Université Djilali Bounaâma-Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département Mathématiques et Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de

Master en mathématiques
Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Présenté par

ACHOUR Fatima Zahra

Résultats asymptotiques pour les sommes courtes d'une classe de fonctions arithmétiques

---

Soutenue publiquement le 23 juin 2018 devant le jury composé de

M. A. KRELIFA	MCB	UDBKM , Khemis Miliana	**Président**
M. M. BOUDERBALA	MAA	UDBKM , Khemis Miliana	**Examinateur**
M. M. HOUASNI	MAA	UDBKM , Khemis Miliana	**Examinateur.**
M. M. KARRAS	MCB	UDBKM , Khemis Miliana	**Encadrant**

Année Universitaire : ***2017/2018***

Mémoire de Master : Résultats asymptotiques pour les sommes courtes d'une classe de fonctions arithmétiques.

Résumé

Dans ce travail on s'intéresse aux fonctions arithmétiques multiplicatives, plus précisément, nous présentons un résultat asymptotique concernant les nombres squarefree dans des intervalles courts, et un autre résultat plus général sur une classe des fonctions arithmétiques. Ces résultats ont été réalisé par l'auteur O. Bordellés dans deux articles différents. Le deuxième résultat a été généralisé dans un autre article de O. Bordellés Les démonstration de l'auteur sont reposé sur les résultats de Filaseta et Trifonov et sur les résultats de Martin N.Huxley et Patrick Sargos.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :
À soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir. Mon pére que dieu te garde dans son vaste paradis.
Quand vous regardez dans les profondeurs de votre coeur pour un amour sincére et pour une étreinte chaleureuse sans contrepartie, pour une sensation mince et un coeur qui donne sans récompense, vous trouvez que ces qualités se rencontrent en une seule personne dans ce monde, la mére.
À mes chére soeurs "Douâa, Khadidja" et mes fréres "Radoine, Foad".
À la lumiére de mes jours, la source de mes efforts, mon mari qui m'a beaucoup aidé.

Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier **" ALLAH "** le tout puissant qui m'a été donné la force, la volonté , la patience durant ces années d'études, et pour accomplir ce modeste travail.

Je remercie Monsieur **KARRAS Meselem**, Docteur à l'université de Khemis Miliana qui a encadré mon travail. Avec ses riches expériences, il est toujours volontaire et prêt à m'aider pour avancer.

Je veux exprimer mes remerciements les plus dévoués aux membres de jury qui m'ont honorés en acceptant d'évaluer ce travail.

Je tiens à remercier tous les enseignants de département Mathématique et Informatique.

À tous mes chers enseignants qui ont enseigné moi.

À toutes mes amis de la promotion 2017-2018.

Notations

1. On désigne par p un nombre premier.

2. m et n sont des entiers, on écrit $m \mid n$ pour indiquer m divise n, et $m \nmid n$ pour indiquer m ne divise pas n, et (n, m) désigne le $pgcd(n, m)$.

3. $p^{\alpha} \parallel n$ signifie $p^{\alpha} \mid n$ et $p^{\alpha+1} \nmid n$.

4. Le symbole $\sum\limits_{n \leq x}$ indiquent une somme de tous les entiers $n \in [1, x]$, et $\sum\limits_{p} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \sum\limits_{p \leq x}$, $\prod\limits_{p} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \prod\limits_{p \leq x}$ indique un produit sur tout les nombres premiers p.

5. O est le symbole de Landau. Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, +\infty[$ où $(a \geq 0)$, on dit que :

   - $f(x) = O(g(x))$ quand $(f(x)$ *est un grand O de* $g(x))$, s'il existe une constante $M > 0$ et il existe x_0 ; pour quelque soit $x \geq x_0$, on a $\mid f(x) \mid \leq M \mid g(x) \mid$. Dans ce cas on peut écrire $f(x) \ll g(x)$ $($*symbole de Vinogradov*$)$.

6. Titchmarsh. $f \asymp g$ est équivalent à $f \ll g$ et $g \ll f$.

7. La partie fractionnaire d'un nombre réel est un réel positif strictement inférieur à 1. Tout réel x vérifier la propriété suivante $\{x\} = x - [x]$.

Table des matières

Introduction

Le problème des sommes courtes d'une fonction arithmétique f apparaît naturellement dans certains problèmes de théorie analytique des nombres. À titre d'exemple on s'intéresse ici, aux fonctions multiplicatives. Quelques résultats obtenus sur ces sommes revient aux arcs majeurs qui correspondent à des groupements de points entiers proches de la courbe $y = f(x)$ qui sont tous sur une même courbe polynomiale de degré $< r$ (voir [2]).
On a adopté dans ce travail trois chapitres. Le premier contient quelques définitions et outils de base qui nous seront utiles par la suite. Le deuxième , inclut l'énoncé et la démonstration du premier résultat suivant :

$$\sum_{x<n\leqslant x+y} \mu_2(n) = \frac{y}{\zeta(2)} + O\left(x^{1/3}\log x\right),$$

telle que $\mu_2(n)$ est la fonction caractéristique des nombres square-free. Dans ce contexte, on va détailler dans le dernier chapitre la démonstration du résultat suivant

$$\sum_{x<n\leq x+y} f(n) = y\mathcal{P}(f) + O_\epsilon\left(x^{1/15+\epsilon}y^{2/3}\right),$$

tel que

$$\mathcal{P}(f) := \prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{\alpha=1}^{+\infty}\frac{f(p^\alpha)}{p^\alpha}\right).$$

Avec une application directe sur une fonction liée aux diviseurs d'un entier.

Chapitre 1

Notations et préliminaires

Nous allons présenter ici, quelques définitions et résultats de base. Cela permettra d'introduire des outils importants pour être utilisé plus tard.

I Fonctions arithmétiques

Définition 1.1. *On appelle fonction arithmétique, toute application f définie de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$.*

- On note par $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions arithmétiques.

I.1 Quelques Fonctions arithmétiques usuels :

I.1.1 Fonction nombre de diviseurs d(n)

Définition 1.2. *Pour tout entier $n \geqslant 1$, $d(n)$ est le nombre de diviseurs d'un entier naturel n qui est définie par :*

$$\begin{aligned} d(n) &= \sharp \{d \in \mathbb{N}^*,\ d \mid n\} \\ &= \sum_{d|n} 1. \end{aligned}$$

Exemple :

$$\begin{aligned} d(7) &= \sharp \{1,7\} = 2. \\ d(9) &= \sharp \{1,3,9\} = 3. \\ d(24) &= \sharp \{1,2,3,4,6,8,12,24\} = 8. \end{aligned}$$

I.1.2 Fonction somme de diviseurs $\sigma(n)$

Définition 1.3. *Pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction somme des diviseurs $\sigma(n)$ est définie par :*

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$$

Exemple :

$$\sigma(5) = 1 + 5 = 6.$$
$$\sigma(8) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15.$$
$$\sigma(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18.$$

I.1.3 Fonction de Von Mangoldt

Définition 1.4. *La fonction de Von Mangoldt, traditionnellement notée Λ, est définie sur $\mathbb{N}^*$ par :*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & si\ n = \ p^\alpha \ avec\ \alpha \geqslant 1, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Quelques valeurs de $\Lambda(n)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Lambda(n)$	0	log2	log3	log2	log5	0	log7	log2	log3	0

I.1.4 Fonction de Möbius

Définition 1.5. *La fonction de Möbius μ est définie de $\mathbb{N}^*$ dans $\{-1, 0, 1\}$ comme suit : pour tout entier $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, vaut*

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & si\ n = 1, \\ (-1)^k & si\ n = p_1 p_2 \dots p_k, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Exemple : $\mu(10) = 1, \mu(20) = 0, \mu(30) = -1.$

I.1.5 Fonction indicatrice d'Euler :

Définition 1.6. *La fonction indicatrice d'Euler $\varphi(n)$ est définie par :*

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \sharp\left\{m \in \mathbb{N}^*/1 \leqslant m < n \text{ et } (m,n)=1\right\}\\ &= \sum_{\substack{m\leqslant n\\(m,n)=1}} 1.\end{aligned}$$

Quelques valeurs sur un tableau de la fonction $\varphi(n)$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4

Propriétés

1. Pour tout constant A de $\mathbb{R}$, on a $A = O(1)$.
2. Si $f_1(x) = O(g(x))$ et $f_2(x) = O(g(x))$, alors $(f_1 + f_2)(x) = O(g(x))$.
3. Si $f_1(x) = O\left(g_1(x)\right)$ et $_2(x) = O\left(g_2(x)\right)$, alors $(f_1+f_2)(x) = O\left(max(\mid g_1(x)\mid ;\mid g_2(x)\mid)\right)$.
4. Si $f_1(x) = O(g_1(x))$ et $f_2(x) = O(g_2(x))$, alors $(f_1 f_2)(x) = O(g_1 g_2)(x)$.
5. $f(x) = O(g(x))$ et $g(x) = O(h(x))$, alors $f(x) = O(h(x))$.

