République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

Université Djilali Bounâama Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER** en Mathématiques

Spécialité:

Analyse mathématiques et application

Réalisé par:

TAHIR Hayat

Thème:

Sur le Calcul Fractionnaire et Les Inégalités Intégrales

Soutenu Publiquement le :

Devant le jury composé de :

Mr. A. krelifa	président
Mr. M. bezziou	Encadreur
Mr. M. houas	Examinateur 1
Mr. A. yache	Examinateur 2

ANNÉE UNIVERSITAIRE: 2018-2019

Dédicace

Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour, le respect, la reconnaissance, c'est tous simplement que : Je dédie cette mémoire de Master :

A Ma chère Mère : *Yamina*

A Mon cher Père : *Abdellakader* .

A mes chers frères .

A ma chère sœur : *Fatma*

A mes très amis surtout : *Imane, Sead, Horiya*.

A mon mari : *Rachid*

T. Hayat

Remerciement

En premier lieu, je remercie Allah le tout puissant qui m'a donné la force, la volonté et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Je remercie monsieur Mohamed Bezziou, mon encadreur de mémoire de fin d'étude, pour ses précieux conseils et son orientation ficelée tout au long de notre recherche.

Je remercie sincèrement monsieur A. KRELIFA de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance de mon mémoire. Je vous remercie aussi monsieur M. HOUAS et monsieur A. YACHE pour avoir acceptés de lire et examiner mon travail.

mes remerciements s'étendent également à tous mes enseignants durant les années des études.

Je remercie mes familles et mes amis qui par leurs prières et leur encouragements, on a pu surmonter tous les obstacles.

Je profite l'occasion ainsi à adresser mes remerciements à mes collègues de lissance.

Je remercie toute personne qui a participé et contribué de prés ou de loin à l'exécution de ce modeste travail.

Merci

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude des inégalités fractionnaires avec généralisations de Chebyshev et Grüss, en utilisant les différents méthodes avec les fonctions synchrones à l'aide de l'intégrale fractionnaire (k,h)–Riemann-Liouville où h est une fonction positive, strictement croissante sur $(a,b]$ et $h \in C^1((a,b))$.

Mots clés : Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, intégrale fractionnaire (k,h) Riemann-Liouville, inégalités fractionnaires de Chebyshev, inégalités fractionnaires de Grüss.

Abstract

In this thesis we are intested in the study of fractional inequalities with Chebyshev and Grüss generalization, using different methods with synchronous functions using the fractional integral (k,h) Riemann-Liouville, where h is a positive function, increasing on $(a,b]$ and $h \in C^1((a,b))$.

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بتعميم المتراجحات الكسرية الخاصة بكل من Chebyshev و Grüss اعتمادا على دوال من نوع synchrones والتكامل الكسري (k,h)–Riemann-Liouville حيث h هي دالة موجبة ، مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]a,b]$ذات مشتقة مستمرة.

Table des matières

Introduction

Le concept de fonctions synchrones défini par

$$[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)] \geq 0,$$

où f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, a une place importante dans le cas des inégalités fractionnaires et les mathématiques modernes.

Aussi le fontionnel défini au dessous est bien connue dans la littérature comme le fontionnel de Chebyshev

$$T(f,g) := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx$$

Ensuite beaucoup de mathématiciens ont consacré leurs efforts à généraliser cette amélioration en considérant la version pondérée

$$T(f,g;p) := \int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx - \int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx$$

où p est une fonction positif intégrable sur $[a, b]$ (fonction de poids) et en fin, ils ont fait une extension à deux fonctions positifs intégrables p et q sur $[a, b]$ définie par

$$\begin{aligned} T(f,g;p;q) \quad : \quad &= \int_a^b p(x)dx \int_a^b q(x)f(x)g(x)dx + \int_a^b q(x)dx \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx \\ &- \int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b q(x)g(x)dx - \int_a^b q(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx \end{aligned}$$

Le présent mémoire a pour objectif d'étudier quelques nouvelles extensions des inégalités fractionnaires à l'aide de l'opérateur intégrale ${}_kJ^{\alpha}_{a,h}$ où h est une fonction positive, strictement croissante sur $(a, b]$ et $h \in C^1((a, b))$. Pour cette raison nous subdivisons le travail

en 3 principaux chapitres à savoir :

Le premier chapitre a pour apercevoir quelques notions et propriétés de bases.

Le deuxième chapitre a pour but d'établir un raffinement des inégalités de Chebyshev via de l'intégrale fractionnaire ${}_kJ^{\alpha}_{a,h}$.

Le chapitre troisième a pour but d'étudier des nouveaux extensions et principaux résultats pour certainnes inégalités de type de Grüss impliquant l'opérateur ${}_kJ^{\alpha}_{a,h}$.

Chapitre 1

Préliminaires sur le calcul fractionnaire

Ce chapitre constitue une partie préliminaire, dans laquelle on rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie du calcul fractionnaire. Dans la première section de ce chapitre, on présente les fonctions spéciales (fonction Gamma d'Euler et fonction Bêta d'Euler) et les fonctions k-spéciales (fonction k–Gamma et fonction k–Bêta) et leurs propriétés. Dans la deuxième section, on introduit les définitions des intégrales fractionnaires généralisées ainsi que ses propriétés.

1.1 Fonctions spéciales

1.1.1 Fonction Gamma

Permi les fonctions fondamentales qui interviennent dans la définition de l'intégrale fractionnaire, la fonction Gamma d' Euler qui généralise le factoriel d'un entier.

Définition 1.1.1

La fonction Gamma est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \qquad \alpha > 0.$$

Proposition 1.1.1

La fonction Gamma est bien définie pour tout $\alpha > 0$.

Preuve.
On va étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$.
Si $\alpha = 1$, on a

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1,$$

si $\alpha > 1$, on a

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \int_0^{A} x^{\alpha-1}e^{-x}dx + \int_A^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx,$$

la première integrale existe puisque la fonction $x^{\alpha-1}e^{-x}$ est continue sur $[0,A]$, il reste à montre que la deuxième intégral est bien définie.
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2x^{\alpha-1}e^{-x} = 0 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists B(\varepsilon) > 0,\ \ x > B(\varepsilon) \Rightarrow x^2x^{\alpha-1}e^{-x} < \varepsilon,$

pour $\ \varepsilon = 1,\ \exists B(1) > 0\ \ $ tq : $\forall x > B(1)$, on a $x^{\alpha-1}e^{-x} < \frac{1}{x^2}$,

comme $\int_A^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ existe, il en résulte que l'intégrale $\int_A^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ existe.
D'où $\Gamma(\alpha)$ est bien définie.

Si $0 < \alpha < 1$, on a

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \int_0^{A} x^{\alpha-1}e^{-x}dx + \int_A^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx,$$

l'intégrale $\int_A^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ existe (même preuve que $\alpha > 1$).

Pour $\int_0^A x^{\alpha-1}e^{-x}dx$, on a $x^{\alpha-1}e^{-x} \simeq x^{\alpha-1}$,

ce qui donne $\int_0^A x^{\alpha-1}e^{-x}dx \simeq \int_0^A x^{\alpha-1}dx = \frac{A^\alpha}{\alpha}$,

on en déduit que : $\int_0^A x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ existe.

Alors, $\Gamma(\alpha)$ est définie pour tout $\alpha > 0$. $\square$

Propriétiés 1.1.1

• La relation Récursive

Pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)\,.$$

Démonstration. On utilisant l'intégrale par partie

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+1)=&\int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx=\left[-x^{\alpha}e^{-x}\right]_0^{+\infty}+\alpha\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx\\ =&0+\alpha\Gamma(\alpha).\end{aligned}$$

□

• la fonction Gamma généralise le factoriel d'un entier car $\Gamma(n+1)=n!, \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

•$0!=\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} x^0e^{-x}dx=\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=1$.

•$1!=\Gamma(2)=\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx=[-xe^{-x}]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=1$.

1.1.2 Fonction Bêta

Définition 1.1.2

La fonction Bêta d'Euler est définie par la formule d'intégration suivante :

$$\beta(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt, \qquad p>0, q>0.$$

La forme trigonométrique de Bêta

On pose

$$t=\sin^2\theta \Longrightarrow dt=2\sin\theta\cos\theta d\theta,$$
$$si\ t=1\ alors\ \theta=\frac{\pi}{2},$$
$$si\ t=0\ alors\ \theta=0.$$

On a

$$\beta(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt,$$

alors

$$\begin{aligned}B(p,q) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2\theta\right)^{p-1}\left(\cos^2\theta\right)^{q-1}(2\sin\theta\cos\theta)d\theta\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2(p-1)}(\cos\theta)^{2(q-1)}(\sin\theta\cos\theta)d\theta\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}d\theta.\end{aligned}$$

Propriétiés 1.1.2

pour tout p,q, tels que, $p>0$, $q>0$, on a

1. La commutativité

$$\beta(p,q)=\beta(q,p).$$

2. Liens entre la fonction Gamma et la fonction Bêta

$$\beta(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Preuve.

