Université de Khemis Miliana
Département Mathématiques et Informatique

Mémoire

*Pour l'obtention du diplôme de*

Master en mathématiques

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

*Présenté par*

**TERIR Yacine**

---

# Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire avec deux dérivées fractionnaire de type Caputo

---

*Soutenue publiquement le Juillet 2019 devant le jury composé de*

| | |
|---|---|
| **Président du jury :** | **Mr M. BOUDERBALA** |
| | Université de Khemis Miliana. |
| **Examinateur :** | **Mme F. CHITA** |
| | Université de Khemis Miliana. |
| **Encadrant :** | **Mr M. HOUAS** |
| | Université de Khemis Miliana. |

# Remerciements

Je tiens en premier à remercier notre **Dieu** le tout puissant de m'a donnée le courage, la volonté et la patience pour pouvoir produire ce modeste travail.

Je tiens à adresser mes sincéres remerciements à mon encadreur monsieur **HOUAS Mohamed** pour son encouragement, son aide, son soutien aux moments difficiles et son suivi pour terminer ce travail.

Mes remerciements les plus sincères sont adressés à mes enseignants, qui ont contribué durant mes études.

Je voudrais remerciers monsieur le président de jury et messieurs les membres de jury. Ainsi qu'à tous les enseignants du département de mathématique et sans oublier les étudiants de notre promotion, et spécialement notre chère ami **Farid**.

A la fin, je remercie touts ceux qui de prés ou de loin m'ont aidés à la réalisation de ce travail.

MERCI.

**Résumé :**
Dans cette mémoire, on abordera la question d'existence et d'unicité de la solution d'un problème fractionnaire avec deux dérivées fractionnaires au sens de Caputo dans un espace de Banach. Les résultats obtenus dans ce travail sont basés sur les théorèmes du point fixe de Banach, krasnoselskii, l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et le théorème de Scheafer. Des exemples illustrant les résultats obtenus sont également présentés.

**Mots clés :** Équation différentielle fractionnaire, intégral fractionnaire de Riemman-Liouville, dérivée fractionnaire de Caputo, principe de contraction de Banach, théorème de Krasnoselskii, théorème de Scheafer, l'alternative non linéaire de Leray- Schauder.

# Notations

$\mathbb{N}$ : ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{R}$ : ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$ : ensemble des nombres complexes.
$\overline{U}$ : l'adhérence de $U$.
$\partial U$ : frontière de $U$ .
$C([0,T],\mathbb{R})$ : espace des fonctions continues sur $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$\mathrm{Re}(\alpha)$ : la partie réels de nombre $\alpha \in \mathbb{C}$.
$\Gamma(.)$ : la fonction Gamma.
$\beta(.,.)$ : la fonction Bêta.
$B_r$ : la boule fermée de centre 0 et de rayon $r$ .
$\|.\|_\infty$ : norme infinie.
$\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ : norme de l'espace $\mathcal{X}$.
$D^n($ ou $\frac{d^n}{dt})$ : dérivée d'ordre $n$.
$f^{(n)}$ : Dérivée $n$-ième de $f$.
$I_a^\alpha f$ : intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.
${}^cD_a^\alpha f$ : dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$.
Dans le cas où $a = 0$, les opérateurs : $I_a^\alpha$, ${}^cD_a^\alpha$ sont notés : $I^\alpha$, ${}^cD^\alpha$.

# Table des matières

# Introduction

Le calcul fractionnaire est défini comme étant la branche mathématique qui étudie la généralisation des notions de dérivation et d'intégration à des ordres non nécessairement entiers, permettant le calcul de la dérivée d'ordre $\alpha$ réel ou complexe d'une fonction différentiable $f(t)$ soit :

$$(D^{\alpha} f)(t) = \frac{d^{\alpha} f(t)}{dt^{\alpha}}$$

Bien que le concept de la dérivation d'ordre fractionnaire ne soit pas nouveau, ces origines remontaient à la fin du $17^{i\text{ ème}}$ siècle, partant de la réponse de Gottfried Wilhelm Leibniz concernant la question de l'Hôpital, posée sur la signification de $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$. Leibniz, dans sa réponse, voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière, et à écrit à L'Hôpital :"... cela conduirait à un paradoxe à partir duquel, un jour, on aura tirer des conséquences utiles".
Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$ , c'est à dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des Mathématiques.
Aujourd'hui, et comme l'avait prédis Leibniz, le calcul fractionnaire a de très nombreuses applications, on citera à titre d'exemple : la physique, l'ingénierie, l'électrochimie, la théorie du contrôle, le traitement du signal et de l'image, les biotechnologies et les applications biomédicales, le diagnostique et la détection des défauts dans les machines par la modélisation etc. Mentionnons les ouvrages ([7], [10], [12], [14]) qui regroupent diverses applications du calcul fractionnaire.

## Présentation de la mémoire

Le sujet principal de ce mémoire est l'étude de l'existence et l'unicité des solutions du problème pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire, et pour cela en utilisant des différentes théorèmes du point fixe.
Notre mémoire est organisé en trois chapitres :

### Chapitre 1 :

C'est un rappel de quelques définitions, notions de base, résultats sur la dérivation fractionnaire et quelque théorèmes de point fixe utilisés dans ce travail.

**Chapitre 2 :**

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions du problème fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}\left({}^cD^{\beta}+\lambda\right)x(t)=f\left(t,x(t),{}^cD^{\alpha+\beta-1}x(t)\right), \quad t\in[0,T], \\ x(0)=\int_0^T \varphi(s)x(s)ds, \\ x(T)=\theta. \end{cases} \tag{1}$$

L'idée est de transforme ce problème en un problème du point fixe et le point fixe déterminé est considéré soit comme une solution unique pour le problème, soit l'une de ses solutions.
On donne trois résultats, Le premier est un résultat d'unicité obtenu par utilisation du théorème de point fixe de Banach. Le deuxième et le troisième sont des résultats d'existence basés respectivement sur le théorème de Krasnoselskii et Leray-Schauder. On terminera chaque résultat par un exemple illustratif.

**Chapitre 3 :**

L'objet du ce chapitre est l'étude de l'existence et l'unicité de solutions pour le système différentiel fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha_1}\left({}^cD^{\beta_1}+\lambda_1\right)x(t)=f_1\left(t,x(t),{}^cD^{\alpha_1+\beta_1-1}x(t)\right), \quad t\in[0,1] \\ {}^cD^{\alpha_2}\left({}^cD^{\beta_2}+\lambda_2\right)y(t)=f_2\left(t,y(t),{}^cD^{\alpha_2+\beta_2-1}y(t)\right), \quad t\in[0,1] \\ x(0)=\int_0^1 \varphi_1(s)x(s)ds, \qquad x(1)=\theta_1, \\ \\ y(0)=\int_0^1 \varphi_2(s)y(s)ds, \qquad y(1)=\theta_2. \end{cases} \tag{2}$$

On donne deux résultats, On va premièrement étudier l'existence et l'unicité par le principe de contraction de Banach, puis, comme un deuxième résultat, on va voir si le système admet une solution au moins par utilisation du théorème de point fixe de Schaefer. Il est illustré chaque théorème par un exemple.

# Chapitre 1

# Préliminaires

Dans ce chapitre on donne quelques définitions, notions, propriétés et résultats sur les différentes approches de la dérivation fractionnaire.
Dans ce qui suit, on s'intéresse particulièrement à définir des notions fondamentales et à rappeler quelques théorèmes importants dans la théorie du point fixe, notamment le principe de contraction de Banach, l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, le théorème de Krasnoselskii et le théorème de Schaefer.

## I Calcul fractionnaire

### I.1 Fonctions de base

#### I.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est tout simplement la généralisation de la notion de factoriel d'un entier à tous les nombres réels ou complexes.

**Définition 1.** *Pour tout nombre complexe $\alpha$, de partie réelle positive, La fonction Gamma est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \tag{1.1}$$

*Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive.*

**Propriétés 1.** *On a la relation suivante :*

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \mathrm{Re}(\alpha) \geq 0. \tag{1.2}$$

*En particulier :*

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Ce qui permet de dire que la fonction Gamma généralise la notion de factoriel.*

**Quelque valeurs particulières de la fonction Gamma**

1. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
2. $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$.
3. $\Gamma(-1) = (-1)! = +\infty$
4. $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$.
5. $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
6. $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\ldots-\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$
7. $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$
8. $\Gamma(1) = 0! = 1$

### I.1.2 La fonction Bêta

**Définition 2.** *On appelle fonction Bêta la fonction définie par :*

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt, \quad \mathrm{Re}(p) > 0, \quad \mathrm{Re}(q) > 0. \tag{1.3}$$

### I.1.3 La relation entre la fonction Gamma et Bêta

**Définition 3.** *La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :*

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \mathrm{Re}(p) > 0, \quad \mathrm{Re}(q) > 0. \tag{1.4}$$

## I.2 Intégration Fractionnaire

**Intégrale de Riemann-Liouville**

**Définition 4.** *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable, on appelle intégrale de Riemanne-Liouville de $f$ l'intégrale suivante :*

$$\left(I_a^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt, \quad x \in [a,b], \tag{1.5}$$

*où $\alpha$ est un réel ou complexe convenablement choisi.*

**Exemple 1.** *On considère la fonction f définie par :*

$$f(x) = (x-a)^\beta, \quad x \in [a,b], \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

On va calculer l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de $f$ d'ordre $\alpha$ ( $\alpha$ réel strictement positive).

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\beta dt,$$

à l'aide de changement de variable $t = a + (x-a)\tau$ on obtient :

$$\begin{aligned} dt &= (x-a)d\tau \\ t = a &\Longrightarrow a + (x-a)\tau \Longrightarrow \tau = 0 \\ t = x &\Longrightarrow a + (x-a)\tau \Longrightarrow \tau = 1. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-a+(x-a)\tau)^{\alpha-1}(a+(x-a)\tau-a)^{\beta}(x-a)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{\alpha-1}(1-\tau)^{\alpha-1}(x-a)^{\beta}\tau^{\beta}(x-a)d\tau \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta}d\tau \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Donc

$$I_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}. \tag{1.6}$$

Cas particulier où $\alpha = 1$, d'après (1.6) on déduit que :

$$I_a^1(x-a)^{\beta} = \frac{1}{\beta+1}(x-a)^{1+\beta}.$$

Cas particulier où $\beta = 0$, on a dans ce cas :

$$\left(I_a^{\alpha}1\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha},$$

Par conséquent,

$$\left(I_a^{\alpha}1\right)(x) \longrightarrow 1 \quad \text{lorsque} \quad \alpha \longrightarrow 0.$$

**Proposition 1.** *Soit $f \in C([a,b])$, pour $\alpha, \beta$ des nombres complexes tels que $Re(\alpha) > 0$ et $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, l'intégrale fractionnaire de Riemann -Liouville possède la propriété de semi-groupe suivante :*

$$I_a^{\alpha}\left(I_a^{\beta}f\right) = I_a^{\alpha+\beta}f = I_a^{\beta+\alpha}f, \tag{1.7}$$

*et pour $Re(\alpha) > 1$ on a :*

$$\frac{d}{dx}I_a^{\alpha}f = I_a^{\alpha-1}f. \tag{1.8}$$

**Preuve.** ( voir Annexe III ) □

## I.3 Dérivation fractionnaire

### Dérivées fractionnaire au sens de Caputo

**Définition 5.** *Soit $\alpha \in ]m-1, m[$, $(m \in \mathbb{N}^*)$ et suppose que $f \in C^m([a,b],\mathbb{R})$, on appelle dérivée de $f$ au sens de Caputo la fonction définie par :*

$$\left({}^cD_a^\alpha f\right)(t) = \left(I_a^{m-\alpha} f^{(m)}\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(s) ds. \tag{1.9}$$

**Exemple 2.** *Soit $f(x) = (x-a)^\beta$, $x \in [a,b]$, on a :*

$$\begin{aligned}
{}^CD_a^\alpha (x-a)^\beta &= I_a^{m-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x-a)^\beta\right] \\
&= I_a^{m-\alpha}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-m)}(x-a)^{\beta-m}\right) \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-m)} I_a^{m-\alpha}(x-a)^{\beta-m} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-m)} \frac{\Gamma(\beta+1-m)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

Alors

$${}^cD_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}. \tag{1.10}$$

**Remarque 1.** *La dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo d'une constante est nulle.*
*D'après (1.9), on a :*

$${}^cD_a^\alpha C = I_a^{m-\alpha}(0) = 0. \tag{1.11}$$

### Quelques propriétés

1. La dérivation fractionnaire au sens de Caputo est une opération linéaire,
$${}^cD_a^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}^cD_a^\alpha f(t) + \mu {}^cD_a^\alpha g(t).$$
2. ${}^cD_a^\alpha \left({}^cD_a^\beta f(t)\right) ={}^c D_a^{\alpha+\beta} f(t) ={}^c D_a^\beta \left({}^cD_a^\alpha f(t)\right)$ où $f \in C^1([a,b],\mathbb{R}), 0 < \alpha, \beta < 1$ et $0 < \alpha+\beta < 1$.
3. Si ${}^cD^\alpha f(x) = 0$ alors $f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j x^j, \quad x \in [0,b]$.
4. $I^\alpha \left[{}^cD^\alpha f\right](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x)^j}{\Gamma(j+1)} f^{(j)}(0), \quad x \in [0,b]$.
5. ${}^cD_a^\alpha \left(I_a^\alpha f(t)\right) = f(t)$.

## I.4 Lemmes fondamentaux

**lemme 1.** *Si $\beta \geq \alpha > 0$ et la dérivée fractionnaire ${}^cD_a^{\beta-\alpha}$ existe, alors on a :*

$$ {}^cD^{\beta} I^{\alpha} f(t) = {}^cD^{\beta-\alpha} f(t) \quad , \quad t \in [0,T]. $$

*Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ avec $\beta < \alpha$, on a :*

$$ {}^cD^{\beta} I^{\alpha} f(t) = I^{\alpha-\beta} f(t) \quad , \quad t \in [0,T]. $$

***Preuve.*** *voir [10].* □

**lemme 2.** *Soit $T > 0, \gamma > 0$, pour tout $t_1, t_2 \in [0,T]$, on a :*

1. *si $\gamma > 1$, alors $\left|t_1^{\gamma} - t_2^{\gamma}\right| \leq \gamma T^{\gamma-1}|t_1 - t_2|$,*
2. *si $0 < \gamma \leq 1$, alors $\left|t_1^{\gamma} - t_2^{\gamma}\right| \leq |t_1 - t_2|^{\gamma}$.*

***Preuve.*** *voir [6].* □

**lemme 3.** *Soit $h \in C^m([0,T],\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}^*$, pour $\alpha \in ]m-1, m[$ , la solution générale de l'équation différentielle ${}^cD^{\alpha}h(t) = 0$ est donnée par :*

$$ h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{m-1} t^{m-1}, \tag{1.12} $$

*où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots m-1$, $m = [\alpha] + 1$.*

**Preuve.** Soit $h \in C^m([0,T],\mathbb{R})$,$m \in \mathbb{N}^*$, pour $\alpha \in ]m-1, m[$ , On a par la définition de la dérivée fractionnaire de Caputo

$$ {}^cD^{\alpha}h(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad I^{m-\alpha}D^m h(t) = 0. $$

En appliquant $D^{m-\alpha}$, on trouve :

$$ D^m h(t) = 0. $$

Donc, $h$ est un polynôme de degré $\leq m-1$ :

$$ h(t) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i t^i = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{m-1} t^{m-1}. $$

□

**lemme 4.** *Soit $h \in C^m([0,T],\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}^*$, pour $\alpha \in ]m-1, m[$ , on a :*

$$ I^{\alpha c}D^{\alpha}h(t) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{m-1} t^{m-1} \tag{1.13} $$

*pour tout $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, $m = [\alpha] + 1$.*

**Preuve.** Soit $h \in C^m([0,T],\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}^*$, pour $\alpha \in ]m-1, m[$ ,

$$\begin{aligned} I^\alpha\left({}^cD^\alpha h(t)\right) &= I^\alpha I^{m-\alpha} D^m h(t) \\ &= I^{\alpha+m-\alpha} D^m h(t) \\ &= I^m D^m h(t) \\ &= h(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(0)}{\Gamma(j+1)}(t)^j \\ &= h(t) + \sum_{i=0}^{m-1} c_i t^i \\ &= h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{n-1} t^{n-1}. \end{aligned}$$

□

# II Quelques théorèmes du point fixe

Les équations différentielles fractionnaires sont considérées comme des équations différentielles non-linéaires, alors plusieurs théorèmes ont été utilisés pour résoudre ce type d'équation. L'un des méthodes les plus utilisées : les théorèmes du point fixe. En effet, ces théorèmes accordent des conditions suffisantes pour assurer l'existence d'un point fixe pour une fonctions donnée.
Dans le cas des EDFs, on transforme un problème donné en un problème du point fixe. Les points fixes du problème transformé sont ainsi les solutions du problème donné.
Dans cette section, on étudie quelques théorèmes du point fixe de Banach, Schaefer, Leray-Schauder et krasnoselskii.

## Définitions

**Définition 6.** *Soit E un espace vectoriel sur le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. On appelle norme sur E une application de E dans $\mathbb{R}_+$ notée $x \to \|x\|$ satisfaisant les conditions suivantes :*

1. $\forall x \in E : \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E, \forall x \in E,$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|,$
3. $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

**Définition 7.** *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur le même corps $\mathbb{K}$, alors l'espace produit $E \times F = \{(x,y)/x \in E \text{ et } y \in F\}$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ par l'une des normes suivantes :*

1. $\|(x,y)\|_1 = \|x\|_E + \|y\|_F,$
2. $\|(x,y)\|_p = \left(\|x\|_E^p + \|y\|_F^p\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p \leq \infty,$
3. $\|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\}.$

**Preuve.** voir [13] . □

**Définition 8.** *On dit qu'un espace vectoriel normé* $(E, \|\cdot\|_E)$ *est **complet** (ou que c'est un espace de Banach) si toute suite de Cauchy dans E est convergente.*

**Définition 9.** *On dit que M est une partie **compact** de* $(E, \|\cdot\|_E)$ *si de toute suite de points de M on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de M .*

**Définition 10.** *Une partie M de* $(E, \|\cdot\|_E)$ *est dite **relativement compact** si son adhérence est compact.*

**Définition 11.** *Soient E et F deux espace de banach, et* $A : E \longrightarrow F$ *une application linéaire. On dit que A est **borné** si elle envoie les parties bornées de E sur des parties bornées de F.*

**Définition 12.** *Soit M un sous ensemble de* $C([0, T], \mathbb{R})$, *M est **uniformément borné**.i,e ; il existe une constante* $k > 0$ *tel que :* $\|f(x)\| \leq k$, *pour tout* $x \in [0, T]$ *et tout* $f \in M$.

**Définition 13.** *Soient E et F deux espaces de Banach et f une application définie de E à valeurs dans F. On dit que f est **complètement continue** si elle est continue et transforme tout **borné** de E en une ensemble **relativement compact** dans F. f est dite compact si* $f(E)$ *est relativement compact dans F.*

**Définition 14.** *Soit M un sous ensemble de* $C([0, T], \mathbb{R})$, *L'ensemble M est **equicontinue**. i.e ;*
*pour tout* $\varepsilon > 0$, *pour tout* $t_1, t_2 \in [0, T]$ *et tout* $f \in M$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que :*

$$|t_1 - t_2| < \delta \Longrightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon.$$

**Définition 15.** *Soit* $(X, \| \,.\, \|)$ *un espace vectorielle normé, une application* $A : X \longmapsto X$ *est dite **contractante**, s'il existe un nombre positif* $\boldsymbol{k} \in ]0.\, 1[$ *tel que* $\forall x, y \in X$, *on a :*

$$\|Ax - Ay\| \leq \boldsymbol{k}\|x - y\|.$$

**Définition 16.** *Soit* $(X, \| \,.\, \|)$ *un espace vectorielle normé et* $A : X \longmapsto X$ *une application. On appelle **point fixe** de A tout point* $x \in X$ *tel que :* $Ax = x$.