I.2 Fonctions arithmétiques multiplicatives

Définition 1.7. *Une fonction arithmétique est dite multiplicative si :*

$$\begin{cases} f(1) = 1, \\ \quad et \\ f(nm) = f(n)f(m) \qquad \text{si (n,m)=1.} \qquad (*) \end{cases}$$

et pour tout entier $n = \prod_{p^\alpha \| n} p^\alpha$, *on écrit*

$$f(n) = \prod_{p^\alpha \| n} f(p^\alpha).$$

En particulier, f est dite complètement multiplicative si la condition $(*)$ est vraie pour tous m, n dans $\mathbb{N}^*$. Dans ce cas on a

$$f(n) = \prod_{p^\alpha \| n} (f(p))^\alpha.$$

Théorème 1.1. *Soit f une fonction multiplicative et $m_1, m_2, \dots m_k$; k nombres premiers entre eux deux à deux, on a*

$$f\left(\prod_{i=1}^{k} m_i\right) = \prod_{i=1}^{k} f(m_i).$$

Démonstration.
On montre le théorème par récurrence. Puisque les nombres $m_1, m_2, \dots m_k$ premiers entre eux deux à deux, on a :
- Pour $k = 2$: $f(m_1 m_2) = f(m_1)f(m_2)$ car $(m_1, m_2) = 1$ et f est multiplicative.
- Pour tout entier $k \geqslant 1$, on suppose que

$$f\left(\prod_{i=1}^{k} m_i\right) = \prod_{i=1}^{k} f(m_i).$$

Soit m_{k+1} un premier avec tous les nombres $m_1, m_2, \dots m_k$; donc il est premier avec le produit $\prod_{i=1}^{k} m_i$. Par conséquent

$$f\left(\prod_{i=1}^{k+1} m_i\right) = f\left(m_{k+1}\prod_{i=1}^{k} m_i\right) = f(m_{k+1})f\left(\prod_{i=1}^{k} m_i\right) = f(m_{k+1})\prod_{i=1}^{k} f(m_i).$$

Alors

$$f\left(\prod_{i=1}^{k} m_i\right) = \prod_{i=1}^{k} f(m_i).$$

□

Remarque 1.1. *Pour tout entier $n \geqslant 2$. On a*

1. *Une fonction multiplicative f est entièrement déterminée par ses valeurs en les puissances non nulles des entiers premiers . En effet, d'après le théorème fondamental de l'arithmétique, tout entier $n \geqslant 2$ admet une décomposition unique en produit de facteurs premier comme suit*

   $$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}.$$

   Comme f est multiplicative, alors on a

   $$f(n) = f(p_1^{k_1}) f(p_2^{k_2}) \dots f(p_r^{k_r}).$$

2. *Si f est complètement multiplicative c-à-d si $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$, on a*

$$f(n) = f(p_1)^{k_1} f(p_2)^{k_2} \dots f(p_r)^{k_r}$$

alors f est entièrement déterminée par ses valeurs aux nombre premiers .

Remarque 1.2. *On remarquons que*

1. *Les fonctions d, σ , μ et φ sont des fonctions arithmétiques multiplicatives.*
2. *La fonction I, définie par $I(n) = 1$ pour tout entier $n \geqslant 1$, est une fonction complètement multiplicative.*

Remarque 1.3. *La fonction de Von Mangoldt n'est pas multiplicative.*
En effet, on a $\Lambda(8) = log2$; $\Lambda(9) = log3$, mais $\Lambda(8.9) = 0$, donc $\Lambda(8.9) \neq \Lambda(8)\Lambda(9)$.

II Produit de convolution

Définition 1.8. *Le produit de convolution de Dirichlet de deux fonctions arithmétiques f et g notée $f * g$ est définie par :*

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) g(d).$$

Proposition 1.1. *Soient f , g et h trois fonctions arithmétiques. On a*

1. $f * g = g * f$.
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$.
3. $f * (g + h) = (f * g) + (f * g)$.

Démonstration. Soient f, g et h trois fonctions arithmétiques.

1. La loi $*$ est commutative :

   pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} g\left(\frac{n}{d}\right) f(d) = \sum_{d|n} g(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = (g * f)(n)$$

2. La loi $*$ est associative :

$$\begin{aligned}
((f * g) * h) &= \sum_{d|n} (f * g)(d) h\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{dm=n} (f * g)(d) h(m) \\
&= \sum_{dm=n} \sum_{kl=d} f(k) g(l) h(m) = \sum_{klm=n} f(k) g(l) h(m) \\
&= \sum_{k|n} f(k) \sum_{lm=n/k} g(l) h(m) = \sum_{k|n} f(k) \sum_{l|(n/k)} g(l) h\left(\frac{n}{kl}\right) \\
&= \sum_{k|n} f(k) (g * h)\left(\frac{n}{k}\right) = (f * (g * h))(n).
\end{aligned}$$

3. La loi $*$ est distributive par rapport à l'addition :

$$\forall\ f, g, h \in \mathcal{A} \quad (f * (g * h))\,(n) = (f * g) + (f * h).$$

   En effet,

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f * (g + h)(n) &= \sum_{d|n} f(d) g\left((n/d) + h(n/d)\right) \\
&= f * g(n) + f * h(n).
\end{aligned}$$

□

Remarque 1.4. *L'ensemble des fonctions arithmétiques muni de l'addition et de la convolution de Dirichlet $*$ forme un anneau commutatif.*

Remarque 1.5. *L'élément neutre de la loi $*$ dans l'ensemble $\mathcal{A}$ est la fonction arithmétique indicatrice e_1 définie par*

$$e_1(n) = \begin{cases} 1 & si\ n = 1 \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

En effet ; soit $f \in \mathcal{A}$, on a

$$\begin{aligned}(f * e_1)(n) &= \sum_{d|n} f(d) e_1\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= (e_1 * f)(n) = f(n).\end{aligned}$$

Théorème 1.2. *Si f et g deux fonctions multiplicatives , alors $f * g$ est multiplicative.*

La preuve est basée sur le lemme suivant.

lemme 1.1. *Soient m, n deux entiers positifs tels que $(m, n) = 1$. Si d un diviseur de mn, alors d s'écrit de la façon unique suivante : $d = d_1 d_2$ où $d_1 \mid m$ et $d_2 \mid n$ où $(d_1, d_2) = 1$.*

Démonstration.

- Prouvons d'abord l'existence de d_1 et d_2. Écrivons

  $$m = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \quad et \quad n = p_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \dots p_{k+r}^{\alpha_{k+r}}.$$

  Notons que comme $(m, n) = 1$, les nombres premiers qui interviennent dans la factorisation de m sont tous différents de ceux qui interviennent dans la factorisation de n. Alors

  $$mn = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} p_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \dots p_{k+r}^{\alpha_{k+r}}.$$

  Si d est un diviseur de mn, alors il s'écrit nécessairement sous la forme

  $$d = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k} p_{k+1}^{\beta_{k+1}} \dots p_{k+r}^{\beta_{k+r}},$$

  où $\beta_i \leqslant \alpha_i$, pour tout $i = 1, 2, \dots, k + r$. Définissons alors

  $$d_1 = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k} \ \ et \ \ d_2 = p_{k+1}^{\beta_{k+1}} \dots p_{k+r}^{\beta_{k+r}}.$$

  On a $d = d_1 d_2$ et $d_1 \mid m$, $d_2 \mid n$, ce qui prouve l'existence de la décomposition .

- Il reste a prouver l'unicité. Soit $d = d_1 d_2 = d_1^{'} d_2^{'}$, avec d_1, et $d_1^{'}$ divisent m et $d_2, d_2^{'} \mid n$.
  Soit $\delta = (d_1, d_2^{'})$. Alors δ divise d_1 et donc m et δ divise $d_2^{'}$ donc n, ainsi $\delta \mid (m, n)$ par conséquent $\delta = (d_1, d_2^{'}) = 1$. Comme $d_2^{'}$ divise $d_1 d_2$ donc $d_2^{'} \mid d_2$. Par la symétrie, on obtient $d_2 \mid d_2^{'}$ et donc $d_2 = d_2^{'}$, et de même on trouve $d_1 = d_1^{'}$, ce qui prouve l'unicité.

