République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

Université Djilali Bounâama Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER** en Mathématiques

Spécialité:

Analyse mathématiques et application

Réalisé par:

BEKHOUCHE Fadhila

Thème:

Sur La Fonction Nombre de facteurs premiers d'un entier n

Soutenu Publiquement le :07/07/2019

Devant le jury composé de :

Mr. M. HACHAMA	président
Mr. M. KARRAS	Encadreur
Mr. M. BEZZIOU	Examinateur 1
Mr. M. HOUASNI	Examinateur 2

ANNÉE UNIVERSITAIRE: 2018-2019

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à la fonction arithmétique $\omega(n)$ lequel est le nombre de diviseurs premières distinct. D'abord on rappelle des grandes notions de base sur les fonctions additives et multiplicatives. Ensuite, nous présentons la démonstrations d'un résultats sur la fonction $\omega(n)$. En particulier, le résultat de Hardy et Ramanujan, et on donne les valeurs moyennes des fonctions $\omega(n)$, $\omega^2(n)$ et $\frac{1}{\omega(n)}$. Finalement, on termine par certains résultats liés à la fonction $\omega(n)$. On donne particulièrement, une définition des nombres ω-intéressants et quelques propriétés.

Dédicace

Je dédie ce mémoire a mes chers parents à qui je dois compte tout ce

travail est le fruit de leur amour, leurs encouragement et sacrifices.

A ma chères mère.

A ma chères père.

A mes chères frères : ***Mohamed****,* ***Ali*** *,***Aiman** *,* ***Mostafa*** *, et* ***Sofiane*** *.*

A mes chères sœurs : ***Hizia****,* ***Zahia****.*

A mes amies : ***Fatima****,* ***Imane****,* ***Hakima****.*

A toutes mes amis et toute personne qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Remerciement

*En premier lieu, je remercie "**ALLAH**" le tout puissant qui m'a donné la force, la volonté et le courage pour accomplir ce modeste travail.*

*je tiens à remercier mon encadreur monsieur **Karras Meselem** pour avoir proposé et dirigé ce thème avec une grande disponibilité..*

Je veux exprimer mes remerciements les plus dévoués aux membres de jury qui m'ont honorées en acceptant d'évaluer ce travail.

Je remercie également tous les enseignants durant les années des études.

*Je tiens aussi à remercier mon mari **Abdelkadir**, et ma famille pour leurs soutiens et encouragements.*

Je remercie toute personne qui a participé et contribué de prés ou de loin à l'exécution de ce modeste travail.

Fadhila

Notations

1. $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des nombres naturels non nuls.
2. Le mot " entier " (sans précision supplémentaire) désigne un entier naturel non nul.
3. On désigne par p un nombre premier.
4. Le symboles $\sum_{n\leq x}$ représente une somme et un produit étendus à tous les entiers $n \in [1, x]$.
5. Le symboles $\prod_{p\leq x}$ représente un produit étendus à tous les nombres premiers $p \in [2, x]$. De plus $\prod_{p} = \lim_{x\to+\infty} \prod_{p\leq x}$.
6. $m \mid n$ signifie m divise n, et $m \nmid n$ signifie m ne divise pas n.
7. (n, m) désigne le pgcd de (n, m).
8. $p^\alpha || n$ signifie p^α divise n et $p^{\alpha+1}$ ne divise pas n.
9. $[x]$ désigne l'unique entier k tel que $k \leq x < k + 1$ (la partie entière de x).
10. La fonction $"ln"$ représente toujours le logarithme de base e, où e est la constante de Néper.
11. $f(x) = O(g(x))$ et $f << g$ les notions de landau et Vinogradov pour signifier qu'il existe une constante $C > 0$ et un réel x_0 tel que pour tout $x \geq x_0$.
$$|f(x)| \leq Cg(x).$$
12. $f(x) = o(g(x)$ signifie que $\lim \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0$ quand $x \to \infty$.
13. $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i} \left(on = \prod_{p^\alpha || n} p^a \right)$ signifie la factorisation de n en facteurs premiers.
14. $[a, b]$ désigne l'ensemble des nombres réels x tel que $a \leq x \leq b$.

Table des matières

Introduction

L'étude des fonctions arithmétiques est un axe de recherche en théorie analytique des nombres. Une fonction arithmétique est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$. Ou simplement, est une suite complexe définie sur $\mathbb{N}$. Parmi ces fonctions, il ya une partie est intensément étudiée, il s'agit des fonctions arithmétiques additives et multiplicatives. Une fonction arithmétique f est dite multiplicative si l'on a $f(1) = 1$ et $f(nm) = f(n)f(m)$ et dite additives si l'on $f(1) = 0$ et $f(nm) = f(n) + f(m)$ dès que n et m sont premiers entre eux dans $\mathbb{N}^*$. Ce type de ces fonctions possèdent un comportement irrégulier quant à leurs valeurs dans l'ensemble d'arrivée. A titre d'exemple la fonction $\omega(n)$, nombre de diviseurs premiers distincts de l'entier naturel n, est une fonction additive, vaut 1 sur tous les nombres premiers et prend de grandes valeurs sur infinité de nombres hautement composés. En effet, vaut 1 sur tous les nombres premiers, en particulier, la suite de ses valeurs sur les entiers entre 1 et 20 est

$$0, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2$$

Une régularité apparait lorsque l'on considère la quantité $\displaystyle\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\omega(n)$, pour x assez grand.

Ce comportement erratique a été un point motivant pour étudier ces fonctions en moyenne. Certains chercheurs sont toujours intéressés par le calcule des ordres maximaux et des valeurs moyennes de certaines fonctions arithmétiques. En 1898, M. de la Vallee-Poussin, fait une communication intitulé "sur les valeur moyennes de certaines fonctions arithmétiques ". En 1917, et alors Hardy et Ramanujan [1] on prouvé que, lorsque $x \to +\infty$:

$$\sum_{n\leq x}\omega(n) = x\log\log x + Mx + O\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

tel que M est une constante positive.

Dans ce mémoire, Nous allons montrer quelques résultats concernant la fonction $\omega(n)$ avec des méthodes élémentaires.

Le premier chapitre contient les principales définitions et notations nécessaires. Plus particulièrement, on va rappeler à quelques théorèmes fondamentaux sur les fonctions arithmétiques multiplicatives et additives.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéressera de prouver quelques résultats sur la fonction $\omega(n)$. En particulier, le résultat de Hardy et Ramanujan et les valeurs moyennes de la fonction $\omega(n)$, $\omega^2(n)$ et $\frac{1}{\omega(n)}$.

Le chapitre trois comporte certains résultats liés à la fonction $\omega(n)$. On donnera en particulier, une définition des nombres ω-intéressants et encore une définition des diviseurs unitaires d'un entier positif.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et théorèmes qui seront utilisées dans les autres chapitres.

1.1 Les nombres premiers

Définition 1.1. *Un entier* $n > 1$ *est dit premier s'il n'a pas d'autres diviseurs positifs que* 1 *et lui-même.*

Exemple 1.1. *Les nombres premiers inférieurs à* 100 *sont*

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41$$

$$43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$$

Théorème 1.1. *Chaque entier* $n \geqslant 2$ *est soit un nombre premier où soit un produit de nombres premiers.*

Preuve.
Le théorème est clairement vrai pour $n = 2$. Supposons que ce soit vrai pour chaque entier inférieure strictement à n.
Si n n'est pas premier, alors il a un diviseur $d > 0$ tel que $d \notin \{1, n\}$. Donc $n = md$ tel que $1 < m < n$, alors par hypothèse chaque nombre m et d est un produit des nombres premiers. □

1.1.1 Théorème fondamental de l'arithmétique

Théorème 1.2. *Chaque entier positif $n \geq 2$ se factorise d'une manière unique comme un produit fini des nombres premiers, c'est à dire*

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i},$$

Où p_i sont des nombres premiers et α_i des nombres entiers positifs.

Pour montrer ce théorème, nous utilisons le lemme suivant.

Lemme 1.1. *Soient $a, b, n, a_1, \ldots, a_n$ des entiers dans $\mathbb{N}^*$. on a*

(1) $p|ab \Longrightarrow p|a$ *ou* $p|b$

(2) $p|\prod_{i=1}^{n} a_i$ *alors il existe* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *tel que* $p|a_i$.

(3) $p|a^n \Longrightarrow p|a$.

Preuve du lemme 1.1.

(1). Soit $p|ab$, alors il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $ab = pq$. Comme p est premier, soit il divise a, soit il est premier avec a. Car les seuls diviseurs de p sont 1 et p. Donc les seuls diviseurs communs possibles avec a sont aussi 1 et p.
Si p est premier avec a, alors par le théorème de Bezout, il existe deux entiers, u et v, tel que $au + pv = 1$. Alors pour $b \in \mathbb{N}^*$ on obtient $abu + pbv = b$, et donc $pqu + pbv = b$. Alors $p \times (qu + bv) = b$, par conséquent $p \mid b$.
Même travail si $(p, b) = 1$, on trouve que $p \mid a$.

(2). Par récurrence, on utilise la propriété (1) pour $n = 2$.
on suppose que ce soit vrai pour tout entier $2 \leq h \leq n$ et on montre que la propriété est vrai pour $n + 1$.
Soit $p|a_1 \ldots a_n a_{n+1}$, si $p|a_1 \ldots a_n$, alors il divise l'un des entiers pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, sinon $(p, a_1 a_2 \ldots, a_n) = 1$, et donc par (1) il divise a_{n+1}.

(3). Est une conséquence du propriété (2), (on pose $a = a_i, i \in \{1, \ldots, n\}$)

□

Preuve du théorème 1.2.