### Théorème d'Ascoli-Arzela

**Théorème 1.** *Soit* $\Omega$ *un sous ensemble de* $C([0, T], \mathbb{R})$, $\Omega$ *est relativement compact dans* $C([0, T], \mathbb{R})$ *si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *L'ensemble* $\Omega$ *est uniformément borné.*
2. *L'ensemble* $\Omega$ *est equicontinue.*
3. *Pour tout* $x \in [0, T]$ *l'ensemble* $\{f(x), f \in \Omega\} \subset E$ *est relativement compact.*

### Théorème de point fixe de Banach

**Théorème 2.** *Soit X un espace de Banach, et* $A : X \longmapsto X$ *un opérateur contractant. Alors A admet un point fixe unique.i.e ;* $\exists! x \in X$ *tel que* $Ax = x$.

### Théorème de point fixe de schauder

**Théorème 3.** *Soit $X$ un espace de Banach et $M$ un convexe fermé borné de $X$ et $A : M \longmapsto M$ un opérateur continue et compact alors $A$ admet au moins un point fixe.*

### L'alternative non linéaire de Leray-Schauder

**Théorème 4.** *Soit $E$ un espace de Banach, $C$ un sous-ensemble convexe fermé de $E$, $U$ un sous-ensemble ouvert de $C$ et $0 \in U$. l'opérateur $\phi : \overline{U} \to C$ est continue et compact (c'est-à-dire que $\phi(\overline{U})$ est un sous-ensemble relativement compact de $C$). Alors, ou bien*

1. *l'application $\phi$ admet un point fixe dans $\overline{U}$, sinon*
2. *Il existe $x \in \partial U$ et $\sigma \in [0,1]$ avec , $x = \sigma\phi x$.*

### Théorème de point fixe de krasnosselski

**Théorème 5.** *Soit $X$ un espace de Banach et $M$ un sous ensemble fermé borné et convexe de $X$.On suppose que $A_1, A_2$ sont deux opérateur de $X$ dans $X$ satisfaisants :*

1. *$A_1x + A_2y \in M, \forall x, y \in M$,*
2. *$A_1$ est compacte et continue,*
3. *$A_2$ est contractante.*

*Alors il existe au moins un élément $z \in M$ tel que : $A_1z + A_2z = z$.*

### Théorème de point fixe de Schaefer

**Théorème 6.** *Soit $X$ un espace de Banach et $A : X \longmapsto X$ un opérateur complètement continue.*
*Si*

$$\Omega = \{x \in X : x = \lambda Ax, \forall\lambda \in ]0,1[\}$$

*est borné, alors $A$ possède au moins une point fixe.*

# Chapitre 2

# Problème fractionnaire avec deux dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour un problème fractionnaire avec deux dérivées fractionnaires au sens de Caputo.

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}\left({}^cD^{\beta}+\lambda\right)x(t)=f\left(t,x(t),{}^cD^{\alpha+\beta-1}x(t)\right), \quad t\in[0,T], \\ x(0)=\int_0^T \varphi(s)x(s)ds, \\ x(T)=\theta. \end{cases} \tag{2.1}$$

Où $0<\alpha,\beta<1, 1<\alpha+\beta<2, {}^cD^{\alpha}$ et ${}^cD^{\beta}$ sont des dérivées fractionnaires au sens de Caputo d'ordre $\alpha$ et $\beta$ respectivement, $\theta$ est une constante positive, $\lambda\in\mathbb{R}$, $f:[0,T]\times\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$ est une fonction continue et $\varphi:[0,T]\rightarrow\mathbb{R}$ est aussi une fonction continue.

On va étudier l'existence et l'unicité de la solution à l'aide de Principe de Contraction de Banach. Puis, en montrant deux résultats d'existence de solutions pour le problème (2.1).
Le premier résultat, est montré par utilisation du théorème de point fixe de Krasnoselskii, et le second résultat de ce chapitre est obtenu par utilisation du théorème de point fixe de Leray-Schauder.

L'existence et l'unicité d'une solution est établit par la transformation de ce problème à une équation intégrale équivalente, dont la solution est identifiée à un point fixe d'un opérateur (sous certaines hypothèses suffisantes sur la fonction $f$) dans un espace fonctionnel convenablement choisi.

# I Problème Intégral

Soit $h \in C([0,T],\mathbb{R})$, alors la solution du problème fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}\left({}^cD^{\beta}+\lambda\right)x(t)=h(t), \quad t\in[0,T], \quad 0<\alpha,\beta<1, \\ x(0)=\int_0^T \varphi(s)x(s)ds, \\ x(T)=\theta. \end{cases} \tag{2.2}$$

est donné par :

$$\begin{aligned} x(t) = \quad & I^{\alpha+\beta}h(t)-\lambda I^{\beta}x(t) \\ & +\frac{t^{\beta}}{T^{\beta}}\left[\theta-I^{\alpha+\beta}h(T)+\lambda I^{\beta}x(T)-\int_0^T\varphi(s)x(s)ds\right] \\ & +\int_0^T\varphi(s)x(s)ds. \end{aligned} \tag{2.3}$$

**Preuve.** Soit l'équation :

$${}^cD^{\alpha}\left({}^cD^{\beta}+\lambda\right)x(t) \quad = h(t). \tag{2.4}$$

En prenant l'intégrale de Riemann-Liouville fractionnaire d'ordre $\alpha$ pour (2.4), on obtient :

$$I^{\alpha}\left[{}^cD^{\alpha}\left({}^cD^{\beta}+\lambda\right)x(t)\right] \quad = I^{\alpha}h(t).$$

Par lemme 4, on trouve :

$$\left({}^cD^{\beta}+\lambda\right)x(t)+c_0 \quad = I^{\alpha}h(t).$$

Alors :

$${}^cD^{\beta}x(t) \quad = I^{\alpha}h(t)-\lambda x(t)-c_0. \tag{2.5}$$

En prenant l'intégrale de Riemann-Liouville fractionnaire d'ordre $\beta$ pour (2.5), on obtient :

$$I^{\beta}\left({}^cD^{\beta}x(t)\right) \quad = I^{\alpha+\beta}h(t)-\lambda I^{\beta}x(t)-c_0\tfrac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}.$$

Par lemme 4, on trouve :

$$x(t)+c_1 \quad = I^{\alpha+\beta}h(t)-\lambda I^{\beta}x(t)-c_0\tfrac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}.$$

Alors, la solution générale du problème (2.2) est exprimée sous la forme de l'équation intégrale suivante :

$$x(t) \quad = I^{\alpha+\beta}h(t)-\lambda I^{\beta}x(t)-c_0\tfrac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}-c_1, \tag{2.6}$$

où $c_0$ et $c_1$ sont des constants arbitraire.
Maintenant, on cherche les constantes $c_0$ et $c_1$.
D'après la condition $x(0) = \int_0^T \varphi(s)x(s)ds$, on peut écrire :

$$x(0) = -c_1 = \int_0^T \varphi(s)x(s)ds,$$

ce qui donne :

$$c_1 = -\int_0^T \varphi(s)x(s)ds.$$

Alors (2.6) devient :

$$x(t) \quad = I^{\alpha+\beta}h(t) - \lambda I^{\beta}x(t) - c_0\tfrac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} + \textstyle\int_0^T \varphi(s)x(s)ds.$$

On utilise la condition $x(T) = \theta$, on trouve :

$$x(T) = \theta = I^{\alpha+\beta}h(T) - \lambda I^{\beta}x(T) - c_0\frac{T^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} + \int_0^T \varphi(s)x(s)ds,$$

Alors :

$$c_0 \quad = \tfrac{\Gamma(\beta+1)}{T^{\beta}}\left[I^{\alpha+\beta}h(T) - \lambda I^{\beta}x(T) + \textstyle\int_0^T \varphi(s)x(s)ds - \theta\right].$$

Substituant $c_0$ et $c_1$ en (2.6) , on obtient la solution (2.3). □

## II Problème du Point fixe

Avant tout, on introduit l'espace de Banach suivant :

$$\mathcal{X} = \left\{x : x(t) \in C^1([0,T],\mathbb{R}) \text{ et } {}^cD^{\alpha+\beta-1}x(t) \in C^1([0,T],\mathbb{R})\right\} \tag{2.7}$$

muni de la norme :

$$\|x\|_{\mathcal{X}} = \|x\|_{\infty} + \|{}^cD^{\alpha+\beta-1}x\|_{\infty},$$

où :

$$\|x\|_{\infty} = \sup_{t\in[0,T]} |x(t)|,$$

et

$$\|{}^cD^{\alpha+\beta-1}x\|_{\infty} = \sup_{t\in[0,T]} |{}^cD^{\alpha+\beta-1}x(t)|.$$

En vue du (2.3), on définie un opérateur $\mathcal{A}$ par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathcal{X} &\longmapsto \mathcal{X} \\ x(t) &\longmapsto \mathcal{A}x(t) \end{aligned}$$

tel que, $\forall t \in [0,T]$, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}x(t) &= I^{\alpha+\beta} f\left(t, x(t), ^c D^{\alpha+\beta-1}x(t)\right) - \lambda I^{\beta} x(t) \\ &+ \frac{t^{\beta}}{T^{\beta}}\left[\theta - I^{\alpha+\beta} f\left(T, x(T), ^c D^{\alpha+\beta-1}x(T)\right) + \lambda I^{\beta}x(T) - \int_0^T \varphi(s)x(s)ds\right] \\ &+ \int_0^T \varphi(s)x(s)ds.\end{aligned} \tag{2.8}$$

c'est a dire :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}x(t) = &\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f\left(s, x(s), ^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right) ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}x(s)ds \\ &+ \frac{t^{\beta}}{T^{\beta}}\left[\theta - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1} f\left(s, x(s), ^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right) ds\right. \\ &\left. + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^T (T-s)^{\beta-1}x(s)ds - \int_0^T \varphi(s)x(s)ds\right] + \int_0^T \varphi(s)x(s)ds.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Il convient de noter que le problème (2.1) a des solutions si et seulement si l'opérateur $\mathcal{A}$ a des points fixes.

## III Existence et unicité

On va donner un premier résultat concernant l'unicité de la solution du problème fractionnaire (2,1), en utilisant le théorème de contraction de Banach.

**Théorème 7.** *Soit $f : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, on suppose que :*

$(H_1)$ *: Il existe une constante $k > 0$ telle que :*

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leq k\left(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\right) \ ,$$

*pour tout $t \in [0,T]$, et $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.*

$(H_2)$ *: La fonction $\varphi$ est continue sur $[0,T]$ et $|\varphi(t)| \leq M_{\varphi}$.*
$(H_3)$ *: $M_1 + M_2 < 1$, où les constantes $M_1$, $M_2$ sont définies par :*

$$M_1 = \frac{2kT^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{2|\lambda|T^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} + 2M_{\varphi}T \ ,$$

$$M_2 = kT + \frac{2|\lambda|T^{1-\alpha} + M_{\varphi}\Gamma(\beta+1)T^{2-\alpha-\beta}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{\Gamma(\beta+1)kT}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(2-\alpha)} \ .$$

*Alors, il existe une solution unique pour le problème ( 2.1 ).*

**Preuve.** Le théorème de contraction de Banach appui sur le fait que si $\mathcal{A}$ est un opérateur contractant, alors il existe un unique point fixe pour $\mathcal{A}$. De là vient l'idée de chercher l'existence d'une constante $M > 0$ tel que :
Pour tout $x, y \in \mathcal{X}$ et $t \in [0, T]$, on a :

$$\|\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(y)\|_{\mathcal{X}} < M\|x - y\|_{\mathcal{X}} \text{ avec } M < 1.$$

On procède donc en deux étapes :
Étape 1 : On montre qu'il existe $M_1$ tel que :

$$\|\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(y)\|_{\infty} < M_1\|x - y\|_{\mathcal{X}}.$$

Étape 2 : On montre qu'il existe $M_2$ tel que :

$$\left\|{}^{c}D^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}(x) -{}^{c} D^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}(y)\right\|_{\infty} < M_2\|x - y\|_{\mathcal{X}}.$$

Puis on passe à la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ et on fait la conclusion.

**Étape 1 :**

Soient $x, y \in \mathcal{X}$ Alors :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}x(t) - \mathcal{A}y(t)| = \Bigg| & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f\left(s, x(s), {}^{c} D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right) ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} x(s) ds \\
& + \frac{t^\beta}{T^\beta}\Bigg[\theta - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1} f\left(s, x(s), {}^{c} D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right) ds \\
& + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^T (T-s)^{\beta-1} x(s) ds - \int_0^T \varphi(s) x(s) ds\Bigg] + \int_0^T \varphi(s) x(s) ds \\
& - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f\left(s, y(s), {}^{c} D^{\alpha+\beta-1}y(s)\right) ds + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} y(s) ds \\
& + \frac{t^\beta}{T^\beta}\Bigg[-\theta + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1} f\left(s, y(s), {}^{c} D^{\alpha+\beta-1}y(s)\right) ds \\
& - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^T (T-s)^{\beta-1} y(s) ds + \int_0^T \varphi(s) y(s) ds\Bigg] - \int_0^T \varphi(s) y(s) ds\Bigg|.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}x(t) - \mathcal{A}y(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \left| f\left(s, x(s), {}^{c} D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right) - f\left(s, y(s), {}^{c} D^{\alpha+\beta-1}y(s)\right)\right| ds \\
& + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} |x(s) - y(s)| ds + \int_0^T |\varphi(s)||x(s) - y(s)| ds \\
& + \frac{t^\beta}{T^\beta}\Bigg[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1} \left| f\left(s, x(s), {}^{c} D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right) - f\left(s, y(s), {}^{c} D^{\alpha+\beta-1}y(s)\right)\right| ds \\
& + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_0^T (T-s)^{\beta-1} |x(s) - y(s)| ds + \int_0^T |\varphi(s)||x(s) - y(s)| ds\Bigg].
\end{aligned}$$

Puisque $\frac{t^\beta}{T^\beta} \le 1$, alors :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}x(t)-\mathcal{A}y(t)| \le{}& \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1}\left| f\left(s,x(s),{}^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right) - f\left(s,y(s),{}^c D^{\alpha+\beta-1}y(s)\right)\right| ds \\
&+ \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\big|x(s)-y(s)\big|ds + 2\int_0^T |\varphi(s)|\big|x(s)-y(s)\big|ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1}\left| f\left(s,x(s),{}^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right) - f\left(s,y(s),{}^c D^{\alpha+\beta-1}y(s)\right)\right| ds \\
&+ \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\int_0^T (T-s)^{\beta-1}\big|x(s)-y(s)\big|ds.
\end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses $(H_1)$ et $(H_2)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}x(t)-\mathcal{A}y(t)| \le{}& \frac{K}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-y(t)| + \sup_{t\in[0,T]}\left|{}^c D^{\alpha+\beta-1}x(t) - {}^c D^{\alpha+\beta-1}y(t)\right|\right)\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1}ds \\
&+ \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\sup_{t\in[0,T]}\big|x(t)-y(t)\big|\int_0^t (t-s)^{\beta-1}ds + 2M_\varphi \sup_{t\in[0,T]}\big|x(t)-y(t)\big|\int_0^T 1ds \\
&+ \frac{K}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-y(t)| + \sup_{t\in[0,T]}\left|{}^c D^{\alpha+\beta-1}x(t) - {}^c D^{\alpha+\beta-1}y(t)\right|\right)\int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1}ds \\
&+ \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\sup_{t\in[0,T]}\big|x(t)-y(t)\big|\int_0^T (T-s)^{\beta-1}ds.
\end{aligned}$$

Par calcule simple, on trouve que :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}x(t)-\mathcal{A}y(t)| \le{}& \frac{2KT^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\left(\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-y(t)| + \sup_{t\in[0,T]}\left|{}^c D^{\alpha+\beta-1}x(t) - {}^c D^{\alpha+\beta-1}y(t)\right|\right) \\
&+ \frac{2|\lambda|T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\sup_{t\in[0,T]}\big|x(t)-y(t)\big| + 2M_\varphi T\sup_{t\in[0,T]}\big|x(t)-y(t)\big|.
\end{aligned}$$

En passant à la norme, on trouve :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}x-\mathcal{A}y\|_\infty \le{}& \frac{2KT^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\left(\|x-y\|_\infty + \|{}^c D^{\alpha+\beta-1}x - {}^c D^{\alpha+\beta-1}y\|_\infty\right) \\
&+ \frac{2|\lambda|T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\big\|x-y\big\|_\infty + 2M_\varphi T\big\|x-y\big\|_\infty.
\end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}x-\mathcal{A}y\|_\infty &\le \frac{2KT^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\big\|x-y\big\|_{\mathcal{X}} + \left(\frac{2|\lambda|T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + 2M_\varphi T\right)\big\|x-y\big\|_\infty \\
&\le \frac{2KT^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\big\|x-y\big\|_{\mathcal{X}} + \left(\frac{2|\lambda|T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + 2M_\varphi T\right)\left(\big\|x-y\big\|_\infty + \|{}^c D^{\alpha+\beta-1}(x-y)\|_\infty\right) \\
&\le \frac{2KT^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\big\|x-y\big\|_{\mathcal{X}} + \left(\frac{2|\lambda|T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + 2M_\varphi T\right)\big\|x-y\big\|_{\mathcal{X}}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\|\mathcal{A}x-\mathcal{A}y\|_\infty \leq \left(\frac{2KT^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{2|\lambda|T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}+2M_\varphi T\right)\|x-y\|_{\mathcal{X}}.$$

D'où :

$$\|\mathcal{A}x-\mathcal{A}y\|_\infty \quad \leq \quad M_1\|x-y\|_{\mathcal{X}}, \tag{2.10}$$

tel que :

$$M_1 = \frac{2KT^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{2|\lambda|T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}+2M_\varphi T.$$

**Étape 2 :**

On calcule ${}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}x(t)$,

$$\begin{aligned}{}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}x(t) ={}^c D^{\alpha+\beta-1}\Bigg[&I^{\alpha+\beta}f\left(t,x(t),{}^c D^{\alpha+\beta-1}x(t)\right)-\lambda I^\beta x(t)\\ &+\frac{t^\beta}{T^\beta}\left(\theta - I^{\alpha+\beta}f\left(T,x(T),{}^c D^{\alpha+\beta-1}x(T)\right)+\lambda I^\beta x(T)\right.\\ &\left.-\int_0^T \varphi(s)x(s)ds\right)+\int_0^T\varphi(s)x(s)ds\Bigg].\end{aligned}$$