On a

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx\int_0^{+\infty} y^{q-1}e^{-y}dy=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}dxdy,$$

pour : $\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx,$ on pose $x=t^2$,

et pour : $\int_0^{+\infty} y^{q-1}e^{-y}dy,$ on pose $y=s^2$,

on obtient

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{2p-1}s^{2q-1}e^{-\left(s^2+t^2\right)}dsdt,$$

on pose $t=r\cos\theta, s=r\sin\theta$,

on trouve

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\Pi}{2}} r^{2p-1}(\cos\theta)^{2p-1}r^{2q-1}(\sin\theta)^{2q-1}e^{-r^2}rdrd\theta\\ &= \left(2\int_0^{+\infty}(r^2)^{p+q-1}re^{-r^2}dr\right)\left(2\int_0^{+\infty}(\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}d\theta\right)\\ &= 2\left(\int_0^{+\infty}(r^2)^{p+q-1}re^{-r^2}dr\right)B(p,q),\end{aligned}$$

on pose $r^2 = R$, on obtient

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \left(\int_0^{+\infty} R^{(p+q)-1} e^{-R} dR \right) B(p,q)$$
$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,q).$$

D'où le résultat. $\square$

Récemment, Diaz et Pariguan ont défini de nouvelles fonctions appelées fonctions k-Gamma et k-Bêta qui sont respectivement la généralisation des fonctions Gamma et Béta classiques.

Définition 1.1.3: [11]

La fonction k-Gamma est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma_k(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\frac{t^k}{k}} dt, \qquad x > 0, k > 0.$$

Propriétiés 1.1.3

Pour tout $x > 0$, $k > 0$, on a (voir [11])

1. $\Gamma(x) = \lim\limits_{k \to 1} \Gamma_k(x)$
2. $\Gamma_k(x) = k^{\frac{x}{k}-1} \Gamma\left(\frac{x}{k}\right)$
3. $\Gamma_k(x+k) = x\Gamma_k(x)$

Définition 1.1.4: [10]

La fonction k-Bêta est définie comme suite :

$$B_k(x,y) = \frac{1}{k} \int_0^1 t^{\frac{x}{k}-1} (1-t)^{\frac{y}{k}-1} dt, \qquad x > 0, y > 0, k > 0.$$

Propriétiés 1.1.4

Pour tout $x > 0$, $y > 0$, $k > 0$, on a (voir [10])

1. $B_k(x,y) = \frac{1}{k} B\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right)$
2. $B_k(x,y) = B_k(y,x)$

3. $B_k(x,y) = \frac{\Gamma_k(x)\Gamma_k(y)}{\Gamma_k(x+y)}$

1.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.2.1: [12]

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. On appelle intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de f d'ordre $\alpha > 0$ l'intégrale définie par :

$$J_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad \alpha > 0, x \in [a,b],$$

avec $J_a^0 f(x) = f(x),\ \alpha = 0.$

Exemple

Soit $f(x) = (x-a)^\beta$, avec $\beta > -1$

Calculer l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de f

On appliquant la définition on obtient :

$$\left(J_a^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\beta dt.$$

En utilisant le changement de variable suivante :

$$t = a + (x-a)y \Longrightarrow dt = (x-a)dy,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\left(J_a^\alpha f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a-(x-a)y)^{\alpha-1}(a+(x-a)y-a)^\beta (x-a)dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(x-a)(1-y)]^{\alpha-1}(x-a)^{\beta+1} y^\beta dy \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^\beta dy \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{(\beta+1)-1} dy.
\end{aligned}$$

D'après la propriété de la fonction Bêta on obtient :

$$\begin{aligned}\left(J_a^\alpha f\right)(x) &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\beta(\alpha,\beta+1)\\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\beta+\alpha}.\end{aligned}$$

Donc

$$J_a^\alpha(x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\beta+\alpha}.$$

Proposition 1.2.1

Soit $f\in C([a,b])$, on a pour tout $\alpha>0$, $\beta>0$

1. $J_a^\alpha\left[\left(J_a^\beta f\right)(x)\right] = J_a^\beta\left[\left(J_a^\alpha f\right)(x)\right] \qquad x\in[a,b]$
2. $J_a^\alpha\left[\left(J_a^\beta f\right)(x)\right] = J^{\alpha+\beta}f(x), \qquad x\in[a,b]$

Preuve.

La preuve découle directement de la définition

$$\begin{aligned}J_a^\alpha\left(J_a^\beta f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\left(J_a^\beta f\right)(t)dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-\tau)^{\beta-1}f(\tau)d\tau\right)dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x\int_a^t (x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1}f(\tau)d\tau dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(\tau)\left[\int_\tau^x (x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1}dt\right]d\tau,\end{aligned}$$

on pose $t=\tau+(x-\tau)y$, alors

$$\begin{aligned}\int_\tau^x (x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1}dt &= \int_0^1 \left(x-(\tau+(x-\tau)y)\right)^{\alpha-1}(\tau+(x-\tau)y-\tau)^{\beta-1}(x-\tau)dy\\ &= \int_0^1 [(x-\tau)(1-y)]^{\alpha-1}[(x-\tau)y]^{\beta-1}(x-\tau)dy\\ &= (x-\tau)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}y^{\beta-1}dy\\ &= (x-\tau)^{\alpha+\beta-1}B(\beta,\alpha),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} J_a^\alpha\left(J_a^\beta f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(\tau)(x-\tau)^{\alpha+\beta-1}B(\beta,\alpha)d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x f(\tau)(x-\tau)^{\alpha+\beta-1}d\tau \\ &= \left(I_a^{\alpha+\beta}f\right)(x). \end{aligned}$$

□

1.3 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville par rapport à une autre fonction

En 1993 [12], Samko, Kilbas et Marichev ont introduit l'intégrale fractionnaire par rapport à une autre fonction comme suit

Définition 1.3.1

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, h une fonction positive, strictement croissante sur $(a,b]$ et $h \in C^1((a,b))$, on appelle intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de f d'ordre $\alpha > 0$ par rapport à la fonction h

$$J_{a,h}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (h(x)-h(t))^{\alpha-1}h'(t)f(t)dt.$$

Remarque

Si on prend $h(x) = x$ dans la définition 1.3.1, on obtient la définition 1.2.1

1.4 Intégrale fractionnaire k–Riemann-Liouville

Plus tard, à l'aide des définitions des fonctions k-spéciales, Mubeen et Habibullah ont introduit l'intégrale fractionnaire k- Riemann-Liouville [8] comme suite

Définition 1.4.1: [3]

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, $k>0$, on appelle intégrale fractionnaire k-Riemann-Liouville de f d'ordre $\alpha>0$

$$ {}_kJ_a^{\alpha}f(x)=\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}f(t)dt, \quad \alpha>0, x>a, k>0. $$

Notez quand $k\to 1$, l'ntégrale k– Riemann-Liouville se réduit à l'intégrale fractionnaire classique de Riemann-Liouville.

1.5 Intégrale fractionnaire (k,h)–Riemann-Liouville

Définition 1.5.1: [3]

Soient $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, h une fonction positive, strictement croissante sur $(a,b]$ et $h\in C^1((a,b))$, on appelle intégrale fractionnaire (k,h)-Riemann-Liouville de f d'ordre $\alpha>0$

$$ {}_kJ_{a,h}^{\alpha}(f(x))=\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (h(x)-h(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(t)f(t)dt, \qquad k>0. $$

Théorème 1.5.1

Soit $f\in L^1([a,b])$ et $k>0$. Alors l'intégrale fractionnaire ${}_kJ_{a,h}^{\alpha}(f(x))$ existe pour tout $x\in[a,b]$ et ${}_kJ_{a,h}^{\alpha}(f(x))\in L^1([a,b])$, $\alpha>0$.

Preuve.
Soit $P:[a,b]^2\to\mathbb{R}$, la fonction définie par

$$ P(x,t)=\begin{cases} (h(x)-h(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(t), & a\le t<x\le b\\ 0 & a\le x<t\le b \end{cases} $$

On a $h\in C^1((a,b))$, alors nous pouvons écrire

$$ \int_a^b P(x,t)dt=\int_a^x P(x,t)dt=\int_a^x (h(x)-h(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(t)dt, $$

par le changement de variable suivent

$$ \tau=\frac{h(t)-h(a)}{h(x)-h(a)} \Longrightarrow d\tau=\frac{h'(t)}{h(x)-h(a)}dt, $$

$$si\ t = a\ alors\ \tau = 0,$$

$$si\ t = x\ alors\ \tau = 1,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\int_a^x (h(x)-h(t))^{\frac{\alpha}{k}-1} h'(t)dt &= \int_0^1 [h(x)-h(a)-\tau(h(x)-h(a)]^{\frac{\alpha}{k}-1} h'(t)\frac{h(x)-h(a)}{h'(t)} d\tau \\
&= \int_0^1 (h(x)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}-1}(1-\tau)^{\frac{\alpha}{k}-1}(h(x)-h(a))d\tau \\
&= (h(x)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}} \int_0^1 (1-\tau)^{\frac{\alpha}{k}-1} d\tau \\
&= (h(x)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}} \left[\frac{-(1-\tau)^{\frac{\alpha}{k}}}{\frac{\alpha}{k}}\right]_0^1 \\
&= \frac{k(h(x)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\alpha},
\end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b \left(\int_a^b (h(x)-h(t))^{\frac{\alpha}{k}-1} h'(t)f(t)dt\right)dx\right| \\
&= \left|\int_a^b f(x)\left(\int_a^x (h(x)-h(t))^{\frac{\alpha}{k}-1} h'(t)dt\right)dx\right| \\
&\leq \int_a^b |f(x)|\left(\left|\int_a^x (h(x)-h(t))^{\frac{\alpha}{k}-1} h'(t)dt\right|\right)dx \\
&\leq \int_a^b |f(x)|\left(\frac{k(h(x)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\alpha}\right)dx \\
&\leq \int_a^b |f(x)|\left(\frac{k(h(b)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\alpha}\right)dx \\
&\leq \frac{k(h(b)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\alpha} \parallel f \parallel_{L^1} < \infty.
\end{aligned}$$

D'aprés le théorème de Tonelli on a $P(x,t)f(x)$ est intégrable sur $[a,b]^2$ et par le théorème de Fubini on peut écrire $\int_a^b P(x,t)f(x) \in L^1([a,b])$.
d'où l'existance de ${}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(x)$,

$\square$

Maintenant, nous donnons les propriétés de semi-groupe et de commutativité de l'intégrale fractionnaire (k,h)–Riemann-Liouville

Théorème 1.5.2

Soient f une fonction continue sur $[a,b]$ et h une fonction positive, strictement croissante sur $(a,b]$ et $h \in C^1((a,b))$. Alors
${}_kJ^{\alpha}_{a,h}\left({}_kJ^{\beta}_{a,h}(f(x))\right) = {}_k J^{\alpha+\beta}_{a,h}(f(x)) = {}_k J^{\beta}_{a,h}\left({}_kJ^{\alpha}_{a,h}(f(x))\right)$, pour tout $\alpha, \beta > 0$, $0 < a < x \leq b$.