Existence de la factorisation
Si $n = p^\alpha$ où α est un entier naturel donné alors n vérifie le théorème, Sinon, soit S_n l'ensemble des diviseurs de n privé de 1 et soit $p_1 = \inf \mathcal{S}_n$ alors p_1 est bien un nombre premier sinon il existe un $1 < q < p_1$ tel que $q|p_1$ alors $q|n$ ce qui implique que $q \in S_n$ absurde ! puisque p_1 est le plus petit élément de S_n donc $n = p_1 n_1$, si p_1 divise encore n_1 alors $n_1 = p_1 n_2$ d'où $n = p_1^2 n_2$ ainsi il existe $\alpha_1 > 0$ tel que $n = p_1^{\alpha_1} n_1$. On pose ainsi, $p_2 = \inf S_{n_1}$ donc de la même manière on prouve que $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} n_2$ et ainsi de suite on prouve que :

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i},$$

avec $p_i < p_j$ quand $i < j$ et $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.

L'unicité de la factorisation
Supposons que l'entier n peut se factorise de deux manières différentes :

$$n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i} = \prod_{j=1}^{s} q_j^{\beta_j}, \tag{1.1}$$

Où p_i et q_j des nombres premiers distincts pour tout i, j et $p_1 < p_2 < \cdots < p_m$ et $q_1 < q_2 < \cdots < q_s$.
Alors par le lemme précédent cette écriture (1.1) montre que chaque q_j divise l'un des p_i, or ces deux nombres premiers sont distincts d'où l'absurde !.

□

1.1.2 L'infinité des nombres premiers

Définition 1.2. *On appel la primorielle d'un entier n, le nombre $p(n)$ défini par*

$$p(n) = \prod_{p \leq n} p.$$

i.e $p(n)$ est le produit de tous les nombres premiers plus petit ou égale à n.

Théorème 1.3. *L'ensemble des nombres premiers $\mathbb{P}$ est infini.*

Preuve.

Supposons que l'ensemble $\mathbb{P}$ est fini. On pose $p = \max \mathbb{P}$. Soit n un entier tel que

$$n = p(n) + 1.$$

Il est clair que $n \notin \mathbb{P}$ car $n > p$, de plus pour tout entier m de $\mathbb{P}$, m ne divise pas n. D'autre part, n se factorise d'une manière unique par des entiers de $\mathbb{P}$, ce qui est absurde. D'où $\mathbb{P}$ est infini.

□

1.1.3 Le Théorème des nombres premiers

On définit maintenant deux fonctions de Tchebychev qui jouent un rôle très important dans le théorème des nombres premiers, ces fonctions sont notées par $\pi(x)$ et $\theta(x)$.

Définition 1.3. *Pour tout réel $x \geq 0$, On note par $\pi(x)$ le nombre des nombres premiers inférieurs à x, défini par*

$$\pi(x) = \begin{cases} \sum_{p \leq x} 1 & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 2 \end{cases}.$$

Exemple 1.2.

$$\pi(16) = \sum_{p \leq 16} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6,$$

car les nombres premiers qui sont plus petit ou égal à 16 *sont :* $2, 3, 5, 7, 11, 13$.

Définition 1.4. *Pour tout réel $x \geq 0$, on note par $\theta(x)$ la fonction définie par*

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p,$$

et $\theta(x) = 0$ pour $0 \leq x < 2$

Exemple 1.3.

$$\theta(16) = \log 2 + \log 3 + \log 5 + \log 7 + \log 11 + \log 13 = \log 30030.$$

Théorème 1.4. ***[7](Théorème des nombres premiers)***
Pour x assez grand on a

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad et \quad \theta(x) \sim x.$$

1.2 Fonctions arithmétiques

Définition 1.5. *On appelle fonction arithmétique, toute application f définie de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$.*

Exemples

- **La fonction** $d(n)$: Soit $n \geq 1$ un entier. On note par $d(n)$ le nombre des diviseurs de l'entier n qui est définie par

$$\begin{aligned} d(n) &= \text{Card}\,\{d \in \mathbb{N}^*, d|n\} \\ &= \sum_{d|n} 1. \end{aligned}$$

  Par exemple $d(24) = \text{card}\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} = 8$.

- **La fonction de Möbius** :Soit $n \geq 1$ un entier tel que $n = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}$. La fonction de Möbius $\mu(n)$ est définie par

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ (-1)^k & \text{si } \; a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} .$$

- **La fonction de Liouville** : Soit $n \geq 1$ un entier tel que $n = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}$. La fonction de Liouville $\lambda(n)$ est définie par

$$\lambda(n) = (-1)^{a_1 + a_2 + \ldots. + a_k},$$

  on a $\lambda(1) = 1$.

- **La fonction 1** : La fonction 1 est définie par

$$1(n) = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Dans ce qui vient, nous travaillons sur deux types de fonctions arithmétiques, additives et multiplicatives.

1.2.1 Fonctions arithmétiques additives

Définition 1.6. *On dit qu'une fonction arithmétique f est additive si $f(1) = 0$, et pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(n, m) = 1$ on a*

$$f(nm) = f(n) + f(m).$$

f dite complètement additive si pour tout entiers m, n on a

$$f(nm) = f(n) + f(m).$$

Exemple 1.4. *La fonction $\omega(n)$ qui compte le nombre des diviseurs premiers distincts de l'entier n, Cette fonction est définie par*

$$\omega(n) = \sum_{p|n} 1.$$

$\omega(n)$ est une fonction additive.
En effet ; Soit $(n, m) = 1$ alors il est clair que les diviseurs premiers de n ne divisent pas m et les diviseurs premiers de m ne divise pas n. Alors si on écrit

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} \qquad et \qquad m = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\beta_i},$$

on a

$$nm = \left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{s} p_i^{\beta_i}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}\omega(nm) &= r + s \\ &= \omega(n) + \omega(m).\end{aligned}$$

Exemple 1.5. *La fonction $\Omega(n)$ qui compte le nombre total des diviseurs premiers (i.e. avec multiplicité) est une fonction complètement additive. On définit cette fonction par*

$$\Omega(n) = \sum_{p^\alpha \| n} \alpha.$$

En effet; Soient n, m deux entiers tels que

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} \quad et \quad m = \prod_{j=1}^{s} q_j^{\beta_i},$$

alors on a

$$nm = \left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{s} p_i^{\beta_i}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}\Omega(nm) &= \sum_{i=1}^{r} (\alpha_i + \beta_j) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \\ &= \Omega(n) + \Omega(m).\end{aligned}$$

Définition 1.7. *Une fonction arithmétique additive est appelée fortement additive si pour tout facteur premier p^α, on ait*

$$f(p^\alpha) = f(p).$$

Exemple 1.6. *Pour tout facteur premier p^α on a*

$$\omega(p^\alpha) = \omega(p) = 1,$$

donc $\omega(n)$ est une fonction fortement additive.

Remarque 1.1. *Si $n = \prod_{p^\alpha \| n} p^\alpha$ alors*

$$\omega(n) = \sum_{p^\alpha \| n} \omega(p^\alpha) = \sum_{p | n} \omega(p).$$

1.2.2 Fonctions arithmétiques multiplicatives

Définition 1.8. *On dit qu'une fonction arithmétique f est multiplicative si $f(1) = 1$, et pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(n, m) = 1$ on a*

$$f(nm) = f(n)f(m).$$

f est dite complètement multiplicative si pour tous entiers m, n on a

$$f(nm) = f(n)f(m).$$

Exemple 1.7. *La fonction de Möbius $\mu(n)$ est multiplicative.*

En effet ; Soient n, m deux entiers tel que $(n, m) = 1$. Si $p^2 \mid m$ ou $p^2 \mid n$, alors $p^2 \mid nm$, donc $\mu(nm) = 0 = \mu(n)\mu(m)$, et alors la formule est trivial. Nous pouvons donc supposer que n et m sont des entiers sans carré, i.e.$m = p_1p_2...p_r$, et $n = q_1q_2...q_r$ pour tout premier p_i et q_j être distinct. Alors $\mu(nm) = \mu(p_1p_2...p_rq_1q_2...q_s) = (-1)^{r+s}$, donc $\mu(nm) = (-1)^r(-1)^s = \mu(n)\mu(m)$.

Exemple 1.8. *La fonction de Liouville est multiplicative.*

Remarque : $\lambda(n) = (-1)^{a_1+a_2+....+a_k} = (-1)^{\Omega(n)}$.

En effet : on $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$, donc on a

$$\begin{aligned}\lambda(nm) = (-1)^{\Omega(nm)} &= (-1)^{\Omega(n)+\Omega(m)}.\\ &= (-1)^{\Omega(n)}(-1)^{\Omega(m)}.\\ &= \lambda(n)\lambda(m).\end{aligned}$$

1.2.3 Quelques propriétés sur les fonctions arithmétiques

Proposition 1.1. *Si f une fonction additive et n un entier strictement positif. Alors*

$$f(n) = \sum_{i=1}^{r} f\left(p_i^{\alpha_i}\right).$$

Preuve.
La démonstration par récurrence. On suppose que f est additive, soit $n \geq 1$ un entier tel que

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i},$$

Puisque les nombres $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sont premiers entre eux deux à deux, alors on a

- Si $r = 1$, alors $n = p_1^{\alpha_1}$ donc $f(n) = f(p_1^{\alpha_1})$.
- Si $r = 2$, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ alors comme $(p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}) = 1$ alors

$$f(n) = f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}) = f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2})$$

.