Par linéarité de ${}^cD^{\alpha+\beta-1}$ on a :

$$\begin{aligned}{}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}x(t) = \quad &{}^cD^{\alpha+\beta-1}I^{\alpha+\beta}f\left(t,x(t),{}^c D^{\alpha+\beta-1}x(t)\right)-\lambda{}^cD^{\alpha+\beta-1}I^\beta x(t)\\ &+\frac{{}^cD^{\alpha+\beta-1}t^\beta}{T^\beta}\Bigg[\theta - I^{\alpha+\beta}f\left(T,x(T),{}^c D^{\alpha+\beta-1}x(T)\right)+\lambda I^\beta x(T)\\ &-\int_0^T\varphi(s)x(s)ds\Bigg]+\int_0^T\varphi(s)x(s)ds\,{}^cD^{\alpha+\beta-1}1.\end{aligned}$$

D'après lemme 1 et (1.10), on obtient :

$$\begin{aligned}{}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}x(t) = \quad &I^1 f\left(t,x(t),{}^c D^{\alpha+\beta-1}x(t)\right)-\lambda I^{1-\alpha}x(t)\\ &+\frac{\Gamma(\beta+1)t^{1-\alpha}}{T^\beta\Gamma(2-\alpha)}\left[\theta - I^{\alpha+\beta}f\left(T,x(T),{}^c D^{\alpha+\beta-1}x(T)\right)+\lambda I^\beta x(T)-\int_0^T\varphi(s)x(s)ds\right].\end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}{}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}x(t) = &\int_0^t f\left(s,x(s),{}^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)ds - \frac{\lambda}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}x(s)ds\\ &+\frac{\Gamma(\beta+1)t^{1-\alpha}}{T^\beta\Gamma(2-\alpha)}\Bigg[\theta-\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^T(T-s)^{\alpha+\beta-1}f\left(s,x(s),{}^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)ds\\ &+\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^T(T-s)^{\beta-1}x(s)ds-\int_0^T\varphi(s)x(s)ds\Bigg].\end{aligned}$$

Maintenant, soient x, y $\in \mathcal{X}$ on a :

$$\begin{aligned}\left|{}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}(x)(t) - {}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}(y)(t)\right| \leq & \int_0^t \left|f\left(s, x(s), {}^cD^{\alpha+\beta-1}x(s)\right) - f\left(s, y(s), {}^cD^{\alpha+\beta-1}y(s)\right)\right| ds \\ & + \frac{|\lambda|}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha}|x(s)-y(s)|ds \\ & + \frac{\Gamma(\beta+1)t^{1-\alpha}}{T^\beta\Gamma(2-\alpha)}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1}\left|f\left(s, x(s), {}^cD^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)\right.\right. \\ & \left. - f\left(s, y(s), {}^cD^{\alpha+\beta-1}y(s)\right)\right| ds + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\int_0^T (T-s)^{\beta-1}|x(s)-y(s)|ds \\ & \left. + \int_0^T |\varphi(s)||x(s)-y(s)|ds\right].\end{aligned}$$

En appliquant les hypothèses $(H_1)$ et $(H_2)$, on trouve :

$$\begin{aligned}\left|{}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}(x)(t) - {}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}(y)(t)\right| \leq & k\left(\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-y(t)| + \sup_{t\in[0,T]}|{}^cD^{\alpha+\beta-1}x(t) - {}^cD^{\alpha+\beta-1}y(t)|\right)\int_0^t 1ds \\ & + \frac{|\lambda|}{\Gamma(1-\alpha)}\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-y(t)|\int_0^t (t-s)^{-\alpha}ds \\ & + \frac{\Gamma(\beta+1)}{T^{\alpha+\beta-1}\Gamma(2-\alpha)}\left[\frac{k}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-y(t)|\right.\right. \\ & \left. + \sup_{t\in[0,T]}|{}^cD^{\alpha+\beta-1}x(t) - {}^cD^{\alpha+\beta-1}y(t)|\right)\int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1}ds \\ & + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-y(t)|\int_0^T (T-s)^{\beta-1}ds \\ & \left. + M_\varphi \sup_{t\in[0,T]}|x(t)-y(t)|\int_0^T 1ds\right].\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\left|{}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}(x)(t) - {}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}(y)(t)\right| \leq & kT\left(\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-y(t)| + \sup_{t\in[0,T]}|{}^cD^{\alpha+\beta-1}x(t) - {}^cD^{\alpha+\beta-1}y(t)|\right) \\ & + \frac{|\lambda|T^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-y(t)| \\ & + \frac{\Gamma(\beta+1)}{T^{\alpha+\beta-1}\Gamma(2-\alpha)}\left[\frac{kT^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\left(\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-y(t)|\right.\right. \\ & \left. + \sup_{t\in[0,T]}|{}^cD^{\alpha+\beta-1}x(t) - {}^cD^{\alpha+\beta-1}y(t)|\right) + \frac{|\lambda|T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-y(t)| \\ & \left. + M_\varphi T\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-y(t)|\right].\end{aligned}$$

En passant à la norme, on obtient :

$$\begin{aligned}\left\|{}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}(x)(t) -{}^c D^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}(y)\right\|_\infty \leq{}& kT\|x-y\|_\mathcal{X} + \frac{|\lambda|T^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\|x-y\|_\infty \\ &+ \frac{\Gamma(\beta+1)}{T^{\alpha+\beta-1}\Gamma(2-\alpha)}\left[\frac{kT^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\|x-y\|_\mathcal{X} + \frac{|\lambda|T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\|x-y\|_\infty \right.\\ &\left. + M_\varphi T\|x-y\|_\infty\right].\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\left\|{}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}(x) -{}^c D^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}(y)\right\|_\infty \leq{}& kT\|x-y\|_\mathcal{X} + \frac{2|\lambda|T^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\|x-y\|_\infty + \frac{\Gamma(\beta+1)kT}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(2-\alpha)}\|x-y\|_\mathcal{X} \\ &+ \frac{M_\varphi\Gamma(\beta+1)}{T^{\alpha+\beta-2}\Gamma(2-\alpha)}\|x-y\|_\infty \\ \leq{}& \left(kT + \frac{\Gamma(\beta+1)kT}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(2-\alpha)}\right)\|x-y\|_\mathcal{X} \\ &+ \left(\frac{2|\lambda|T^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{M_\varphi\Gamma(\beta+1)}{T^{\alpha+\beta-2}\Gamma(2-\alpha)}\right)\|x-y\|_\infty \\ \leq{}& \left(kT + \frac{\Gamma(\beta+1)kT}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(2-\alpha)}\right)\|x-y\|_\mathcal{X} \\ &+ \left(\frac{2|\lambda|T^{1-\alpha} + M_\varphi\Gamma(\beta+1)T^{2-\alpha-\beta}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)\left(\|x-y\|_\infty + \|{}^cD^{\alpha+\beta-1}(x-y)\|_\infty\right) \\ \leq{}& \left(kT + \frac{\Gamma(\beta+1)kT}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(2-\alpha)}\right)\|x-y\|_\mathcal{X} \\ &+ \left(\frac{2|\lambda|T^{1-\alpha} + M_\varphi\Gamma(\beta+1)T^{2-\alpha-\beta}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)\|x-y\|_\mathcal{X}.\end{aligned}$$

Alors :

$$\left\|D^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}(x) - D^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}(y)\right\|_\infty \leq M_2\|x-y\|_\mathcal{X}\ , \tag{2.11}$$

tel que :

$$M_2 = kT + \frac{\Gamma(\beta+1)kT}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(2-\alpha)} + \frac{2|\lambda|T^{1-\alpha} + M_\varphi\Gamma(\beta+1)T^{2-\alpha-\beta}}{\Gamma(2-\alpha)}.$$

Alors, d'après ( 2.10 ) et ( 2.11 ), on peut écrire :

$$\|\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(y)\|_\mathcal{X} \leq M\|x-y\|_\mathcal{X}\ ,$$

avec $M = M_1 + M_2$
Alors, d'après $(H_2)$ : l'opérateur $\mathcal{A}$ est contractante, par conséquent le problème (2.1) admet une seule solution. □

**Exemple 3.**

On Considère le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^{\frac{3}{4}}\left({}^cD^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{10}\right)x(t)=f\left(t,x(t),{}^cD^{\frac{1}{4}}x(t)\right), \quad t\in[0,1], \\ x(0)=\int_0^1 \frac{1}{19+e^{2t}}x(s)ds, \\ x(1)=1. \end{cases} \tag{2.12}$$

Où

$$f\left(t,x(t),{}^cD^{\frac{1}{4}}x(t)\right)=\frac{x(t)}{\sqrt{t+100}}+\frac{{}^cD^{\frac{1}{4}}x(t)e^{-t}}{9+e^t}+\cos t.$$

On a :

$$\begin{aligned}\left|f\left(t,x(t),{}^cD^{\frac{1}{4}}x(t)\right)-f\left(t,y(t),{}^cD^{\frac{1}{4}}y(t)\right)\right| &\le \frac{1}{\sqrt{t+100}}|x(t)-y(t)|+\frac{e^{-t}}{9+e^t}\left|{}^cD^{\frac{1}{4}}x(t)-{}^cD^{\frac{1}{4}}y(t)\right| \\ &\le \frac{1}{10}|x(t)-y(t)|+\frac{1}{10}\left|{}^cD^{\frac{1}{4}}x(t)-{}^cD^{\frac{1}{4}}y(t)\right| \\ &\le \frac{1}{10}\left(|x(t)-y(t)|+\left|{}^cD^{\frac{1}{4}}x(t)-{}^cD^{\frac{1}{4}}y(t)\right|\right).\end{aligned}$$

Donc $(H_1)$ est satisfaite avec $k=\frac{1}{10}$.
Aussi on a :

$$\left|\frac{1}{19+e^{2t}}\right|\le\frac{1}{20}.$$

Donc $(H_2)$ est satisfaite avec $M_\varphi=\frac{1}{20}$.
Par suite : $M_1=0,4756$ et $M_2=0,4558$ , donc $M_1+M_2=0,9313<1$ .
Ainsi toutes les hypothèses du théorème 7 sont satisfaites, par conséquent le problème (2.12) possède une unique solution.

# IV Existence

## IV.1 Résultat d'existence via le théorème du point fixe de Krasnoselskii

**Théorème 8.** *soit $f:[0,T]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction continue, on suppose que $(H_1)$,$(H_2)$ et les hypothèses suivantes sont satisfaites :*
*$(H_4)$ : $|f(t,x,y)|\le N$, pour tout $t\in[0,T]$ et $x,y\in\mathbb{R}$,*
*$(H_5)$ : $S_1+S_2<1$, où :*

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{KT^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{|\lambda|T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}+2M_\varphi T, \\ S_2 &= \frac{\Gamma(\beta+1)kT}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(2-\alpha)}+\frac{|\lambda|T^{1-\alpha}+M_\varphi\Gamma(\beta+1)T^{2-\alpha-\beta}}{\Gamma(2-\alpha)}. \end{aligned}$$

*Alors, le problème (2.1) admet au moins une solution.*

**Preuve.** Pour montrer l'existence de la solution du (2.1), il suffit de vérifier les conditions du théorème du point fixe de krasnosselski (théorème 5 ).
On fixe : $r \geq L + L'$, où :

$$\begin{aligned}
L =&\frac{2NT^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{2|\lambda|T^{\beta}r}{\Gamma(\beta+1)} + \theta + 2M_{\varphi}rT \; .\\
L' =&NT + \frac{2r|\lambda|T^{1-\alpha} + \Gamma(\beta+1)\left[\theta T^{1-\alpha-\beta} + M_{\varphi}rT^{2-\alpha-\beta}\right]}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{\Gamma(\beta+1)NT}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)} \; .
\end{aligned}$$

On considère l'ensemble suivant :

$$B_r = \{x \in \mathcal{X} : \|x\|_{\mathcal{X}} \leq r\}.$$

On définit deux opérateur $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sur $B_r$ comme suite :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 x(t) =&I^{\alpha+\beta} f\left(t, x(t), {}^{c}D^{\alpha+\beta-1}x(t)\right) - \lambda I^{\beta}x(t)\\
=&\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f\left(s, x(s), {}^{c}D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right) ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}x(s)ds.\\
\mathcal{A}_2 x(t) =&\frac{t^{\beta}}{T^{\beta}}\left[\theta - I^{\alpha+\beta} f\left(T, x(T), {}^{c}D^{\alpha+\beta-1}x(T)\right) + \lambda I^{\beta}x(T) - \int_0^T \varphi(s)x(s)ds\right] + \int_0^T \varphi(s)x(s)ds\\
=&\frac{t^{\beta}}{T^{\beta}}\left[\theta - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1} f\left(s, x(s), {}^{c}D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right) ds + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^T (T-s)^{\beta-1}x(s)ds\right.\\
&\left. - \int_0^T \varphi(s)x(s)ds\right] + \int_0^T \varphi(s)x(s)ds.
\end{aligned}$$

**Étape 1 :**

On montre que si $x, y \in B_r \Rightarrow \mathcal{A}_1 x(t) + \mathcal{A}_2 y(t) \in B_r$, c'est a dire : $\|\mathcal{A}_1 x(t) + \mathcal{A}_2 y(t)\|_{\mathcal{X}} \leq r$.
Soit $x, y \in B_r$ et $t \in [0, T]$, on a :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}_1 x(t) + \mathcal{A}_2 y(t)| = &\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f\left(s, x(s), {}^{c}D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right) ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}x(s)ds\right.\\
&+ \frac{t^{\beta}}{T^{\beta}}\left[\theta - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1} f\left(s, y(s), {}^{c}D^{\alpha+\beta-1}y(s)\right) ds\right.\\
&\left.\left. + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^T (T-s)^{\beta-1}y(s)ds - \int_0^T \varphi(s)y(s)ds\right] + \int_0^T \varphi(s)y(s)ds\right|.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}_1 x(t) + \mathcal{A}_2 y(t)| \leq &\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1}\left| f\left(s, x(s), {}^{c}D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)\right| ds + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}|x(s)|ds\\
&+ \theta + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1}\left| f\left(s, y(s), {}^{c}D^{\alpha+\beta-1}y(s)\right)\right| ds\\
&+ \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\int_0^T (T-s)^{\beta-1}|y(s)|ds + 2\int_0^T |\varphi(s)||y(s)|ds.
\end{aligned}$$

En appliquant les hypothèses $(H_2)$ et $(H_4)$, on trouve :

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{A}_1x(t)+\mathcal{A}_2y(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \sup_{t\in[0,T]} \left| f\left(s,x(s),^{c}D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)\right| \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1}ds \\
&+ \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \sup_{t\in[0,T]} |x(t)| \int_0^t (t-s)^{\beta-1}ds + \theta \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \sup_{t\in[0,T]} \left| f\left(s,y(s),^{c}D^{\alpha+\beta-1}y(s)\right)\right| \int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1}ds \\
&+ \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \sup_{t\in[0,T]} |y(t)| \int_0^T (T-s)^{\beta-1}ds + 2M_\varphi \sup_{t\in[0,T]} |y(t)| \int_0^T 1ds.
\end{aligned}
$$

Par suite :

$$
\|\mathcal{A}_1x+\mathcal{A}_2y\|_\infty \leq \frac{2NT^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{2|\lambda|T^\beta r}{\Gamma(\beta+1)} + \theta + 2M_\varphi rT := L\ . \tag{2.13}
$$

D'autre part, on a :

$$
{}^{c}D^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_1x(t) = \int_0^t f\left(s,x(s),^{c}D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)ds - \frac{\lambda}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}x(s)ds.
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{c}D^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_2y(t) = & \frac{\Gamma(\beta+1)t^{1-\alpha}}{T^\beta\Gamma(2-\alpha)} \left[\theta - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1} f\left(s,y(s),^{c}D^{\alpha+\beta-1}y(s)\right)ds \right.\\
&\left. + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^T (T-s)^{\beta-1}y(s)ds - \int_0^T \varphi(s)y(s)ds\right].
\end{aligned}
$$

Maintenant, soient $x, y \in B_r$ on a :

$$
\begin{aligned}
\left|{}^{c}D^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_1x(t) +^{c} D^{\alpha+\beta-1}\ \mathcal{A}_2y(t)\right| = & \left| \int_0^t f\left(s,x(s),^{c}D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)ds - \frac{\lambda}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}x(s)ds \right.\\
& + \frac{\Gamma(\beta+1)t^{1-\alpha}}{T^\beta\Gamma(2-\alpha)} \left[\theta - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1} f\left(s,y(s),^{c}D^{\alpha+\beta-1}y(s)\right)ds \right.\\
& \left.\left. + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^T (T-s)^{\beta-1}y(s)ds - \int_0^T \varphi(s)y(s)ds\right]\right|.
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
\left|{}^{c}D^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_1x(t) +^{c} D^{\alpha+\beta-1}\ \mathcal{A}_2y(t)\right| \leq & \int_0^t \left|f\left(s,x(s),^{c}D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)\right|ds + \frac{|\lambda|}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}|x(s)|ds \\
& + \frac{\Gamma(\beta+1)t^{1-\alpha}}{T^\beta\Gamma(2-\alpha)} \left[\theta + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1} \left|f\left(s,y(s),^{c}D^{\alpha+\beta-1}y(s)\right)\right|ds \right.\\
& \left. + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\int_0^T (T-s)^{\beta-1}|y(s)|ds + \int_0^T |\varphi(s)||y(s)|ds\right].
\end{aligned}
$$

En appliquant les hypothèses $(H_2)$ et $(H_4)$, on trouve :

$$\begin{aligned}\left|{}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_1x(t)+{}^c D^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_2y(t)\right| &\leq N\int_0^t 1ds+\frac{r|\lambda|}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t(t-s)^{-\alpha}ds\\ &+\frac{\Gamma(\beta+1)}{T^{\alpha+\beta-1}\Gamma(2-\alpha)}\left[\theta+\frac{N}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^T(T-s)^{\alpha+\beta-1}ds\right.\\ &\left.+\frac{r|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\int_0^T(T-s)^{\beta-1}ds+M_\varphi r\int_0^T 1ds\right].\end{aligned}$$

Par calcule simple,

$$\begin{aligned}\left\|{}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_1x+{}^c D^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_2y\right\|_\infty &\leq \frac{\Gamma(\beta+1)}{T^{\alpha+\beta-1}\Gamma(2-\alpha)}\left(\theta+\frac{NT^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{r|\lambda|T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}+M_\varphi rT\right)\\ &+NT+\frac{r|\lambda|T^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\ .\end{aligned}$$

D'où,

$$\left\|{}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_1x(t)+{}^c D^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_2y(t)\right\|_\infty \leq L'\ , \tag{2.14}$$

avec :

$$L'=NT+\frac{2r|\lambda|T^{1-\alpha}+\Gamma(\beta+1)\left[\theta T^{1-\alpha-\beta}+M_\varphi rT^{2-\alpha-\beta}\right]}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{\Gamma(\beta+1)NT}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)}.$$

Par (2.13) et (2.14), on obtient :

$$\|\mathcal{A}_1x+\mathcal{A}_2x\|_{\mathcal{X}}=\|\mathcal{A}_1x+\mathcal{A}_2x\|_\infty+\|{}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_1x+{}^c D^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_2y\|_\infty\leq L+L'\leq r.$$

Alors pour tout $x,y\in B_r$ et $t\in[0,T]$, on trouve $\mathcal{A}_1x(t)+\mathcal{A}_2y(t)\in B_r$.