Preuve.
On a par définition

$$\begin{aligned}
{}_kJ^{\alpha}_{a,h}\left({}_kJ^{\beta}_{a,h}f(x)\right) &= \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (h(x)-h(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(t)_kJ^{\beta}_{a,h}(f(t))\,dt \\
&= \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (h(x)-h(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(t)\left[\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t (h(t)-h(r))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(r)f(r)dr\right]dt \\
&= \frac{1}{k^2\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta)}\int_a^x h'(r)f(r)\left[\int_r^x (h(x)-h(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}(h(t)-h(r))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(t)dt\right]dr.
\end{aligned}$$

Pour l'intégrale $\int_r^x (h(x)-h(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}(h(t)-h(r))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(t)dt$, en utilise le changement de variable suivant

$$\tau = \frac{h(t)-h(r)}{h(x)-h(r)},$$
$$si\ t = r\ alors\ \tau = 0,$$
$$si\ t = x\ alors\ \tau = 1,$$

on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_r^x (h(x)-h(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}(h(t)-h(r))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(t)dt \\
&= \int_0^1 (h(x)-h(r))^{\frac{\alpha}{k}-1}(1-\tau)^{\frac{\alpha}{k}-1}(h(x)-h(r))^{\frac{\beta}{k}-1}(\tau)^{\frac{\beta}{k}-1}h'(t)\frac{h(x)-h(r)}{h'(t)}d\tau \\
&= (h(x)-h(r))^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}\int_0^1 (1-\tau)^{\frac{\alpha}{k}-1}\tau^{\frac{\beta}{k}-1}d\tau \\
&= (h(x)-h(r))^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}kB_k(\alpha,\beta),
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
{}_kJ^{\alpha}_{a,h}\left({}_kJ^{\beta}_{a,h}(f(x))\right) &= \frac{1}{k^2\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta)}(h(x)-h(r))^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}kB_k(\alpha,\beta) \\
&= \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha+\beta)}\int_a^x (h(x)-h(r))^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}h'(r)f(r)dr \\
&= {}_kJ^{\alpha+\beta}_{a,h}(f(x)).
\end{aligned}$$

□

Chapitre 2

Inégalités fractionnaires de type Chebyshev

2.1 Introduction

Le but principal de ce chapitre est d'introduire les inégalités de type de Chebyshev pour l'opérateur ${}_kJ^{\alpha}_{a,h}$.

2.2 Les fonctions synchrones

Définition 2.2.1

Soient f et g deux fonctions définies sur $[a,b]$. Les fonctions f et g sont dites synchrones sur $[a,b]$ si

$$(f(\tau)-f(\rho))(g(\tau)-g(\rho)) \geq 0, \qquad \tau,\rho \in [a,b].$$

2.3 Principaux résultats

2.3.1 Inégalité fractionnaire pondérées avec un paramètre

On présente notre premier résultat

Théorème 2.3.1

Soient f et g deux fonctions continues et synchrones sur $[a,b]$ et soient $r,p,q:[a,b]\to[0,\infty[$ sont intégrables. Alors pour tout $t>a$, $\alpha>0$, on a

$$\begin{aligned}
&2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}r(t)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}p(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qfg)(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}q(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pfg)(t)\Big]\\
&+2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}p(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}q(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rfg)(t)\geq\\
&\ {}_kJ^{\alpha}_{a,h}r(t)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qg)(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pg)(t)\Big]\\
&+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}p(t)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qg)(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rg)(t)\Big]\\
&+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}q(t)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pg)(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rg)(t)\Big].
\end{aligned}\tag{2.1}$$

Pour montrer ce théorème on a besoin le lemme suivant

Lemme 2.3.1:
Soient f et g deux fonctions continues et synchrones sur $[a,b]$ et soient $v,w:[a,b]\to[0,\infty[$ sont intégrables. Alors pour tout $t>a$, $\alpha>0$, on a :

$$\begin{aligned}
&{}_kJ^{\alpha}_{a,h}v(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(wfg)(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}w(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vfg)(t)\geq\\
&{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(wg)(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(wf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vg)(t).
\end{aligned}\tag{2.2}$$

Preuve.
Puisque f et g sont synchrones sur $[a,b]$, alors pour tout $\tau,\rho\in[a,b]$, on a :

$$(f(\tau)-f(\rho))(g(\tau)-g(\rho))\geq 0,\tag{2.3}$$

par conséquent

$$f(\tau)g(\tau)+f(\rho)g(\rho)-f(\tau)g(\rho)-f(\rho)g(\tau)\geq 0,\tag{2.4}$$

donc

$$f(\tau)g(\tau)+f(\rho)g(\rho)\geq f(\tau)g(\rho)+f(\rho)g(\tau).\tag{2.5}$$

Multiplier (2.5) par $\frac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)v(\tau)$, $\tau\in(a,t)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)v(\tau)f(\tau)g(\tau)+\frac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)v(\tau)f(\rho)g(\rho)\geq\\
&\frac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)v(\tau)f(\tau)g(\rho)+\frac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)v(\tau)f(\rho)g(\tau).
\end{aligned}\tag{2.6}$$

En intégrant (2.6) par rapport à τ sur (a,t), on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)v(\tau)f(\tau)g(\tau)d\tau\\
&+\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)v(\tau)f(\rho)g(\rho)d\tau\geq\\
&\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)v(\tau)f(\tau)g(\rho)d\tau\\
&+\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)v(\tau)f(\rho)g(\tau)d\tau,
\end{aligned}\tag{2.7}$$

alors

$$
{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vfg)(t)+f(\rho)g(\rho)\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)v(\tau)d\tau \geq \\
\frac{g(\rho)}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)v(\tau)f(\tau)d\tau+\frac{f(\rho)}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)v(\tau)g(\tau)d\tau, \tag{2.8}
$$

donc nous avons

$$
{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vfg)(t)+f(\rho)g(\rho){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(v)(t)\geq g(\rho){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vf)(t)+f(\rho){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vg)(t). \tag{2.9}
$$

En multipliant maintenant (2.9) par : $\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)w(\rho), \rho\in(a,t)$, on peut écrire

$$
\begin{aligned}
&\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)w(\rho){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vfg)(t)\\
&+\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)w(\rho)f(\rho)g(\rho){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(v)(t)\geq\\
&\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)w(\rho)g(\rho){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vf)(t)\\
&+\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)w(\rho)f(\rho){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vg)(t).
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

En intégrant (2.10) par rapport à ρ sur (a,t) on obtient

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\rho)w(\rho){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vfg)(t)d\rho\\
&+\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\rho)w(\rho)f(\rho)g(\rho){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(v)(t)d\rho\geq\\
&\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\rho)w(\rho)g(\rho){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vf)(t)d\rho\\
&+\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\rho)w(\rho)f(\rho){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vg)(t)d\rho,
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

ce qui implique

$$
\begin{aligned}
&\frac{{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vfg)(t)}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\rho)w(\rho)d\rho\\
&+\frac{{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(v)(t)}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\rho)w(\rho)f(\rho)g(\rho)d\rho\geq\\
&\frac{{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vf)(t)}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\rho)w(\rho)g(\rho)d\rho\\
&+\frac{{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vg)(t)}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\rho)w(\rho)f(\rho)d\rho,
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
&{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(w)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vfg)(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(v)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(wfg)(t)\geq\\
&{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(wg)(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(wf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vg)(t).
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

Et ceci termine la preuve du lemme 2.3.1. □

Remarque

1. En appliquant le lemme 2.3.1 pour $v = 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} &{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(wfg)(t) + {}_kJ^{\alpha}_{a,h}w(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(fg)(t) \geq \\ &{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(f)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(wg)(t) + {}_kJ^{\alpha}_{a,h}(wf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(g)(t). \end{aligned} \tag{2.14}$$

2. En appliquant le lemme 2.3.1 pour $w = 1$, on trouve

$$\begin{aligned} &{}_kJ^{\alpha}_{a,h}v(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(fg)(t) + {}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vfg)(t) \geq \\ &{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(g)(t) + {}_kJ^{\alpha}_{a,h}(f)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vg)(t). \end{aligned} \tag{2.15}$$

3. En appliquant le lemme 2.3.1 pour $v = w = 1$, on a

$${}_kJ^{\alpha}_{a,h}(fg)(t) \geq ({}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1))^{-1}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(f)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(g)(t). \tag{2.16}$$

Preuve du théorème 2.3.1.