On suppose que la formule est vrai pour tout entier plus petit ou égale à r.i.e

$$f(n) = \sum_{i=1}^{r} f\left(p_i^{\alpha_i}\right).$$

Soit p_{r+1} un entier premier avec les nombres $p_1, p_2, \ldots, p_r$, donc il est premier

avec le produit $\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$. Par conséquent

$$\begin{aligned} f\left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} p_{r+1}^{\alpha_{r+1}}\right) &= f\left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}\right) + f\left(p_{r+1}^{\alpha_{r+1}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{r} f\left(p_i^{\alpha_i}\right) + f(p_{r+1}^{\alpha_{r+1}}) \\ &= \sum_{i=1}^{r+1} f\left(p_i^{\alpha_i}\right). \end{aligned}$$

□

Proposition 1.2. *Soit f une fonction complètement additive et n un entier strictement positif. Alors*

$$f(n) = \sum_{p^i \| n} f^i(p).$$

Proposition 1.3. *Le produit deux fonctions additives n'est pas additive*

Preuve.
Soit f, g deux fonctions additives

On pose $h = fg$, Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(n, m) = 1$. Alors

$$h(nm) = f(nm)g(nm)$$

$$= (f(n) + f(m))(g(n) + g(m))$$

$$= f(n)g(n) + f(n)g(m) + f(m)g(n) + f(m)g(m)$$

$$= h(n) + h(m) + f(n)g(m) + f(m)g(n)$$

Donc

$$h(nm) \neq h(n) + h(m).$$

Alors
h n'est pas additive.

□

Proposition 1.4. *Si f est une fonction multiplicative et n un entier strictement positif, tel que $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$, alors on a*

$$f\left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}\right) = \prod_{i=1}^{r} f\left(p_i^{\alpha_i}\right).$$

Preuve.

La démonstration est par récurrence. On suppose que f est multiplicative, et soit $n \geq 1$, un entier tel que $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$.

- Si $r = 1$: $f(n) = f(p_1^{\alpha_1})$.
- Si $r = 2$: $f(n) = f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}) = f(p_1^{\alpha_1})f(p_2^{\alpha_2})$ car $(p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}) = 1$ et f est multiplicative.

On suppose que la formule est vrais pour tout entier plus petit où égale à r i.e

$$f\left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}\right)=\prod_{i=1}^{r} f\left(p_i^{\alpha_i}\right)$$

Soit p_{r+1} un entier premier avec tous les nombres $p_1, p_2, \ldots . p_r$ donc il est premier avec le produit $\prod_{i=1}^{r} p_i$. Alors on a $\left(p_{r+1}^{\alpha_{r+1}}, \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}\right)=1$, donc

$$f\left(\prod_{i=1}^{r+1} p_i^{\alpha_i}\right)=f\left(p_{r+1}^{\alpha_{r+1}} \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}\right)=f\left(p_{r+1}^{\alpha_{r+1}}\right) f\left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}\right)=f\left(p_{r+1}^{\alpha_{r+1}}\right) \prod_{i=1}^{r} f\left(p_i^{\alpha_i}\right).$$

Alors

$$f\left(\prod_{i=1}^{r+1} p_i^{\alpha_i}\right)=\prod_{i=1}^{r+1} f\left(p_i^{\alpha_i}\right).$$

□

Théorème 1.5. *Soit f est une fonction arithmétique multiplicative. Alors la fonction $F(n)$ définie par*

$$F(n)=\sum_{d \mid n} f(d).$$

est multiplicatives

Preuve.
Soient n et m deux entiers tels que $(n, m)=1$ et $d=d_1 d_2$, on a alors

$$\begin{aligned}
F(nm) &= \sum_{d \mid nm} f(d) \\
&= \sum_{d_1 \mid n, d_2 \mid m} f\left(d_1 d_2\right) \\
&= \sum_{d_1 \mid n, d_2 \mid m} f\left(d_1\right) f\left(d_2\right) \\
&= \sum_{d_2 \mid m}\left\{f\left(d_2\right)\left(\sum_{d_1 \mid n} f\left(d_1\right)\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{d_1|n} f\left(d_1\right)\right)\left(\sum_{d_2|m} f\left(d_2\right)\right)$$
$$= F(n)F(m).$$

□

Théorème 1.6. *Soit $f(n)$ une fonction arithmétique et $x \geq 1$ et un nombre réel*

$$F(x) = \sum_{n \leq x} f(n).$$

Alors
$$\sum_{m \leq x} F\left(\frac{x}{m}\right) = \sum_{d \leq x} f(d)\left[\frac{x}{d}\right] = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} f(d).$$

Preuve.
on a
$$\sum_{m \leq x} F\left(\frac{x}{m}\right) = \sum_{m \leq x}\left(\sum_{n \leq \frac{x}{m}} f(n)\right)$$
$$= \sum_{m \leq x}\left(\sum_{d \leq \frac{x}{m}} f(d)\right)$$
$$= \sum_{d \leq x} \sum_{m \leq \frac{x}{d}} f(d)$$
$$= \sum_{d \leq x} f(d) \sum_{m \leq \frac{x}{d}} 1$$
$$= \sum_{d \leq x} f(d)\left[\frac{x}{d}\right]$$
$$= \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} f(d).$$

Alors
$$\sum_{m \leq x} F\left(\frac{x}{m}\right) = \sum_{d \leq x} f(d)\left[\frac{x}{d}\right] = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} f(d).$$

□

1.2.4 produit de convolution

Définition 1.9. *Le produit de convolution de deux fonctions arithmétiques f et g est la fonction $f \star g$ définie par*
$$(f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Remarque 1.2. *le produit de convolution est commutatif car*

$$(f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} g(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = (g \star f)(n).$$

Théorème 1.7. *Soient f, g deux fonctions arithmétiques multiplicatives, alors la fonction arithmétique $f * g$ est aussi multiplicative.*

Preuve.
On a premièrement
$$(f * g)(1) = f(1)g(1) = 1$$

Soit maintenant deux entiers m et n premiers entre eux. Nous avons

$$(f * g)(mn) = \sum_{d|mn} f(mn/d)g(d),$$

on a donc

$$\begin{aligned}
(f * g)(mn) &= \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} f\left(\frac{mn}{d_1 d_2}\right) g\left(d_1 d_2\right) \\
&= \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} f\left(\frac{m}{d_1}\right) f\left(\frac{n}{d_2}\right) g\left(d_1\right) g\left(d_2\right) \\
&= (f * g)(m)(f * g)(n)
\end{aligned}$$

□

1.2.5 Formule d'inversion de Möbius

Théorème 1.8. *[9] Soient f et g deux fonctions arithmétiques on a*

$$g = f \star 1 \Longleftrightarrow f = g \star \mu.$$

i.e, pour $n \geqslant 1$ on a

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \Longleftrightarrow f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

1.3 La méthode du sommation partielle

Soient $f(n$ et $g(n)$ deux fonctions arithmétiques. Considérons la fonction sommation

$$F(x) = \sum_{n \leq x} f(n).$$

Soient a et b deux entiers avec $a < b$: alors

$$\sum_{n=a+1}^{b} f(n)g(n) = F(b)g(b) - F(a)g(a+1)$$

$$- \sum_{n=a+1}^{b-1} F(n)(g(n+1) - g(n)).$$

Soient x et y deux nombres réels positives avec $[y] < [x]$, et soit $g(t) \in C^1$ sur l'intervalle $[y, x]$. Alors

$$\sum_{y<n\leq x} f(n)g(n) = F(x)g(x) - F(y)g(y) - \int_y F(t)g'(t)dt,$$

en particulier, si $x \geq 2$ et $g(t) \in C^1$ sur $[1, x]$, alors

$$\sum_{n \leq x} f(n)g(n) = F(x)g(x) - \int_1^x F(t)g'(t)dt.$$

Chapitre 2

Théorème de Hardy–Ramanujan et quelques résultats sur la fonction $\omega(n)$

Nous proposons dans ce chapitre, la démonstration de quelques théorèmes sur la fonction $\omega(n)$. En particulier, le résultat de Hardy et Ramanujan et les valeurs moyennes de la fonction $\omega(n)$, $\omega(n)^2$, $\dfrac{1}{\omega(n)}$.

2.1 L'ordre minimum et maximum

Définition 2.1. *Pour tout un entier $n \in \mathbb{N}^*$, On dit que $g(n)$ est l'ordre minimum de la fonction $h(n)$, si*

$$\lim_{n\to+\infty} \inf h(n) = g(n).$$

L'ordre minimum de la fonction $\omega(n)$ est 1. Car pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\omega(n) \geqslant 1$$

Définition 2.2. *Soit $f(n)$ une fonction arithmétique et ℓ un nombre réel. On suppose que la limite supérieure de $f(n)$ est finie. Alors on a $\limsup f(n) = \ell$ si et seulement si ℓ vérifie*

$$\forall \varepsilon \geq 0, \quad \exists\, n_k > 0 \ \textit{tel que} \ \ f(n) < \ell + \varepsilon, \qquad \forall n > n_\varepsilon$$

et $f(n) > \ell - \varepsilon$ pour une infinité de nombre $n > n_\varepsilon$.

Dans ce sens, la recherche de l'ordre maximum d'une fonction arithmétique f et de trouver une fonction simple g telle que

$$\forall \varepsilon \geq 0, \quad \exists\, n_\varepsilon > 0 \;\; tele\, que \;\; f(n) < \varepsilon + g(n), \quad \forall n > n_\varepsilon$$

et $f(n) > g(n) - \varepsilon$ pour une infinité de nombre $n > n_\varepsilon$.

Dans [10] G. H. Hardy et E. M. Wright ont donné l'ordre maximum de la fonction $\omega(n)$. Ce résultat est résumé par le théorème suivant :

Théorème 2.1. *L'ordre maximum de la fonction* $\omega(n)$ *est* $\frac{\log n}{\log\log n}$

Preuve.
Dans l'intervalle $[1, n]$, on pose $N = p_1 p_2 \ldots p_r$, tel que N est le plus grand nombre qui s'écrit de cette forme. i.e $N \leqslant n$, alors on a

$$\omega(n) \leqslant \pi(p_r),$$

car, si

$$\omega(n) \geqslant \pi(p_r),$$

Il existe un diviseur premier p de n i.e $p \leq n$ tel que $p \notin \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$, alors on a une contradiction.
Soit $N = \prod_{p \leq t} p$, t est le plus grand réel vérifier $1 \leq N \leq n$. Alors

$$\log N = \sum_{p \leq t} \log p = \theta(t).$$

Et comme $\theta(t) >> t$, alors $\log N >> t$, et on a

$$\pi(t) << \frac{t}{\log t}.$$

Alors

$$\omega(n) << \frac{t}{\log t} << \frac{\log N}{\log t}.$$

D'autre part, si $n \leq \prod_{p \leq t+1} p$, on a

$$\log n << t.$$

Donc
$$\omega(n) << \frac{\log N}{\log\log n} \leqslant \frac{\log n}{\log\log n}.$$
Alors, l'ordre maximum de la fonction $\omega(n)$ est
$$\frac{\log n}{\log\log n}.$$
$\square$

2.2 L'ordre moyenne de la fonction $\omega(n)$

Définition 2.3. *Étant donné une fonction arithmétique $f(n)$. s'il existe une fonction $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ tel que*
$$\frac{1}{x}\sum_{p\leq x} f(n) \sim g(x).$$
On dit alors que la valeur moyenne de $f(n)$ est $g(n)$.