$\square$

Démonstration. (du théorème (1.2)) Soient m, n deux entiers premiers entre eux et soit $h = f * g$. On a

$$h(mn) = \sum_{d \mid mn} f(d) g\left(\frac{mn}{d}\right) = \sum_{\substack{d_1 \mid m \\ d_2 \mid n}} f(d_1 d_2) g\left(\frac{mn}{d_1 d_2}\right).$$

On utilise l'implication suivante $(m, n) = 1 \Rightarrow (d_1, d_2) = 1$ et $\left(\frac{m}{d_1}, \frac{n}{d_2}\right) = 1$. D'où

$$\begin{aligned} h(nm) = (f * g)(nm) &= \sum_{d \mid nm} f(d) g\left(\frac{nm}{d}\right) \\ &= \sum_{d_1 d_2 \mid nm} f(d_1 d_2) g\left(\frac{nm}{d_1 d_2}\right) \\ &= \sum_{d_1 \mid n} f(d_1) g\left(\frac{n}{d_1}\right) \sum_{d_2 \mid n} f(d_2) g\left(\frac{m}{d_2}\right) \\ &= (f * g)(n)(f * g)(m). \end{aligned}$$

$\square$

Proposition 1.2. *(Méthode de sommation) (voir [5])*
Soient f , g deux fonctions arithmétiques , et soit $x \geqslant 1$ un nombre réel. On a

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} (f * g)(n) &= \sum_{n \leq x} \sum_{d \mid n} f(d) g(n/d) \\ &= \sum_{d \leq x} f(d) \sum_{k \leq x/d} g(k). \end{aligned}$$

Corollaire 1.3. *e_1 la fonction qui définie par :*

$$e_1(n) = \begin{cases} 1 \; si \;\; n=1 \\ 0 \; si \; n > 1. \end{cases}$$

Si f est une fonction multiplicative alors la fonction F définie par $F = f * \mathbf{1}$ est multiplicative. Remarquons que pour tout entier $n \geqslant 1$

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Exemple 1.1. *Soit $\mu * \mathbf{1} = e_1$, on applique la proposition* (1.2) *pour ce produit de convolution on obtient :*

$$\sum_{n \leqslant x} e_1(n) = 1 = \sum_{n \leqslant x} (\mu * \mathbf{1})(n) = \sum_{d \leqslant x} \mu(d) \sum_{k \leqslant x/d} 1 = \sum_{d \leqslant x} \mu(d) \left[\frac{x}{d}\right]$$

alors

$$\sum_{n \leqslant x} \mu(n) \left[\frac{x}{n}\right] = 1.$$

Théorème 1.4. *(Formule d'inversion de Möbius) Soit f une fonction arithmétique, pour tout n entier positif, on a*

$$F = f * \mathbf{1} \;\Leftrightarrow f = F * \mu$$

c-à-d

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) \Leftrightarrow f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right)$$

Démonstration. Soit $F = f * \mathbf{1}$.

1. On a
$$F * \mu = (f * \mathbf{1}) * \mu = f * (\mathbf{1} * \mu) = f * e_1 = f.$$

2. Soit $f = F * \mu$
$$f * \mathbf{1} = (F * \mu) * \mathbf{1} = F * (\mu * \mathbf{1}) = F * e_1 = F.$$

□

Chapitre 2

Résultat asymptotique sur la fonction μ_2 dans des intervalles courts.

Dans ce chapitre, nous présentons la démonstration en détails d'un résultat concernant la fonction $\mu_2(n)$; la fonction caractéristique des nombres square-free, ça veut dire, les entiers qui ne contiennent pas des diviseurs carrés. Ce résultat est la valeur moyenne pour cette fonction dans des intervalles courts de la forme $]x, x+y]$, avec x, y sont des réels positifs vérifient certaines conditions. Tout d'abord, nous notons que ce résultat a été démontré dans ([2]). Nous présentons également ce résultat

$$\sum_{x<n\leq x+y} \mu_2(n) = \frac{y}{\zeta(2)} + O\left(x^{1/3}\log x\right).$$

Nous commençons tout d'abord par quelques définitions et un théorème sur la valeur moyenne de la fonction $\mu_2(n)$.

Définition 2.1. *Soient $n \geqslant 2$ et $k \geq 2$ deux entiers, tel que $n = \prod\limits_{p^\alpha \| n} p^\alpha$ (la factorisation canonique de n). L'exposant α est appelé la valuation $p-$adique de n et noté $v_p(n)$.*

1. *Si pour tout premier p, $v_p(n) < k$ on dit que l'entier n est k-free , en particulier si $k = 2$, n est dit square-free.*

2. *Si pour tout premier p, $v_p(n) \geq k$ on dit que l'entier n est un k-full, en particulier si $k = 2$, n est dit square-full.*

Exemple 2.1. *1. Soit $k \geqslant 2$ un entier. Tout nombre premier est k-free.*

2. *Les entiers $6, 10, 15, 21$ sont square-free, car pour $p \in \{2,3,5,7\}$ on a $v_p(n) < 2 \Rightarrow n\ squarefree$ où $n \in \{6, 10, 15, 21\}$.*

3. *Par convention, Le nombre 1 est le seul entier qui est à la fois k-free et k-full pour tout entier $k \geqslant 2$.*

Définition 2.2. *La fonction caractéristique de l'ensemble des nombres k-free notée μ_k définie par :*

$$\mu_k(n) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & si\ n\ est\ k-free, \\ 0 & \qquad\qquad sinon. \end{array} \right.$$

Proposition 2.1. *Soit $k \geqslant 2$ un entier . On a*

$$\mu_k(n) = \sum_{d^k|n} \mu(d)$$

Démonstration.
Il suffit de démontrer que $\mu_k = f_k * e_1$ tel que f_k est la fonction multiplicative définie par :

$$f_k(n) = \begin{cases} \mu(d) & si\ n = d^k \\ 0 & sinon, \end{cases}$$

car

$$\left(f_k * e_1\right)(n) = \sum_{d|n} f_k(d)$$

et comme

$$f_k(d) = \begin{cases} \mu(m) & si\ d = m^k \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Alors

$$\left(f_k * e_1\right)(n) = \sum_{m^k|n} \mu(m).$$

Pour tout facteur premier p^α on a :

$$(f_k * e_1)(p^\alpha) = \sum_{d|p^\alpha} f_k(d)e_1\left(\frac{p^\alpha}{d}\right) = e_1(p^\alpha) + \sum_{i=1}^{\alpha} f_k(p^i)e_1(p^{\alpha-i}) = 1 + \sum_{i=1}^{\alpha} f_k(p^i)$$

alors

$$(f_k * e_1)(p^\alpha) = 1 + \begin{cases} 0 & si\ \alpha < k \\ \text{et} & \\ \mu(p) & si\ \alpha\ \geqslant\ k \end{cases} = \begin{cases} 1 & si\ \alpha < k \\ \text{et} & \\ 0 & sinon \end{cases} = \mu_k(p^\alpha).$$

Donc on a $(f_k * e_1)(n) = \mu_k(n)$. □

Proposition 2.2. *1. Soit $k \geqslant 2$ un entier fixé. Alors chaque entier $n \geqslant 2$ est s'écrit sous une forme unique $n = qm^k$ où q est k-free.*

2. Chaque entier $n \geqslant 2$ square-full s'écrit d'une manière unique $n = a^2b^3$, b square-free.

Démonstration.

1. On écrit

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} = \prod_{\alpha_i \geqslant k} p_i^{\alpha_i} \prod_{\alpha_i < k} p_i^{\alpha_i}.$$

Pour chaque entier i tel que $\alpha_i \geqslant k$, la division euclidienne de α_i par k donne une couple unique (h_i, β_i) d'entiers non négatifs tels que $\alpha_i = \beta_i + h_i k$ et $0 \leqslant \beta_i < k$. Donc

$$n = \left(\prod_{\alpha_i \leqslant k} p_i^{\beta_i} \prod_{\alpha_i < k} p_i^{\alpha_i}\right)\left(\prod_{\alpha_i \geqslant k} p_i^{h_i}\right)^k.$$

Alors nous avons prouvé que la décomposition existe . Pour montrer l'unicité, supposons que nous avons $n = q_1 m_1^k = q_2 m_2^k$ avec q_i k-free.
Pour tout premier p on a :

$$v_p(q_1) + kv_p(m_1) = v_p(q_2) + kv_p(m_2)$$

et donc

$$k \mid \big(v_p(q_1) - (v_p(q_2)\big)$$

et puisque les q_i sont k-free , on obtient $v_p(q_1) = v_p(q_2)$, par suite $q_1 = q_2$ et $m_1 = m_2$.

