p}.$$

En combinant cela avec (4.6) et (4.7), nous trouvons que

$$
\begin{aligned}
|\phi^{p+1}(v)-\Phi_{p+1}(v))| &\ll \frac{\epsilon}{|F''(X_v)|^{2p-1}} \sum \left|w\left(u_1,\dots,u_{p-1}\right)\right| y^{p-1} X_v^{-s(p-1)-(u_1+\dots+u_{p-1})} \\
&\ll \frac{\epsilon}{\left|yX_v^{-s-1}\right|^{2p-1}} \\
&\ll y^{p-1} X_v^{-s(p-1)-(u_1+\dots+u_{p-1})} \\
&\ll \epsilon y^{-p} N^{ps+1} \\
&\ll \epsilon |\Phi_{p+1}(v))|.
\end{aligned}
$$

Ceci prouve (4.5). □

Dans notre définition de $\mathscr{F}$, le **lemme 4.4** dit que si $f \in \mathscr{F}(N,P,s,y,\epsilon)$ alors la restriction de ϕ à l'intervalle $[\alpha,\beta]\cap[J,2J]$ est dans $\mathscr{F}(J,P,\sigma,\eta,C\epsilon)$ pour tout J , $\alpha \le J \le \beta$.

Théorème 4.2

Si (k,ℓ) est un paire d'exposants, Alors

$$
(\kappa,\lambda) = B(k,\ell) = (\ell-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}).
$$

est un paire d'exposants.

Démonstration .

On a bien $(\kappa,\lambda)\in[0,\frac{1}{2}]\times[\frac{1}{2},1]$. Soit y, s et N. On cherche P_1 et ϵ_1 strictement positifs tels que si $f\in\mathscr{F}(N,P_1,s,y,\epsilon)$ et $L\ge 1$ alors $S\ll L^\kappa N^\lambda$. Soit $P>0$ et $\epsilon\in]0,\frac{1}{2}[$ tels que si $f\in\mathscr{F}(N,P,s,y,\epsilon)$, alors

$$
S \ll (yN^{-s})^\kappa N^\lambda + y^{-1}N^s.
$$

Montrons que $P_1 = P$ et $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{C}$, où C est la constante du **lemme 4.4**, conviennent. f vérifie les hypothèse du **lemme 4.1** avec $\mathscr{F} = LN$, donc

$$
S = \sum_{\alpha\le v\le\beta} \frac{e(-\phi(v)-\frac{1}{8})}{\left|f''(x_v)\right|^{\frac{1}{2}}} + O\left(\ln(2L) + L^{\frac{-1}{2}} N^{\frac{1}{2}}\right). \tag{4.8}
$$

Le lemme précédent donne

$$
\boldsymbol{T}(w) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\alpha<v\le w} e(\phi(v)) \ll \left(\eta J^{-\sigma}\right)^k J^\ell + \eta^{-1} J^\sigma \ll N^k J^\ell + N^{-1}.
$$

Donc la somme de l'égalité (4.8) vaut

$$
\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta \left|f''(x_w)\right|^{-1/2} d\overline{T(w)} &= \overline{T(w)}\left|f''(x_w)\right|^{-1/2}]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \overline{T(w)} \frac{d}{dw}\left|f''(x_w)\right|^{-1/2} dw \\
&\ll \left(N^k L^l + N^{-1}\right)\left\{\left(LN^{-1}\right)^{-1/2} + \int_\alpha^\beta \left|\frac{d}{dw}|f''(x_w)|^{-1/2}\right| dw\right\} \\
&\ll L^\kappa N^\lambda + L^{-1/2} N^{-1/2}.
\end{aligned}
$$

On a donc finalement $S \ll L^{\kappa}N^{\lambda}+\ln(2L)+L^{-1/2}N^{1/2}$. Comme $\kappa>0$ et $L\geq 1$, le 1^{er} terme domine les deux autres. □

4.5 Applications

Lemme 4.5 [6], [12]

supposant que $J\geq 1$.Il existe des coefficients $\gamma(j)$ tels que

$$\psi(w)\leq J^{-1}+\sum_{1\leq|j|\leq J}\gamma(j)e(jw).$$

Avec $\gamma(j)\ll|j^{-1}|$.

Donc on peut utiliser les paires d'exposants.