Théorème 2.2. *Pour $x \geq 2$*
$$\sum_{n\leq x} \omega(n) = x\log\log x + Mx + O\left(\frac{x}{\log x}\right) \tag{2.1}$$
où $M = 0,26149...$ est le constant de Mertens

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant :

Lemme 2.1. ***(Mertens)*** *Pour tout $x \geqslant 2$ on a*
$$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + M + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \tag{2.2}$$
tel que M est nombre réelle positifs.

Démonstration du lemme 2.1.
On a
$$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \sum_{p\leq x} \frac{\log p}{p}\frac{1}{\log p} = \sum_{2\leq n\leq x} f(n)g(n),$$

tel que

$$f(n) = \begin{cases} \frac{\log p}{p} & \text{si } n = p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$g(t) = \frac{1}{\log t} \quad \text{por } t > 1.$$

On pose

$$F(t) = \sum_{n \leq t} f(n)$$

On a $F(t) = 0$ si $t < 2$. Par théorème (8.5) [1], on a

$$F(t) = \log t + r(t), \quad \text{tel que } r(t) = O(1).$$

On utilise la méthode du sommation partielle, on obtient

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \sum_{n \leq x} f(n)g(n)$$

$$= F(x)g(x) - \int_2^x F(t)g'(t)dt$$

$$= \frac{\log x + r(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\log t + r(t)}{t(\log t)^2} dt$$

$$= 1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right) + \int_2^x \frac{1}{t \log t} dt + \int_2^x \frac{r(t)}{t(\log t)^2} dt$$

$$= 1 + \log\log x - \log\log 2 + \int_2^x \frac{r(t)}{t(\log t)^2} dt + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

$$= \log\log x + 1 - \log\log 2 + \int_2^\infty \frac{r(t)}{t(\log t)^2} dt$$

$$- \int_x^\infty \frac{r(t)}{t(\log t)^2} dt + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Et comme

$$\int_x^\infty \frac{r(t)dt}{t(\log t)^2} = O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Alors

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + M + O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

tel que

$$M = 1 - \log\log 2 + \int_2^{\infty} \frac{r(t)}{t(\log t)^2} dt = 0,26149... \qquad \square$$

Preuve du théorème 2.3.
On a

$$\sum_{n\leq x} \omega(n) = \sum_{n\leq x} \sum_{p|n} 1 = \sum_{p\leq x} \sum_{\substack{n\leq x \\ p|n}} 1.$$

On sait que

$$\sum_{n\leq x} 1 = [x] \, .$$

Alors

$$\sum_{\substack{n\leq x \\ p|n}} 1 = \sum_{\substack{mp\leq x \\ p|n}} 1 = \sum_{\substack{m\leq \frac{x}{p} \\ p|n}} 1 = \left[\frac{x}{p}\right].$$

Donc

$$\sum_{p\leq x} \sum_{\substack{n\leq x \\ p|n}} 1 = \sum_{p\leq x} \left[\frac{x}{p}\right],$$

et puisque pour tout $x \geq 1$, on sait $x = [x] + \{x\}$, donc $[x] = x + O(1)$ car $0 \leq \{x\} \leq 1$. D'où

$$\begin{aligned}
\sum_{p\leq x} \left[\frac{x}{p}\right] &= \sum_{p\leq x} \left(\frac{x}{p} + O(1)\right) \\
&= \sum_{p\leq x} \frac{x}{p} + O\left(\sum_{p\leq x} 1\right) \\
&= x \sum_{p\leq x} \frac{1}{p} + O(\pi(x)).
\end{aligned}$$

D'après le théorème des nombres premier, on a

$$\pi(x) \backsim \frac{x}{\log x},$$

et par le lemme (2.1), on obtient

$$\sum_{p\leq x} \left[\frac{x}{p}\right] = x \left(\log\log x + M + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right) + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

$$= x \log\log x + Mx + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Par conséquence

$$\sum_{n\leq x} \omega(n) = x \log\log x + Mx + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

$\square$

Théorème 2.3. *Soit f une fonction additive et $x \geq 2$ un réel. Alors*

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) = x\sum_{p\leqslant x} \frac{f(p)}{p} + x\sum_{p^\alpha\leqslant x}\sum_{x=2}^{\infty} \frac{f\left(p^\alpha\right) - f\left(p^{\alpha-1}\right)}{p^\alpha}$$

$$+O\left(\sum_{p^\alpha\leqslant x}\sum_{\alpha=1}^{\infty} \left|f\left(p^\alpha\right) - f\left(p^{\alpha-1}\right)\right|\right).$$

Preuve.

On pose $g = f \star \mu$. Alors par la formule d'inversion de Mobius, on a $f = g \star 1$, donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x} f(n) &= \sum_{n\leqslant x} (g \star \mathbf{1})(n) = \sum_{n\leqslant x}\left(\sum_{d|n} g(d) 1\left(\frac{n}{d}\right)\right) \\
&= \sum_{d\leqslant x} g(d) \left(\sum_{\substack{n\leq x \\ d|n}} 1\right) = \sum_{d\leqslant x} g(d) \sum_{qd\leq x} 1 \\
&= \sum_{d\leqslant x} g(d) \sum_{q\leq \frac{x}{d}} 1 = \sum_{d\leqslant x} g(d) \left[\frac{x}{d}\right] \\
&= \sum_{p\leqslant x} g(p) \left[\frac{x}{p}\right] + \sum_{\substack{p^\alpha\leqslant x \\ \alpha\geqslant 2}} g\left(p^\alpha\right) \left[\frac{x}{p^\alpha}\right] \\
&= \sum_{p\leqslant x} g(p) \left(\frac{x}{p} - \left\{\frac{x}{p}\right\}\right) + \sum_{\substack{p^\alpha\leqslant x \\ \alpha\geqslant 2}} g(p^\alpha) \left(\frac{x}{p^\alpha} - \left\{\frac{x}{p^\alpha}\right\}\right) \\
&= x\sum_{p\leqslant x} \frac{g(p)}{p} - \sum_{p\leqslant x} g(p) \left\{\frac{x}{p}\right\} + x\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant x \\ \alpha\geqslant 2}} \frac{g(p^\alpha)}{p^\alpha} - \sum_{\substack{p^\alpha\leqslant x \\ \alpha\geqslant 2}} g(p^\alpha) \left\{\frac{x}{p^\alpha}\right\}. \\
&= x\sum_{p\leqslant x} \frac{g(p)}{p} + O\left(\sum_{p\leqslant x} |g(p)|\right) + x\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant x \\ \alpha\geqslant 2}} \frac{g(p^\alpha)}{p^\alpha} + O\left(\sum_{p\leqslant x} |\frac{g(p^\alpha)}{p^\alpha}|\right).
\end{aligned}$$

Si $g = f \star \mu$, alors $g(n) = (f \star \mu)(n)$, pour $n = p$ on a

$$g(p) = (f \star \mu)(p) = \sum_{d|p} f\left(\frac{p}{d}\right)\mu(p)$$

$$= f(p)\mu(1) + f(1)\mu(p) = f(p).$$

Donc

$g(p) = f(p).$

De même, si $n = p^\alpha$ on a

$$g(p^\alpha) = (f \star \mu)(p^\alpha) = \sum_{d|p^\alpha} f\left(\frac{p^\alpha}{d}\right)\mu(p^\alpha).$$

Alors

$g(p^\alpha) = f(p^\alpha) - f(p^\alpha - 1).$

Donc

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = x\sum_{p \leqslant x}\frac{f(p)}{p} + O\left(\sum_{p \leqslant x}|f(p)|\right) + x\sum_{\substack{p^\alpha \leqslant x \\ \alpha \geqslant 2}}\frac{f(p^\alpha) - f(p^\alpha - 1)}{p^\alpha}$$

$$+O\left(\sum_{p \leqslant x}|\frac{f(p^\alpha) - f(p^\alpha - 1)}{p^\alpha}|\right)$$

Par conséquent

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = x\sum_{p \leqslant x}\frac{f(p)}{p} + x\sum_{p^\alpha \leqslant x}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{f\left(p^\alpha\right) - f\left(p^{\alpha-1}\right)}{p^\alpha}$$

$$+O\left(\sum_{p^\alpha \leqslant x}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left|f\left(p^\alpha\right) - f\left(p^{\alpha-1}\right)\right|\right).$$

$\square$

Remarque 2.1. *Si on pose $f(n) = \omega(n)$, alors pour tout premier p et tout entier $\alpha \geq 2$, on a*

$$\omega(p) = 1 \quad \text{et} \quad \omega(p^\alpha) - \omega(p^{\alpha-1}) = 0.$$

l'application direct du théorème précédent fourni

$$\sum_{n\leq x}\omega(n)=x\sum_{p\leq x}\frac{1}{p},$$

et par le lemme (2.1), *on trouve*

$$\sum_{n\leq x}\omega(n)=x\log\log x+Mx+O\left(\frac{x}{\log x}\right). \tag{2.3}$$

Ce dernier résultat (2.3) été amélioré par M. Hassani dans [11], comme suit :