2. Soit $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ un nombre square-full, donc $\alpha_i \geqslant 2$ pour tout entier $i = 1, 2, \ldots, r$. Ainsi, pour tout α_i il existe un entier unique β_i tel que

$$\begin{cases} \alpha_i = \beta_i + 2h_i \\ \\ \beta_i \in \{2, 3\} \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad h_i = \left[\frac{\alpha_i - 2}{2}\right] \in \mathbb{Z}_+.$$

Alors

$$n = \left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{h_i}\right)^2 \prod_{i=1}^{r} p_i^{\beta_i} = \left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{h_i} \prod_{\beta_i=2} p_i\right)^2 \prod_{\beta_i=3} p_i^3,$$

ce qui prouve l'existence de la décomposition.
Pour montrer l'unicité, supposons que nous avons $n = a_1^2 b_1^3 = a_2^2 b_2^3$ tel que b_i est square-free, alors

$$2(v_p\left(a_1\right) - v_p(a_2)) = 3\left(v_p(b_2) - v_p(b_1)\right)$$

par conséquent, $2 \mid \left(v_p(b_2) - v_p(b_1)\right)$. Ce qui implique $v_p(b_2) = v_p(b_1)$ pour tout premier p, et donc $b_1 = b_2$. De même on trouve $a_1 = a_2$.

□

Remarque 2.1. *Soit $n \geqslant 2$ un entier tel que $n = qm^k$ avec $k \geqslant 2$ un entier fixé et q un entier k-free.*
La fonction $d_{(k)}(n)$ définie par $d_{(k)}(n) = \sum_{d^k \mid n} 1$ vérifier $d_{(k)}(n) = d(m)$. En effet

$$\begin{aligned} d_{(k)}(n) &= \sum_{d^k \mid n} 1 = d_{(k)}(qm^k) = \sum_{d^k \mid qm^k} 1 = \sum_{d^k \mid m^k} 1 \\ &= \sum_{d \mid m} 1 = d(m). \end{aligned}$$

Définition 2.3. *Soit x un nombre réel , on désigne par $[x]$ la partie entière de x qui est l'unique entier k , tel que $k \leqslant x < k+1$, et on désigne par $\| x \|$ la distance $d(x, \mathbb{Z})$, ça veut dire $\| x \| := \min\{| x - m | : m$ un entier$\}$, de plus on remarque que*

$$\| x \| = \min\left(\{x\}, 1 - \{x\}\right) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Proposition 2.3. *Soient x un nombre réel quelconque et δ un réel tel que $0 \leqslant \delta < \frac{1}{2}$ on a*

1. $[x] = x + O(1)$.
2. $$[x+\delta] - [x] = 1 \;\Leftrightarrow \{x\} \geqslant 1 - \delta. \tag{2.1}$$
   $$[x] - [x-\delta] = 1 \;\Leftrightarrow \{x\} < \delta. \tag{2.2}$$
3. $$[x+\delta] - [x-\delta] = \begin{cases} 1 & Si \ \| x \| < \delta, \\ 0 & Si \ \| x \| > \delta, \\ 0 \ ou \ 1 & Si \ \| x \| = \delta. \end{cases}$$

Démonstration.

1. On a $x = [x] + \{x\}$, alors $[x] = x - \{x\}$ et comme $0 \leqslant \{x\} < 1$ alors $\{x\} = O(1)$, donc $[x] = x + O(1)$.
2. Pour (2.1), on démontre les doubles implications
   (a) On suppose que $[x+\delta] - [x] = 1$ et comme $x = [x] + \{x\}$, alors
   $$[x+\delta] - [x] = [[x] + \{x\} + \delta] - [x] = [\{x\} + \delta]$$
   d'autre part on a $0 \leqslant \delta < \frac{1}{2}$ et $0 \leqslant \{x\} < 1$, alors $0 \leqslant \{x\} + \delta < \frac{3}{2}$, et comme $[\{x\} + \delta] = 1$, il vient $1 \leqslant \{x\} + \delta < \frac{3}{2}$. Donc $\{x\} \geqslant 1 - \delta$

(b) Pour l'implication inverse ; on suppose que $\{x\} \geqslant 1-\delta$.
On a $[x+\delta] = x+\delta-\{x+\delta\}$ alors

$$\begin{aligned}[x+\delta]-[x] &= x+\delta-[x]-\{x+\delta\} \\ &= x+\delta-x+\{x\}-\{x+\delta\} \\ &= \delta+\{x\}-\{x+\delta\}\end{aligned}$$

et comme $0 \leqslant \{x+\delta\} < 1$, alors $0 \geqslant -\{x+\delta\} > -1$ et $1 \leqslant \delta+\{x\} < \dfrac{3}{2}$ ce qui implique $2 >\leqslant [x+\delta]-[x] \Rightarrow [x+\delta]-[x] = 1$, et $\delta+\{x\}-\{x+\delta\} \geqslant 0$ et comme $[x+\delta]-[x]$ est un entier, alors on conclure

$$[x+\delta]-[x] = 1.$$

Pour (2.2) on démontre les doubles implications

- On suppose $[x]-[x-\delta] = 1$, et on montre que $\{x\} < \delta$.
On a $[x]-[[x]+\{x\}-\delta] = [x]-[x]-[\{x\}-\delta] = -[\{x\}-\delta]$. Donc $[x]-[[x]+\{x\}-\delta] = 1$ implique $[\{x\}-\delta] = -1$ par conséquent $\{x\}-\delta < 0$, alors $\{x\} < \delta$.
- l'inverse : on suppose $\{x\} < \delta$, et on montre que $[x]-[x-\delta] = 1$. On a $-\dfrac{1}{2} < [\{x\}-\delta] < 1$ car $0 \leqslant \{x\} < 1$, et $-\dfrac{1}{2} < \delta \leqslant 0$, et comme $\{x\} < \delta$ alors $-\dfrac{1}{2} < [\{x\}-\delta] < 0$, donc $[\{x\}-\delta] = -1$,alors $[x]-[x-\delta] = 1$.

3. On termine par la troisième assertion

- Si $\| x \| < \delta$ alors $\{x\} < \delta$ où $1-\{x\} < \delta$ et alors

$$[x+\delta]-[x-\delta] = [x+\delta]-[x]+[x]-[x-\delta] = 1.$$

- Si $\| x \| > \delta$ alors $\delta < \{x\} < 1-\delta$, on a

$$[x+\delta]-[x-\delta] = [\{x\}+\delta]-[\{x\}-\delta]$$

et comme $0 < \{x\}+\delta < 1$ et $0 < \{x\}-\delta < \{x\}+\delta < 1$ alors $[\{x\}+\delta] = [\{x\}-\delta] = 0$ donc $[x+\delta]-[x-\delta] = 0$.

- Si $\| x \| = \delta$ alors $\{x\} = \delta$ où $\{x\} = 1-\delta$, donc pour $\{x\} = \delta$ trouve $[x+\delta]-[x-\delta] = 0$, et pour $\{x\} = 1-\delta$ on a $[x+\delta]-[x-\delta] = 1$.

□

Définition 2.4. *Pour tout nombre complexe s tel que $Re(s) > 1$, la série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ *est convergente, et sa somme est la fonction zêta de Riemann notée $\zeta(s)$. Cette fonction vérifier l'égalité suivante :*

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \quad , Re(s) > 1$$

le mombre à droit est le produit eulérien de la fonction zêta, ([6]).