**Étape 2 :**

1. On montre que $A_1$ est continue.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{X}$ une suite telle que : $x_n\longrightarrow x$ dans $\mathcal{X}$. Alors pour tout $t\in[0,T]$, on a :

$$\begin{aligned}|A_1(x_n)(t)-A_1(x)(t)| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta-1}f\left(s,x_n(s),{}^c D^{\alpha+\beta-1}x_n(s)\right)ds\right.\\ &-\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}x_n(s)ds+\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}x(s)ds\\ &\left.-\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta-1}f\left(s,x(s),{}^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)ds\right|.\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}|A_1(x_n)(t)-A_1(x)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta-1}\left|f\left(s,x_n(s),{}^c D^{\alpha+\beta-1}x_n(s)\right)\right.\\ &\left.-f\left(s,x(s),{}^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)\right|ds\\ &+\frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}|x_n(s)-x(s)|ds.\end{aligned}$$

Comme f est une fonction continue, alors :

$$\|A_1(x_n) - A_1(x)\|_\infty \to 0 \text{ quand } n \to \infty \quad . \tag{2.15}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\left|{}^cD^{\alpha+\beta-1}A_1(x_n)(t) - {}^cD^{\alpha+\beta-1}A_1(x)(t)\right| &= \Bigg|\int_0^t \left[f\left(s, x_n(s), {}^cD^{\alpha+\beta-1}x_n(s)\right) - f\left(s, x(s), {}^cD^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)\right] ds \\ &\quad + \frac{\lambda}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}[x(s) - x_n(s)]ds\Bigg| \\ &\leq \int_0^t \left|f\left(s, x_n(s), {}^cD^{\alpha+\beta-1}x_n(s)\right) - f\left(s, x(s), {}^cD^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)\right| ds \\ &\quad + \frac{|\lambda|}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}|x_n(s) - x(s)|ds.\end{aligned}$$

Comme f est une fonction continue, alors :

$$\left\|{}^cD^{\alpha+\beta-1}A_1(x_n) - {}^cD^{\alpha+\beta-1}A_1(x)\right\|_\infty \to 0 \text{ quand } n \to \infty \quad . \tag{2.16}$$

De ( 2.15 ) et ( 2.16 ), on obtient :

$$\|A_1(x_n) - A_1(x)\|_{\mathcal{X}} \to 0 \text{ quand } n \to \infty \quad .$$

D'où, $A_1$ est continue sur $\mathcal{X}$.

2. On montre que $A_1$ est compact.
Pour établir la compacité de l'opérateur $A_1$, il suffit de prouver que $A_1(B_r)$ est relativement compacte en utilisant le théorème d'Ascoli-Arzela.

a) $A_1(B_r)$ est borné .
Il suffit de montrer que pour tout $r > 0$ , il existe une constante positive $\rho$ tel que pour tout $t \in [0, T]$ et $x \in B_r$ avec $B_r = \{x \in \mathcal{X} : \|x\|_{\mathcal{X}} \leq r\}$, on trouve : $\|A_1(x)\|_{\mathcal{X}} \leq \rho$.
On a :

$$\begin{aligned}|\mathcal{A}_1(x)(t)| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f\left(s, x(s), {}^cD^{\alpha+\beta-1}x(s)\right) ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}x(s)ds\right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1}\left|f\left(s, x(s), {}^cD^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)\right| ds + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}|x(s)|\, ds\ .\end{aligned}$$

En appliquant l'hypothèse $(H_4)$ , on obtient :

$$|\mathcal{A}_1(x)(t)| \leq \frac{N}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1}ds + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\sup_{t\in[0,T]}|x(t)|\int_0^T (T-s)^{\beta-1}ds\ .$$

Par suite :

$$\|\mathcal{A}_1(x)\|_\infty \leq \frac{NT^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{r\,|\lambda|\,T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} := \rho_1 \,. \tag{2.17}$$

D'autre par, pour tout $t \in [0, T]$ et $x \in B_r$, on a :

$$\begin{aligned}\left|{}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_1 x(t)\right| &= \left|\int_0^t f\left(s, x(s), {}^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right) ds - \frac{\lambda}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}x(s)ds\right| \\ &\leq \int_0^t \left|f\left(s, x(s), {}^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)\right| ds + \frac{|\lambda|}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\,|x(s)|\,ds \,.\end{aligned}$$

En appliquant l'hypothèse $(H_4)$ , on trouve :

$$\left|{}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_1 x(t)\right| \leq N\int_0^T 1ds + \frac{|\lambda|}{\Gamma(1-\alpha)}\sup_{t\in[0,T]}|x(t)|\int_0^T (T-s)^{-\alpha}ds \,.$$

Donc :

$$\left\|{}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_1 x\right\|_\infty \leq NT + \frac{r\,|\lambda|\,T^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} := \rho_2 \,. \tag{2.18}$$

De ( 2.17 ) et ( 2.18 ) , on a :

$$\|\mathcal{A}_1(x)\|_{\mathcal{X}} \leq \rho \,,$$

avec $\rho = \rho_1 + \rho_2$.
D'où, $A_1(B_r)$ est uniformément borné.

b) $A_1(B_r)$ est équicontinue .
Soit $x \in B_r$, Pour tout $t_1, t_2 \in [0, T], t_1 < t_2$ :

$$\begin{aligned}|A_1(x)\,(t_2) - A_1(x)\,(t_1)| = \Bigg| &\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta-1}f\left(s, x(s), {}^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right) ds \\ &- \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\beta-1}x(s)ds + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\beta-1}x(s)ds \\ &- \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha+\beta-1}f\left(s, x(s), {}^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right) ds\Bigg|.\end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
|A_1(x)\,(t_2)-A_1(x)\,(t_1)| = \Bigg| & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\Bigg[\int_0^{t_1}(t_2-s)^{\alpha+\beta-1} f\left(s,x(s),{}^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right) ds \\
& + \int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta-1} f\left(s,x(s),{}^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right) ds\Bigg] \\
& - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\Bigg[\int_0^{t_1}(t_2-s)^{\beta-1}x(s)ds + \int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\beta-1}x(s)ds\Bigg] \\
& - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha+\beta-1} f\left(s,x(s),{}^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right) ds \\
& + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\beta-1}x(s)ds\Bigg|.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
|A_1(x)\,(t_2)-A_1(x)\,(t_1)| = \Bigg| & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{\alpha+\beta-1}-(t_1-s)^{\alpha+\beta-1}\right] f\left(s,x(s),{}^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right) ds \\
& + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_1}\left[(t_1-s)^{\beta-1}-(t_2-s)^{\beta-1}\right]x(s)ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\beta-1}x(s)ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta-1} f\left(s,x(s),{}^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right) ds\Bigg|.
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
|A_1(x)\,(t_2)-A_1(x)\,(t_1)| \le\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{\alpha+\beta-1}-(t_1-s)^{\alpha+\beta-1}\right]\left| f\left(s,x(s),{}^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)\right| ds \\
& + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_1}\left[(t_1-s)^{\beta-1}-(t_2-s)^{\beta-1}\right]|x(s)|ds + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\beta-1}|x(s)|ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta-1}\left| f\left(s,x(s),{}^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)\right| ds.
\end{aligned}$$

En appliquant les hypothèses $(H_4)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
|A_1(x)\,(t_2)-A_1(x)\,(t_1)| \le\ & \frac{N}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{\alpha+\beta-1}-(t_1-s)^{\alpha+\beta-1}\right]ds \\
& + \frac{|\lambda|r}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_1}\left[(t_1-s)^{\beta-1}-(t_2-s)^{\beta-1}\right]ds + \frac{|\lambda|r}{\Gamma(\beta)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\beta-1}ds \\
& + \frac{N}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta-1}ds.
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\beta-1}ds &= \frac{t_1^{\beta}}{\beta},\\
\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\beta-1}ds &= \frac{(t_2-t_1)^{\beta}}{\beta},\\
\int_0^{t_1}(t_2-s)^{\beta-1}ds &= \frac{t_2^{\beta}}{\beta}-\frac{(t_2-t_1)^{\beta}}{\beta}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha+\beta-1}ds &= \frac{t_1^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}\ ,\\
\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta-1}ds &= \frac{(t_2-t_1)^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}\ ,\\
\int_0^{t_1}(t_2-s)^{\alpha+\beta-1}ds &= \frac{t_2^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}-\frac{(t_2-t_1)^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}\ .
\end{aligned}$$

Alors, l'inégalité devient :

$$\|A_1(x)\,(t_2)-A_1(x)\,(t_1)\|_\infty \leq \frac{N}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\left(t_2^{\alpha+\beta}-t_1^{\alpha+\beta}\right)+\frac{|\lambda|r}{\Gamma(\beta+1)}\left[t_2^{\beta}-t_1^{\beta}+2(t_2-t_1)^{\beta}\right]. \quad (2.19)$$

D'après lemme 2 , on a :

1. Soit $1<\alpha+\beta<2$, alors $t_2^{\alpha+\beta}-t_1^{\alpha+\beta}\leq(\alpha+\beta)T^{\alpha+\beta-1}(t_2-t_1)$,
2. Soit $0<\beta<1$, alors $t_2^{\beta}-t_1^{\beta}\leq(t_2-t_1)^{\beta}$.

Donc, ( 2.19 ) devient :

$$\|A_1(x)\,(t_2)-A_1(x)\,(t_1)\|_\infty \leq \frac{N(\alpha+\beta)T^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t_2-t_1)+\frac{3|\lambda|r}{\Gamma(\beta+1)}(t_2-t_1)^{\beta}.$$

Alors pour $t_1\to t_2$, on va avoir :

$$\|A_1(x)\,(t_2)-A_1(x)\,(t_1)\|_\infty\to 0. \quad (2.20)$$

D'autre part, soit $x\in B_r$ et pour tout $t_1,t_2\in[0,T]$ tel que $t_1<t_2$ :

$$\begin{aligned}
\left|{}^cD^{\alpha+\beta-1}A_1(x)\,(t_2)-{}^cD^{\alpha+\beta-1}A_1(x)\,(t_1)\right| = \Bigg| &\int_0^{t_2} f\left(s,x(s),{}^cD^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)ds\\
&-\frac{\lambda}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{-\alpha}x(s)ds\\
&-\int_0^{t_1} f\left(s,x(s),{}^cD^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)ds\\
&+\frac{\lambda}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{-\alpha}x(s)ds\Bigg|.
\end{aligned}$$

De la même manière présidente, on trouve :

$$\begin{aligned}\left|{}^cD^{\alpha+\beta-1}A_1(x)\,(t_2)-{}^c D^{\alpha+\beta-1}A_1(x)\,(t_1)\right| = \Bigg| & \int_{t_1}^{t_2} f\left(s,x(s),{}^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)ds \\ & -\frac{\lambda}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{t_1}(t_2-s)^{-\alpha}x(s)ds \\ & -\frac{\lambda}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{-\alpha}x(s)ds \\ & +\frac{\lambda}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{-\alpha}x(s)ds\Bigg|.\end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\left|{}^cD^{\alpha+\beta-1}A_1(x)\,(t_2)-{}^c D^{\alpha+\beta-1}A_1(x)\,(t_1)\right| \le & \int_{t_1}^{t_2}\left|f\left(s,x(s),{}^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)\right|ds \\ & +\frac{|\lambda|}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{t_1}\left[(t_1-s)^{-\alpha}-(t_2-s)^{-\alpha}\right]|x(s)|ds \\ & +\frac{|\lambda|}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{-\alpha}|x(s)|ds.\end{aligned}$$

Par hypothèses $(H_4)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\left\|{}^cD^{\alpha+\beta-1}A_1(x)\,(t_2)-{}^c D^{\alpha+\beta-1}A_1(x)\,(t_1)\right\|_\infty \le & N\int_{t_1}^{t_2}1ds+\frac{|\lambda|r}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{t_1}\left[(t_1-s)^{-\alpha}-(t_2-s)^{-\alpha}\right]ds \\ & +\frac{|\lambda|r}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{-\alpha}ds.\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2}1ds=(t_2-t_1)\,,\\ &\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{-\alpha}ds=\frac{(t_2-t_1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,,\\ &\int_0^{t_1}(t_1-s)^{-\alpha}ds=\frac{t_1^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,,\\ &\int_0^{t_1}(t_2-s)^{-\alpha}ds=\frac{t_2^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{(t_2-t_1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,.\end{aligned}$$

Alors l'inégalité devient :

$$\begin{aligned}\left\|{}^cD^{\alpha+\beta-1}A_1(x)\,(t_2)-{}^c D^{\alpha+\beta-1}A_1(x)\,(t_1)\right\|_\infty &\le N(t_2-t_1)+\frac{|\lambda|r}{\Gamma(2-\alpha)}\left[t_1^{1-\alpha}-t_2^{1-\alpha}+2(t_2-t_1)^{1-\alpha}\right]\\ &\le N(t_2-t_1)+\frac{|\lambda|r}{\Gamma(2-\alpha)}\left[t_2^{1-\alpha}-t_1^{1-\alpha}+2(t_2-t_1)^{1-\alpha}\right].\end{aligned}$$

D'après lemme 2, on a :

$$\left\|{}^cD^{\alpha+\beta-1}A_1(x)\,(t_2) -{}^c D^{\alpha+\beta-1}A_1(x)\,(t_1)\right\|_\infty \leq N(t_2-t_1) + \frac{3|\lambda|r}{\Gamma(2-\alpha)}(t_2-t_1)^{1-\alpha}.$$

Alors pour $t_1 \to t_2$, on va avoir :

$$\left\|{}^cD^{\alpha+\beta-1}A_1(x)\,(t_2) -{}^c D^{\alpha+\beta-1}A_1(x)\,(t_1)\right\|_\infty \to 0. \tag{2.21}$$

Par ( 2.20 ) et ( 2.21 ), on obtient :

$$\|A_1(x)\,(t_2) - A_1(x)\,(t_1)\|_\infty \to 0.$$

Donc, $A_1\,(B_r)$ est équicontinue.
D'où d'après (a) et (b) et le théorème d'Ascoli-Arzelá, $A_1$ est relativement compact sur $B_r$.

**Étape 3 :**

On montre que $A_2$ est contractante.
Soient $x, y \in B_r$, $t \in [0,T]$, on a :

$$\begin{aligned}|\mathcal{A}_2x(t) - \mathcal{A}_2y(t)| \leq{}& \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1}\left|f\left(s, x(s),{}^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right) - f\left(s, y(s),{}^c D^{\alpha+\beta-1}y(s)\right)\right|ds \\ &+ \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\int_0^T (T-s)^{\beta-1}|x(s)-y(s)|ds + 2\int_0^T |\varphi(s)||x(s)-y(s)|ds.\end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses $(H_1)$ et $(H_2)$, on obtient :

$$\|\mathcal{A}_2x - \mathcal{A}_2y\|_\infty \leq \frac{k\|x-y\|_{\mathcal{X}}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1}ds + \frac{|\lambda|\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\beta)}\int_0^T (T-s)^{\beta-1}ds + 2M_\varphi\|x-y\|_\infty\int_0^T 1ds.$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}_2x - \mathcal{A}_2y\| &\leq \frac{KT^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\|x-y\|_{\mathcal{X}} + \frac{|\lambda|T^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\|x-y\|_\infty + 2M_\varphi T\|x-y\|_\infty \\ &\leq \frac{KT^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\|x-y\|_{\mathcal{X}} + \left(\frac{|\lambda|T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + 2M_\varphi T\right)\|x-y\|_\infty \\ &\leq \frac{KT^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\|x-y\|_{\mathcal{X}} + \left(\frac{|\lambda|T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + 2M_\varphi T\right)\left(\|x-y\|_\infty + \|{}^cD^{\alpha+\beta-1}(x-y)\|_\infty\right) \\ &\leq \frac{KT^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\|x-y\|_{\mathcal{X}} + \left(\frac{|\lambda|T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + 2M_\varphi T\right)\|x-y\|_{\mathcal{X}}.\end{aligned}$$

D'où :

$$\|\mathcal{A}_2x - \mathcal{A}_2y\|_\infty \leq S_1\|x-y\|_{\mathcal{X}}\ , \tag{2.22}$$

tel que :

$$S_1 = \frac{KT^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\lambda|T^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} + 2M_{\varphi}T \ .$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\left|{}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_2x(t) - {}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_2y(t)\right| = &\left|\frac{\Gamma(\beta+1)t^{1-\alpha}}{T^{\beta}\Gamma(2-\alpha)}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1}\Big[f\left(s, y(s), {}^cD^{\alpha+\beta-1}y(s)\right)\right.\right.\\ &- f\left(s, x(s), {}^cD^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)\Big]ds + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^T (T-s)^{\beta-1}[x(s)-y(s)]ds\\ &\left.\left. + \int_0^T \varphi(s)[y(s)-x(s)]ds\right]\right|.\end{aligned}$$

Puisque $t^{1-\alpha} \leq T^{1-\alpha}$, on trouve :

$$\begin{aligned}\left|{}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_2x(t) - {}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_2y(t)\right| \leq &\frac{\Gamma(\beta+1)}{T^{\alpha+\beta-1}\Gamma(2-\alpha)}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1}\Big|f\left(s, x(s), {}^cD^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)\right.\\ &- f\left(s, y(s), {}^cD^{\alpha+\beta-1}y(s)\right)\Big|ds + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\int_0^T (T-s)^{\beta-1}|x(s)-y(s)|ds\\ &\left. + \int_0^T |\varphi(s)||x(s)-y(s)|ds\right].\end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses $(H_1)$ et $(H_2)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\left\|{}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_2x - {}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_2y\right\|_{\infty} \leq &\frac{\Gamma(\beta+1)}{T^{\alpha+\beta-1}\Gamma(2-\alpha)}\left[\frac{k\|x-y\|_{\mathcal{X}}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1}ds\right.\\ &\left. + \frac{|\lambda|\|x-y\|_{\infty}}{\Gamma(\beta)}\int_0^T (T-s)^{\beta-1}ds + M_{\varphi}\|x-y\|_{\infty}\int_0^T 1ds\right].\end{aligned}$$

Par calcule simple :

$$\begin{aligned}\left\|{}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_2x - {}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_2y\right\|_{\infty} \leq &\frac{\Gamma(\beta+1)}{T^{\alpha+\beta-1}\Gamma(2-\alpha)}\left[\frac{kT^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\|x-y\|_{\mathcal{X}}\right.\\ &\left. + \frac{|\lambda|T^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\|x-y\|_{\infty} + M_{\varphi}T\|x-y\|_{\infty}\right].\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\left\|{}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_2x - {}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_2y\right\|_{\infty} \leq &\frac{\Gamma(\beta+1)kT}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(2-\alpha)}\|x-y\|_{\mathcal{X}}\\ &+ \frac{|\lambda|T^{1-\alpha} + M_{\varphi}\Gamma(\beta+1)T^{2-\alpha-\beta}}{\Gamma(2-\alpha)}\|x-y\|_{\infty}.\end{aligned}$$

D'où :

$$\left\| {}^cD^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_2 x - {}^c D^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}_2 y \right\|_\infty \leq S_2 \|x-y\|_{\mathcal{X}}, \tag{2.23}$$

tel que :

$$S_2 = \frac{\Gamma(\beta+1)kT}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(2-\alpha)} + \frac{|\lambda|T^{1-\alpha} + M_\varphi \Gamma(\beta+1)T^{2-\alpha-\beta}}{\Gamma(2-\alpha)} .$$

Alors, d'après ( 2.22 ) et ( 2.23 ), on obtient :

$$\|\mathcal{A}_2 x - \mathcal{A}_2 y\|_{\mathcal{X}} \leq S\|x-y\|_{\mathcal{X}},$$

avec $S = S_1 + S_2$.
Alors, d'après $(H_5)$ : l'opérateur $\mathcal{A}$ est contractante.
Grâces aux étapes 1, 2, 3, et d'après le théorème du point fixe de krasnosselski, on déduit que le problème (2.1) admet au moins une solution. □

**Exemple 4.**

Soit le problème fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^{\frac{7}{8}}\left({}^cD^{\frac{5}{8}} + \frac{1}{16}\right)x(t) = f\left(t, x(t), {}^c D^{\frac{1}{2}}x(t)\right), \quad t \in [0,1], \\ x(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(t)}{\sqrt{2t+144}} x(s)ds, \\ x(1) = \dfrac{1}{10}. \end{cases} \tag{2.24}$$

Où

$$f\left(t, x(t), {}^c D^{\frac{1}{2}}x(t)\right) = \frac{x(t)}{3e^t+7} + \frac{{}^cD^{\frac{1}{2}}x(t)}{e^{2t}+9} + \frac{\sin(t)}{10+t^2}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \left| f\left(t, x(t), {}^c D^{\frac{1}{2}}x(t)\right) - f\left(t, y(t), {}^c D^{\frac{1}{2}}y(t)\right) \right| &\leq \frac{1}{3e^t+7}|x(t)-y(t)| + \frac{1}{e^{2t}+9}\left|{}^cD^{\frac{1}{2}}x(t) - {}^c D^{\frac{1}{2}}y(t)\right| \\ &\leq \frac{1}{10}|x(t)-y(t)| + \frac{1}{10}\left|{}^cD^{\frac{1}{2}}x(t) - {}^c D^{\frac{1}{2}}y(t)\right| \\ &\leq \frac{1}{10}\left(|x(t)-y(t)| + \left|{}^cD^{\frac{1}{2}}x(t) - {}^c D^{\frac{1}{2}}y(t)\right|\right). \end{aligned}$$

Donc $(H_1)$ est satisfaite avec $k = \frac{1}{10}$.
Aussi on a :

$$\left|\frac{\cos(t)}{\sqrt{2t+144}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2t+144}} \quad \leq \frac{1}{12}.$$

Donc $(H_2)$ est satisfaite avec $M_\varphi = \frac{1}{12}$, et par $(H_1)$ on obtient :

$$\left| f\left(t, x(t), {}^c D^{\frac{1}{2}} x(t)\right) \right| \leq k\|x\|_{\mathcal{X}} + |f(t,0,0)| \quad \leq \frac{r}{10} + \left| \frac{\sin(t)}{10+t^2} \right| \leq \frac{r+1}{10}.$$

Alors $(H_4)$ est satisfaite avec $N = \frac{r+1}{10}$.
Pour $(H_5)$ on obtient :

$$S_1 \simeq 0.313.$$
$$S_2 \simeq 0.218.$$

Par conséquent :

$$S_1 + S_2 \simeq 0.531 < 1.$$

Ainsi toutes les hypothèses du théorème 8 sont satisfaites, par conséquent le problème (2.24) possède au moins une solution $x$ dans l'espace $\mathcal{X}$ .