Théorème 2.4. *Pour* $x\geq 2$

$$\sum_{n\leq x}\omega(n)=x\log\log x+Mx-(1-\gamma)\frac{x}{\log x}+O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\omega(n)&=\sum_{n\leq x}\sum_{p|n}1=\sum_{p\leq x}\sum_{\substack{n\leq x\\ p|n}}1.\\ &=\sum_{p\leq x}\sum_{pm\leq x}1=\sum_{p\leq x}\sum_{m\leq\frac{x}{p}}1\\ &=\sum_{p\leq x}\left[\frac{x}{p}\right]=\sum_{p\leq x}\left(\frac{x}{p}-\left\{\frac{x}{p}\right\}\right).\end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{n\leq x}\omega(n)=x\sum_{n\leq x}\frac{1}{p}-\sum_{p\leq x}\left\{\frac{x}{p}\right\}$$

On pose

$$A(x)=\sum_{n\leq x}\frac{1}{p}\quad\text{ et }\quad B(x)=\sum_{p\leq x}\left\{\frac{x}{p}\right\}.$$

Alors

$$\sum_{n\leq x}\omega(n)=xA(x)-B(x).$$

Dans [4] on a :

$$\sum_{p^\alpha\leq x}\left\{\frac{x}{p^\alpha}\right\}=(1-\gamma)\frac{x}{\log x}+O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

D'autre part :

$$\sum_{p^\alpha \le x} \left\{ \frac{x}{p^\alpha} \right\} - B(x) = \sum_{\substack{p^\alpha \le x \\ \alpha \ge 2}} \left\{ \frac{x}{p^\alpha} \right\}$$
$$<< \sum_{\substack{p^\alpha \le x \\ \alpha \ge 2}} 1$$
$$<< \sqrt{x} \log^2 x.$$

Alors

$$B(x) = \sum_{p^\alpha \le x} \left\{ \frac{x}{p^\alpha} \right\} + O(\sqrt{x} \log^2 x)$$
$$= (1-\gamma)\frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) + O(\sqrt{x}\log^2 x)$$

et comme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\log^2 x}{x/\log^2 x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log^4 x}{\sqrt{x}} = 0.$$

Donc

$$B(x) = (1-\gamma)\frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right),$$

et on a (voir [8])

$$\sum_{p\le x} \frac{1}{p} = \log\log x + M + O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right).$$

Alors on obtient

$$\sum_{n\le x} \omega(n) = x\log\log x + Mx + (1-\gamma)\frac{x}{\log x} + O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right)$$
$$+(1-\gamma)\frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

Donc

$$\sum_{n\le x} \omega(n) = x\log\log x + Mx + (1-\gamma)\frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

□

Théorème 2.5. *Pour* $x \ge 2$

$$\sum_{n\le x} \omega(n)^2 = x(\log\log x)^2 + O(x\log\log x)$$

Preuve.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}
\omega(n)^2 &= \left(\sum_{p\mid n} 1\right)^2 = \left(\sum_{p_1\mid n} 1\right)\left(\sum_{p_2\mid n} 1\right)\\
&= \sum_{p_1\mid n} 1\left(\sum_{\substack{p_2\mid n\\ p_1\neq p_2}} 1 + \sum_{\substack{p_2\mid n\\ p_1=p_2}} 1\right)\\
&= \sum_{\substack{p_1p_2\mid n\\ p_1\neq p_2}} 1 + \sum_{\substack{p_1p_2\mid n\\ p_1=p_2}} 1\\
&= \sum_{\substack{p_1p_2\mid n\\ p_1\neq p_2}} 1 + \sum_{p^2\mid n} 1.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{p_1p_2\mid n\\ p_1\neq p_2}} 1 + \sum_{p^2\mid n} 1 &= \sum_{\substack{p_1p_2\mid n\\ p_1\neq p_2}} 1 + \sum_{p\mid n} 1\\
&= \sum_{\substack{p_1p_2\mid n\\ p_1\neq p_2}} 1 + \omega(n).
\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{n\leq x}\omega(n)^2 = \sum_{n\leq x}\sum_{\substack{p_1p_2\mid n\\ p_1\neq p_2}} 1 + \sum_{n\leq x}\omega(n).$$

En utilisant le théorème (2.2), donc on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x}\omega(n)^2 &= \sum_{\substack{p_1p_2\leq x\\ p_1\neq p_2}}\sum_{\substack{n\leq x\\ p_1p_2\mid n}} 1 + x\log\log x + O(x)\\
&= \sum_{\substack{p_1p_2\leq x\\ p_1\neq p_2}}\left[\frac{x}{p_1p_2}\right] + O(x\log\log x)\\
&= \sum_{\substack{p_1p_2\leq x\\ p_1\neq p_2}}\left(\frac{x}{p_1p_2} + O(1)\right) + O(x\log\log x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{p_1p_2\le x\\ p_1\neq p_2}} \left(\frac{x}{p_1p_2} + O(1)\right) + O(x\log\log x)\\
&= \sum_{\substack{p_1p_2\le x\\ p_1\neq p_2}} \frac{x}{p_1p_2} + O\left(\sum_{\substack{p_1p_2\le x\\ p_1\neq p_2}} 1\right) + O(x\log\log x)\\
&= x\sum_{\substack{p_1p_2\le x\\ p_1\neq p_2}} \frac{1}{p_1p_2} + O(x\log\log x).
\end{aligned}
$$

Car

$$
\sum_{\substack{p_1p_2\le x\\ p_1\neq p_2}} 1 \le \left(\sum_{p_1\le x} 1\right)\left(\sum_{p_2\le n} 1\right) = \left(\sum_{p\le x} 1\right)^2 = (\pi(x))^2.
$$

Et d'après le Théorème fondamental de l'arithmétique et (2.2) on obtient

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{p_1p_2\le x\\ p_1\neq p_2}} \frac{1}{p_1p_2} &\le \left(\sum_{p\le x}\frac{1}{p}\right)^2\\
&\le (\log\log x + O(1))^2\\
&\le (\log\log x)^2 + O(\log\log x).
\end{aligned}
$$

Et on a

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{p_1p_2\le x\\ p_1\neq p_2}} \frac{1}{p_1p_2} &= \sum_{p_1p_2\le x}\frac{1}{p_1p_2} - \sum_{\substack{p_1p_2\le x\\ p_1p_2}}\frac{1}{p_1p_2}\\
&= \left(\sum_{p_1\le x}\frac{1}{p_1}\right)\left(\sum_{p_2\le x}\frac{1}{p_2}\right) - \sum_{p^2\le x}\frac{1}{p^2}\\
&= \left(\sum_{p\le x}\frac{1}{p}\right)^2 - \sum_{p^2\le x}\frac{1}{p^2}\\
&\ge \left(\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{1}{p}\right)^2 - \sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{1}{p^2}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &\geq (\log\log\sqrt{x} + O(1))^2 + O(1) \\ &\geq (\log\log x)^2 + O(\log\log x), \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{n\leq x}\omega(n)^2 = x(\log\log x)^2 + O(x\log\log x).$$

□

Exemple 2.1.

$$f(n) = \begin{cases} 0 & si\, n \quad pair \\ 2 & si\, n \quad impair \end{cases}$$

L'ordre moyenne de $f(n)$ est 1.

Exemple 2.2.

$$f(n) = \begin{cases} 2^m & si\, n = 2^m \\ 0 & si\, n \neq 2^m \end{cases}$$

L'ordre moyenne de $f(n)$n'existe pas.

2.3 L'ordre normal de la fonction $\omega(n)$

Définition 2.4. *On dit que $g(n)$ est l'ordre normale de $f(n)$ si pour presque toutes les valeurs de n on a*

$$(1-\varepsilon)g(n) \leq f(n) \leq (1+\varepsilon)g(n).$$

pour chaque $\varepsilon > 0$.

Théorème 2.6. ***(Hardy–Ramanujan)*** *Pour tout $\delta > 0$, le nombre des entiers $n \leq x$ tel que*

$$|\omega(n) - \log\log n| \geq (\log\log x)^{\frac{1}{2}+\delta}$$

est $o(x)$.

Pour la démonstration de ce théorème on a besoin à ce lemme :

Lemme 2.2. *Soit f une fonction à valeur réelle définie sur S, S est un ensemble fini des entiers et soit μ, t des nombres réels tel que $t > 0$, pour $n \in S$ on a*

$$\sum_{\substack{n\in S\\ |f(n)-\mu|\geq t}} 1 \leq \frac{1}{t^2}\sum_{n\in S}(f(n)-\mu)^2 \tag{2.4}$$

Démonstration du lemme 2.2.
Si $|f(n)-\mu| \geq t$, alors

$$1 \leq \frac{(f(n)-\mu)^2}{t^2},$$

et

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}\{n \in S : |f(n)-\mu| \geq t\} &= \sum_{\substack{n\in S\\ |f(n)-\mu|\geq t}} 1 \\
&\leq \sum_{\substack{n\in S\\ |f(n)-\mu|\geq t}} \frac{(f(n)-\mu)^2}{t^2} \\
&\leq \frac{1}{t^2}\sum_{n\in S}(f(n)-\mu)^2.
\end{aligned}$$

□

Preuve du théorème 2.6.
On appliquons direct le lemme (2.2) avec le choix

$$f(n) = \omega(n) \quad et \quad \mu = \log\log x,$$

pour $t > 0$, on obtient

$$|\ \omega(n) - \log\log x\ | \geq t$$

Alors

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ |\omega(n)-\log\log x|\geq t}} 1 \leq \frac{1}{t^2}\sum_{n\leq x}(\omega(n)-\log\log x)^2, \tag{2.5}$$

et on a

$$\sum_{n\leq x}(\omega(n)-\log\log x)^2 = \sum_{n\leq x}\omega(n)^2 - 2\log\log x\sum_{n\leq x}\omega(n) + \sum_{n\leq x}(\log\log x)^2.$$