Théorème 2.1. *Soit $k \geqslant 2$ un entier, on a*

$$\sum_{n \leqslant x} \mu_k(n) = \frac{x}{\zeta(k)} + O\left(x^{1/k}\right),$$

tel que ζ est la fonction zêta de Riemann.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leqslant x} \mu_k(n) &= \sum_{n \leqslant x} \sum_{d^k \mid n} \mu(d) = \sum_{d \leqslant x^{1/k}} \mu(d) \sum_{k \leqslant x/d^k} 1 \\
&= \sum_{d \leqslant x^{1/k}} \mu(d) \left[\frac{x}{d^k}\right] = \sum_{d \leqslant x^{1/k}} \mu(d) \left(\frac{x}{d^k} + O(1)\right) \\
&= x \sum_{d \leqslant x^{1/k}} \frac{\mu(d)}{d^k} + O\left(\mid \sum_{d \leqslant x^{1/k}} \mu(d) \mid \right).
\end{aligned}$$

Comme $\mid \mu(d) \mid \leqslant 1$, nous avons d'une part :

$$\mid \sum_{d \leqslant x^{1/k}} \mu(d) \mid \leqslant \sum_{d \leqslant x^{1/k}} \mid \mu(d) \mid \leqslant \sum_{d \leqslant x^{1/k}} 1 = \left[x^{1/k}\right] = x^{1/k} + O(1),$$

est d'une autre part $\mid \sum_{d \leqslant x^{1/k}} \mu(d) \mid \leqslant x^{1/k}$. Donc $\mid \sum_{d \leqslant x^{1/k}} \mu(d) \mid \ll x^{1/k}$, par conséquent

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leqslant x} \mu_k(n) &= x \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^k} - x \sum_{d > x^{1/k}} \frac{\mu(d)}{d^k} + O\left(x^{1/k}\right) \\
&= \frac{x}{\zeta(k)} + O\left(x \sum_{d > x^{1/k}} \frac{1}{d^k}\right) + O\left(x^{1/k}\right),
\end{aligned}$$

et comme $O\left(x\sum_{d>x^{1/k}}\frac{1}{d^k}\right)=O\left(x^{1/k}\right)$, alors

$$\sum_{n\leqslant x}\mu_k(n)=\frac{x}{\zeta(k)}+O\left(x^{1/k}\right).$$

$\square$

Définition 2.5. *Soient N un entier grand et δ un réel positif petit tel que* $0<\delta\leq\frac{1}{4}$*, et soit* $f:[N,2N]\longrightarrow\mathbb{R}$ *une fonction régulière. On définie l'ensemble* $\mathcal{R}(f,N,\delta)$ *par :*

$$\mathcal{R}(f,N,\delta)=\sharp\,\{n\in[N,2N]\cap\mathbb{Z}\ :\|\ f(n)\ \|<\delta\}.$$

Sachant que $\|\ x\ \|$ *désigne la distance du réel x à l'ensemble* $\mathbb{Z}$*.*

Remarque 2.2. *(voir [3],[4]) Soient* $f:[N,2N]\longrightarrow\mathbb{R}$ *et δ un nombre réel, et N un entier . On peut écrire* $\mathcal{R}\left(f,N,\delta\right)$ *comme suit*

$$\mathcal{R}\left(f,N,\delta\right):=\sharp\left\{n\in[N,2N]\cap\mathbb{Z}\,,\exists\ m\in\mathbb{Z},|\ f(n)-m\ |<\delta\right\}.$$

On remarque que si δ suffisamment très petit, le nombre $\mathcal{R}\left(f,N,\delta\right)$ *compte le nombre des points entiers* (n,m) *qui sont plus proches de la courbe d'équation* $y=f(x)$*.*
Si δ suffisamment très petite et $y=f(x)$ *tel que* $N\leqslant x\leq 2N$ *alors*

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{N\leqslant n\leqslant 2N\\ f(n)-\delta<m<f(n)+\delta}}1&=\sum_{N\leqslant n\leqslant 2N}\ \sum_{f(n)-\delta<m<f(n)+\delta}1\\&=\sum_{N\leqslant n\leqslant 2N}\left([f(n)+\delta]-[f(n)-\delta]\right),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\left(f,N,\delta\right)&=\sum_{N\leqslant n\leqslant 2N}\left([f(n)+\delta]-[f(n)-\delta]\right)-\sum_{\|f(n)\|\geqslant\delta}\left([f(n)+\delta]-[f(n)-\delta]\right)\\&=\sum_{N\leqslant n\leq 2N}\left([f(n)+\delta]-[f(n)-\delta]\right)-\sum_{\|f(n)\|=\delta}\left([f(n)+\delta]-[f(n)-\delta]\right).\end{aligned}$$

On a les résultats suivants

lemme 2.1. *Soient* $f : [N, 2N] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction régulière et* δ , δ_n *deux nombres réels tels que :*
$0 < \delta \leq \frac{1}{4}$ *et* $(\delta_n)_n$ *une suite des nombres réels tel que* $n \in [N, 2N]$ *et* $0 \leqslant \delta_n < \delta$*. On a*

$$\sum_{N<n\leq 2N} ([f(n)+\delta_n] - [f(n)-\delta_n]) \leq \mathcal{R}(f,N,\delta) \leq \sum_{N<n\leq 2N} ([f(n)+\delta] - [f(n)-\delta])$$

Démonstration. On écrit, d'après proposition (2.3)

$$\begin{aligned}
\sum_{N\leqslant n\leq 2N} ([f(n)+\delta_n] - [f(n)-\delta_n]) &= \sum_{\substack{N\leqslant n\leq 2N \\ \|f(n)\|<\delta_n}} 1 + \sum_{\substack{N\leqslant n\leq 2N \\ \|f(n)\|=\delta_n}} ([f(n)+\delta_n] - [f(n)-\delta_n]) \\
&\leq \sum_{\substack{N\leqslant n\leq 2N \\ \|f(n)\|\leq\delta_n}} 1 \leq \mathcal{R}(f,N,\delta). \\
&= \sum_{N\leqslant n\leq 2N} ([f(n)+\delta] - [f(n)-\delta]) \\
&- \sum_{\substack{N\leqslant n\leq 2N \\ \|f(n)\|=\delta}} ([f(n)+\delta] - [f(n)-\delta]) \\
&\leq \sum_{N\leqslant n\leq 2N} ([f(n)+\delta] - [f(n)-\delta]) .
\end{aligned}$$

□

lemme 2.2. *(voir [2]) Soient* M *un nombre réel et* $f(n)$, $\delta(n)$ *deux fonctions tels que* $\delta = max_{n\leq M}\, \delta(n)$ *et* $0 < \delta \leq 1/4$*. On a*

$$\sum_{n\leq M} ([f(n)+\delta] - [f(n)]) \ll max_{N\leq M}\, \mathcal{R}\left(f,N,\delta\right) \log M. \tag{2.3}$$

Remarque 2.3. *(voir [2]) Soient* $k \geqslant 2$ *un entier, et* $c := c(k)$ *une constante. Si* $y = cx^{1/(2k+1)} \log x$ *sachant que* x *est suffisamment grand, alors l'intervalle* $]x, x+y]$ *contient des nombres k-free.*

Nous présentons maintenant l'énoncé du résultat principal de ce chapitre.

Théorème 2.2. *Soient* x, y *deux nombres réels tel que* $2 \leq y \leq x$*, on a la formule asymptotique suivante*

$$\sum_{x<n\leq x+y} \mu_2(n) = \frac{y}{\zeta(2)} + O\left(x^{1/3}\log x\right).$$

tel que $\mu_2(n)$ *est la fonction caractéristique des nombres square-free.*

Démonstration. d'après théorème (2.1) on a

$$\sum_{n\leqslant x}\mu_2(n)=\frac{x}{\zeta(2)}+O(\sqrt{x}).$$

Alors, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{x<n\leqslant x+y}\mu_2(n) &= \sum_{n\leqslant x+y}\mu_2(n)-\sum_{n\leqslant x}\mu_2(n)\\ &= \frac{x+y}{\zeta(2)}+O\left(\sqrt{x+y}\right)-\frac{x}{\zeta(2)}+O\left(\sqrt{x}\right)\\ &= \frac{y}{\zeta(2)}+O\left(\sqrt{x+y}\right)+O\left(\sqrt{x}\right).\end{aligned}$$

Comme $y<x$ alors $\sqrt{y}<\sqrt{x}$ donc $\sqrt{y}=O\left(\sqrt{x}\right)$, et de plus $y<x\Longrightarrow x+y<2x$ alors $\sqrt{x+y}<\sqrt{2}\sqrt{x}$ donc $\sqrt{x+y}=O\left(\sqrt{x}\right)$.
Par conséquent, on a

$$\sum_{x<n\leqslant x+y}\mu_2(n)=\frac{y}{\zeta(2)}+O(\sqrt{x}). \tag{2.4}$$

Par suite on a

$$\begin{aligned}\sum_{x<n\leq x+y}\mu_2(n) &= \sum_{x<n\leq x+y}\ \sum_{d^2|n}\mu(d)\\ &= \sum_{d\leq\sqrt{x+y}}\mu(d)\sum_{x/d^2<k\leq(x+y)/d^2}1\\ &= \sum_{d\leq\sqrt{x+y}}\mu(d)\left(\left[\frac{x+y}{d^2}\right]-\left[\frac{x}{d^2}\right]\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{x<n\leq x+y}\mu_2(n) &= \left(\sum_{d\leq 2\sqrt{y}}+\sum_{2\sqrt{y}<d\leq\sqrt{x}}+\sum_{\sqrt{x}<d\leq\sqrt{x+y}}\right)\mu(d)\left(\left[\frac{x+y}{d^2}\right]-\left[\frac{x}{d^2}\right]\right)\\ &= S_1+S_2+S_3\end{aligned}$$