En utilisant le lemme 2.3.1 avec $v = p, w = q$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} &{}_kJ^{\alpha}_{a,h}p(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qfg)(t) + {}_kJ^{\alpha}_{a,h}q(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pfg)(t) \geq \\ &{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qg)(t) + {}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pg)(t). \end{aligned} \tag{2.17}$$

En multipliant (2.17) par ${}_kJ^{\alpha}_{a,h}(r)(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} &{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(r)(t)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}p(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qfg)(t) + {}_kJ^{\alpha}_{a,h}q(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pfg)(t)\Big] \geq \\ &{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(r)(t)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qg)(t) + {}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pg)(t)\Big]. \end{aligned} \tag{2.18}$$

En remplaçant v par r et w par q dans le lemme 2.3.1 , on trouve

$$\begin{aligned} &{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(r)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qfg)(t) + {}_kJ^{\alpha}_{a,h}(q)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rfg)(t) \geq \\ &{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qg)(t) + {}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rg)(t). \end{aligned} \tag{2.19}$$

En multipliant (2.19) par ${}_kJ^{\alpha}_{a,h}p(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} &{}_kJ^{\alpha}_{a,h}p(t)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}r(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qfg)(t) + {}_kJ^{\alpha}_{a,h}q(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rfg)(t)\Big] \geq \\ &{}_kJ^{\alpha}_{a,h}p(t)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qg)(t) + {}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rg)(t)\Big]. \end{aligned} \tag{2.20}$$

En mettant $v = r, w = p$ et en utilisant à nouveau le lemme 2.3.1 , on a

$$\begin{aligned} &{}_kJ^{\alpha}_{a,h}r(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pfg)(t) + {}_kJ^{\alpha}_{a,h}p(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rfg)(t) \geq \\ &{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pg)(t) + {}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rg)(t). \end{aligned} \tag{2.21}$$

En multipliant (2.21) par ${}_kJ^{\alpha}_{a,h}q(t)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}&{}_kJ^{\alpha}_{a,h}q(t)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}r(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pfg)(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}p(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rfg)(t)\Big]\geq\\&{}_kJ^{\alpha}_{a,h}q(t)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pg)(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rg)(t)\Big].\end{aligned}\tag{2.22}$$

En sommant les inégalités (2.18),(2.20) et (2.22) , on obtient l'inégalité (2.1). □

Remarque

1. En appliquant le théorème 2.3.1 pour $r=1$, on a

$$\begin{aligned}&2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}p(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qfg)(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}q(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pfg)(t)\Big]\\&+2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}p(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}q(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(fg)(t)\geq\\&\quad{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qg)(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pg)(t)\Big]\\&+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}p(t)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qg)(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)\Big]\\&+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}q(t)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pg)(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)\Big].\end{aligned}$$

2. En appliquant le théorème 2.3.1 pour $p=1$, on trouve

$$\begin{aligned}&2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}r(t)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qfg)(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}q(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(fg)(t)\Big]\\&+2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(q)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rfg)(t)\geq\\&\quad{}_kJ^{\alpha}_{a,h}r(t)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qg)(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)\Big]\\&\quad+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qg)(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rg)(t)\Big]\\&+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}q(t)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rg)(t)\Big].\end{aligned}$$

3. En appliquant le théorème 2.3.1 pour $q=1$, nous obtenons

$$\begin{aligned}&2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}r(t)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}p(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(fg)(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pfg)(t)\Big]\\&+2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}p(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rfg)(t)\geq\\&\quad{}_kJ^{\alpha}_{a,h}r(t)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pg)(t)\Big]\\&+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}p(t)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rg)(t)\Big]\\&\quad+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pg)(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rg)(t)\Big].\end{aligned}$$

4. En appliquant le théorème 2.3.1 pour $p=q=1$, on peut écrire

$$\begin{aligned}&2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}r(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(fg)(t)+({}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1))^2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rfg)(t)\geq\\&{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rg)(t)]+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}r(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t).\end{aligned}$$

5. En appliquant le théorème 2.3.1 pour $p = r = 1$, nous obtenons

$$({}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1))^2 {}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qfg)(t) + 2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1){}_kJ^{\alpha}_{a,h}q(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(fg)(t) \geq$$
$${}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qg)(t) + {}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)\Big] + {}_kJ^{\alpha}_{a,h}q(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t).$$

6. En appliquant le théorème 2.3.1 pour $q = r = 1$, on obtient

$$({}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1))^2 {}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pfg)(t) + 2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1){}_kJ^{\alpha}_{a,h}p(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(fg)(t) \geq$$
$${}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t) + {}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pg)(t)\Big] + {}_kJ^{\alpha}_{a,h}p(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t).$$

7. En appliquant le théorème 2.3.1 pour $p = q = r = 1$, on trouve l'inégalité (2.16).

Notre deuxième résultat est :

Théorème 2.3.2

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, telles que f est croissante, g est différentiable et il existe un nombre réel $m := \inf\limits_{t\geq a} g'(t)$. Alors

$$ {}_kJ^{\alpha}_{a,h}(fg)(t) \geq \left({}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1)\right)^{-1} {}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t) - mt{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t) + m{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(tf(t)) \tag{2.23}$$

pour toute $t > a, \alpha > 0$.

Preuve .

Nous considérons la fonction $R(t) := g(t) - mt$. Il est clair que R est différentiable et croissante sur $[a,b]$. Ensuite, en utilisant l'inégalités (2.16), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} {}_kJ^{\alpha}_{a,h}((g-mt)f(t)) &\geq \left({}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1)\right)^{-1} {}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\left({}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t) - m{}_kJ^{\alpha}_{a,h}t\right) \\ &\geq \left({}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1)\right)^{-1} {}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t) - m\left({}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1)\right)^{-1} {}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}t \end{aligned}$$

Maintenant , en calculant ${}_kJ^{\alpha}_{a,h}t$.

On a

$$ {}_kJ^{\alpha}_{a,h}t = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)\tau d\tau,$$

en utilise le changement de variable $x = \frac{h(\tau)-h(a)}{h(t)-h(a)} \Longrightarrow dx = \frac{h'(\tau)}{h(t)-h(a)}d\tau,$

$$si\ \tau = 0\ alors\ x = 0,$$

$$si\ \tau = t\ alors\ x = 1,$$

on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t (h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)\tau d\tau \\
&=\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_0^1 (h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}-1}(1-x)^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)\tau\frac{h(t)-h(a)}{h'(\tau)}dx \\
&=\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\tau\int_0^1 (1-x)^{\frac{\alpha}{k}-1}dx \\
&=\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\tau\left[-\frac{(1-x)^{\frac{\alpha}{k}}}{\frac{\alpha}{k}}\right]_0^1 \\
&=\frac{k(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\alpha k\Gamma_k(\alpha)}\tau \\
&=\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\tau.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Donc nons avons

$$\begin{aligned}
{}_kJ^{\alpha}_{a,h}((g-mt)f(t)) &\geq \left({}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1)\right)^{-1}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\left({}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)-m_kJ^{\alpha}_{a,h}t\right) \\
&\geq \left({}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1)\right)^{-1}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)-\frac{m\left({}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1)\right)^{-1}(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}t}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t) \\
&\geq \left({}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1)\right)^{-1}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)-\frac{m\Gamma_k(\alpha+k)(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}t}{\Gamma_k(\alpha+k)(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t) \\
&\geq \left({}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1)\right)^{-1}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)-mt{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Par conséquent

$${}_kJ^{\alpha}_{a,h}(fg)(t)\geq \left({}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1)\right)^{-1}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)-mt{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)+m_kJ^{\alpha}_{a,h}(tf(t))$$

pour toute $t>a,\alpha>0$

□

2.3.2 Inégalités fractionnaires pondérées avec deux paramètres

Théorème 2.3.3

Soient f et g deux fonctions continues et synchrones sur $[a,b]$ et soient $r,p,q:[a,b]\rightarrow$

$[0,\infty[$ sont intégrables. Alors pour tout $t>a$, $\alpha>0$, $\beta>0$, nous avons

$$\begin{aligned}
&2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}r(t)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}p(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qfg)(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}q(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pfg)(t)\Big]\\
&+2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}p(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(q)(t)){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rfg)(t)\geq\\
&{}_kJ^{\alpha}_{a,h}r(t)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qg)(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pg)(t)\Big]\\
&+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}p(t)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qg)(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(qf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rg)(t)\Big]\\
&+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}q(t)\Big[{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pg)(t)+{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(pf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(rg)(t)\Big].
\end{aligned}\tag{2.26}$$

Pour montrer ce théorème on a besoin le lemme suivant

Lemme 2.3.2: Soient f et g deux fonctions continues et synchrones sur $[a,b]$ et soient $v,w:[a,b]\to[0,\infty[$ sont intégrables. Alors pour tout $t>a$, $\alpha>0,\beta>0$ on a :

$$\begin{aligned}
&{}_kJ^{\alpha}_{a,h}v(t){}_kJ^{\beta}_{a,h}(wfg)(t)+{}_kJ^{\beta}_{a,h}w(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vfg)(t)\geq\\
&{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vf)(t){}_kJ^{\beta}_{a,h}(wg)(t)+{}_kJ^{\beta}_{a,h}(wf)(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vg)(t).
\end{aligned}\tag{2.27}$$

Preuve .