D'après le théorème (2.2) et (2.5) on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}(\omega(n)-\log\log x)^2 &= x(\log\log x)^2+O(x\log\log x)-2\log\log x(x\log\log x\\ &+ O(x))+x(\log\log x)^2+O\left((\log\log x)^2\right)\\ &= O(x\log\log x).\end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{n\leq x}(\omega(n)-\log\log x)^2=O(x\log\log x) \tag{2.6}$$

Soit $\delta>0$ et $t=(\log\log x)^{\frac{1}{2}+\delta}-1$. On a

$$\begin{aligned}t^2 &> (\log\log x)^{1+2\delta}-2(\log\log x)^{\frac{1}{2}+\delta}\\ &> (\log\log x)^{1+\delta}\left((\log\log x)^{\delta}-2(\log\log x)^{-1/2}\right)\\ &\geq (\log\log x)^{1+\delta}.\end{aligned}$$

Donc

$$t^2\geq (\log\log x)^{1+\delta} \tag{2.7}$$

Donc, si

$$T=\left\{n\in S:|\omega(n)-\log\log x|\geq(\log\log x)^{\frac{1}{2}+\delta}-1\right\},$$

d'après (2.5), (2.6) et (2.7)

$$\begin{aligned}|T| &< \frac{x\log\log x}{\left((\log\log x)^{\frac{1}{2}+\delta}-1\right)^2},\\ &< \frac{x\log\log x}{(\log\log x)^{1+\delta}}\\ &< \frac{x}{(\log\log x)^{\delta}}= o(x).\end{aligned}$$

Soit $x > e^e$, si
$$x^{1/e} \leq n \leq x,$$
alors
$$0 < \log\log x - 1 \leq \log\log n \leq \log\log x.$$
Et si
$$|\omega(n) - \log\log n| \geq (\log\log x)^{\frac{1}{2}+\delta},$$
alors
$$\begin{aligned}|\omega(n) - \log\log x| &\geq |\omega(n) - \log\log n| - |\log\log x - \log\log n|\\ &\geq \quad (\log\log x)^{\frac{1}{2}+\delta} - 1\\ &\geq t\end{aligned}$$
Donc, si on a
$$U = \left\{ n \in S : |\omega(n) - \log\log n| \geq (\log\log x)^{\frac{1}{2}+\delta} \right\},$$
et $U \subseteq T$, alors
$$\begin{aligned}|U| &\leq x^{1/e} + |T|\\ &\leq o(x).\end{aligned}$$

□

Corolaire : L'ordre normale de la fonction $\omega(n)$ est $\log\log n$.

2.4 L'ordre moyenne de la fonction $1/\omega(n)$

Pour tout entier $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$, $n > 1$, on définit la fonction arithmétique $f(n)$ par
$$f(1) = 0 \quad et \quad f(n) = \sum_{i=1}^{r} g(a_i)$$
la fonction $f(n)$ est additive. Cette dernière fonction est une généralisations des fonctions $\omega(n)$ et $\Omega(n)$, car
$$\omega(n) = \sum_{p|n} 1 = \sum_{i=1}^{r} g(a_i) \qquad ; g \equiv 1$$
$$\Omega(n) = \sum_{p^{a_i}|n} a_i = \sum_{i=1}^{r} g(a_i) \qquad ; g \equiv n$$

Dans le cas : $g(n) = O\left(2^{\frac{n}{2}}\right)$, les auteurs dans [3] et [5] prouvent que

$$\sum_{n \leq x} f(n) = g(1)x \log\log x + Mx + O\left(\frac{x}{\log x}\right), \tag{2.8}$$

tel que M est constante.
Soit $h(n)$ une fonction arithmétique additive quelconque, alors L'inégalité de Turán-Kubilius [8] donne

$$\sum_{m \leq n} |h(m) - A_n|^2 \leq A_n B_n, \tag{2.9}$$

tel que

$$A_n = \sum_{p^a \leq n} \frac{h(p^a)}{p^a} \qquad et \qquad B_n = \sum_{p^a \leq n} \frac{|h(p^a)|^2}{p^a}.$$

Dans tous ce qui suit, on pose

$$f(n) = \sum_{p^{a_i} || n} g(a_i)$$

$$f(n) = g(a_1) + g(a_2) + ... + g(a_r) \quad pour\ tout \quad n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}.$$

On a le résultat suivant.

Théorème 2.7. *Soit f une fonction additive telle que pour $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ....p_r^{a_r}$, et $x \geq 2$ on pose*
$g(a_i) = f(p_i^{a_i})$, pour tout $i = 1, 2, ..., r$.
Si $g(n) = O\left(b^{\frac{n}{2}}\right)$ avec $0 < b < 2$, et $g(n) \geq t > 0$, alors il existe deux constants c_1 ,c_2 tel que

$$\frac{c_1 x}{\log\log x} \leq \sum_{n \leq x} \frac{1}{f(n)} \leq \frac{c_2 x}{\log\log x}$$

La démonstration de ce théorème repose le lemme suivant :

Lemme 2.3. *Si $g(n) = O\left(b^{\frac{n}{2}}\right)$, $0 < b < 2$, alors on a*

$$\sum_{n \leq x} [f(n) - g(1) \log\log x]^2 \leq cx \log\log x. \tag{2.10}$$

Démonstration du lemme 2.3.

Si $g(n) = O\left(b^{\frac{n}{2}}\right)$, on a

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{p^a \leq n} \frac{f^2\left(p^a\right)}{p^a} = \sum_{p^a \leq n} \frac{g^2(a)}{p^a} \\ &= g^2(1) \sum_{p \leq n} \frac{1}{p} + \sum_{\substack{p^a \leq n \\ a \geq 2}} \frac{g^2(a)}{p^a} \end{aligned}$$

D'après (2.2), on a

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} = \log\log x,$$

et on a

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p^a \leq n \\ a \geq 2}} \frac{g^2(a)}{p^a} &= O\left(\sum_{\substack{p^a \leq n \\ a \geq 2}} \left(\frac{b}{p}\right)^a\right) = O\left(\sum_p \sum_{a=2}^{\infty} \left(\frac{b}{p}\right)^a\right) \\ &= O\left(\sum_p \frac{1}{p(p-b)}\right). \end{aligned}$$

Et comme

$$\sum_p \frac{1}{p(p-b)} \sim \sum_p \frac{1}{p^2}.$$

Alors

$$\sum_{\substack{p^a \leq n \\ a \geq 2}} \frac{g^2(a)}{p^a} = O\left(\sum_p \frac{1}{p^2}\right) = O(1).$$

Donc

$$B_n = g^2(1)\log\log n + O(1).$$

De même, si $g(n) = O\left(b^{\frac{n}{2}}\right)$, on a

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{p^a \leq n} \frac{f\left(p^a\right)}{p^a} = \sum_{p^a \leq n} \frac{g(a)}{p^a} \\ &= g(1) \sum_{p \leq n} \frac{1}{p} + \sum_{\substack{p^a \leq n \\ a \geq 2}} \frac{g(a)}{p^a} \\ &= g(1)\log\log n + O(1). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Car

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{p^a\leq n\\ a\geq 2}} \frac{g(a)}{p^a} &= O\left(\sum_{\substack{p^a\leq n\\ a\geq 2}} \left(\frac{b^{\frac{1}{2}}}{p}\right)^a\right) = O\left[\sum_p \sum_{a=2}^{\infty} \left(\frac{b^{\frac{1}{2}}}{p}\right)^a\right] \\
&= O\left(\sum_p \frac{b^{\frac{1}{2}}}{p(p-b^{\frac{1}{2}})}\right) \\
&\leq \sum_p \frac{1}{p(p-b^{\frac{1}{2}})} \\
&\leq \sum_p \frac{1}{p^2} = O(1).
\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{\substack{p^a\leq n\\ a\geq 2}} \frac{g(a)}{p^a} = O(1).$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{m\leq n} [f(m) - g(1)\log\log n]^2 &= \sum_{m\leq n} [(f(m)-A_n) + (A_n - g(1)\log\log n)]^2 \\
&= \sum_{m\leq n} [(f(m)-A_n) + O(1)]^2 \\
&= \sum_{m\leq n} (f(m)-A_n)^2 + O\left(\sum_{m\leq n} (f(m)-A_n)\right) + O(1) \\
&= \sum_{m\leq n} (f(m)-A_n)^2 + O\left(\sum_{m\leq n} f(m)\right) - O\left(\sum_{m\leq n} A_n\right)
\end{aligned}$$

D’après (2.8) et (2.11) on a

$$\begin{aligned}
O\left(\sum_{m\leq n} A_n\right) &= O\left(\sum_{m\leq n} g(1)\log\log n + O(1)\right) \\
&= O\left(g(1)\log\log n \sum_{m\leq n} 1\right) \\
&= O\left(n\log\log n\right).
\end{aligned}$$

Et on a

$$O\left(\sum_{m\leq n} f(m)\right) = O\left(n\log\log n\right).$$

D'après (2.9), on a

$$\sum_{m\leq n} |f(m)-A_n)|^2 \leq \left(g(1)\log\log n + O(1)\right)\left(g^2(1)\log\log n + O(1)\right)$$

$$\leq O(\log\log n)^2.$$

Alors

$$\sum_{m\leq n}[f(m)-g(1)\log\log n]^2 = O(n\log\log n).$$

Donc

$$\sum_{m\leq n}[f(m)-g(1)\log\log n]^2 \leq cx\log\log x.$$

□

Preuve du théorème 2.7.
Si $g(n)\geq t>0$, alors

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{f(n)} = \sum_{\substack{n\leq x\\ 2f(n)<g(1)\log\log x}}\frac{1}{f(n)} + \sum_{\substack{n\leq x\\ 2f(n)>g(1)\log\log x}}\frac{1}{f(n)}.$$

On a

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ 2f(n)<g(1)\log\log x}}\frac{1}{f(n)} \leq \frac{1}{t}\sum_{\substack{n\leq x\\ 2f(n)<g(1)\log\log x}} 1.$$