1. Pour $S_1=\sum_{d\leq 2\sqrt{y}}\mu(d)\left(\left[\frac{x+y}{d^2}\right]-\left[\frac{x}{d^2}\right]\right)$, le fait que $[x]=x+O(1)$, on obtient

$$\begin{aligned}S_1 &= \sum_{d\leq 2\sqrt{y}}\mu(d)\left(\frac{x+y}{d^2}-\frac{x}{d^2}+O(1)\right)\\ &= y\sum_{d\leq 2\sqrt{y}}\frac{\mu(d)}{d^2}+O\left(\left|\sum_{d\leqslant 2\sqrt{y}}\mu(d)\right|\right),\end{aligned}$$

et comme $\mid \sum_{d\leqslant 2\sqrt{y}} \mu(d) \mid \leqslant \sum_{d\leqslant 2\sqrt{y}} \mid \mu(d) \mid \leqslant \sum_{d\leqslant 2\sqrt{y}} 1 = [2\sqrt{y}] = 2\sqrt{y} + O(1)$ alors on a $\mid \sum_{d\leqslant 2\sqrt{y}} \mu(d) \mid \ll \sqrt{y}$. Donc

$$S_1 = y \sum_{d\leq 2\sqrt{y}} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(\sqrt{y}) = \frac{y}{\zeta(2)} + O(\sqrt{y}).$$

2. Pour $S_3 = \sum_{\sqrt{x}<d\leq\sqrt{x+y}} \mu(d) \left(\left[\frac{x+y}{d^2} \right] - \left[\frac{x}{d^2} \right] \right)$ on obtient :

$$\begin{aligned} \mid S_3 \mid &\leq \sum_{\sqrt{x}<d\leq\sqrt{x+y}} 1 \leq \sqrt{x+y} - \sqrt{x} + 1 = \frac{\left(\sqrt{x+y} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+y} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+y} + \sqrt{x}} + 1 \\ &= \frac{y}{\sqrt{x+y} + \sqrt{x}} + 1 \leqslant \frac{y}{2\sqrt{x}} + 1 \leq yx^{-1/2} + 1 \ll \sqrt{y} \end{aligned}$$

car $y \leqslant x$ implique $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \leqslant 1$. Dans ce cas, on a

$$yx^{-1/2} + 1 = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\sqrt{y} + 1 \leqslant \sqrt{y} + 1 = O\left(\sqrt{y}\right).$$

c-à-d $S_3 = O(\sqrt{y})$ Alors

$$\sum_{x<n\leq x+y} \mu_2(n) = \frac{y}{\zeta(2)} + \sum_{2\sqrt{y}<d\leq\sqrt{x}} \mu(d) \left(\left[\frac{x+y}{d^2} \right] - \left[\frac{x}{d^2} \right] \right) + O(\sqrt{y}).$$

On a $\delta = \frac{y}{d^2} < \frac{1}{4}$, alors $\left[\frac{x+y}{d^2} \right] - \left[\frac{x}{d^2} \right] = 0$ où 1 ce qui donne le résultat

$$\sum_{x<n\leqslant x+y} \mu_2(n) = \frac{y}{\zeta(2)} + O(\sqrt{x}). \tag{2.5}$$

3. Pour $S_2 = \sum_{2\sqrt{y}<d\leq\sqrt{x}} \mu(d) \left(\left[\frac{x+y}{d^2} \right] - \left[\frac{x}{d^2} \right] \right)$ on applique le lemme (2.2), on obtient

$$\mid S_2 \mid \ll max_{2\sqrt{y}<N\leq\sqrt{x}} \sum_{N<d\leq 2N} \left(\left[\frac{x+y}{d^2} \right] - \left[\frac{x}{d^2} \right] \right) \log x.$$

Pour estimer la somme S_2 on utilise le lemme suivant

lemme 2.3. *Soient x, y deux réels tels que* $16 < y \leqslant \dfrac{\sqrt{x}}{4}$ *et* $2\sqrt{y} \leqslant A < B \leqslant 2\sqrt{x}$. *On a*

$$\sum_{x<n\leqslant x+y} \mu_2 = \frac{y}{\zeta(2)} + O\left((R_1+R_2)\log x + A\right)$$

où $R_1 = R_1(A,B)$ *et* $R_2 = R_2(B)$ *définis par*

$$R_1 = \max_{A<N\leqslant B} \mathcal{R}\left(\frac{x}{n^2}, N, \frac{y}{N^2}\right) \text{ et } R_2 = \max_{N\leqslant 2x/B^2} \mathcal{R}\left(\sqrt{\frac{x}{n}}, N, \frac{y}{\sqrt{Nx}}\right)$$

Démonstration. On a :

$$\sum_{x<n\leqslant x+y} \mu_2(n) = \frac{y}{\zeta(2)} + S_2 + O(\sqrt{y}) \tag{2.6}$$

Soit

$$S_2 = \sum_{2\sqrt{y}<d\leqslant\sqrt{x}} \mu(d)\left(\left[\frac{x+y}{d^2}\right] - \left[\frac{x}{d^2}\right]\right) \tag{2.7}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mid S_2 \mid &\leqslant \left(\sum_{2\sqrt{y}<d\leqslant A} + \sum_{A<d\leqslant B} + \sum_{B<d\leqslant\sqrt{x}}\right)\left(\left[\frac{x+y}{d^2}\right] - \left[\frac{x}{d^2}\right]\right) \\
&\leqslant A + \sum_{A<d\leqslant B}\left(\left[\frac{x+y}{d^2}\right] - \left[\frac{x}{d^2}\right]\right) + \sum_{B<d\leqslant\sqrt{x}} \sum_{x/d^2<k\leqslant(x+y)/d^2} 1 \\
&\leqslant A + \sum_{A<d\leqslant B}\left(\left[\frac{x+y}{d^2}\right] - \left[\frac{x}{d^2}\right]\right) + \sum_{B<d\leqslant\sqrt{x}} \sum_{x<kd^2\leqslant x+y} 1 \\
&\leqslant A + \sum_{A<d\leqslant B}\left(\left[\frac{x+y}{d^2}\right] - \left[\frac{x}{d^2}\right]\right) + \sum_{k\leqslant(x+y)/B^2} \sum_{\sqrt{x/k}<d\leqslant\sqrt{(x+y)/k}} 1 \\
&\leqslant A + \sum_{A<d\leqslant B}\left(\left[\frac{x+y}{d^2}\right] - \left[\frac{x}{d^2}\right]\right) + \sum_{k\leqslant 2x/B^2}\left(\left[\sqrt{\frac{x+y}{k}}\right] - \left[\sqrt{\frac{x}{k}}\right]\right) \\
&\ll A + \max_{A<N\leqslant B} \mathcal{R}\left(\frac{x}{n^2}, N, \frac{y}{N^2}\right)\log x + \max_{N\leqslant 2x/B^2} \mathcal{R}\left(\sqrt{\frac{x}{n}}, N, \frac{y}{\sqrt{Nx}}\right)\log x
\end{aligned}$$

donc

$$S_2 \ll A + (R_1+R_2)\log x$$

alors

$$\sum_{x<n\leqslant x+y} \mu_2 = \frac{y}{\zeta(2)} + O\left((R_1+R_2)\log x + A\right) + O(\sqrt{y})$$

et comme on a $\sqrt{y} < A$, alors $\sqrt{y} \ll A$. On conclure

$$\sum_{x<n\leqslant x+y} \mu_2 = \frac{y}{\zeta(2)} + O\left((R_1+R_2)\log x + A\right)$$

□

Soient $k \in]N, 2N]$ un entier et $16 < y \leqslant \dfrac{\sqrt{x}}{4}$. On obtient

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{x+y}{k}} - \sqrt{\frac{x}{k}} &= \frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x}}{\sqrt{k}} = \frac{x+y-x}{\sqrt{k}\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x}\right)} \leqslant \frac{y}{\sqrt{k}\left(2\sqrt{x}\right)} \\ &= \frac{y}{2\sqrt{kx}} \leqslant \frac{y}{\sqrt{kx}} \leqslant \frac{y}{\sqrt{Nx}}.\end{aligned}$$