## IV.2 Résultat d'existence via l'alternative non linéaire de Leray-Schauder

Notre prochain résultat d'existence des solutions de problème (2.1) est basé sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder( théorème 4 ).

**Théorème 9.** *Soit $f : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $(H_2)$ et les hypothèses suivantes sont satisfaites :*
*$(H_6)$ : il existe une fonction croissante continue définie par $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et une fonction $g \in C([0,T], \mathbb{R}^+)$ tel que :*

$$|f(t, x_1, x_2)| \leq g(t)\ \phi(\|x_1\| + \|x_2\|) \qquad \textit{pour tout} \quad (t, x_1, x_2) \in [0,T] \times \mathbb{R}^2.$$

*$(H_7)$ : il existe une constante $M > 0$ tel que :*

$$\frac{M}{\delta_1 + \delta_2} > 1\ ,$$

*avec :*

$$\delta_1 = \frac{2\|g\|_\infty \phi(r) T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{2|\lambda| r T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + 2M_\varphi r T + \theta\ ,$$

*et*

$$\delta_2 = \|g\|_\infty \phi(r) T + \frac{\Gamma(\beta+1)\|g\|_\infty \phi(r) T}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{2|\lambda| r T^{1-\alpha} + \Gamma(\beta+1)\left[\theta T^{1-\alpha-\beta} + M_\varphi r T^{2-\alpha-\beta}\right]}{\Gamma(2-\alpha)}\ ,$$

*alors le problème (2.1) a au moins une solution sur [0, T] .*

**Preuve.**
Soit l'opérateur $\mathcal{A} : \mathcal{X} \longmapsto \mathcal{X}$ définie par (2.9), on passera par 3 étapes :

**Étape 1 :**

On montre que $\mathcal{A}$ est continue.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ une suite telle que : $x_n \longrightarrow x$ dans $\mathcal{X}$. Alors pour tout $t \in [0,T]$, on a :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}(x_n)(t) - \mathcal{A}(x)(t)| = \Bigg| & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \Big[ f\left(s, x_n(s), {}^c D^{\alpha+\beta-1} x_n(s)\right) \\
& - f\left(s, x(s), {}^c D^{\alpha+\beta-1} x(s)\right) \Big] ds + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} [x(s) - x_n(s)] ds \\
& + \frac{t^\beta}{T^\beta} \Bigg[ \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1} \Big[ f\left(s, x(s), {}^c D^{\alpha+\beta-1} x(s)\right) \\
& - f\left(s, x_n(s), {}^c D^{\alpha+\beta-1} x_n(s)\right) \Big] ds + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^T (T-s)^{\beta-1} [x_n(s) - x(s)] ds \\
& + \int_0^T \varphi(s) [x(s) - x_n(s)] ds \Bigg] + \int_0^T \varphi(s) [x_n(s) - x(s)] ds \Bigg| .
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}(x_n)(t) - \mathcal{A}(x)(t)| \leq & \frac{2}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1} \Big| f\left(s, x_n(s), {}^c D^{\alpha+\beta-1} x_n(s)\right) \\
& - f\left(s, x(s), {}^c D^{\alpha+\beta-1} x(s)\right) \Big| ds + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} |x_n(s) - x(s)| \, ds \\
& + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_0^T (T-s)^{\beta-1} |x_n(s) - x(s)| \, ds + 2M_\varphi \int_0^T |x_n(s) - x(s)| \, ds .
\end{aligned}$$

Comme $f$ est une fonction continue, alors :

$$\|\mathcal{A}(x_n) - \mathcal{A}(x)\|_\infty \to 0 \text{ quand } n \to \infty . \tag{2.25}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\left| {}^c D^{\alpha+\beta-1} \mathcal{A}(x_n)(t) - {}^c D^{\alpha+\beta-1} \mathcal{A}(x)(t) \right| = \Bigg| & \int_0^t \Big[ f\left(s, x_n(s), {}^c D^{\alpha+\beta-1} x_n(s)\right) - f\left(s, x(s), {}^c D^{\alpha+\beta-1} x(s)\right) \Big] ds \\
& + \frac{\lambda}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} [x(s) - x_n(s)] \, ds \\
& + \frac{\Gamma(\beta+1) t^{1-\alpha}}{T^\beta \Gamma(2-\alpha)} \Bigg[ \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1} \\
& \times \Big[ f\left(s, x(s), {}^c D^{\alpha+\beta-1} x(s)\right) - f\left(s, x_n(s), {}^c D^{\alpha+\beta-1} x_n(s)\right) \Big] ds \\
& + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^T (T-s)^{\beta-1} [x_n(s) - x(s)] \, ds \\
& + \int_0^T \varphi(s) [x(s) - x_n(s)] \, ds \Bigg] \Bigg| .
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\left|{}^{c}D^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}\left(x_{n}\right)(t) -{}^{c} D^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}(x)(t)\right| \leq & \int_{0}^{t}\left|f\left(s, x_{n}(s),{}^{c} D^{\alpha+\beta-1}x_{n}(s)\right)-f\left(s, x(s),{}^{c} D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)\right| ds \\ & +\frac{|\lambda|}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{0}^{t}(t-s)^{-\alpha}\left|x_{n}(s)-x(s)\right| ds \\ & +\frac{\Gamma(\beta+1)}{T^{\alpha+\beta-1}\Gamma(2-\alpha)}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{0}^{T}(T-s)^{\alpha+\beta-1}\right. \\ & \times\left|f\left(s, x_{n}(s),{}^{c} D^{\alpha+\beta-1}x_{n}(s)\right)-f\left(s, x(s),{}^{c} D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)\right| ds \\ & +\frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_{0}^{T}(T-s)^{\beta-1}\left|x_{n}(s)-x(s)\right| ds \\ & \left.+M_{\varphi} \int_{0}^{T}\left|x_{n}(s)-x(s)\right| ds\right] .\end{aligned}$$

Comme $f$ est continue sur $\mathcal{X}$ alors :

$$\left\|{}^{c}D^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}\left(x_{n}\right)-{}^{c} D^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}(x)\right\|_{\infty} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty . \tag{2.26}$$

De ( 2.25 ) et ( 2.26), on obtient :

$$\left\|\mathcal{A}\left(x_{n}\right)-\mathcal{A}(x)\right\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty .$$

D'où, $\mathcal{A}$ est continue sur $\mathcal{X}$.

**Étape 2 :**

On montre que $\mathcal{A}\left(B_{r}\right)$ est relativement compact.
Soit l'ensemble :

$$B_{r}=\left\{x \in \mathcal{X}:\|x\|_{\mathcal{X}} \leq r\right\}$$

1. On montre que $\mathcal{A}$ transforme un ensemble borné en un ensemble borné dans $\mathcal{X}$.
a- Pour tout $t \in[0, T]$ et $x \in B_{r}$, on a :

$$\begin{aligned}|\mathcal{A} x(t)|= & \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{0}^{t}(t-s)^{\alpha+\beta-1} f\left(s, x(s),{}^{c} D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right) ds-\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_{0}^{t}(t-s)^{\beta-1} x(s) ds\right. \\ & +\frac{t^{\beta}}{T^{\beta}}\left[\theta-\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{0}^{T}(T-s)^{\alpha+\beta-1} f\left(s, x(s),{}^{c} D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right) ds\right. \\ & \left.\left.+\frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_{0}^{T}(T-s)^{\beta-1} x(s) ds-\int_{0}^{T} \varphi(s) x(s) ds\right]+\int_{0}^{T} \varphi(s) x(s) ds\right| .\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}|\mathcal{A} x(t)| \leq & \frac{2}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{0}^{T}(T-s)^{\alpha+\beta-1}\left|f\left(s, x(s),{}^{c} D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)\right| ds+\frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_{0}^{t}(t-s)^{\beta-1}|x(s)| ds \\ & +\theta+\frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_{0}^{T}(T-s)^{\beta-1}|x(s)| ds+2 \int_{0}^{T}|\varphi(s)||x(s)| ds .\end{aligned}$$

En appliquant les hypothèses $(H_2)$ et $(H_6)$, on trouve :

$$|\mathcal{A}x(t)| \leq \frac{2}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1} g(t)\phi\left(\|x\| + \|^c D^{\alpha+\beta-1}x\|\right) ds + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1}|x(s)|ds$$
$$+ \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_0^T (T-s)^{\beta-1}|x(s)|ds + 2M_\varphi \int_0^T |x(s)|ds + \theta\ .$$

Par suite, on a :

$$\|\mathcal{A}x(t)\|_\infty \leq \frac{2\|g\|_\infty\ \phi(\|x\|_{\mathcal{X}})}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1}ds + \frac{|\lambda|r}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1}ds$$
$$+ \frac{|\lambda|r}{\Gamma(\beta)} \int_0^T (T-s)^{\beta-1}ds + 2M_\varphi r \int_0^T 1ds + \theta\ .$$

Par calcule simple, on obtient :

$$\|\mathcal{A}x(t)\|_\infty \leq \frac{2\|g\|_\infty \phi(r) T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{2|\lambda|rT^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + 2M_\varphi rT + \theta := \delta_1\ . \tag{2.27}$$

b- Pour tout $t \in [0, T]$, on a :

$$\left|^c D^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}x(t)\right| = \Bigg| \int_0^t f\left(s, x(s), ^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right) ds - \frac{\lambda}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha}x(s)ds$$
$$+ \frac{\Gamma(\beta+1)t^{1-\alpha}}{T^\beta\Gamma(2-\alpha)} \left[\theta - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1} f\left(s, x(s), ^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right) ds\right.$$
$$\left. + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^T (T-s)^{\beta-1}x(s)ds - \int_0^T \varphi(s)x(s)ds\right]\Bigg|$$
$$\leq \int_0^t \left|f\left(s, x(s), ^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)\right| ds + \frac{|\lambda|}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha}|x(s)|ds$$
$$+ \frac{\Gamma(\beta+1)}{T^{\alpha+\beta-1}\Gamma(2-\alpha)} \left[\theta + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1} \left|f\left(s, x(s), ^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)\right| ds\right.$$
$$\left. + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_0^T (T-s)^{\beta-1}|x(s)|ds + \int_0^T |\varphi(s)||x(s)|ds\right]\ .$$

En appliquant les hypothèses $(H_2)$ et $(H_6)$, on trouve :

$$\left\|^c D^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}x\right\|_\infty \leq \|g\|_\infty \phi(r) \int_0^t 1ds + \frac{|\lambda|r}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha}ds$$
$$+ \frac{\Gamma(\beta+1)}{T^{\alpha+\beta-1}\Gamma(2-\alpha)} \left[\theta + \frac{\|g\|_\infty\phi(r)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1}ds\right.$$
$$\left. + \frac{|\lambda|r}{\Gamma(\beta)} \int_0^T (T-s)^{\beta-1}ds + M_\varphi r \int_0^T 1ds\right]\ .$$

D'où :

$$\left\|^c D^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}x\right\|_\infty \leq \|g\|_\infty\phi(r)T + \frac{r|\lambda|T^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{\Gamma(\beta+1)}{T^{\alpha+\beta-1}\Gamma(2-\alpha)}\left(\theta + \frac{\|g\|_\infty\phi(r)T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{r|\lambda|T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + M_\varphi rT\right).$$

Donc :

$$\left\| {}^{c}D^{\alpha+\beta-1}\mathcal{A}x \right\|_{\infty} \leq \quad \delta_2 \tag{2.28}$$

tel que :

$$\delta_2 = \|g\|_{\infty}\phi(r)T + \frac{\Gamma(\beta+1)\|g\|_{L^1}\phi(r)T}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{2|\lambda|rT^{1-\alpha} + \Gamma(\beta+1)\left[\theta T^{1-\alpha-\beta} + M_{\varphi}rT^{2-\alpha-\beta}\right]}{\Gamma(2-\alpha)} .$$

De ( 2.27 ) et ( 2.28 ), on a :

$$\|\mathcal{A}x\|_{\mathcal{X}} \leq \delta ,$$

avec $\delta = \delta_1 + \delta_2$.
Ainsi, $\mathcal{A}$ est borné .
2. On montre que $\mathcal{A}$ transforme un ensemble borné en un ensemble équicontinue.
a- Soit $x \in B_r$, Pour tout $t_1, t_2 \in [0,T], t_1 < t_2$ :

$$\begin{aligned}|Ax(t_2) - Ax(t_1)| = \Bigg| & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta-1}f\left(s, x(s), {}^{c}D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\beta-1}x(s)ds \\
& + \frac{(t_2^{\beta}-t_1^{\beta})}{T^{\beta}}\Bigg[\theta - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^{T}(T-s)^{\alpha+\beta-1}f\left(s, x(s), {}^{c}D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)ds \\
& + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^{T}(T-s)^{\beta-1}x(s)ds - \int_0^{T}\varphi(s)x(s)ds\Bigg] \\
& - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha+\beta-1}f\left(s, x(s), {}^{c}D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)ds \\
& + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\beta-1}x(s)ds\Bigg| .\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}|Ax(t_2) - Ax(t_1)| = \Bigg| & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{\alpha+\beta-1} - (t_1-s)^{\alpha+\beta-1}\right]f\left(s, x(s), {}^{c}D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta-1}f\left(s, x(s), {}^{c}D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)ds \\
& + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_1}\left[(t_1-s)^{\beta-1} - (t_2-s)^{\beta-1}\right]x(s)ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\beta-1}x(s)ds \\
& + \Bigg[\theta - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^{T}(T-s)^{\alpha+\beta-1}f\left(s, x(s), {}^{c}D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)ds \\
& + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)}\int_0^{T}(T-s)^{\beta-1}x(s)ds - \int_0^{T}\varphi(s)x(s)ds\Bigg]\frac{(t_2^{\beta}-t_1^{\beta})}{T^{\beta}}\Bigg| .\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}|Ax(t_2)-Ax(t_1)| \leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{\alpha+\beta-1}-(t_1-s)^{\alpha+\beta-1}\right]\left|f\left(s,x(s),{}^cD^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)\right|ds\\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta-1}\left|f\left(s,x(s),{}^cD^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)\right|ds\\ &+\frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_1}\left[(t_1-s)^{\beta-1}-(t_2-s)^{\beta-1}\right]|x(s)|ds+\frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\beta-1}|x(s)|ds\\ &+\left[\theta+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^T(T-s)^{\alpha+\beta-1}\left|f\left(s,x(s),{}^cD^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)\right|ds\right.\\ &\left.+\frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\int_0^T(T-s)^{\beta-1}|x(s)|ds+\int_0^T|\varphi(s)||x(s)|ds\right]\frac{(t_2^\beta-t_1^\beta)}{T^\beta}\ .\end{aligned}$$

En appliquant les hypothèses $(H_2)$ et $(H_6)$, on obtient :

$$\begin{aligned}|Ax(t_2)-Ax(t_1)| \leq\ & \frac{\|g\|_\infty\phi(r)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{\alpha+\beta-1}-(t_1-s)^{\alpha+\beta-1}\right]ds\\ &+\frac{\|g\|_\infty\phi(r)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta-1}ds+\frac{|\lambda|r}{\Gamma(\beta)}\int_0^{t_1}\left[(t_1-s)^{\beta-1}-(t_2-s)^{\beta-1}\right]ds\\ &+\frac{|\lambda|r}{\Gamma(\beta)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\beta-1}ds+\left[\theta+\frac{\|g\|_\infty\phi(r)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^T(T-s)^{\alpha+\beta-1}ds\right.\\ &\left.+\frac{|\lambda|r}{\Gamma(\beta)}\int_0^T(T-s)^{\beta-1}ds+M_\varphi r\int_0^T 1ds\right]\frac{(t_2^\beta-t_1^\beta)}{T^\beta}\ .\end{aligned}$$

Par calcule simple :

$$\begin{aligned}|Ax(t_2)-Ax(t_1)| \leq\ & \frac{\|g\|_\infty\phi(r)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\left[t_2^{\alpha+\beta}-t_1^{\alpha+\beta}\right]+\frac{|\lambda|r}{\Gamma(\beta+1)}\left[t_2^\beta-t_1^\beta+2\,(t_2-t_1)^\beta\right]\\ &+\left[\frac{\theta}{T^\beta}+\frac{\|g\|_\infty\phi(r)T^\alpha}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{|\lambda|r}{\Gamma(\beta+1)}+M_\varphi rT^{1-\beta}\right](t_2^\beta-t_1^\beta)\ .\end{aligned}$$

D'après lemme 2 , on trouve :

$$\begin{aligned}\|Ax(t_2)-Ax(t_1)\|_\infty \leq\ & \frac{(\alpha+\beta)\|g\|_\infty\phi(r)T^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t_2-t_1)\\ &+\left[\frac{\theta}{T^\beta}+\frac{\|g\|_\infty\phi(r)T^\alpha}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{4|\lambda|r}{\Gamma(\beta+1)}+M_\varphi rT^{1-\beta}\right](t_2-t_1)^\beta\ .\end{aligned}$$