En multipliant (2.9) par $\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)w(\rho)$, $\rho\in(a,t)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)w(\rho){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vfg)(t)+\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)w(\rho)f(\rho)g(\rho){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(v)(t)\geq\\
&\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)w(\rho)g(\rho){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vf)(t)+\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)w(\rho)f(\rho){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vg)(t).
\end{aligned}\tag{2.28}$$

En intégrant (2.28) par rapport à ρ sur (a,t), on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(\rho)w(\rho){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vfg)(t)d\rho\\
&+\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(\rho)w(\rho)f(\rho)g(\rho){}_kJ^{\alpha}_{a,h}v(t)d\rho\geq\\
&\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(\rho)w(\rho)g(\rho){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vf)(t)d\rho\\
&+\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(\rho)w(\rho)f(\rho){}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vg)(t)d\rho,
\end{aligned}\tag{2.29}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
&\frac{{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vfg)(t)}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(\rho)w(\rho)_kd\rho\\
&+\frac{{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(v)(t)}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(\rho)w(\rho)f(\rho)g(\rho)d\rho\geq\\
&\frac{{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vf)(t)}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(\rho)w(\rho)g(\rho)d\rho\\
&+\frac{{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(vg)(t)}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(\rho)w(\rho)f(\rho)d\rho.
\end{aligned}\tag{2.30}$$

Donc

$$kJ_{a,h}^{\beta} w(t)_k J_{a,h}^{\alpha}(vfg)(t) + {}_kJ_{a,h}^{\alpha} v(t)_k J_{a,h}^{\beta}(wfg)(t) \geq$$
$${}_kJ_{a,h}^{\alpha}(vf)(t)_k J_{a,h}^{\beta}(wg)(t) + {}_kJ_{a,h}^{\beta}(wf)(t)_k J_{a,h}^{\alpha}(vg)(t)$$

□

Preuve du théorème 2.3.3 .

En utilisant le lemme 2.3.2 avec $v = p$, $w = q$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} &{}_kJ_{a,h}^{\alpha}(p)(t)_k J_{a,h}^{\beta}(qfg)(t) + {}_kJ_{a,h}^{\beta}(q)(t)_k J_{a,h}^{\alpha}(pfg)(t) \geq \\ &{}_kJ_{a,h}^{\alpha}(pf)(t)_k J_{a,h}^{\beta}(qg)(t) + {}_kJ_{a,h}^{\beta}(qf)(t)_k J_{a,h}^{\alpha}(pg)(t), \end{aligned} \tag{2.31}$$

en multipliant (2.31) par ${}_kJ_{a,h}^{\alpha} r(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} &{}_kJ_{a,h}^{\alpha} r(t)\Big[{}_kJ_{a,h}^{\alpha} p(t)_k J_{a,h}^{\beta}(qfg)(t) + {}_kJ_{a,h}^{\beta} q(t)_k J_{a,h}^{\alpha}(pfg)(t)\Big] \geq \\ &{}_kJ_{a,h}^{\alpha} r(t)\Big[{}_kJ_{a,h}^{\alpha}(pf)(t)_k J_{a,h}^{\beta}(qg)(t) + {}_kJ_{a,h}^{\beta}(qf)(t)_k J_{a,h}^{\alpha}(pg)(t)\Big]. \end{aligned} \tag{2.32}$$

En remplaçant v par r et w par q dans le lemme 2.3.2, on trouve

$$\begin{aligned} &{}_kJ_{a,h}^{\alpha} r(t)_k J_{a,h}^{\beta}(qfg)(t) + {}_kJ_{a,h}^{\beta} q(t)_k J_{a,h}^{\alpha}(rfg)(t) \geq \\ &{}_kJ_{a,h}^{\alpha}(rf)(t)_k J_{a,h}^{\beta}(qg)(t) + {}_kJ_{a,h}^{\beta}(qf)(t)_k J_{a,h}^{\alpha}(rg)(t), \end{aligned} \tag{2.33}$$

en multipliant les deux côtés de (2.33) par ${}_kJ_{a,h}^{\alpha} p(t)$, nous avons

$$\begin{aligned} &{}_kJ_{a,h}^{\alpha} p(t)\Big[{}_kJ_{a,h}^{\alpha}(r)(t)_k J_{a,h}^{\beta}(qfg)(t) + {}_kJ_{a,h}^{\beta} q(t)_k J_{a,h}^{\alpha}(rfg)(t)\Big] \geq \\ &{}_kJ_{a,h}^{\alpha} p(t)\Big[{}_kJ_{a,h}^{\alpha}(rf)(t)_k J_{a,h}^{\beta}(qg)(t) + {}_kJ_{a,h}^{\beta}(qf)(t)_k J_{a,h}^{\alpha}(rg)(t)\Big]. \end{aligned} \tag{2.34}$$

En utilisant à nouveau le lemme 2.3.2 avec $v = r$, $w = p$, on trouve

$$\begin{aligned} &{}_kJ_{a,h}^{\alpha} r(t)_k J_{a,h}^{\beta}(pfg)(t) + {}_kJ_{a,h}^{\beta} p(t)_k J_{a,h}^{\alpha}(rfg)(t) \geq \\ &{}_kJ_{a,h}^{\alpha}(rf)(t)_k J_{a,h}^{\beta}(pg)(t) + {}_kJ_{a,h}^{\beta}(pf)(t)_k J_{a,h}^{\alpha}(rg)(t), \end{aligned} \tag{2.35}$$

en multipliant (2.35) par ${}_kJ_{a,h}^{\alpha} q(t)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} &{}_kJ_{a,h}^{\alpha} q(t)\Big[{}_kJ_{a,h}^{\alpha} r(t)_k J_{a,h}^{\beta}(pfg)(t) + {}_kJ_{a,h}^{\beta} p(t)_k J_{a,h}^{\alpha}(rfg)(t)\Big] \geq \\ &{}_kJ_{a,h}^{\alpha} q(t)\Big[{}_kJ_{a,h}^{\alpha}(rf)(t)_k J_{a,h}^{\beta}(pg)(t) + {}_kJ_{a,h}^{\beta}(pf)(t)_k J_{a,h}^{\alpha}(rg)(t)\Big]. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Par la somme des inégalités (2.32), (2.34) et (2.36), on trouve l'inégalité (2.26) □

Remarque

Les inégalités (2.1) et (2.26) sont inversées dans les cas suivants :

1. Les fonctions f et g ne sont pas synchrones sur $[a, b]$.
2. Les fonctions r, p et q sont négatives sur $[a, b]$.
3. Deux des fonctions r, p et q sont positives et la troisième est négative sur $[a, b]$.

2.3.3 Inégalité fractionnaire de n fonctions

Théorème 2.3.4

Soit $(f_i)_{i=1,\dots,n}$ n fonctions croissantes, positives et continues sur $[a, b]$. Alors pour tout $t > a$, $\alpha > 0$, nous avons

$$ {}_kJ^{\alpha}_{a,h}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(t) \geq \left({}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1)\right)^{1-n} \prod_{i=1}^{n} {}_kJ^{\alpha}_{a,h} f_i(t). \tag{2.37}$$

Preuve .

On utilise le principe de récurrence .

Pour $n = 1$, nons avons

$$ {}_kJ^{\alpha}_{a,h}(f_1)(t) \geq {}_kJ^{\alpha}_{a,h}(f_1)(t), \quad t > a, \ \alpha > 0,$$

pour $n = 2$, en appliquant l'inégalité (2.16), on obtient

$$ {}_kJ^{\alpha}_{a,h}(f_1 f_2)(t) \geq \left({}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1)\right)^{-1} {}_kJ^{\alpha}_{a,h} f_1(t) {}_kJ^{\alpha}_{a,h} f_2(t), \quad t > a, \ \alpha > 0,$$

maintenant on suppose que (l'hypothèse de récurrence)

$$ {}_kJ^{\alpha}_{a,h}\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i\right)(t) \geq \left({}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1)\right)^{2-n} \prod_{i=1}^{n-1} {}_kJ^{\alpha}_{a,h} f_i(t). \tag{2.38}$$

Puisque $(f_i)_{i=1,\dots,n}$ sont des fonctions croissantes positives, alors $\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i\right)(t)$ est une fonction croissante.

On peut donc appliquer l'inégalité (2.16) aux fonctions $\prod_{i=1}^{n-1} f_i = g$ et $f_n = f$, on obtient

$$ {}_kJ^{\alpha}_{a,h}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(t) = {}_kJ^{\alpha}_{a,h}(f g)(t) \geq \left({}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1)\right)^{-1} {}_kJ^{\alpha}_{a,h}\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i\right)(t) {}_kJ^{\alpha}_{a,h}\left(f_n\right)(t). \tag{2.39}$$

D'aprés l'inégalité (2.38), on trouve

$$ {}_kJ^{\alpha}_{a,h}\Big(\prod_{i=1}^{n} f_i\Big)(t) \geq \Big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1)\Big)^{-1}\bigg(\Big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1)\Big)^{2-n}\Big(\prod_{i=1}^{n-1} {}_kJ^{\alpha}_{a,h}f_i\Big)(t)\bigg){}_kJ^{\alpha}_{a,h}\Big(f_n\Big)(t), \tag{2.40} $$

ce qui donne

$$ {}_kJ^{\alpha}_{a,h}\Big(\prod_{i=1}^{n} f_i\Big)(t) \geq \Big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1)\Big)^{1-n}\prod_{i=1}^{n} {}_kJ^{\alpha}_{a,h}f_i(t). $$

□

Corollaire 2.3.1

Soient f et g deux fonctions définies sur $[a,b]$.