Par (2.10), on a

$$c\,x\log\log x \geq \sum_{\substack{n\leq x\\ 2f(n)<g(1)\log\log x}}[f(n)-g(1)\log\log x]^2.$$

Remarquons que si $2x\leq y$ i.e. $\left(x-\frac{y}{2}\right)<0$, alors $(x-y)^2\geq \frac{1}{4}y^2$.
En effet :

$$(x-y)^2-\frac{1}{4}y^2 = (x-y-\frac{1}{2}y)(x-y+\frac{1}{2}y)$$

$$= (x-\frac{1}{2}y-y)(x-\frac{y}{2} > 0.$$

Alors

$$\sum_{\substack{1<n\leq x\\ 2f(n)<g(1)\log\log x}} [f(n)-g(1)\log\log x]^2 \geq \frac{1}{4}g(1)^2(\log\log x)^2 \sum_{\substack{n\leq x\\ 2f(n)<g(1)\log\log x}} 1.$$

Donc

$$\sum_{\substack{1<n\leq x\\ 2f(n)<g(1)\log\log x}} 1 \leq \frac{4cx}{g(1)^2\log\log x}.$$

Alors

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ 2f(n)<g(1)\log\log x}} \frac{1}{f(n)} \leq \frac{4cx}{tg(1)^2\log\log x}.$$

Et on a, si $2f(n)>g(1)\log\log x$, alors $\dfrac{1}{f(n)}<\dfrac{2}{g(1)\log\log x}$

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ 2f(n)>g(1)\log\log x}} \frac{1}{f(n)} \leq \frac{2}{g(1)\log\log x}\sum_{n\leq x} 1,$$

et comme

$$\sum_{n\leq x} 1 = [x] \leqslant x.$$

Alors

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ 2f(n)>g(1)\log\log x}} \leq \frac{2x}{g(1)\log\log x}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\frac{1}{f(n)} &\leq \frac{4cx}{tg(1)^2\log\log x}+\frac{2x}{g(1)\log\log x}\\ &\leq \left(\frac{4c}{t}+2g(1)\right)\frac{x}{g^2(1)\log\log x},\end{aligned}$$

d'autre part on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\frac{1}{f(n)} &\geq \sum_{\substack{n\leq x\\ f(n)<2g(1)\log\log x}}\frac{1}{f(n)}\\ &\geq \sum_{\substack{n\leq x\\ f(n)<2g(1)\log\log x}}\frac{1}{2g(1)\log\log x}\\ &\geq \frac{1}{2g(1)\log\log x}\sum_{\substack{n\leq x\\ f(n)<2g(1)\log\log x}} 1.\end{aligned}$$

Mais
$$\sum_{\substack{n\leq x\\ f(n)<2g(1)\log\log x}} 1 = \sum_{n\leq x} 1 - \sum_{\substack{n\leq x\\ f(n)\geq 2g(1)\log\log x}} 1 = x + o(x).$$
Donc
$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{f(n)} \geq \frac{x+o(x)}{2g(1)\log\log x}.$$
$$\geq \frac{x}{2g(1)\log\log x}.$$
Alors
$$\frac{x}{2g(1)\log\log x} \leq \sum_{n\leq x} \frac{1}{f(n)} \leq \frac{x}{2g(1)\log\log x}.$$

□

L'application de ce théorème fourni le résultat suivant :

Proposition 2.1. *Soit $n \geq 1$, et $x \geq 2$ on a*
$$\frac{c_1 x}{\log\log x} \leq \sum_{n\leq x} \frac{1}{\omega(n)} \leq \frac{c_2 x}{\log\log x}$$

Preuve. Pour tout entier $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r} > 1$, on a $\omega(n) = 1 + 1 + ... + 1 = r$.

Si on pose $g(n) = 1$, alors
$$\omega(n) = g(a_1) + g(a_2) + ... + g(a_r) = r$$
On a
$$g(a_i) = 1 \qquad pour \ \ tout \quad i = 1, 2, ..., r,$$
donc, si $g(n) = O(b^{\frac{n}{2}}), 0 < b < 2$, on a $g(n) = O(1) = O(1^{\frac{n}{2}})$, alors par le théorème président, il existe $c_1, c_2 > 0$ telle que
$$\frac{c_1 x}{\log\log x} \leq \sum_{n\leq x} \frac{1}{\omega(n)} \leq \frac{c_2 x}{\log\log x}$$

□

2.5 Quelques estimations effectives de la fonction $\omega(n)$

Dans [4], on les inégalités suivantes :

$$\omega(n) \leqslant 1,3841 \frac{\log n}{\log\log n}, \qquad \text{pour } n \geqslant 3. \tag{2.12}$$

$$\omega(n) \leqslant \frac{\log n}{\log\log n} + 1,45743 \frac{\log n}{(\log\log n)^2}, \qquad \text{pour } n \geqslant 3. \tag{2.13}$$

$$\omega(n) \leqslant \frac{\log n}{\log\log n - 1,1714}, \qquad \text{pour} \quad n \geqslant 26. \tag{2.14}$$

$$\omega(n) \leqslant \frac{\log n}{\log\log n} + \frac{\log n}{(\log\log n)^2} + 2,89726 \frac{\log_{42}}{(\log\log n)^3}, \qquad n \geqslant 3. \tag{2.15}$$

Tout ces formules sont les meilleurs possible puisque pour chacune d'elles il existe un entier n pour lequel il ya égalité.

Pour (2.12) on a l'égalité, si $n = A_9$.
Pour (2.13) on a l'égalité, si $n = A_{47}$.
Pour (2.14) on a l'égalité, si $n = A_{189}$.
Pour (2.15) on a l'égalité, si $n = A_{442}$.
Tel que A_k est le nombre défini par

$$A_k = p_1 p_2 \ldots p_k.$$

Chapitre 3

Quelques résultats liés avec la fonction $\omega(n)$

3.1 Nombres ω-intéressants

Définition 3.1. *On dit que n est ω-intéressants, l'on a*

$$(\forall m \in \mathbb{N}^*, m > n) \Rightarrow \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n}$$

Interprétation géométrique : Pour $m > n$, le point $(m, \omega(m))$ est situé sous la droite joignant l'origine à $(n, \omega(n))$.

Proposition 3.1. *Pour $k \geq 1$, le nombre $A_k = 2.3...p_k$ est ω-intéressant.*

Preuve. Si $\omega(m) \leq k$, on a

$$\frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(A_k)}{A_k} \qquad \textit{pour} \quad m > A_k.$$

Si $\omega(m) = k + h$, $h > 1$ i.e $\omega(m) > k$, on a alors $m \geq A_k 3^h$ et on a

$$\frac{\omega(m)}{m} \leq \frac{k+h}{A_k 3^h} = \frac{\omega(A_k)}{A_k}\left(\frac{1+\frac{h}{k}}{3^h}\right),$$

et on a

$$\frac{1+\frac{h}{k}}{3^h} < \frac{1+h}{3^h} < 1.$$

Donc
$$\frac{\omega(m)}{m} \leq \frac{\omega(A_k)}{A_k}.$$

$\square$

Proposition 3.2. *Soit n un entier ≥ 1 vérifiant*
$$A_k < n < A_{k+1}\left(1 - \frac{1}{k}\right) \quad et \quad \omega(n) = k$$
alors n est ω-intéressant.

Preuve. Soit m un entier tel que $m > n$, on a deux cas :

Si $m > A_{k+1}$, alors d'après proposition (3.1) on a
$$\frac{\omega(m)}{m} \leq \frac{\omega(A_{k+1})}{A_{k+1}} \leq \frac{(k+1)(1-\frac{1}{k})}{n} < \frac{\omega(n)}{n}.$$

Si $n < m < A_{k+1}$, alors
$$\frac{\omega(m)}{m} < \frac{k}{m} < \frac{k}{n} = \frac{\omega(n)}{n}.$$

$\square$

Proposition 3.3. *Pour infinité de valeurs de k, il existe un nombre ω-intéressant, plus grand que A_k et ayant $(k-1)$ facteurs premiers.*

Preuve. Soit $k \geq 2$ un entier vérifier
$$\frac{p_{k+1}}{p_k + 1} > 1 + \frac{1}{k-1}.$$

Alors l'entier $n = 2.3...p_{k-1}(p_k + 1)$ est ω-intéressant.

En effet : remarquons que $n < h = \dfrac{A_k p_{k+1}}{p_k}$.

Pour $k \geq 2$, on a $h = A_{k-1}p_{k+1}$, alors $\omega(h) = k$ et on a
$$A_k < h < A_{k+1}\left(1 - \frac{1}{k}\right) \qquad car \qquad \frac{1}{p_k} < 1 - \frac{1}{k}.$$

Par la proposition (3.2), h est ω-intéressant.

Et comme $n = 2.3...p_{k-1}(p_k+1)$ et $(p_k+1) < p_{k+1}$, donc

$$\omega(n) = k-1.$$

Si $n < m < h$, on a $\omega(m) \leq k-1$ et si $m \geq h$ et comme h est ω-intéressant.

Alors

$$\frac{\omega(m)}{m} \leq \frac{\omega(h)}{h} = \frac{k}{h} = \frac{k}{A_k \frac{p_{k+1}}{p_k}}.$$

Et comme $\dfrac{p_{k+1}}{p_k+1} > 1 + \dfrac{1}{k-1}$ (hypothèse), donc

$$\frac{p_k+1}{p_{k+1}} \quad alors \quad \frac{p_k}{p_{k+1}} < \frac{p_k+1}{p_{k+1}} < \frac{k-1}{k}.$$

D'où

$$\frac{\omega(m)}{m} \leq \frac{k}{A_k \frac{p_k+1}{p_k}}.$$

$\square$

3.2 La fonctions nombre des diviseurs unitaires d'un entier

Définition 3.2. *Soit un entier $n \geq 1$, un diviseur d de est dit unitaire si*

$$\left(d, \frac{n}{d}\right) = 1$$

Exemple 3.1. $n = 12$, *les diviseurs unitaires de n sont :* $1, 3, 4, 12$.