Alors pour $t_1\to t_2$, on va avoir :

$$\|Ax(t_2)-Ax(t_1)\|_\infty\to 0 \tag{2.29}$$

b- Soit $x \in B_r$, Pour tout $t_1, t_2 \in [0,T], t_1 < t_2$ :

$$\begin{aligned}
\left|{}^cD^{\alpha+\beta-1}Ax\left(t_2\right) - {}^c D^{\alpha+\beta-1}Ax\left(t_1\right)\right| \leq & \int_{t_1}^{t_2} \left|f\left(s, x(s), {}^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)\right| ds \\
& + \frac{|\lambda|}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_1-s)^{-\alpha} - (t_2-s)^{-\alpha}\right] |x(s)| ds \\
& + \frac{|\lambda|}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{-\alpha} |x(s)| ds + \frac{\Gamma(\beta+1)}{T^\beta \Gamma(2-\alpha)} (t_2^{1-\alpha} - t_1^{1-\alpha}) \\
& \times \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1} \left|f\left(s, x(s), {}^c D^{\alpha+\beta-1}x(s)\right)\right| ds \right. \\
& \left. + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_0^T (T-s)^{\beta-1} |x(s)| ds + \int_0^T |\varphi(s)||x(s)| ds + \theta\right] .
\end{aligned}$$

En appliquant les hypothèses $(H_2)$ et $(H_6)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left|{}^cD^{\alpha+\beta-1}Ax\left(t_2\right) - {}^c D^{\alpha+\beta-1}Ax\left(t_1\right)\right| \leq & \|g\|_\infty \phi(r) \int_{t_1}^{t_2} 1 ds + \frac{|\lambda| r}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_1-s)^{-\alpha} - (t_2-s)^{-\alpha}\right] ds \\
& + \frac{|\lambda| r}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{-\alpha} ds \\
& + \frac{\Gamma(\beta+1)}{T^\beta \Gamma(2-\alpha)} \left[\frac{\|g\|_\infty \phi(r)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^T (T-s)^{\alpha+\beta-1} ds \right. \\
& \left. + \frac{|\lambda| r}{\Gamma(\beta)} \int_0^T (T-s)^{\beta-1} ds + M_\varphi r \int_0^T 1 ds + \theta\right] (t_2^{1-\alpha} - t_1^{1-\alpha}) .
\end{aligned}$$

Par calcule simple :

$$\begin{aligned}
\left|{}^cD^{\alpha+\beta-1}Ax\left(t_2\right) - {}^c D^{\alpha+\beta-1}Ax\left(t_1\right)\right| \leq & \|g\|_\infty \phi(r)(t_2-t_1) + \frac{|\lambda| r}{\Gamma(2-\alpha)} \left[t_2^{1-\alpha} - t_1^{1-\alpha} + 2\left(t_2-t_1\right)^{1-\alpha}\right] \\
& + \frac{\Gamma(\beta+1)}{T^\beta \Gamma(2-\alpha)} \left[\frac{\|g\|_\infty \phi(r) T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{r|\lambda| T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + r M_\varphi T + \theta\right] (t_2^{1-\alpha} - t_1^{1-\alpha}) .
\end{aligned}$$

D'après lemme 2 , on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\|{}^cD^{\alpha+\beta-1}Ax\left(t_2\right) - {}^c D^{\alpha+\beta-1}Ax\left(t_1\right)\right\|_\infty \leq & \|g\|_\infty \phi(r)(t_2-t_1) \\
& + \left[\frac{4|\lambda| r}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{\Gamma(\beta+1)}{T^\beta \Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{\|g\|_\infty \phi(r) T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + r M_\varphi T + \theta\right)\right] (t_2-t_1)^{1-\alpha} .
\end{aligned}$$

Alors pour $t_1 \to t_2$, on va avoir :

$$\left\|{}^cD^{\alpha+\beta-1}Ax\left(t_2\right) - {}^c D^{\alpha+\beta-1}Ax\left(t_1\right)\right\|_\infty \to 0. \tag{2.30}$$

Par ( 2.29 ) et ( 2.30), on trouve :

$$\left\|Ax\left(t_2\right) - Ax\left(t_1\right)\right\|_{\mathcal{X}} \to 0.$$

D'où $\mathcal{A}(B_r)$ est équicontinue.
Par conséquent, d'après les étapes : 1-2 et le théorème d'Ascoli-Arzelá, l'opérateur $\mathcal{A} : \mathcal{X} \longmapsto \mathcal{X}$ est complètement continue.

**Étape 3 :**

Dans ce qui suit, on établit les résultats d'existence de la solution du problème (2.1) en utilisant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.
Soit $U = \{x \in \mathcal{X} : \|x\|_{\mathcal{X}} < M\}$ et soit $x \in \partial U$, tel que $x = \sigma \mathcal{A}(x)$, $0 \leq \sigma \leq 1$ .
Pour tout $t \in [0, T]$, on a :

$$|x(t)| = \quad |\sigma \mathcal{A}x(t)| = \quad \sigma \, |\mathcal{A}x(t)|$$

Ce qui implique par ( 2.27 ) que :

$$\|x\|_\infty \leq \sigma \left[ \frac{2\|g\|_\infty \phi(\|x\|_{\mathcal{X}}) T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{2|\lambda| \, \|x\|_{\mathcal{X}} \, T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + 2M_\varphi \, \|x\|_{\mathcal{X}} \, T + \theta \right] \leq \sigma \delta_1 \ .$$

Comme $0 \leq \sigma \leq 1$ , alors :

$$\|x\|_\infty \leq \delta_1 \ . \tag{2.31}$$

D'autre par, on a :

$$\left| {}^c D^{\alpha+\beta-1} x(t) \right| = \left| \sigma \, {}^c D^{\alpha+\beta-1} \mathcal{A}x(t) \right| = \sigma \left| {}^c D^{\alpha+\beta-1} \mathcal{A}x(t) \right| \ .$$

Ce qui implique par ( 2.28 ) que :

$$\begin{aligned} \left\| {}^c D^{\alpha+\beta-1} x \right\|_\infty \leq & \sigma \left[ \frac{2|\lambda| \, \|x\|_{\mathcal{X}} \, T^{1-\alpha} + \Gamma(\beta+1) \left[ \theta T^{1-\alpha-\beta} + M_\varphi \, \|x\|_{\mathcal{X}} \, T^{2-\alpha-\beta} \right]}{\Gamma(2-\alpha)} \right. \\ & \left. + \|g\|_\infty \phi(\|x\|_{\mathcal{X}}) T + \frac{\Gamma(\beta+1) \|g\|_\infty \phi(\|x\|_{\mathcal{X}}) T}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)} \right] \\ \leq & \sigma \delta_2 \ , \end{aligned}$$

alors :

$$\left\| {}^c D^{\alpha+\beta-1} x \right\|_\infty \leq \delta_2 \ . \tag{2.32}$$

Par (2.31) et (2.32), on obtient :

$$\|x\|_{\mathcal{X}} \leq \delta_1 + \delta_2 \ ,$$

Au vu de $(H_7)$, on trouve :

$$\|x\|_{\mathcal{X}} < M.$$

Ceci contredit le fait que $x \in \partial U$. Alors $\forall x \in \partial U$ et $\forall \sigma \in [0, 1]$, on a : $x \neq \sigma \mathcal{A}(x)$.

Notez que l'opérateur $\mathcal{A} : \overline{U} \to \mathcal{X}$ est continue et complètement continue.
Du choix du $U$, il n'y a pas $x \in \partial U$ tel que $x = \sigma \mathcal{A}x$ pour tout $0 \leq \sigma \leq 1$.
Par conséquent, d'après l'alternative non linéaire de Leray-Schauder (théorème 4 ) $\mathcal{A}$ admet au moins un point fixe $x^* \in \overline{U}$ qui est une solution du problème (2,1). □

**Exemple 5.**

Soit le problème fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^{\frac{3}{5}}\left({}^cD^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{20}\right)x(t)=f\left(t,x(t),{}^cD^{\frac{1}{10}}x(t)\right), \quad t\in[0,1],\\ x(0)=\displaystyle\int_0^1\frac{e^{-t}}{20}x(s)ds,\\ x(1)=\dfrac{1}{25}. \end{cases} \tag{2.33}$$

Où

$$f\left(t,x(t),{}^cD^{\frac{1}{10}}x(t)\right)=\frac{1}{25+t}\left[\frac{x(t)}{\sqrt{t+4}}+\frac{2\,{}^cD^{\frac{1}{10}}x(t)}{3+e^t}+1\right].$$

On a :

$$\left|\frac{e^{-t}}{20}\right|\leq\frac{1}{20}.$$

Donc $(H_2)$ est satisfaite avec $M_\varphi=\frac{1}{20}$ . Aussi on a :

$$\left|f\left(t,x(t),{}^cD^{\frac{1}{10}}x(t)\right)\right|\leq\frac{1}{25+t}\left[\frac{1}{2}\left(|x(t)|+\left|{}^cD^{\frac{1}{10}}x(t)\right|\right)+1\right]\leq\frac{1}{50+2t}\left(\|x\|_{\mathcal{X}}+1\right).$$

Puis, par la condition $(H_6)$, avec $\|g\|_\infty=\frac{1}{50}$ , et $\phi(\|x\|_{\mathcal{X}})=\|x\|_{\mathcal{X}}+1$ , on obtient :

$$\delta_1\simeq 0,29.$$
$$\delta_2\simeq 0,28.$$

On prend $M=1$, on trouve :

$$\frac{M}{\delta_1+\delta_2}\simeq 1,75>1.$$

Alors toutes les hypothèses du théorème 9 sont satisfaites, par conséquent le problème (2.33) possède au moins une solution $x^*\in\overline{U}$.

# Chapitre 3

# Système d'équations différentielles fractionnaires avec deux dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Dans ce chapitre, on va concentrer sur l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution du système d'équations différentielles fractionnaires avec deux dérivées fractionnaires au sens de Caputo, un tel système s'énonce de la manière suivante :

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha_1}\left({}^cD^{\beta_1}+\lambda_1\right)x(t)=f_1\left(t,x(t),{}^cD^{\alpha_1+\beta_1-1}x(t)\right), \quad t\in[0,1] \\ {}^cD^{\alpha_2}\left({}^cD^{\beta_2}+\lambda_2\right)y(t)=f_2\left(t,y(t),{}^cD^{\alpha_2+\beta_2-1}y(t)\right), \quad t\in[0,1] \\ x(0)=\int_0^1\varphi_1(s)x(s)ds, \qquad x(1)=\theta_1, \\ \\ y(0)=\int_0^1\varphi_2(s)y(s)ds, \qquad y(1)=\theta_2. \end{cases} \tag{3.1}$$

Où $0<\alpha_i,\beta_i<1, 1<\alpha_i+\beta_i<2, {}^cD^{\alpha_i}$ et ${}^cD^{\beta_i}$ sont des dérivées fractionnaires au sens de Caputo d'ordre $\alpha_i$ et $\beta_i$ respectivement, $\theta_i$ est une constante positive, $\lambda_i\in\mathbb{R}$, $f_i:[0,1]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est une fonction continue et $\varphi_i:[0,1]\to\mathbb{R}$ est aussi une fonction continue, avec $(i=1,2)$.

On va étudier l'existence et l'unicité de la solution à l'aide de Principe de Contraction de Banach. Puis, en utilisant le théorème de Schaefer, on va aborder la question de l'existence d'une solution au moins.

## I Lemmes et Hypothèses

Soit $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espace de Banach tel que :

$$\mathcal{X}=\left\{x:x(t)\in C^1([0,1],\mathbb{R}) \text{ et } {}^cD^{\alpha_1+\beta_1-1}x(t)\in C^1([0,1],\mathbb{R})\right\},$$

muni de la norme :

$$\|x\|_{\mathcal{X}} = \|x\|_\infty + \|{}^cD^{\alpha_1+\beta_1-1}x\|_\infty.$$

$$\mathcal{Y} = \left\{ y : y(t) \in C^1([0,1],\mathbb{R}) \text{ et } {}^cD^{\alpha_2+\beta_2-1}y(t) \in C^1([0,1],\mathbb{R}) \right\} ,$$

muni de la norme :

$$\|y\|_{\mathcal{Y}} = \|y\|_\infty + \|{}^cD^{\alpha_2+\beta_2-1}y\|_\infty.$$

Alors :

$$\mathcal{X} \times \mathcal{Y} = \{(x,y) : (x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \text{ et } \|(x,y)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} = \|x\|_{\mathcal{X}} + \|y\|_{\mathcal{Y}}\} .$$

Il est claire que $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$ est un espace de Banach.

**lemme 5.** *Soit $h \in C([0,1],\mathbb{R})$, alors la solution du problème fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha \left({}^cD^\beta + \lambda\right) x(t) = h(t), \quad t \in [0,1], \quad 0 < \alpha, \beta < 1, \\ \qquad\qquad x(0) = \int_0^1 \varphi(s)x(s)ds, \\ \qquad\qquad x(1) = \theta. \end{cases} \tag{3.2}$$

*est donné par :*

$$\begin{aligned} x(t) = {} & I^{\alpha+\beta}h(t) - \lambda I^\beta x(t) + \int_0^1 \varphi(s)x(s)ds \\ & + t^\beta \left[\theta - I^{\alpha+\beta}h(1) + \lambda I^\beta x(1) - \int_0^1 \varphi(s)x(s)ds\right]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Considérons le système :

$$\begin{cases} x(t) = I^{\alpha_1+\beta_1}h_1(t) - \lambda_1 I^{\beta_1}x(t) + \int_0^1 \varphi_1(s)x(s)ds \\ \qquad + t^{\beta_1}\left[\theta_1 - I^{\alpha_1+\beta_1}h_1(1) + \lambda_1 I^{\beta_1}x(1) - \int_0^1 \varphi_1(s)x(s)ds\right] \\ y(t) = I^{\alpha_2+\beta_2}h_2(t) - \lambda_2 I^{\beta_2}y(t) + \int_0^1 \varphi_2(s)y(s)ds \\ \qquad + t^{\beta_2}\left[\theta_2 - I^{\alpha_2+\beta_2}h_2(1) + \lambda_2 I^{\beta_2}y(1) - \int_0^1 \varphi_2(s)y(s)ds\right] \end{cases} \tag{3.4}$$

**lemme 6.** *On suppose que $f_1, f_2 : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. Alors $(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ est une solution de (3.1) si et seulement si $(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ est une solution de système (3.4).*

On définie l'opérateur $\Phi : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ par :

$$\Phi(x,y)(t) = (\Phi_1 x(t), \Phi_2 y(t)) \ ,$$

où pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi_1 x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_1+\beta_1-1} f_1\left(s, x(s), {}^c D^{\alpha_1+\beta_1-1} x(s)\right) ds \\
&- \frac{\lambda_1}{\Gamma(\beta_1)} \int_0^t (t-s)^{\beta_1-1} x(s) ds + \int_0^1 \varphi_1(s) x(s) ds \\
&+ t^{\beta_1} \left[\theta_1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_1+\beta_1-1} f_1\left(s, x(s), {}^c D^{\alpha_1+\beta_1-1} x(s)\right) ds \right. \\
&\left. + \frac{\lambda_1}{\Gamma(\beta_1)} \int_0^1 (1-s)^{\beta_1-1} x(s) ds - \int_0^1 \varphi_1(s) x(s) ds \right] \\
\Phi_2 y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_2+\beta_2)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_2+\beta_2-1} f_2\left(s, y(s), {}^c D^{\alpha_2+\beta_2-1} y(s)\right) ds \\
&- \frac{\lambda_2}{\Gamma(\beta_2)} \int_0^t (t-s)^{\beta_2-1} y(s) ds + \int_0^1 \varphi_2(s) y(s) ds \\
&+ t^{\beta_2} \left[\theta_2 - \frac{1}{\Gamma(\alpha_2+\beta_2)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_2+\beta_2-1} f_2\left(s, y(s), {}^c D^{\alpha_2+\beta_2-1} y(s)\right) ds \right. \\
&\left. + \frac{\lambda_2}{\Gamma(\beta_2)} \int_0^1 (1-s)^{\beta_2-1} y(s) ds - \int_0^1 \varphi_2(s) y(s) ds \right]
\end{aligned}$$

Il est évident que le point fixe de l'opérateur $\Phi$ est la solution du système (3.1).

## II Existence et unicité

**Théorème 10.** *Soit $f_1, f_2 : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.On suppose que :*
$(H_8)$ : *Il existe des constantes $(m_i, i = 1,2)$, tel que pour tout $t \in [0,1]$ et $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$*

$$\begin{aligned}
|f_1(t,x_2,y_2) - f_1(t,x_1,y_1)| &\leq m_1(|x_2-x_1| + |y_2-y_1|) \ , \\
|f_2(t,x_2,y_2) - f_2(t,x_1,y_1)| &\leq m_2(|x_2-x_1| + |y_2-y_1|) \ .
\end{aligned}$$

$(H_9)$ : Les fonctions $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont continue sur $[0,T]$ et :

$$\begin{aligned}
|\varphi_1(t)| &\leq M_1 \ , \\
|\varphi_2(t)| &\leq M_2 \ .
\end{aligned}$$

$(H_{10})$ :

$$\varepsilon = \{\varepsilon_1 + \varepsilon_2\} \ ,$$
$$\omega = \{\omega_1 + \omega_2\} \ ,$$
$$\mu = \max\{\varepsilon, \omega\} < 1,$$

où les constantes $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2, \omega_1, \omega_2$ sont définies par :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{2m_1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1+1)} + \frac{2|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1+1)} + 2M_1 \ , \\
\varepsilon_2 &= \frac{m_1+2|\lambda_1|+M_1\Gamma(\beta_1+1)}{\Gamma(2-\alpha_1)} + \frac{m_1\Gamma(\beta_1+1)}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1+1)\Gamma(2-\alpha_1)} \ , \\
\omega_1 &= \frac{2m_2}{\Gamma(\alpha_2+\beta_2+1)} + \frac{2|\lambda_2|}{\Gamma(\beta_2+1)} + 2M_2 \ , \\
\omega_2 &= \frac{m_2+2|\lambda_2|+M_2\Gamma(\beta_2+1)}{\Gamma(2-\alpha_2)} + \frac{m_2\Gamma(\beta_2+1)}{\Gamma(\alpha_2+\beta_2+1)\Gamma(2-\alpha_2)} \ .
\end{aligned}$$

Alors le système d'équation différentielle fractionnaire (3,1) admet une seule solution sur [0,1].
**Preuve.** Dans le but d'établir l'existence et l'unicité de la solution du problème (3,1), on a eu recours au principe de contraction de Banach.
Pour $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}$ et pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
|\Phi_1 x_2(t) - \Phi_1 x_1(t)| \leq & \frac{2}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_1+\beta_1-1} \left| f_1\left(s, x_2(s), {}^c D^{\alpha+\beta-1} x_2(s)\right) \right. \\
& \left. - f\left(s, x_1(s), {}^c D^{\alpha+\beta-1} x_1(s)\right) \right| ds \\
& + \frac{|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1)} \int_0^t (t-s)^{\beta_1-1} |x_2(s) - x_1(s)| ds \\
& + \frac{|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1)} \int_0^1 (1-s)^{\beta_1-1} |x_2(s) - x_1(s)| ds \\
& + 2\int_0^1 |\varphi_1(s)||x_2(s) - x_1(s)| ds
\end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses $(H_8)$ et $(H_9)$, on obtient :

$$\|\Phi_1 x_2 - \Phi_1 x_1\|_\infty \leq \left( \frac{2m_1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1+1)} + \frac{2|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1+1)} + 2M_1 \right) \|x_2 - x_1\|_{\mathcal{X}}$$