(A) Supposons que f est une fonction décroissante, g est une fonction différentiable et il existe un nombre réel $M := \sup_{t\geq a} g'(t)$. Alors pour tout $t > a,\ \alpha > 0$, on a

$$ {}_kJ^{\alpha}_{a,h}(fg)(t) \geq \Big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1)\Big)^{-1}\ {}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t) - Mt{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t) + M{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(tf(t)). \tag{2.41} $$

(B) Supposons que f et g sont différentiables et il existe $m_1 := \inf_{t\geq 0} f'(x)$, $m_2 := \inf_{t\geq a} g'(t)$, alors nons avons

$$ \begin{aligned} &{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(fg)(t) - m_1{}_kJ^{\alpha}_{a,h}tg(t) - m_2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}tf(t) + m_1m_2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}t^2 \\ &\quad \geq \Big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}(1)\Big)^{-1}\bigg({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t) - m_1{}_kJ^{\alpha}_{a,h}t{}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t) - m_2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}t{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t) + m_1m_2\Big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}t\Big)^2\bigg). \end{aligned} \tag{2.42} $$

(C) Supposons que f et g sont différentiables et il existe $M_1 := \sup_{t\geq a} f'(t)$, $M_2 := \sup_{t\geq a} g'(t)$. Alors l'inégalité on a

$$ \begin{aligned} &J^{\alpha}_{a,h}(fg)(t) - M_1J^{\alpha}_{a,h}\,\mathrm{tg}(t) - M_2J^{\alpha}_{a,h}tf(t) + M_1M_2J^{\alpha}_{a,h}t^2 \\ &\quad \geq \Big(J^{\alpha}_{a,h}(1)\Big)^{-1}\bigg(J^{\alpha}_{a,h}f(t)J^{\alpha}_{a,h}g(t) - M_1J^{\alpha}_{a,h}tJ^{\alpha}_{a,h}g(t) - M_2J^{\alpha}_{a,h}tJ^{\alpha}f(t) + M_1M_2\Big(J^{\alpha}_{a,h}t\Big)^2\bigg) \end{aligned} \tag{2.43} $$

Preuve . (A) On applique l'inégalité (2.16) aux fonctions f et $G(t) := g(t) - m_2t$.

(B) On applique aussi l'inégalité (2.16) aux fonctions F et G, où : $F(t) := f(t) - m_1t$, $G(t) := g(t) - m_2t$.

(C) Maintenant, on applique l'inégalité (2.16) aux fonctions

$$ F(t) := f(t) - M_1t, \quad G(t) := g(t) - M_2t. $$

□

Chapitre 3

Inégalités fractionnaires de type Grüss

3.1 Introduction

Le but principal de ce chapitre est d'introduire les inégalités de type de Grüss pour l'opérateur ${}_kJ^{\alpha}_{a,h}$.

3.2 Principaux résultats

3.2.1 Inégalité fractionnaire avec un paramètre

Théorème 3.2.1

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, satisfaisant les conditions

$$m \leq f(x) \leq M,\ p \leq g(x) \leq P, \quad m, M, p, P \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Alors pour tout $t > a$, $\alpha > 0$, on a

$$\left|\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\,{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f\,g(t) - {}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\,{}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)\right| \leq \left(\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{2\Gamma_k(\alpha+k)}\right)^2 (M-m)(P-p). \tag{3.2}$$

Pour montrer ce théorème on a besoin le lemme suivant

Lemme 3.2.1:

Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, satisfaisant les conditions (3.1) sur $[a,b]$. Alors pour tout $t>a$, $\alpha>0$, on a

$$\begin{aligned}&\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\,{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f^2(t)-\left({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\right)^2\\&=\Big(M\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\Big)\Big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)-m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\Big)\\&-\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\,{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(M-f(t))(f(t)-m).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Preuve .

Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, satisfaisant les conditions (3.1) sur $[a,b]$, pour tout $\tau,\rho\in[a,b]$, on a

$$\begin{aligned}&(M-f(\rho))(f(\tau)-m)+(M-f(\tau))(f(\rho)-m)\\&-(M-f(\tau))(f(\tau)-m)-(M-f(\rho))(f(\rho)-m)\\&=f^2(\tau)+f^2(\rho)-2f(\tau)f(\rho),\end{aligned}\tag{3.4}$$

en multipliant (3.4) par $\frac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)$, $\tau\in(a,t)$, $t>a$, on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)\Big\{(M-f(\rho))(f(\tau)-m)+(M-f(\tau))(f(\rho)-m)\\&-(M-f(\tau))(f(\tau)-m)-(M-f(\rho))(f(\rho)-m)\Big\}\\&=\frac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)\Big\{f^2(\tau)+f^2(\rho)-2f(\tau)f(\rho)\Big\},\end{aligned}\tag{3.5}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}&(M-f(\rho))\Big(\frac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)f(\tau)-\frac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)m\Big)\\&+(f(\rho)-m)\Big(\frac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)M-\frac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)f(\tau)\Big)\\&-\frac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)(M-f(\tau))(f(\tau)-m)-(M-f(\rho))(f(\rho)-m)\frac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)\\&=\frac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)f^2(\tau)+f^2(\rho)\frac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)-2f(\rho)\frac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)f(\tau),\end{aligned}\tag{3.6}$$

en intégrant (3.6) par rapport à τ sur (a,t), on trouve

$$\begin{aligned}&(M-f(\rho))\Big(\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)f(\tau)d\tau-\frac{m}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)d\tau\Big)\\&+(f(\rho)-m)\Big(\frac{M}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)d\tau-\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)f(\tau)d\tau\Big)\\&-\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)(M-f(\tau))(f(\tau)-m)d\tau\\&-\frac{(M-f(\rho))(f(\rho)-m)}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)d\tau\\&=\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)f^2(\tau)d\tau+\frac{f^2(\rho)}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)d\tau\\&-\frac{2f(\rho)}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)f(\tau)d\tau,\end{aligned}\tag{3.7}$$

alors

$$
\begin{aligned}
&(M-f(\rho))\Big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)-\frac{m}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)d\tau\Big)\\
&+\Big(\tfrac{M}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)d\tau-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\Big)(f(\rho)-m)\\
&-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}((M-f(t))(f(t)-m))-\frac{(M-f(\rho))(f(\rho)-m)}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)d\tau\\
&={}_kJ^{\alpha}_{a,h}f^2(t)+\frac{f^2(\rho)}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)d\tau-2f(\rho){}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t).
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
&(M-f(\rho))\big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)-m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\big)+\big(M\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\big)(f(\rho)-m)\\
&-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}((M-f(t))(f(t)-m))-(M-f(\rho))(f(\rho)-m)\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\\
&={}_kJ^{\alpha}_{a,h}f^2(t)+f^2(\rho)\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-2f(\rho){}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t),
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

maintenant, en multipliant (3.9) par $\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)$, $\rho\in(a,t)$, on peut écrire

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)\Big\{(M-f(\rho))({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)-m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)})\\
&+(M\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t))(f(\rho)-m)-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}((M-f(t))(f(t)-m))\\
&-(M-f(\rho))(f(\rho)-m)\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\Big\}\\
&=\tfrac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)\Big\{{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f^2(t)+f^2(\rho)\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-2f(\rho){}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\Big\},
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

ce qui imlique

$$
\begin{aligned}
&\Big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)-m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\Big)\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)(M-f(\rho))\\
&+\Big(M\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\Big)\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)(f(\rho)-m)\\
&-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}((M-f(t))(f(t)-m))\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)\\
&-\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\tfrac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)(M-f(\rho))(f(\rho)-m)\\
&={}_kJ^{\alpha}_{a,h}f^2(t)\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)+\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)f^2(\rho)\\
&-2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)f(\rho),
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

en intégrant (3.11) par rapport à ρ sur (a,t), on obtient

$$\begin{aligned}
&\Big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)-m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\Big)\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\rho)(M-f(\rho))d\rho\\
&+\Big(M\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\Big)\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\rho)(f(\rho)-m)d\rho\\
&-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}((M-f(t))(f(t)-m))\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\rho)d\rho\\
&-\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\tfrac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\rho)(M-f(\rho))(f(\rho)-m)d\rho\\
&={}_kJ^{\alpha}_{a,h}f^2(t)\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\rho)d\rho\\
&+\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\tfrac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\rho)f^2(\rho)d\rho\\
&-2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\rho)f(\rho)d\rho.
\end{aligned}\tag{3.12}$$

Donc nous avons

$$\begin{aligned}
&\Big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)-m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\Big)\Big(M\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\Big)\\
&+\Big(M\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\Big)\Big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)-m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\Big)\\
&-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}((M-f(t))(f(t)-m))\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\\
&-\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}((M-f(t))(f(t)-m))\\
&=\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f^2(t)+\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f^2(t)-2({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t))^2,
\end{aligned}\tag{3.13}$$

ce qui prouve le lemme. □

Preuve du théorème 3.2.1 .

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, satisfaisant les conditions (3.1).On définie

$$H(\tau,\rho):=(f(\tau)-f(\rho))(g(\tau)-g(\rho)),\ \tau,\rho\in(a,t),\ t>a,\tag{3.14}$$

donc

$$H(\tau,\rho)=f(\tau)g(\tau)+f(\rho)g(\rho)-f(\tau)g(\rho)-f(\rho)g(\tau),\tag{3.15}$$

en multipliant (3.15) par $\frac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau),\ \tau\in(a,t)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\tfrac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)H(\tau,\rho)\\
&=\tfrac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)f(\tau)g(\tau)+\tfrac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)f(\rho)g(\rho)\\
&-\tfrac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)f(\tau)g(\rho)-\tfrac{(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\tau)f(\rho)g(\tau),
\end{aligned}\tag{3.16}$$

en intégrant (3.16) par rapport à τ sur (a,t), nous avons

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)H(\tau,\rho)d\tau\\&=\tfrac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)f(\tau)g(\tau)d\tau+\tfrac{f(\rho)g(\rho)}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)d\tau\\&-\tfrac{g(\rho)}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)f(\tau)d\tau-\tfrac{f(\rho)}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)g(\tau)d\tau.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Donc