Comme $y < \dfrac{\sqrt{x}}{4} \implies \dfrac{y}{\sqrt{x}} < \dfrac{1}{4}$, alors $\sqrt{\dfrac{x+y}{k}} - \sqrt{\dfrac{x}{k}} \leqslant \dfrac{y}{\sqrt{Nx}} < \dfrac{1}{4}$ on obtient

$$\sqrt{\frac{x+y}{k}} - \sqrt{\frac{x}{k}} \leqslant \frac{y}{2\sqrt{Nx}} < \frac{y}{\sqrt{Nx}} < \frac{1}{4}.$$

Alors

$$\mid S_2 \mid \leqslant A + \sum_{A<d\leqslant B} 1 + \sum_{k\leqslant 2x/B^2} \frac{1}{4}$$

donc

$$\mid S_2 \mid \ll x^{1/3}\log x$$

car par le lemme (2.2) on a

$$\sum_{A<d\leqslant B}\left(\left[\frac{x+y}{d^2}\right] - \left[\frac{x}{d^2}\right]\right) = O\left(\log B\right),$$

et

$$\sum_{k\leqslant 2x/B^2}\left(\left[\sqrt{\frac{x+y}{k}}\right] - \left[\sqrt{\frac{x}{k}}\right]\right) = O\left(\frac{2x}{B^2}\right).$$

et on pose $B = x^{1/3}$, on trouve

$$\mid S_2 \mid = O\left(\log x\right) + O\left(x^{1/3}\right) = O\left(x^{1/3}\log x\right).$$

Alors

$$\sum_{x<n\leqslant x+y} \mu_2 = \frac{y}{\zeta(2)} + O\left(x^{1/3}\log x + A\right),$$

et comme $A < B = x^{1/3}$ alors $A \ll x^{1/3}$, donc

$$\sum_{x<n\leqslant x+y} \mu_2 = \frac{y}{\zeta(2)} + O\left(x^{1/3}\log x + x^{1/3}\right)$$

et comme $x^{1/3} \leqslant x^{1/3}\log x$, alors $x^{1/3} \ll x^{1/3}\log x$, donc si x, y vérifiant (2.3), alors on obtient

$$\sum_{x<n\leq x+y} \mu_2(n) = \frac{y}{\zeta(2)} + O\left(x^{1/3}\log x\right). \tag{2.8}$$

Par la remarque (2.3), on remarque qu'il existe $c_0 > 0$ tel que si $c_0 x^{1/3}\log x \leqslant y < \frac{\sqrt{x}}{4}$, alors l'intervalle $]x, x+y]$ contient des nombres square-free. $\square$

Chapitre 3

Résultats asymptotiques pour les sommes courtes d'une classe de fonctions arithmétiques

Nous proposons dans ce chapitre, une démonstration d'un théorème concernant la valeur moyenne dans des intervalles courts d'une fonction arithmétique multiplicative f ; telle que cette fonction satisfait aux conditions suivantes : pour tout premier p, $f(p) = 1$ et pour tout entier non nul n, $0 \leqslant f(n) \leqslant 1$. Ce théorème été publier en 2002 (voir [8]) et sa correction en 2004 (voir [9]). Notons que, le même auteur, il a généralisé ces résultats précédents à une classe plus large de fonctions multiplicatives, et cela dans deux articles en 2013 et 2015. Dans la preuve, il a utilisé la théorie récente des points entiers près des courbes lisses développées par Huxley-Sargos et Filaseta-Trifonov.

On note par $\mathcal{M}$, l'ensemble des fonctions multiplicatives qui satisfaisant aux conditions suivantes

$$\begin{cases} 0 \leq f(n) \leq 1 & \textit{pour tout nombre entier } n. \\ f(p) = 1 & \textit{pour tout nombre premier } p. \end{cases}$$

Si $f \in \mathcal{M}$, on pose

$$\mathcal{P}(f) := \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \frac{f(p^\alpha)}{p^\alpha}\right).$$

Théorème 3.1. *Soient $\epsilon, c_0 > 0$ et $2 \leqslant y \leqslant c_0 x^{1/2}$ des réels. Alors si $f \in \mathcal{M}$, et si $x \longrightarrow \infty$. on a*

$$\sum_{x<n\leq x+y} f(n) = y\mathcal{P}(f) + O_\epsilon\left(x^{1/15+\epsilon} y^{\frac{2}{3}}\right)$$

La preuve du théorème (3.1) **repose sur les lemmes suivants :**

lemme 3.1. *Si f est une fonction de $\mathcal{M}$ et $z \geq 1$ un nombre réel, alors on a*

1. *a)* $\sum\limits_{\substack{n\leq z \\ n-2full}} 1 < 3z^{1/2}$, *b)* $\sum\limits_{\substack{n>z \\ n-2full}} \frac{1}{n} < 8z^{-1/2}$.
2. $\sum\limits_{n\leq z} \mid (f * \mu) \mid < 3z^{1/2}$ *et* $\sum\limits_{n>z} \dfrac{\mid (f*\mu) \mid}{n} < 8z^{-1/2}$.

Démonstration.

(a) Pour tout entier n square-full, on pose $n = a^2 b^3$ tels que a et b deux entiers avec b est square-free (sans facteurs carrés). Donc on a

$$\sum_{\substack{n\leq z \\ n-2full}} 1 = \sum_{\substack{a^2b^3\leq z \\ b-2free}} 1 \leq \sum_{a^2b^3\leq z} 1 = \sum_{b^3\leq z} \sum_{a^2\leq \frac{z}{b^3}} 1$$
$$= \sum_{b\leq \sqrt{z}^3} \sum_{a\leq \sqrt{\frac{z}{b^3}}} 1 \leq \sum_{b\leq z^{\frac{1}{3}}} \sqrt{z} b^{-\frac{3}{2}}$$
$$\leq z^{\frac{1}{2}} \sum_{b=1}^{\infty} b^{-\frac{3}{2}} = z^{\frac{1}{2}} \zeta(\frac{3}{2}).$$

Pour $\sigma > 1$, on utilise la majoration de la fonction zêta suivante $\zeta(\sigma) \leqslant \dfrac{\sigma}{\sigma - 1}$ (voir [13]) par conséquent si $\sigma = \dfrac{3}{2}$ on obtient $\zeta(\dfrac{3}{2}) \leqslant \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - 1} = 3.$

Donc il vient

$$\sum_{\substack{n\leq z \\ n-2full}} 1 \leqslant 3z^{1/2}.$$

(b) Soit $S > z$ un nombre réel, on a

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{z<n\leq S\\ n\ square-full}} \frac{1}{n} &\leq \sum_{b\leq z^{1/3}} \frac{1}{b^3} \sum_{\sqrt{zb^{-3}}<a\leq\sqrt{Sb^{-3}}} \frac{1}{a^2} + \sum_{z^{1/3}<b\leq S^{1/3}} \frac{1}{b^3} \sum_{a\leq\sqrt{Sb^{-3}}} \frac{1}{a^2} \\ &< 2z^{-1/2} \sum_{b\leq z^{1/3}} \frac{1}{b^{3/2}} + \frac{\pi^2}{6} \sum_{b>z^{1/3}} \frac{1}{b^3} \\ &\leq 6z^{\frac{-1}{2}} + \frac{\pi^2}{6} z^{-2/3} < 8z^{-1/2}.\end{aligned}$$

2. On pose $g := f * \mu$. Comme $f \in \mathcal{M}$, alors pour tout premier p on a $f(p) = 1$, donc

$$\begin{aligned}g(p) &= (f*\mu)(p) \\ &= \sum_{d|p} f(d)\mu\left(\frac{p}{d}\right) = f(1)\mu(p) + f(p)\mu(1) \\ &= \mu(p) + 1 = 0\end{aligned}$$

Par la multiplicativité de la fonction g et la factorisation canonique de l'entier square-free $n_1 > 1$ on trouve $\mid g(n_1) \mid= 0$.
Pour tout entier positif n, on peut le écrire sous la forme unique $n = n_1 n_2$, tels que n_1 est square-free et n_2 est square-full avec $(n_1, n_2) = 1$. Par conséquent on a :

(a) $g(n) = g(n_1)g(n_2) = 0$ car n_1 est square-free.
(b) $g(n) \neq 0$ si soit $n = 1$ or n est 2-full et $n > 1$.