D'où :

$$\|\Phi_1 x_2 - \Phi_1 x_1\|_\infty \leq \varepsilon_1 \|x_2 - x_1\|_{\mathcal{X}} \ , \tag{3.5}$$

tel que :

$$\varepsilon_1 = \frac{2m_1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1+1)} + \frac{2|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1+1)} + 2M_1 \ .$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\left|{}^cD^{\alpha_1+\beta_1-1}\Phi_1 x_2(t) -{}^c D^{\alpha_1+\beta_1-1}\Phi_1 x_1(t)\right| \leq & \int_0^t \Big| f_1\left(s, x_2(s), {}^c D^{\alpha_1+\beta_1-1}x_2(s)\right) \\ & - f_1\left(s, x_1(s), {}^c D^{\alpha+\beta-1}x_1(s)\right)\Big| ds \\ & + \frac{|\lambda_1|}{\Gamma(1-\alpha_1)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha_1}|x_2(s)-x_1(s)|ds \\ & + \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2-\alpha)}\Bigg[\frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_1+\beta_1-1} \\ & \times \Big| f_1\left(s, x_2(s), {}^c D^{\alpha_1+\beta_1-1}x_2(s)\right) \\ & - f_1\left(s, x_1(s), {}^c D^{\alpha+\beta-1}x_1(s)\right)\Big| ds \\ & + \frac{|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1)}\int_0^1 (1-s)^{\beta_1-1}|x_2(s)-x_1(s)|ds \\ & + \int_0^1 |\varphi_1(s)||x_2(s)-x_1(s)|ds\Bigg]\end{aligned}$$

En appliquant les hypothèses $(H_8)$ et $(H_9)$, on trouve :

$$\left\|{}^cD^{\alpha_1+\beta_1-1}\Phi_1 x_2 -{}^c D^{\alpha_1+\beta_1-1}\Phi_1 x_1\right\|_\infty \leq \varepsilon_2 \left\|x_2 - x_1\right\|_{\mathcal{X}} \ , \tag{3.6}$$

tel que :

$$\varepsilon_2 = m_1 + \frac{2|\lambda_1| + M_1\Gamma(\beta_1+1)}{\Gamma(2-\alpha_1)} + \frac{m_1\Gamma(\beta_1+1)}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1+1)\Gamma(2-\alpha_1)} \ .$$

Alors, par (3.5) et (3.6 ), on obtient :

$$\left\|\Phi_1 x_2 - \Phi_1 x_1\right\|_{\mathcal{X}} \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\left\|x_2 - x_1\right\|_{\mathcal{X}} \ .$$

Au vu de $(H_{10})$, on a :

$$\left\|\Phi_1 x_2 - \Phi_1 x_1\right\|_{\mathcal{X}} \leq \varepsilon \left\|x_2 - x_1\right\|_{\mathcal{X}} \leq \mu \left\|x_2 - x_1\right\|_{\mathcal{X}} \ .$$

De la même manière, Pour $(y_1, y_2) \in \mathcal{Y}$ et pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\left\|\Phi_2 y_2 - \Phi_2 y_1\right\|_{\mathcal{Y}} \leq \omega \left\|y_2 - y_1\right\|_{\mathcal{Y}} \leq \mu \left\|y_2 - y_1\right\|_{\mathcal{Y}} \ .$$

Ainsi, pour $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ et pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}\left\|\Phi(x_2, y_2) - \Phi(x_1, y_1)\right\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} &= \left\|(\Phi_1 x_2, \Phi_2 y_2) - (\Phi_1 x_1, \Phi_2 y_1)\right\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \\ &= \left\|(\Phi_1 x_2 - \Phi_1 x_1), (\Phi_2 y_2 - \Phi_2 y_1)\right\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \\ &= \left\|\Phi_1 x_2 - \Phi_1 x_1\right\|_{\mathcal{X}} + \left\|\Phi_2 y_2 - \Phi_2 y_1\right\|_{\mathcal{Y}} \\ &\leq \mu \left\|x_2 - x_1\right\|_{\mathcal{X}} + \mu \left\|y_2 - y_1\right\|_{\mathcal{Y}} \\ &\leq \mu \left(\left\|x_2 - x_1\right\|_{\mathcal{X}} + \left\|y_2 - y_1\right\|_{\mathcal{Y}}\right) \\ &\leq \mu \left\|(x_2 - x_1), (y_2 - y_1)\right\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \\ &\leq \mu \left\|(x_2, y_2) - (x_1, y_1)\right\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \ .\end{aligned}$$

Donc $\Phi$ est une contraction et d'après le théorème de Banach $\Phi$ admet un seul point fixe qui est une solution du système (3,1).

$\square$

**Exemple 6.**

Soit le système fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^{\frac{3}{4}}\left({}^cD^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{10}\right)x(t)=f_1\left(t,x(t),{}^cD^{\frac{1}{4}}x(t)\right), \quad t\in[0,1] \\ {}^cD^{\frac{7}{8}}\left({}^cD^{\frac{5}{8}}+\frac{1}{16}\right)x(t)=f_2\left(t,x(t),{}^cD^{\frac{1}{2}}x(t)\right), \quad t\in[0,1] \\ x(0)=\int_0^1\frac{\cos(t)+\sin(t)}{\sqrt{2t+625}}x(s)ds, \quad x(1)=\frac{1}{10}, \\ \\ y(0)=\int_0^1\frac{\cos(t)}{17+3e^t}y(s)ds, \quad y(1)=\frac{1}{20}. \end{cases} \tag{3.7}$$

Où

$$f_1\left(t,x(t),{}^cD^{\frac{1}{4}}x(t)\right)=\frac{(1-t)x(t)}{20}+\frac{{}^cD^{\frac{1}{4}}x(t)}{5}(t-\frac{1}{2})^2,$$
$$f_2\left(t,x(t),{}^cD^{\frac{1}{2}}x(t)\right)=\frac{(4-t)y(t)}{25}+\frac{{}^cD^{\frac{1}{2}}y(t)}{4}(t-\frac{1}{5})^2.$$

On a :

$$\begin{aligned}\left|f_1\left(t,x(t),{}^cD^{\frac{1}{4}}x(t)\right)-f_1\left(t,y(t),{}^cD^{\frac{1}{4}}y(t)\right)\right| &\le \frac{(1-t)}{20}\left|x(t)-y(t)\right|+\frac{1}{5}(t-\frac{1}{2})^2\left|{}^cD^{\frac{1}{4}}x(t)-{}^cD^{\frac{1}{4}}y(t)\right| \\ &\le \frac{1}{20}\left|x(t)-y(t)\right|+\frac{1}{20}\left|{}^cD^{\frac{1}{4}}x(t)-{}^cD^{\frac{1}{4}}y(t)\right| \\ &\le \frac{1}{20}\left(\left|x(t)-y(t)\right|+\left|{}^cD^{\frac{1}{4}}x(t)-{}^cD^{\frac{1}{4}}y(t)\right|\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|f_2\left(t,x(t),{}^cD^{\frac{1}{2}}x(t)\right)-f_2\left(t,y(t),{}^cD^{\frac{1}{2}}y(t)\right)\right| &\le \frac{(4-t)}{25}\left|x(t)-y(t)\right|+\frac{1}{4}(t-\frac{1}{5})^2\left|{}^cD^{\frac{1}{2}}x(t)-{}^cD^{\frac{1}{2}}y(t)\right| \\ &\le \frac{4}{25}\left|x(t)-y(t)\right|+\frac{4}{25}\left|{}^cD^{\frac{1}{2}}x(t)-{}^cD^{\frac{1}{2}}y(t)\right| \\ &\le \frac{4}{25}\left(\left|x(t)-y(t)\right|+\left|{}^cD^{\frac{1}{2}}x(t)-{}^cD^{\frac{1}{2}}y(t)\right|\right).\end{aligned}$$

Donc $(H_8)$ est satisfaite avec $m_1=\frac{1}{20}$ et $m_2=\frac{4}{25}$.
Aussi on a :

$$\left|\frac{\cos(t)+\sin(t)}{\sqrt{2t+625}}\right|\le\frac{2}{25}.$$

$$\left|\frac{\cos(t)}{17+3e^t}\right|\le\frac{1}{20}.$$

Donc $(H_9)$ est satisfaite avec $M_1 = \frac{2}{25}$ et $M_2 = \frac{1}{20}$.
Pour $(H_{10})$ on obtient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &\simeq 0.47. \\ \varepsilon_2 &\simeq 0.40. \\ \omega_1 &\simeq 0.48. \\ \omega_2 &\simeq 0.465. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \simeq 0.87, \\ \omega &= \omega_1 + \omega_2 \simeq 0.945, \\ \mu &= \max\{\varepsilon, \omega\} \simeq 0.945 < 1. \end{aligned}$$

Ainsi toutes les hypothèses du théorème 10 sont satisfaites, par conséquent le problème (3.7) possède une unique solution.

## III Existence

**Résultat de l'existence via le théorème du point fixe de Schaefer**

**Théorème 11.** *Soit $f_1, f_2 : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. On suppose que $(H_9)$ et l'hypothèse suivante est satisfaite :*
*$(H_{11})$ : Il existe des constantes positives $\tau_1, \tau_2$ tels que :*

$$\begin{aligned} |f_1(t,x,y)| &\leq \tau_1, \\ |f_2(t,x,y)| &\leq \tau_2. \end{aligned}$$

*Alors le système fractionnaire (3,1) admet au moins une solution sur [0, 1].*

**Preuve.** Principalement, on va utiliser le théorème du point fixe de Schaefer (théorème 6 ) pour montrer l'existence d'une solution pour le système, et pour cela on passera par 4 étapes :

**Étape 1 :**

On montre que $\Phi$ est continue.
Soit $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ tel que : $(x_n, y_n) \longrightarrow (x,y)$ dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Alors pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} |\Phi_1(x_n)(t) - \Phi_1(x)(t)| \leq &\frac{2}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_1+\beta_1-1} \Big| f_1\left(s, x_n(s), {}^c D^{\alpha_1+\beta_1-1} x_n(s)\right) \\ &- f_1\left(s, x(s), {}^c D^{\alpha_1+\beta_1-1} x(s)\right) \Big| ds + \frac{|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1)} \int_0^t (t-s)^{\beta_1-1} |x_n(s) - x(s)| \, ds \\ &+ \frac{|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1)} \int_0^1 (1-s)^{\beta_1-1} |x_n(s) - x(s)| \, ds + 2M_1 \int_0^1 |x_n(s) - x(s)| \, ds \, . \end{aligned}$$

Comme $f_1$ est une fonction continue, alors :

$$\|\Phi_1(x_n) - \Phi_1(x)\|_\infty \to 0 \text{ quand } n \to \infty. \tag{3.8}$$

De la même manière, on trouve :

$$\left\|{}^cD^{\alpha_1+\beta_1-1}\Phi_1(x_n) - {}^cD^{\alpha_1+\beta_1-1}\Phi_1(x)\right\|_\infty \to 0 \text{ quand } n \to \infty. \tag{3.9}$$

De (3.8) et (3.9), on trouve :

$$\|\Phi_1(x_n) - \Phi_1(x)\|_{\mathcal{X}} \to 0 \text{ quand } n \to \infty. \tag{3.10}$$

Avec le même argument précédent, on peut écrire :

$$\|\Phi_2(y_n) - \Phi_2(y)\|_{\mathcal{Y}} \to 0 \text{ quand } n \to \infty. \tag{3.11}$$

finalement,

$$\begin{aligned}\|\Phi(x_n, y_n) - \Phi(x,y)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} &= \|(\Phi_1 x_n, \Phi_2 y_n) - (\Phi_1 x, \Phi_2 y)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \\ &= \|(\Phi_1 x_n - \Phi_1 x), (\Phi_2 y_n - \Phi_2 y)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \\ &= \|\Phi_1 x_n - \Phi_1 x\|_{\mathcal{X}} + \|\Phi_2 y_n - \Phi_2 y\|_{\mathcal{Y}}.\end{aligned}$$

D'après (3.10) et (3.11) on déduit que :

$$\|\Phi(x_n, y_n) - \Phi(x,y)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

D'où $\Phi$ est continue sur $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$.

**Étape 2 :**

On montre que $\Phi$ transforme un ensemble borné en un ensemble borné dans $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$.
Soit l'ensemble :

$$B_\eta = \{(x,y) \in (\mathcal{X}\times\mathcal{Y}) : \|(x,y)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \leq \eta\}.$$

Pour tout $(x,y) \in B_\eta$ et $t \in [0,T]$, on a :

$$\begin{aligned}|\Phi_1 x(t)| \leq{}& \frac{2}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_1+\beta_1-1} \left| f_1\left(s, x(s), {}^cD^{\alpha_1+\beta_1-1}x(s)\right)\right| ds + \frac{|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1)} \int_0^t (t-s)^{\beta_1-1}|x(s)|ds \\ &+ \frac{|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1)} \int_0^1 (1-s)^{\beta_1-1}|x(s)|ds + 2\int_0^1 |\varphi_1(s)||x(s)|ds + \theta_1.\end{aligned}$$

En appliquant les hypothèses $(H_9)$ et $(H_{11})$, on obtient :

$$\begin{aligned}\|\Phi_1 x(t)\|_\infty \leq{}& \frac{2\tau_1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_1+\beta_1-1} ds + \frac{\eta|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1)} \int_0^t (t-s)^{\beta_1-1} ds + \frac{\eta|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1)} \int_0^1 (1-s)^{\beta_1-1} ds \\ &+ 2\eta M_1 \int_0^1 1 ds + \theta_1.\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\|\Phi_1 x(t)\|_\infty \leq \frac{2\tau_1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1+1)} + \frac{2\eta|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1+1)} + 2\eta M_1 + \theta_1 := L_1. \tag{3.12}$$

D'autre par,

$$\begin{aligned}|{}^cD^{\alpha_1+\beta_1-1}\Phi_1 x(t)| \leq & \int_0^t \left| f_1\left(s, x(s), {}^cD^{\alpha_1+\beta_1-1}x(s)\right)\right| ds + \frac{|\lambda_1|}{\Gamma(1-\alpha_1)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha_1}|x(s)|ds \\ & + \frac{\Gamma(\beta_1+1)}{\Gamma(2-\alpha_1)}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_1+\beta_1-1}\left| f_1\left(s, x(s), {}^cD^{\alpha_1+\beta_1-1}x(s)\right)\right| ds \right. \\ & \left. + \frac{|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1)}\int_0^1 (1-s)^{\beta_1-1}|x(s)|ds + \int_0^1 |\varphi_1(s)||x(s)|ds + \theta_1\right].\end{aligned}$$

De $(H_9)$ et $(H_{11})$, on trouve :

$$\begin{aligned}\|{}^cD^{\alpha_1+\beta_1-1}\Phi_1 x(t)\|_\infty \leq & \ \tau_1\int_0^t 1ds + \frac{\eta|\lambda_1|}{\Gamma(1-\alpha_1)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha_1}ds + \frac{\Gamma(\beta_1+1)}{\Gamma(2-\alpha_1)} \\ & \times\left[\frac{\tau_1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_1+\beta_1-1}ds + \frac{\eta|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1)}\int_0^1 (1-s)^{\beta_1-1}ds + \eta M_1\int_0^1 1ds + \theta_1\right].\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\|{}^cD^{\alpha_1+\beta_1-1}\Phi_1 x(t)\|_\infty \leq \tau_1 + \frac{\Gamma(\beta_1+1)\tau_1}{\Gamma(2-\alpha_1)\Gamma(\alpha_1+\beta_1+1)} + \frac{2\eta|\lambda_1| + \Gamma(\beta_1+1)[\theta_1+\eta M_1]}{\Gamma(2-\alpha_1)} := L_2. \tag{3.13}$$

D'après (3.12) et (3.13) on déduit que :

$$\|\Phi_1 x(t)\|_{\mathcal{X}} \leq L\ ,$$

avec $L = L_1 + L_2$.
De la même manière, on trouve :

$$\|\Phi_2 y(t)\|_{\mathcal{Y}} \leq L_1' + L_2' := L'\ .$$

Finalement, pour tout $(x, y) \in B_\eta$ et $t \in [0, T]$, on a :

$$\|\Phi(x,y)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} = \|\Phi_1(x), \Phi_2(y)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} = \|\Phi_1(x)\|_{\mathcal{X}} + \|\Phi_2(y)\|_{\mathcal{Y}} \leq L + L' < \infty\ .$$

Alors $\Phi$ est uniformément borné.