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)H(\tau,\rho)d\tau\\&={}_kJ^{\alpha}_{a,h}fg(t)+\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}f(\rho)g(\rho)-g(\rho)_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)-f(\rho)_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t),\end{aligned}\tag{3.18}$$

en multipliant (3.18) par $\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho),\ \rho\in(a,t)$, on trouve

$$\begin{aligned}&\tfrac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\rho)}{k^2\Gamma_k^2(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)H(\tau,\rho)d\tau\\&=\tfrac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)_kJ^{\alpha}_{a,h}fg(t)+\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\rho)}{k\Gamma_k(\alpha)}\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}f(\rho)g(\rho)\\&-\tfrac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)g(\rho)_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)-\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)f(\rho)_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t),\end{aligned}\tag{3.19}$$

en intégrant (3.19) par rapport à ρ sur (a,t), on peut écrire

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{k^2\Gamma_k^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)h'(\rho)H(\tau,\rho)d\tau d\rho\\&=\tfrac{{}_kJ^{\alpha}_{a,h}fg(t)}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\rho)d\rho+\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\alpha+k)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\rho)f(\rho)g(\rho)d\rho\\&-\tfrac{{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\rho)g(\rho)d\rho-\tfrac{{}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\rho)f(\rho)d\rho,\end{aligned}\tag{3.20}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{k^2\Gamma_k^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}(h(t)-h(\rho))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)h'(\rho)H(\tau,\rho)d\tau d\rho\\&=2\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}fg(t)-2_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t),\end{aligned}\tag{3.21}$$

maintenant, en appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz, nous avons

$$\begin{aligned}&\Big(\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}fg(t)-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)\Big)^2\le\\&\Big(\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f^2(t)-\big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\big)^2\Big)\Big(\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}g^2(t)-\big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)\big)^2\Big).\end{aligned}\tag{3.22}$$

Puisque $(M-f(x))(f(x)-m)\ge0$ et $(P-g(x))(g(x)-p)\ge0$, alors

$$\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(M-f(t))(f(t)-m)\ge0,\tag{3.23}$$

on a aussi

$$\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(P-g(t))(g(t)-p)\ge0,\tag{3.24}$$

donc nous avons

$$\begin{aligned}&\Big(M\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\big)\big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)-m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\Big)\\&-\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(M-f(t))(f(t)-m)\leq\\&\Big(M\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\big)\big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)-m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\Big),\end{aligned}\tag{3.25}$$

et

$$\begin{aligned}&\Big(P\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)\big)\big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)-p\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\Big)\\&-\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(P-g(t))(g(t)-p)\leq\\&\Big(P\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)\big)\big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)-p\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\Big),\end{aligned}\tag{3.26}$$

à partir du lemme 3.2.1, on a

$$\begin{aligned}&\tfrac{(h(t))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f^2(t)-\Big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\Big)^2\leq\\&\Big(M\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\Big)\Big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)-m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\Big),\end{aligned}\tag{3.27}$$

et

$$\begin{aligned}&\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}g^2(t)-\Big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)\Big)^2\leq\\&\Big(P\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)\Big)\Big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)-p\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\Big),\end{aligned}\tag{3.28}$$

l'inégalité de Cauchy Schwarz donne

$$\begin{aligned}&\Big(\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}fg(t)-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{h}g(t)\Big)^2\leq\\&\Big(\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f^2(t)-\Big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\Big)^2\Big)\Big(\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}g^2(t)-\Big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)\Big)^2\Big),\end{aligned}$$

à partir de (3.27) et (3.28), on trouve

$$\begin{aligned}&\Big(\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}fg(t)-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)\Big)^2\leq\\&\Big(M\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\Big)\Big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)-m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\Big)\\&\Big(P\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)\Big)\Big({}_kJ^{\alpha}_{h}g(t)-p\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\Big).\end{aligned}\tag{3.29}$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité élémentaire $4rs\leq(r+s)^2,\ r,s\in\mathbb{R}$, on peut affirmer que

$$\begin{aligned}&4\Big(M\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\Big)\Big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)-m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\Big)\leq\\&\Big(\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}(M-m)\Big)^2,\end{aligned}\tag{3.30}$$

et

$$\begin{aligned}&4\Big(P\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)\Big)\Big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)-p\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\Big)\leq\\&\Big(\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}(P-p)\Big)^2,\end{aligned}\tag{3.31}$$

on remplaçant (3.30) et (3.31) dans (3.29), nous obtenons

$$\Big(\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\,{}_kJ^{\alpha}_{a,h}fg(t)-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)\Big)^2\leq\Big(\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{2\Gamma_k(\alpha+k)}(M-m)\Big)^2\Big(\frac{(h(t))^{\frac{\alpha}{k}}}{2\Gamma_k(\alpha+k)}(P-p)\Big)^2.$$

Donc

$$\left|\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\,{}_kJ^{\alpha}_{a,h}fg(t)-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)\right|\leq\Big(\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{2\Gamma_k(\alpha+k)}\Big)^2(M-m)(P-p).$$

□

3.2.2 Inégalités fractionnaires avec deux paramètres

Théorème 3.2.2

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, satisfaisant les conditions (3.1) sur $[a,b]$ alors pour tout $t>a$, $\alpha>0$, $\beta>0$, on a :

$$\Big(\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\,{}_kJ^{\beta}_{a,h}fg(t)+\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}\,{}_kJ^{\alpha}_{a,h}fg(t)-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\beta}_{a,h}g(t)-{}_kJ^{\beta}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)\Big)^2\leq$$
$$\Big[\Big(M\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\Big)\Big({}_kJ^{\beta}_{a,h}f(t)-m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}\Big)+\Big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)-m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\Big)$$
$$\Big(M\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}-{}_kJ^{\beta}_{a,h}f(t)\Big)\Big]\Big[\Big(P\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)\Big)\Big({}_kJ^{\beta}_{a,h}g(t)-p\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}\Big)$$
$$+\Big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)-p\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\Big)\Big(P\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}-{}_kJ^{\beta}_{a,h}g(t)\Big)\Big].$$

Pour prouver le théorème 3.2.2, nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme 3.2.2:
Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, alors pour tout $t>a$, $\alpha>0$, $\beta>0$, on a

$$\Big(\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\,{}_kJ^{\beta}_{a,h}fg(t)+\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}\,{}_kJ^{\alpha}_{a,h}fg(t)-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\beta}_{a,h}g(t)-{}_kJ^{\beta}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)\Big)^2\leq$$
$$\Big(\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\,{}_kJ^{\beta}_{a,h}f^2(t)+\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}\,{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f^2(t)-2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\beta}_{a,h}f(t)\Big)$$
$$\Big(\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\,{}_kJ^{\beta}_{a,h}g^2(t)+\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}\,{}_kJ^{\alpha}_{a,h}g^2(t)-2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t){}_kJ^{\beta}_{a,h}g(t)\Big).$$

Preuve .

En multipliant (3.18) par $\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho),\ \rho\in(a,t)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(\rho)}{k^2\Gamma_k(\beta)\Gamma_k(\alpha)}\int_0^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}h'(\tau)H(\tau,\rho)d\tau\\
&=\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)_kJ_h^{\alpha}f\,g(t)+\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(\rho)}{k\Gamma_k(\beta)}\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}f(\rho)g(\rho)\\
&-\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}h'(\rho)g(\rho)_kJ_h^{\alpha}f(t)-\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)f(\rho)_kJ_h^{\alpha}g(t),
\end{aligned}\tag{3.32}$$

en intégrant (3.32) par rapport à ρ sur (a,t), on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k^2\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta)}\int_a^t\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(\tau)h'(\rho)H(\tau,\rho)d\tau d\rho\\
&=\frac{{}_kJ_{a,h}^{\alpha}f\,g(t)}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(\rho)d\rho+\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\beta)\Gamma_k(\alpha+k)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(\rho)f(\rho)g(\rho)d\rho\\
&-\frac{{}_kJ_{a,h}^{\alpha}f(t)}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(\rho)g(\rho)d\rho-\frac{{}_kJ_{a,h}^{\alpha}g(t)}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(\rho)f(\rho)d\rho.
\end{aligned}\tag{3.33}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k^2\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta)}\int_a^t\int_a^t(h(t)-h(\tau))^{\frac{\alpha}{k}-1}(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(\tau)h'(\rho)H(\tau,\rho)d\tau d\rho\\
&=\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}{}_kJ_{a,h}^{\alpha}f\,g(t)+\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ_{a,h}^{\beta}f\,g(t)-{}_kJ_{a,h}^{\alpha}f(t)_kJ_{a,h}^{\beta}g(t)-{}_kJ_{a,h}^{\beta}f(t)_kJ_{a,h}^{\alpha}g(t).
\end{aligned}\tag{3.34}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz , nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ_{a,h}^{\beta}f\,g(t)+\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}{}_kJ_{a,h}^{\alpha}f\,g(t)-{}_kJ_{a,h}^{\alpha}f(t)_kJ_{a,h}^{\beta}g(t)-{}_kJ_{a,h}^{\beta}f(t)_kJ_{a,h}^{\alpha}g(t)\Big)^2\leq\\
&\Big(\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ_{a,h}^{\beta}f^2(t)+\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}{}_kJ_{a,h}^{\alpha}f^2(t)-2_kJ_{a,h}^{\alpha}f(t)_kJ_{a,h}^{\beta}f(t)\Big)\\
&\Big(\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ_{a,h}^{\beta}g^2(t)+\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}{}_kJ_{a,h}^{\alpha}g^2(t)-2_kJ_{a,h}^{\alpha}g(t)_kJ_{a,h}^{\beta}g(t)\Big).
\end{aligned}$$

□

Lemme 3.2.3:

Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, satisfaisant les conditions (3.1) sur $[a,b]$. Alors pour tout $t>a$, $\alpha>0$, $\beta>0$, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ_{a,h}^{\beta}f^2(t)+\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}{}_kJ_{a,h}^{\alpha}f^2(t)-2_kJ_{a,h}^{\alpha}f(t)_kJ_{a,h}^{\beta}f(t)\\
&=\Big(M\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-{}_kJ_{a,h}^{\alpha}f(t)\Big)\Big({}_kJ_{a,h}^{\beta}f(t)-m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}\Big)\\
&+\Big(M\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}-{}_kJ_{a,h}^{\beta}f(t)\Big)\Big({}_kJ_{a,h}^{\alpha}f(t)-m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\Big)\\
&-\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ_{a,h}^{\beta}(M-f(t))(f(t)-m)-\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}{}_kJ_{a,h}^{\alpha}(M-f(t))(f(t)-m).
\end{aligned}$$

Preuve .