On note par d^* la fonction des diviseurs unitaires on a

$$d^*(n) = \sum_{\substack{d|n \\ \left(d, \frac{n}{d}\right)=1}} 1$$

remarquons que $d^*(n) \leq d(n)$.

Théorème 3.1. *Pour tout entier $n \geq 1$, on a*

$$d^*(n) = 2^{\omega(n)}$$

Preuve.
Soit $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}$.
les diviseurs unitaires de n sont seulement les éléments de l'ensemble :

$$\{1, p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}\}.$$

où bien le produit de combinaisons de ces éléments.
Alors

$$\begin{aligned} d^*(n) &= 1 + C_r^1 + C_r^2 + ... + C_r^r \\ &= \sum_{k=0}^{r} C_r^k = 2^r = 2^{\omega(n)}. \end{aligned}$$

□

Proposition 3.4. *La fonction $d^*(n)$ est multiplicative.*

Preuve. Soient n, m deux entiers tel que $(n, m) = 1$, donc

$$d^*(nm) = 2^{\omega(nm)}.$$

Comme $\omega(n)$ est additive, alors

$$\begin{aligned} d^*(nm) &= 2^{\omega(n)+\omega(m)} \\ &= 2^{\omega(n)} 2^{\omega(m)} \\ &= d^*(n) d^*(m) \end{aligned}$$

□

Théorème 3.2. *Soit $F(n) = d(n^2)$, pour tout entier $n \geq 1$, on a*

$$F(n) = \sum_{d|n} d^*(d) = \sum_{d|n} 2^{\omega(d)}$$

Preuve.
On sait que la fonction $d^*(n)$ est multiplicative, alors la fonction $F(n) = \sum_{d|n} d^*(d)$ est aussi multiplicative, pour tout entier $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}$ on a

$$F(n) = F(p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_r^{k_r})$$

$$= F(p_1^{k_1}) F(p_2^{k_2}) ... F(p_r^{k_r})$$
$$= \sum_{d|p_1^{k_1}} 2^{\omega(d)} \sum_{d|p_2^{k_2}} 2^{\omega(d)} ... \sum_{d|p_r^{k_r}} 2^{\omega(d)},$$

et comme tous diviseurs de $p_i^{k_i}$ sont :

$$1, p_i, p_i^2, p_i^3, p_i^4, ..., p_i^{k_i}.$$

Alors on a

$$F(n) = (1 + 2k_1)(1 + 2k_2)...(1 + 2k_r),$$

Car

$$\sum_{d|p_i^{k_i}} 2^{\omega(d)} = 2^{\omega(1)} + 2^{\omega(p_i)} + ... + 2^{\omega(p_i^{k_i})}$$

$$= 2^0 + 2^1 + ...2^1 = 1 + 2k_i.$$

Et comme $n^2 = p_1^{2k_1} p_2^{2k_2} ... p_r^{2k_r}$, alors

$$d(n^2) = (2k_1 + 1)(2k_2 + 1)...(2k_r + 1).$$

Par conséquent

$$d(n^2) = \sum_{d|n} d^*(d).$$

□

Proposition 3.5. $\lambda \star d^* = 1$ *i.e* $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $(\lambda \star d^*)(n) = 1(n)$

Preuve.
comme $\lambda(n)$ et $d^*(n)$ sont des fonctions multiplicatives, alors la fonction $F(n) = (\lambda \star d^*)(n)$

est multiplicative, donc nous montrons cette identité pour $n = p^k$. On a

$$\begin{aligned}
F(p^k) &= (\lambda \star d^*)(p^k) \\
&= \sum_{d|p^k} \lambda\left(\frac{p^k}{d}\right) d^*(p^k) \\
&= \sum_{d|p^k} \lambda\left(\frac{p^k}{d}\right) 2^{\omega(p^k)} \\
&= \lambda\left(\frac{p^k}{1}\right) 2^{\omega(1)} + \lambda\left(\frac{p^k}{p}\right) 2^{\omega(p)} + ... + \lambda\left(\frac{p^k}{p^k}\right) 2^{\omega(p^k)} \\
&= (-1)^k.1 + (-1)^{k-1}.2 + ... + (-1)^0.2 \\
&= (-1)^k + 2(1 + (-1)^1 + (-1)^2 + ... + (-1)^{k-1}).
\end{aligned}$$

Si k est pair, alors on a

$$F(p^k) = 1 + 0 = 1$$

Si k est impair , alors on a

$$F(p^k) = -1 + 2 = 1.$$

Par conséquent $F(p^k) = 1$ pour tout facteur premier p^k et alors si $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_r^{k_r}$ on a

$$F(n) = F(p_1^{k_1})F(p_2^{k_2})...F(p_r^{k_r})$$

$$= (1)(1)...............(1) = 1.$$

D'où

$$\forall n \geq 1, (\lambda \star d^*)(n) = 1.$$

Alors $\lambda \star d^* = 1$. □

Théorème 3.3. *Pour tout entier $n \geq 1$, on a*

$$\sum_{d|n} \mu(d)\lambda(d) = 2^{\omega(n)}.$$

Preuve. La fonction $\mu(n)\lambda(n)$ est multiplicative, alors la fonction

$$F(n) = \sum_{d|n} \mu(n)\lambda(n),$$

est aussi multiplicative pour cela , nous montrons que $F(p^k) = 2^{\omega(p^k)}$ pour tout facteur premier p^k.
On pose $n = p^\alpha$ on a

$$\sum_{d|n} \mu(d)\lambda(d) = \mu(1)\lambda(1) + \mu(p)\lambda(p) + ... + \mu(p^k)\lambda(p^k)$$

$$= (1)(1) + (-1)(-1) + (0)(-1^2) + ...(0)(-1)^k = 2,$$

et autre part on a $2^{\omega(p^k)} = 2^1 = 2$, alors

$$F(p^k) = 2^{\omega(p^k))}.$$

Alors pour $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_r^{k_r}$, on a

$$\begin{aligned} F(n) &= F(p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_r^{k_r}) \\ &= (2)(2)...(2) \\ &= 2^r = 2^{\omega(n)}. \end{aligned}$$

□

3.3 La fonction $k^{\omega(n)}$

Définition 3.3. *on dit que $f \in M$ si f est non négative et multiplicative telle que pour tout $x \geq 1$, on a*

$$\frac{1}{x} \sum_{p \leqslant x} f(p) \log p \leqslant a$$

$$\sum_{p \leqslant x} \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{f(p^\alpha) \log p^\alpha}{p^\alpha} \leqslant b$$

a, b sont indépendant de x

Théorème 3.4. *[10] Soit $f \in \mathcal{M}$, pour tout $x \geq 1$, on a*

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) \leqslant e^b (a + b + 1) \frac{x}{\log ex} \exp\left(\sum_{p \leqslant x} \frac{f(p)}{p} \right)$$

Proposition 3.6. *[10]*

$$\sum_{n \leqslant x} k^{\omega(n)} \leqslant e^b(a+b+1)\frac{x}{\log ex}\exp\left(\sum_{p \leqslant x}\frac{k^{\omega(n)}}{p}\right)$$

Lemme 3.1. *Soit f une fonction multiplicative satisfaite*

$$0 \leqslant f\left(p^\alpha\right) \leqslant \lambda_1\lambda_2^{\alpha-1}$$

pour tout facteur premier p^α et pour $\lambda_1 > 0$ et $0 \leqslant \lambda_2 < 2$ alors $f \in \mathcal{M}$ tel que

$$(a,b) = \left(\lambda_1 \log 4, \frac{\lambda_1\lambda_2\left(4-\lambda_2\right)}{\left(2-\lambda_2\right)^2}\right)$$

Démonstration du proposition c'est une application direct du lemme.

la fonction k^ω satisfaite les conditions.

$$k^{\omega(p^\alpha)} = k \qquad telque \quad \lambda_1 = k \quad et \quad \lambda_2 = 1$$

Donc

$$a = k\log 4 \qquad et \qquad b = 3k\log 4$$

Bibliographie

[1] **O. Bordellès**, Arithmetic Tales, Spring Verlag london 2012.

[2] **R. L. Duncan**, Some application of the turankubilius inequality, 30(1971).

[3] **R. L. Duncan**, A general class of arithmetical functions, Duke Math. J. $33(1966)$, $507 - 510.MR34\sharp4219$.

[4] **Guy Rosin (Limoges)**, Estimation de la fonction Tchebychef θ sur K-ième nombre premier et grandes valeurs de la fonction $\omega(n)$ nombre de diviseurs premiers de n, XIII (1983).

[5] **J. Kubilius**, Probabilistic methods in the theory of numbers, Gos. Izdat. Polit. Nauín. Lit. Litovsk. SSR, Vilna, 1962 ; English transi., Transi. Math. Monographs, vol. 2, Amer. Math. Soc, Providence, R. L, 1964. MR 26 $\sharp$ 3691 ; MR 28 $\sharp$ 3956.

[6] **J.Lee**, The second central moment of additive function, Proc. Amer. Math. Soc., 114(1992), 887-895.

[7] **B. Melvyn Nathanson**, Elementary Methods in Number Theory, Springer-Verlag New York Heidelberg SPIN 10742484.

[8] **J. B. Rosser and L. Schoenfeld**, Approximate formulas for some functions of prime numbrers, Illinois J.Math.,6(1962), 64-94.

[9] **S. L. Segal**, On prime-independent additive functions, Arch. Math.17(1966),329 $-$ $332.M33\sharp4038$.

[10] **G. H. Hardy and E. M. Wright**, An introduction to the theory of numbers, Oxford at the clarendon press.

[11] **M. Hassani**, A Remark on the number of distinct prime divisors of integers, Tamkang journal of mathematics., 48(2017), 13-15.