**Étape 3 :**

On montre que $\Phi$ transforme un ensemble borné en un ensemble équicontinue dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Soit $(x,y) \in B_\eta$, Pour tout $t_1, t_2 \in [0,1], t_1 < t_2$, on a :

$$\begin{aligned}
|\Phi_1 x\,(t_2) - \Phi_1 x\,(t_1)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1)} \int_0^{t_1} \left[ (t_2-s)^{\alpha_1+\beta_1-1} - (t_1-s)^{\alpha_1+\beta_1-1} \right] \left| f_1\left(s, x(s), ^c D^{\alpha_1+\beta_1-1} x(s)\right) \right| ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha_1+\beta_1-1} \left| f_1\left(s, x(s), ^c D^{\alpha_1+\beta_1-1} x(s)\right) \right| ds \\
& + \frac{|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1)} \int_0^{t_1} \left[ (t_1-s)^{\beta_1-1} - (t_2-s)^{\beta_1-1} \right] |x(s)| ds + \frac{|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\beta_1-1} |x(s)| ds \\
& + \Bigg[ \theta_1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_1+\beta_1-1} \left| f_1\left(s, x(s), ^c D^{\alpha_1+\beta_1-1} x(s)\right) \right| ds \\
& + \frac{|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1)} \int_0^1 (1-s)^{\beta_1-1} |x(s)| ds + \int_0^1 |\varphi_1(s)||x(s)| ds \Bigg] \left( t_2^{\beta_1} - t_1^{\beta_1} \right) .
\end{aligned}$$

En appliquant les hypothèses $(H_9)$ et $(H_{11})$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|\Phi_1 x\,(t_2) - \Phi_1 x\,(t_1)\|_\infty \leq & \frac{\tau_1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1)} \int_0^{t_1} \left[ (t_2-s)^{\alpha_1+\beta_1-1} - (t_1-s)^{\alpha_1+\beta_1-1} \right] ds \\
& + \frac{\tau_1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha_1+\beta_1-1} ds \\
& + \frac{\eta|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1)} \int_0^{t_1} \left[ (t_1-s)^{\beta_1-1} - (t_2-s)^{\beta_1-1} \right] ds + \frac{\eta|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\beta_1-1} ds \\
& + \Bigg[ \theta_1 + \frac{\tau_1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_1+\beta_1-1} ds \\
& + \frac{\eta|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1)} \int_0^1 (1-s)^{\beta_1-1} ds + \eta M_1 \int_0^1 1 ds \Bigg] \left( t_2^{\beta_1} - t_1^{\beta_1} \right) .
\end{aligned}$$

Par calcule simple :

$$\begin{aligned}
\|\Phi_1 x\,(t_2) - \Phi_1 x\,(t_1)\|_\infty \leq & \frac{\tau_1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1+1)} \left[ t_2^{\alpha_1+\beta_1} - t_1^{\alpha_1+\beta_1} \right] + \frac{\eta|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1+1)} \left[ t_2^{\beta_1} - t_1^{\beta_1} + 2\,(t_2-t_1)^{\beta_1} \right] \\
& + \left[ \theta_1 + \frac{\tau_1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1+1)} + \frac{\eta|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1+1)} + \eta M_1 \right] \left( t_2^{\beta_1} - t_1^{\beta_1} \right) .
\end{aligned}$$

D'après lemme 2, on a :

$$\|\Phi_1 x\,(t_2) - \Phi_1 x\,(t_1)\|_\infty \leq \frac{(\alpha_1+\beta_1)\tau_1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1+1)} (t_2-t_1) + \left[ \theta_1 + \frac{\tau_1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1+1)} + \frac{4\eta|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1+1)} + \eta M_1 \right] (t_2-t_1)^{\beta_1} .$$

Alors pour $t_1 \to t_2$, on va avoir :

$$\|\Phi_1 x\,(t_2) - \Phi_1 x\,(t_1)\|_\infty \to 0. \tag{3.14}$$

D'autre par,

$$\begin{aligned}
|{}^{c}D^{\alpha+\beta-1}\Phi_1 x\left(t_2\right)-{}^{c}D^{\alpha+\beta-1}\Phi_1 x\left(t_1\right)| \leq & \int_{t_1}^{t_2}\left|f_1\left(s, x(s),{}^{c}D^{\alpha_1+\beta_1-1}x(s)\right)\right| ds \\
& +\frac{|\lambda_1|}{\Gamma(1-\alpha_1)} \int_0^{t_1}\left[\left(t_1-s\right)^{-\alpha_1}-\left(t_2-s\right)^{-\alpha_1}\right]|x(s)| ds \\
& +\frac{|\lambda_1|}{\Gamma(1-\alpha_1)} \int_{t_1}^{t_2}\left(t_2-s\right)^{-\alpha_1}|x(s)| ds+\frac{\Gamma(\beta_1+1)}{\Gamma(2-\alpha_1)}\left(t_2^{1-\alpha_1}-t_1^{1-\alpha_1}\right) \\
& \times\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1)} \int_0^1(1-s)^{\alpha_1+\beta_1-1}\left|f_1\left(s, x(s),{}^{c}D^{\alpha_1+\beta_1-1}x(s)\right)\right| ds\right. \\
& \left.+\frac{|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1)} \int_0^1(1-s)^{\beta_1-1}|x(s)| ds+\int_0^1|\varphi_1(s)||x(s)| ds+\theta_1\right] .
\end{aligned}$$

De $(H_9)$ et $(H_{11})$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\|{}^{c}D^{\alpha_1+\beta_1-1}\Phi_1 x\left(t_2\right)-{}^{c}D^{\alpha_1+\beta_1-1}\Phi_1 x\left(t_1\right)\|_{\infty} \leq & \tau_1 \int_{t_1}^{t_2} 1 ds+\frac{\eta|\lambda_1|}{\Gamma(1-\alpha_1)} \int_0^{t_1}\left[\left(t_1-s\right)^{-\alpha_1}-\left(t_2-s\right)^{-\alpha_1}\right] ds \\
& +\frac{\eta|\lambda_1|}{\Gamma(1-\alpha_1)} \int_{t_1}^{t_2}\left(t_2-s\right)^{-\alpha_1} ds+\frac{\Gamma(\beta_1+1)}{\Gamma(2-\alpha_1)}\left[\frac{\tau_1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1)}\right. \\
& \times \int_0^1(1-s)^{\alpha_1+\beta_1-1} ds+\frac{\eta|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1)} \int_0^1(1-s)^{\beta_1-1} ds \\
& \left.+\eta M_1 \int_0^1 1 ds+\theta_1\right]\left(t_2^{1-\alpha_1}-t_1^{1-\alpha_1}\right) .
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|{}^{c}D^{\alpha_1+\beta_1-1}\Phi_1 x\left(t_2\right)-{}^{c}D^{\alpha_1+\beta_1-1}\Phi_1 x\left(t_1\right)\|_{\infty} \leq & \tau_1(t_2-t_1)+\frac{\eta|\lambda_1|}{\Gamma(2-\alpha_1)}\left[t_2^{1-\alpha_1}-t_1^{1-\alpha_1}+2\left(t_2-t_1\right)^{1-\alpha_1}\right] \\
& +\frac{\Gamma(\beta_1+1)}{\Gamma(2-\alpha_1)}\left[\frac{\tau_1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1+1)}+\frac{\eta|\lambda_1|}{\Gamma(\beta_1+1)}+\eta M_1+\theta_1\right] \\
& \times\left(t_2^{1-\alpha_1}-t_1^{1-\alpha_1}\right) .
\end{aligned}$$

D'après lemme 2, on a :

$$\begin{aligned}
\|{}^{c}D^{\alpha_1+\beta_1-1}\Phi_1 x\left(t_2\right)-{}^{c}D^{\alpha_1+\beta_1-1}\Phi_1 x\left(t_1\right)\|_{\infty} \leq & \tau_1(t_2-t_1) \\
& +\left[\frac{4\eta|\lambda_1|}{\Gamma(2-\alpha_1)}+\frac{\Gamma(\beta_1+1)}{\Gamma(2-\alpha_1)}\left(\frac{\tau_1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1+1)}+\eta M_1+\theta_1\right)\right]\left(t_2-t_1\right)^{1-\alpha_1} .
\end{aligned}$$

Alors pour $t_1 \rightarrow t_2$, on va avoir :

$$\|{}^{c}D^{\alpha_1+\beta_1-1}\Phi_1 x\left(t_2\right)-{}^{c}D^{\alpha_1+\beta_1-1}\Phi_1 x\left(t_1\right)\|_{\infty} \rightarrow 0. \tag{3.15}$$

Par (3.14) et (3.15), on obtient :

$$\|\Phi_1 x\left(t_2\right)-\Phi_1 x\left(t_1\right)\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t_1 \rightarrow t_2. \tag{3.16}$$

De la même manière, on trouve :

$$\left\|\Phi_2 y\left(t_2\right)-\Phi_2 y\left(t_1\right)\right\|_{\mathcal{Y}} \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t_1 \rightarrow t_2. \tag{3.17}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\|(\Phi(x,y)(t_2)-\Phi(x,y)(t_1)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} &= \left\|\left(\Phi_1 x\left(t_2\right), \Phi_2 y\left(t_2\right)\right)-\left(\Phi_1 x\left(t_1\right), \Phi_2 y\left(t_1\right)\right)\right\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \\
&= \left\|\Phi_1 x\left(t_2\right)-\Phi_1 x\left(t_1\right), \Phi_2 y\left(t_2\right)-\Phi_2 y\left(t_1\right)\right\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \\
&= \left\|\Phi_1 x\left(t_2\right)-\Phi_1 x\left(t_1\right)\right\|_{\mathcal{X}}+\left\|\Phi_2 y\left(t_2\right)-\Phi_2 y\left(t_1\right)\right\|_{\mathcal{Y}}.
\end{aligned}$$

De (3.16) et (3.17), si $t_1 \rightarrow t_2$ on trouve :

$$\|(\Phi(x,y)(t_2)-\Phi(x,y)(t_1)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \rightarrow 0.$$

Alors $\Phi(B_\eta)$ est équicontinue.
D'après les étapes : 1-2-3 et le théorème d'Ascoli Arzela, On conclue que $\Phi$ est complètement continue.

**Étape 4 :**

On montre que l'ensemble $\Omega$ défini par :

$$\Omega=\{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y},(x,y)=\rho\Phi(x,y),\rho\in]0,1[\}$$

est borné.
Soit $(x,y)\in\Omega$, pour tout $t\in[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
x(t) &= \rho\ \Phi_1 x(t) \\
&= \frac{\rho}{\Gamma\left(\alpha_1+\beta_1\right)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_1+\beta_1-1} f_1\left(s, x(s),{}^c D^{\alpha_1+\beta_1-1} x(s)\right) ds \\
&-\frac{\rho\lambda_1}{\Gamma\left(\beta_1\right)} \int_0^t (t-s)^{\beta_1-1} x(s) ds+\rho \int_0^1 \varphi_1(s) x(s) ds \\
&+\rho t^{\beta_1}\left[\theta_1-\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_1+\beta_1\right)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_1+\beta_1-1} f_1\left(s, x(s),{}^c D^{\alpha_1+\beta_1-1} x(s)\right) ds\right. \\
&\left.+\frac{\lambda_1}{\Gamma\left(\beta_1\right)} \int_0^1 (1-s)^{\beta_1-1} x(s) ds-\int_0^1 \varphi_1(s) x(s) ds\right].
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
{}^c D^{\alpha_1+\beta_1-1} x(t) =& \rho\ {}^c D^{\alpha_1+\beta_1-1} \Phi_1 x(t) \\
=& \rho \int_0^t f_1\left(s, x(s),{}^c D^{\alpha_1+\beta_1-1} x(s)\right) ds-\frac{\rho\lambda_1}{\Gamma(1-\alpha_1)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha_1} x(s) ds \\
&+\rho\frac{\Gamma(\beta_1+1) t^{1-\alpha_1}}{T^{\beta_1}\Gamma(2-\alpha_1)}\left[\theta_1-\frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_1+\beta_1-1} f_1\left(s, x(s),{}^c D^{\alpha_1+\beta_1-1} x(s)\right) ds\right. \\
&\left.+\frac{\lambda_1}{\Gamma(\beta_1)} \int_0^1 (1-s)^{\beta_1-1} x(s) ds-\int_0^1 \varphi_1(s) x(s) ds\right].
\end{aligned}$$

Ce qui implique par ( 3.12 ) et ( 3.13 ) que :

$$\|x\|_\infty \leq L_1 \qquad \text{et} \qquad \left\|{}^c D^{\alpha_1+\beta_1-1} x\right\|_\infty \leq L_2.$$

Donc :

$$\|x\|_{\mathcal{X}} \leq L_1 + L_2 := L \,. \tag{3.18}$$

De la même manière, on a :

$$\|y\|_{\mathcal{Y}} \leq L_1' + L_2' := L' \,. \tag{3.19}$$

Par (3.17) et (3.18), on obtient :

$$\|(x,y)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} = \|x\|_{\mathcal{X}} + \|y\|_{\mathcal{Y}} \quad \leq L + L' < \infty \,.$$

D'où, $\Omega$ est un ensemble borné.
Grâces aux étapes 1, 2, 3, et 4 , et d'après le théorème du point fixe de Sheafer, on déduit que $\Phi$ admet un point fixe qui est solution du système fractionnaire ( 3.1 ). □

**Exemple 7.**

Soit le système fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^c D^{\frac{3}{4}} \left({}^c D^{\frac{1}{2}} + 2\right) x(t) = f_1\left(t, x(t), {}^c D^{\frac{1}{4}} x(t)\right), \quad t \in [0,1] \\ {}^c D^{\frac{7}{8}} \left({}^c D^{\frac{5}{8}} + 3\right) x(t) = f_2\left(t, x(t), {}^c D^{\frac{1}{2}} x(t)\right), \quad t \in [0,1] \\ x(0) = \displaystyle\int_0^1 \sin(t) x(s) ds, \quad x(1) = 4, \\ \\ y(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(t)}{2} y(s) ds, \quad y(1) = 5. \end{cases} \tag{3.20}$$

Où

$$f_1\left(t, x(t), {}^c D^{\frac{1}{4}} x(t)\right) = \frac{1-t}{3} + \frac{\cos(x(t)) + \sin({}^c D^{\frac{1}{2}} x(t))}{2e^t + 1},$$

$$f_2\left(t, y(t), {}^c D^{\frac{1}{4}} y(t)\right) = t^2 + \frac{2\sin(y(t) + 2\cos({}^c D^{\frac{1}{2}} y(t))}{2+t^2}.$$

On a :

$$\left|f_1\left(t, x(t), {}^c D^{\frac{1}{4}} x(t)\right)\right| \leq \frac{1-t}{3} + \frac{2}{2e^t+1} \leq \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \leq 1,$$

$$\left|f_2\left(t, y(t), {}^c D^{\frac{1}{4}} y(t)\right)\right| \leq t^2 + \frac{4}{2+t^3} \leq 1 + 2 \leq 3.$$

Donc $(H_{11})$ est satisfaite avec $\tau_1 = 1$ et $\tau_2 = 3$.
Aussi on a :

$$|\sin(t)| \leq 1.$$

$$\left|\frac{\cos(t)}{2}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Donc $(H_9)$ est satisfaite avec $M_1 = 1$ et $M_2 = \frac{1}{2}$.
Ainsi toutes les hypothèses du théorème 11 sont satisfaites, par conséquent le système (3.20) possède au moins une solution $x$ dans l'espace $\mathcal{X}$ .

# Annexe

**Proposition 2.** *Soit $f \in C([a,b])$, pour $\alpha, \beta$ des nombres complexes tels que $Re(\alpha) > 0$ et $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, l'intégrale fractionnaire de Riemann -Liouville possède la propriété de semi-groupe suivante :*

$$I_a^\alpha \left( I_a^\beta f \right) = I_a^{\alpha+\beta} f = I_a^{\beta+\alpha} f, \tag{3.21}$$

*et pour $Re(\alpha) > 1$ on a*

$$\frac{d}{dx} I_a^\alpha f = I_a^{\alpha-1} f. \tag{3.22}$$

**Preuve.** Pour la relation (3.21) on a :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha \left( I_a^\beta f \right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} \left( I_a^\beta f \right)(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} \left( \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^s (s-t)^{\beta-1} f(t) dt \right) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^s (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} f(t) dt ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) \left[ \int_t^x (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} ds \right] dt, \end{aligned} \tag{3.23}$$

on pose $s = t + (x-t)\tau$ dans l'expression entre crochet de (3.23), on obtient :

$$\begin{aligned} ds &= (x-t) d\tau, \\ s = t &\Longrightarrow t + (x-t)\tau = t \Longrightarrow \tau = 0, \\ s = x &\Longrightarrow t + (x-t)\tau = x \Longrightarrow \tau = 1. \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \int_t^x (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} ds &= \int_0^1 \big( x - (t + (x-t)\tau)^{\alpha-1} (t + (x-t)\tau - t)^{\beta-1} (x-t) d\tau \\ &= \int_0^1 [(x-t)(1-\tau)]^{\alpha-1} [(x-1)\tau]^{\beta-1} (x-t) d\tau \\ &= (x-t)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} d\tau, \end{aligned}$$

Moyennant la définition de la fonction Bêta, on déduit que

$$B(\beta, \alpha) = \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} d\tau = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

En retournant à la formule (3.23), on obtient alors

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha \left(I_a^\beta f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) \left[(x-t)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right] dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha+\beta)-1} f(t) dt \\
&= \left(I_a^{\alpha+\beta} f\right)(x).
\end{aligned}$$

Pour la relation (3.22) on a :

$$\frac{d}{dx}\left(I_a^\alpha f\right)(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} f(t) dt\right),$$

puisque $f(t)$ et $(x-t)^{\alpha-1}$ sont continues donc l'application $t \longrightarrow (x-t)^{\alpha-1} f(t)$ est continue, alors :

$$\frac{d}{dx}\left(I_a^\alpha f\right)(x) = \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{d}{dx}(x-s)^{\alpha-1} f(t) dt\right).$$

D'après l'équation fondamentale de la fonction Gamma d'Euler ( 1.2 ) on a $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$ et comme $\mathrm{Re}(\alpha) > 1$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(I_a^\alpha f\right)(x) &= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x \frac{d}{dx}(x-s)^{\alpha-1} f(t) dt \\
&= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (\alpha-1)(x-s)^{(\alpha-1)-1} f(t) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (x-s)^{(\alpha-1)-1} f(t) dt \\
&= \left(I_a^{\alpha-1} f\right)(x),
\end{aligned}$$

d'où le résultat. $\square$

# Bibliographie

[1] **Bashir Ahmad[a,*], Juan J. Nieto[b]**, Existence results for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with three-point boundary conditions, Computers and Mathematics with Applications 58 (2009) 1838-1843.

[2] **Bashir Ahmad[a,*], Juan J. Nieto[a,b], Ahmed Alsaedi[a], Hana Al-Hutami[a],** Existence of solutions for nonlinear fractional $q$-difference integral equations with two fractional orders and nonlocal four-point boundary conditions, Journal of the Franklin Institute 351 (2014) 2890-2909.

[3] **M. Benchohra** [a,*], *S.* **Hamani** [a], **S.K. Ntouyas** [b], Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal conditions, Nonlinear Analysis 71 (2009) 2391-2396.

[4] **Zhoujin Cui, Pinneng Yu** and **Zisen Mao**, Existence of Solutions for Nonlocal Boundary Value Problems of Nonlinear Fractional Differential Equations, ISSN 0973-5321, Volume 7, Number 1, pp. 31-40 (2012).

[5] **Y. Chen D. Chen and Z. LV,** The existence for a coupled system of nonlinear fractional differntal equations with multi-point boundary conditions , Bulletin of the Iranian Mathematical Society Vol. 38 No. 3 (2012), pp 607-624.

[6] **G. Chai,** Positive solutions for boundary value problem of fractional differential equation with p-Laplacian, College of Mathematics and Statistics, Hubei Normal University, Hubei 435002, P.R. China Research gate Article Available Online at :`http://www.boundaryvalueproblems.com/content/2012/1/18`

[7] **R. Hilfer,** Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, 2000.

[8] **M. Houas[1], Z. Dahmani[2,*]**, New Results for a Caputo Boundary Value Problem, American Journal of Computational and Applied Mathematics 2013, 3(3) : 143-161.

[9] **M. Houas[1], Z. Dahmani[2]**, New results for a system of two fracional differential equations involving $n$ caputo derivatives, Volume 38(2) (2014), Pages 283-301.

[10] **A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo,** Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland Mathematical studies 204, Ed Van Mill , Amsterdam,(2006).

[11] **Sihua Liang[a,b,*], Jihui Zhang[a],** Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equation,Nonlinear Analysis 71 (2009) 5545 ?5550,Researchgate Article,Available Online at :`https://www.elsevier.com/locate/na`.

[12] **T. Pfitzenreiter,** A physical basis for fractional derivatives in constitutive equations, Z. Angew. Math. Mech. 84(4), 284-287 (2004).

[13] **Yannick Privat,** Espaces Vectoriels Normés et Topologie, B.P. 239, F-54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex.

[14] **F. Riewe,,**Mechanics with fractional derivatives, Phys. Rev. E 55 (1997), 3581-3592.

[15] **Xinwei Su**, Boundary value problem for a coupled system of nonlinear fractional differential equations , Applied Mathematics Letters 22 (2009) 64-69.

[16] **Weera Yukunthorn[1], Sotiris K Ntouyas[2,3] and Jessada Tariboon[1*]**, Nonlinear fractional Caputo-Langevin equation with nonlocal Riemann-Liouville fractional integral conditions, Yukunthorn et al. Advances in Difference Equations 2014, 2014 :315.

[17] **Yinghan Zhang[*], Zhanbing Bai, Tingting Feng,** Existence results for a coupled system of nonlinear fractional three-point boundary value problems at resonance, Computers and Mathematics with Applications 61 (2011) 1032 ?1047.Available Online at :`https://www.elsevier.com/locate/camwa` .