Théorème 4.3

supposant que (k,ℓ) est une paire exposant, et $P=P(k,\ell)$ et $\epsilon=\epsilon(k,\ell)$ les paramètres correspondants.Si $f\in\mathscr{F}(N,P,s,y,\epsilon)$ et si f est définie sur $[a,b]$, alors

$$\sum_{n\leq I}\psi\big(f(n)\big)\ll y^{k/k+1}N^{((1-s)(k+\ell))/(k+1)}+y^{-1}N^{s}.$$

Démonstration .
L'application du **lemme 4.5** donne

$$\psi\big(f(n)\big)\ll NJ^{-1}+\sum_{1\leq|j|\leq J}j^{-1}\left|\sum_{a<n\leq b}e(jf(n))\right|.$$

Comme (k,ℓ) est une paire d'exposants, on en déduit

$$\begin{aligned}\sum_{n\in I}\psi\big(f(n)\big)&\ll NJ^{-1}+\sum_{1\leq|j|\leq J}j^{-1}((jyN^{-s})^{k}N^{\ell}+j^{-1}y^{-1}N^{s})\\&\ll NJ^{-1}+J^{k}N^{\ell-ks}y^{k}+y^{-1}N^{s}.\end{aligned}$$

On obtient le résultat en posant $J^{k+1}=y^{-k}N^{sk-\ell+1}$ □

D'après le **Théorème 4.3** en peut améliorer la majoration du terme d'erreur de l'équation (2.5).Nous allons pour cela l'exprimer a l'aide de la fonction ψ .

Théorème 4.4

Si (k,ℓ) est un paire exposants, alors

$$\Delta(x)\ll x^{(k+\ell)/(2k+2)}.$$

Si $(k,\ell)\neq\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, alors le $\log x$ facteur dans ce qui précède peut être supprimé. En particulier

$$\Delta(x)\ll x^{27/82}.$$

Démonstration .
Nous commençons par écrire

$$\sum_{m\le x^{1/2}} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{1\le j\le J}\sum_{n\in I_j} \psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

où

$$I_j = \left\{n : 2^{-j}x^{1/2} < n \le 2^{-j+\ell}x^{1/2}\right\}.$$

En appliquant le **Théorème 4.3**, on obtient

$$\sum_{m\le x^{1/2}} \psi\left(\frac{x}{n}\right) \ll x^{(k+\ell)/(2k+2)} \sum_{1\le j\le J} 2^{-j(\ell-k)} + \sum_{1\le j\le J} 2^{-2j}. \tag{4.9}$$

la deuxième somme du cote droit est $\ll 1$.

Si $(k,\ell) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ alors (4.9) est

$$\ll x^{\frac{1}{2}} \ln x.$$

Si $(k,\ell) \neq (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ et $\ell > k$

$$\sum_{1\le j\le J} 2^{-2j}.$$

convergent. Dans ce cas, nous obtient l'estimation

$$\sum_{m\le x^{1/2}} \psi\left(\frac{x}{n}\right) \ll x^{(k+\ell)/(2k+2)}.$$

le résultat souhaitée découle maintenant du **Proposition 2.2**. L'exposant $\frac{27}{82}$ suit de prendre $(k,\ell) = BA^3B(0,1) = (\frac{11}{30},\frac{26}{30})$.

□

Bibliographie

[1] M.T. Apostol, Introduction to analytic number theory, 1976.

[2] S. Bahman, Sur quelques applications de la méthode de l'hyperbole de Dirichlet a la théorie des nombres premiers, 1968.

[3] A. Blanchard, Initiation a théorie analytique des nombres, 1969.

[4] P. Dusart, Sharper bounds for φ, θ, ψ, p_n, Université de Limoges, 2006.

[5] H.M. Edwards, Introduction to number theory, 2008.

[6] S.W. Graham et G. Kolesnik, Van der Corput's method of exponential sums, volume 126 de London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, 1991.

[7] G.H. Hardy et E.M. Wright, An Introduction to the theory of numbers, Clarendon Press, 1979.

[8] M.N. Huxley et N. Watt, Exponential sums and the Riemann zeta-function, Proc. London Math. Soc, 57, p. 1-24,1988.

[9] E. Kratze, Lattice points, Kluwer Academic Publishers London, Friedrich Schiller University Jena, G. D. R.

[10] E.C. Titchmarsh, The zeta function of Riemann, Cambridge Univ. Press, 1930.

[11] E.C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta function, Clarendon Press, 1951.

[12] J.D Vaaler, Somme extremal probleme in Fourier analysis, Bull. Amer. Math. Soc., 12(2), p. 183-201, 1985.

[13] N. Watt, Exponential sums and the Riemann zeta function 2, J. London Math. Soc, P. 385-404, 1989.