En multipliant (3.9) par $\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)$, $\rho\in(a,t)$, on trouve

$$\begin{aligned}
&\tfrac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)\Big\{\big(M-f(\rho)\big)\Big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)-m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\Big)\\
&+\Big(M\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\Big)\big(f(\rho)-m\big)\\
&-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}\Big((M-f(t))(f(t)-m)\Big)-\big(M-f(\rho)\big)\big(f(\rho)-m\big)\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\Big\}\\
&=\tfrac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)\Big\{{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f^2(t)+f^2(\rho)\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-2f(\rho)_kJ^{\alpha}a,hf(t)\Big\},
\end{aligned}\tag{3.35}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
&\Big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)-m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\Big)\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)(M-f(\rho))\\
&+\Big(M\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\Big)\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)(f(\rho)-m)\\
&-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}\Big((M-f(t))(f(t)-m)\Big)\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)\\
&-\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\tfrac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)(M-f(\rho))(f(\rho)-m)\\
&={}_kJ^{\alpha}_{a,h}f^2(t)\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)+\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)f^2(\rho)\\
&-2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\frac{(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\beta)}h'(\rho)f(\rho),
\end{aligned}\tag{3.36}$$

maintenant, en intégrant (3.36) par rapport à ρ sur (a,t), on obtient

$$\begin{aligned}
&\Big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)-m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\Big)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(\rho)(M-f(\rho))d\rho\\
&+\Big(M\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\Big)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(\rho)(f(\rho)-m)d\rho\\
&-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}((M-f(t))(f(t)-m))\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(\rho)d\rho\\
&-\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\tfrac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(\rho)(M-f(\rho))(f(\rho)-m)d\rho\\
&={}_kJ^{\alpha}_{a,h}f^2(t)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(\rho)d\rho\\
&+\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\tfrac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(\rho)f^2(\rho)d\rho\\
&-2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t(h(t)-h(\rho))^{\frac{\beta}{k}-1}h'(\rho)f(\rho)d\rho.
\end{aligned}\tag{3.37}$$

Donc nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)-m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)})(M\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}-{}_kJ^{\beta}_{a,h}f(t))\\
&+(M\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t))({}_kJ^{\beta}_{a,h}f(t)-m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)})\\
&-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}((M-f(t))(f(t)-m))\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}\\
&-\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\beta}_{a,h}((M-f(t))(f(t)-m))\\
&=\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f^2(t)+\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\beta}_{a,h}f^2(t)-2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\beta}_{a,h}f(t).
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

Le lemme 3.2.3 est donc prouvé. □

Preuve du théorème 3.2.2 .

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, satisfaisant la condition (3.1) sur $[a,b]$.

Puisque $(M-f(x))(f(x)-m)\geq 0$ et $(P-g(x))(g(x)-p)\geq 0$. Alors on peut écrire

$$
\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\beta}_{a,h}(M-f(t))(f(t)-m)+\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(M-f(t))(f(t)-m)\geq 0, \tag{3.39}
$$

et

$$
\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\beta}_{a,h}(P-g(t))(g(t)-p)+\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(P-g(t))(g(t)-p)\geq 0. \tag{3.40}
$$

Nons avons

$$
\begin{aligned}
&(M\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t))({}_kJ^{\beta}_{a,h}f(t)-m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)})\\
&+(M\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}-{}_kJ^{\beta}_{a,h}f(t))({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)-m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)})\\
&-\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\beta}_{a,h}(M-f(t))(f(t)-m)\\
&-\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(M-f(t))(f(t)-m)\leq\\
&(M\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}-{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t))({}_kJ^{\beta}_{a,h}f(t)-m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)})\\
&+(M\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}-{}_kJ^{\beta}_{a,h}f(t))({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)-m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}),
\end{aligned}
$$

et

$$\begin{aligned}
&(P\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)} - {}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t))({}_kJ^{\beta}_{a,h}g(t) - p\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)})\\
&+(P\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)} - {}_kJ^{\beta}_{a,h}g(t))({}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t) - p\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)})\\
&-\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\,{}_kJ^{\beta}_{a,h}(P-g(t))(g(t)-p)\\
&-\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}\,{}_kJ^{\alpha}_{a,h}(P-g(t))(g(t)-p) \leq\\
&(P\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)} - {}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t))({}_kJ^{\beta}_{a,h}g(t) - p\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)})\\
&+(P\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)} - {}_kJ^{\beta}_{a,h}g(t))({}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t) - p\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}),
\end{aligned}$$

à partir du lemme 3.2.3, on obtient

$$\begin{aligned}
&\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\,{}_kJ^{\beta}_{a,h}f^2(t) + \frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}\,{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f^2(t) - 2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\beta}_{a,h}f(t) \leq\\
&(M\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)} - {}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t))({}_kJ^{\beta}_{a,h}f(t) - m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)})\\
&+(M\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)} - {}_kJ^{\beta}_{a,h}f(t))({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t) - m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}),
\end{aligned}\tag{3.41}$$

et

$$\begin{aligned}
&\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\,{}_kJ^{\beta}_{a,h}g^2(t) + \frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}\,{}_kJ^{\alpha}_{a,h}g^2(t) - 2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t){}_kJ^{\beta}_{h}g(t) \leq\\
&(P\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)} - {}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t))({}_kJ^{\beta}_{a,h}g(t) - p\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)})\\
&+(P\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)} - {}_kJ^{\beta}_{a,h}g(t))({}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t) - p\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}),
\end{aligned}\tag{3.42}$$

et à partir du lemme 3.2.2, on a

$$\begin{aligned}
&(\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\,{}_kJ^{\beta}_{a,h}fg(t) + \frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}\,{}_kJ^{\alpha}_{a,h}fg(t) - {}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\beta}_{a,h}g(t) - {}_kJ^{\beta}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t))^2 \leq\\
&(\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\,{}_kJ^{\beta}_{a,h}f^2(t) + \frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}\,{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f^2(t) - 2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\beta}_{a,h}f(t))\\
&(\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\,{}_kJ^{\beta}_{a,h}g^2(t) + \frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}\,{}_kJ^{\alpha}_{a,h}g^2(t) - 2{}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t){}_kJ^{\beta}_{a,h}g(t)).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&(\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}\,{}_kJ^{\beta}_{a,h}fg(t) + \frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}\,{}_kJ^{\alpha}_{a,h}fg(t) - {}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t){}_kJ^{\beta}_{a,h}g(t) - {}_kJ^{\beta}_{a,h}f(t){}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t))^2 \leq\\
&\Big[\Big(M\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)} - {}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t)\Big)\Big({}_kJ^{\beta}_{a,h}f(t) - m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}) + \big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}f(t) - m\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)})\\
&\Big(M\tfrac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)} - {}_kJ^{\beta}_{a,h}f(t)\Big)\Big]\Big[\Big(P\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)} - {}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t)\Big)\Big({}_kJ^{\beta}_{a,h}g(t) - p\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)})\\
&+\big({}_kJ^{\alpha}_{a,h}g(t) - p\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)})(P\frac{(h(t)-h(a))^{\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)} - {}_kJ^{\beta}_{a,h}g(t)\big)\Big].
\end{aligned}$$

□

Remarque

Si on prend $\alpha = \beta$ dans le théorème 3.2.2, on obtient le théorème 3.2.1

Bibliographie

[1] S. Anber, Z. Dahmani and B. Bendoukha, Some new results using integration of arbitrary order, Int. J. Nonlinear Anal. Appl. , 4(2), 2013, 45-52.

[2] S. Belarbi, Z. Dahmani, On some new fractional integral inequalities,journal of inequalities in pure and applied mathematics, 10, 2009, 3.

[3] M. BEZZIOU, Z. Dahmani, M. Z. Sarikaya, New operators for fractional integration theory with some applications, Journal of Mathematical Extension, 12(4), 2018, 87-100.

[4] Z. Dahmani, New inequalities in fractional integrals, International Journal of Nonlinear Science, 4, 9, 2010, 493-497.

[5] Z. Dahmani, L. Tabharit and S. Taf, New generalisations of Grüss inequality using Riemann-Liouville fractional integrals, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 2, 3(2010), 93-99.

[6] D. Grüss, Uber das maximum des absoluten Betrages von $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x) - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx$, Math. Z. 39, 1935, 215-226.

[7] S. M. Malamuda, Some complements to the Jenson and Chebyshev inequalities and a problem of W. Walter, Proc. Amer. Math. Soc., 129(9), 2001, 2671–2678.

[8] S. Mubeen, and G. M. Habibullah, k-fractional integrals and application, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 7(2), 2012, 89-94.

[9] B. G. PACHPATTE, A note on Chebyshev-Grüss type inequalities for differential functions, Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences, 22(1), 2006, 29–36.

[10] A. Rehman, S. Mubeen, N. Sadiq and F. Shaheen, Some inequalities involving k-gamma and k-beta functions with applications, Journal of Inequalities and Applications , 224(1) :16, 2014

[11] A. Rehman, R. Munir, S. S. Mubeen, A note on some k-functions and their probability distributions. Sci. Int. (Lahore), 29(1), 2017, 35-40

[12] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I.Marichev, Fractional Integrals and Derivatives Theory and Application, Gordan and Breach Science, New York, 1993.