Donc on a

$$\sum_{n\leqslant z} \mid (f*\mu) \mid (n) \leqslant \sum_{\substack{n\leqslant z\\ n\ squere-full}} 1 < 3z^{1/2},$$

et

$$\sum_{n>z} \frac{\mid (f*\mu) \mid (n)}{n} \leqslant \sum_{\substack{n>z\\ n\ squere-full}} \frac{1}{n} < 8z^{-1/2}.$$

□

lemme 3.2. *Soient $k \geqslant 1$ un entier et $\epsilon > 0$ un nombre réel fixé . Alors, pour tout entier positif d, on obtient*

$$d_{(k)}(d) \leqslant \left(\frac{2}{e\epsilon\log 2}\right)^{2^{1/\epsilon}} d^{\epsilon/k}.$$

Démonstration.
On sait que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $c(\epsilon) > 0$ tel que $d(m) \leqslant c(\epsilon)m^{\epsilon}$ pour tout entier m (voir [10]), et comme tout entier $d \geqslant 2$, on peut le représenter sous l'unique forme $d = qm^k$ avec q un entier $k - free$, alors on a

$$d_{(k)}(d) = d(m) \leqslant c(\epsilon)m^{\epsilon} = c(\epsilon)\left(\frac{d}{q}\right)^{\epsilon/k} \leqslant c(\epsilon)d^{\epsilon/k}.$$

Donc pour certain ϵ on peut choisir $c(\epsilon) := 2^{2^{1/\epsilon}}(e\epsilon\log 2)^{-2^{1/\epsilon}}$. □

Points entiers au voisinage d'une courbe plane de classe C^n
Soient $a \in \mathbb{R}$, N un entier $\geqslant 2$; $f : [a, a+N] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n $(n \geqslant 2)$ et δ un nombre réel petit. On pose

$$\Gamma_{\sigma} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant a+N, \mid y - f(x) \mid \leqslant \delta\right\}$$

et

$$\mathcal{R}\,(f, N, \delta) = \mathcal{R}\,(\Gamma_{\sigma}) = \sharp\left(\Gamma_{\sigma} \cap \mathbb{Z}^2\right)$$

Dans les problèmes des points entiers au voisinage d'une courbe, on cherche des majorations de la forme

$$\mathcal{R}\,(f, N, \delta) \ll N\delta^{\alpha_n} + N\delta^{\beta_n} + \textit{termes secondaires},$$

avec l'hypothèse $\mid f^{(k)}(x) \mid \asymp \lambda_k$ tel que $N \leqslant x \leqslant 2N$ où λ_k est un réel positif "petit". On trouve dans l'article (voir [3]) , les résultats suivants :

$\alpha_n = \dfrac{2}{k(k+1)}$ et $\beta_n = \dfrac{2}{k(k-1)}$ dans le cas où $0 < \delta \leqslant 1/4$. On résume ces résultats dans les lemmes suivants

lemme 3.3. *(voir [3]) Soient $\delta > 0$ un nombre réel et $f \in C^k\,(]N, 2N] \longmapsto \mathbb{R})$ tel que, il existe un nombre réel $\lambda_k > 0$, vérifiant*

$$\mid f^{(k)}(x) \mid \asymp \lambda_k$$

pour tout nombre réel $x \in]N, 2N]$. On a

1. *Si $k \geq 2$*

$$\mathcal{R}(f, N, \delta) \ll N\lambda_k^{\frac{2}{k(k+1)}} + N\delta^{\frac{2}{k(k-1)}} + (\delta\lambda_k^{-1})^{\frac{1}{k}} + 1.$$

2. *Si* $k \geq 5$ *et* $| f^{(k-1)}(x) | \asymp \lambda_{k-1} = N\lambda_k$ *, pour tout réel* $N < x \leqslant 2N$ *et* λ_{k-1} *suffisamment petit on a :*

$$\mathcal{R}(f, N, \delta) \ll N\lambda_{k-1}^{\frac{2}{k(k-1)}} + N\delta^{\frac{2}{(k-1)(k-2)}} + (\delta\lambda_{k-1}^{-1})^{\frac{1}{k-1}} + 1.$$

lemme 3.4. *(voir [4]) Soit* $k \geq 2$ *un entier et* $x, c_0 \geq 0$*,* $\delta \geq 0$ *des nombres réels tels que* $N^{k-1}\delta \leq c_0$ *et* $N \leq x^{\frac{1}{k}}$*, alors on a*

$$\mathcal{R}\left(\frac{x}{n^k}, N, \delta\right) \ll x^{\frac{1}{2k+1}} + x^{\frac{1}{6k+3}}\delta N^{\frac{6k^2+k-1}{6k+3}}.$$

Démonstration. (du théorème (3.1)) On pose $g = f * \mu$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{x<n\leqslant x+y} f(n) &= \sum_{x<n\leqslant x+y} \sum_{d|n} g(d) = \sum_{d\leqslant x+y} g(d) \sum_{x/d\leqslant k\leqslant x+y/d} 1 \\
&= \sum_{d\leqslant x+y} g(d) \left(\left[\frac{x+y}{d}\right] - \left[\frac{x}{d}\right] \right) \\
&= \sum_{d\leqslant y} g(d) \left(\left[\frac{x+y}{d}\right] - \left[\frac{x}{d}\right] \right) + \sum_{y<d\leqslant x+y} g(d) \left(\left[\frac{x+y}{d}\right] - \left[\frac{x}{d}\right] \right) \\
&= S_1 + S_2.
\end{aligned}$$

1. Pour S_1 on obtient

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{d\leqslant y} g(d) \left(\left[\frac{x+y}{d}\right] - \left[\frac{x}{d}\right] \right) \\
&= \sum_{d\leqslant y} g(d) \left(\frac{x+y}{d} - \frac{x}{d} + O(1) \right) = y \sum_{d\leqslant y} \frac{g(d)}{d} + O\left(\sum_{d\leqslant y} | g(d) | \right).
\end{aligned}$$

D'après le lemme (3.1), on a $| g(d) | \leqslant 1$, donc $\sum_{d\leqslant y} | g(d) | \leqslant \sum_{d\leqslant y} 1 \leqslant 3y^{1/2}$, alors $O\left(\sum_{d\leqslant y} | g(d) | \right) = O\left(y^{1/2}\right)$, par conséquent

$$S_1 = y \sum_{d\leqslant y} \frac{g(d)}{d} + O\left(y^{1/2}\right) \quad = y \sum_{d=1}^{\infty} \frac{g(d)}{d} + O\left(y \sum_{d>y} \frac{| g(d) |}{d} \right) + O\left(y^{1/2}\right).$$

Par le lemme (3.1), et comme $\sum_{d>y} \frac{\mid g(d) \mid}{d} < 8y^{-1/2}$, on obtient $O\left(y \sum_{d>y} \frac{\mid g(d) \mid}{d}\right) = O\left(y^{1/2}\right)$. Donc il vient

$$S_1 = y \sum_{d=1}^{\infty} \frac{g(d)}{d} + O\left(y^{1/2}\right).$$

On pose $h(d) = \dfrac{g(d)}{d}$. Par la formule du produit eulérien (voir [11]), on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} h(d) &= \prod_p \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} h(p^\alpha)\right) = \prod_p \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{g(p^\alpha)}{p^\alpha}\right) \\ &= \prod_p \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{(f*\mu)(p^\alpha)}{p^\alpha}\right),\end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned}(f*\mu)(p^\alpha) &= \sum_{d\mid p^\alpha} f(d)\mu\left(\frac{p^\alpha}{d}\right) \\ &= f(1)\mu(p^\alpha) + f(p)\mu(p^{\alpha-1}) + \ldots + f(p^{\alpha-1})\mu(p) + f(p^\alpha)\mu(1) \\ &= f(p^\alpha) - f(p^{\alpha-1})\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}S_1 &= y\prod_p \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{f(p^\alpha) - f(p^{\alpha-1})}{p^\alpha}\right) + O(y^{1/2}) \\ &= y\prod_p \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{f(p^\alpha)}{p^\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{f(p^{\alpha-1})}{p^\alpha}\right) + O\left(y^{1/2}\right) \\ &= y\prod_p \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{f(p^\alpha)}{p^\alpha} - \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{f(p^\alpha)}{p^{\alpha+1}}\right) + O\left(y^{1/2}\right) \\ &= y\prod_p \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{f(p^\alpha)}{p^\alpha} - \frac{1}{p}\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{f(p^\alpha)}{p^\alpha}\right) + O\left(y^{1/2}\right) \\ &= y\prod_p \left(1 + \left(1 - \frac{1}{p}\right)\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{f(p^\alpha)}{p^\alpha} - \frac{1}{p}\right) + O(y^{1/2}) \\ &= y\prod_p \left(\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{f(p^\alpha)}{p^\alpha}\right)\right) + O(y^{1/2}) \\ &= y\mathcal{P}(f) + O(y^{1/2}).\end{aligned}$$

2. Pour la deuxième somme, on a

$$S_2 = \sum_{y<d\leqslant x+y} g(d)\left(\left[\frac{x+y}{d}\right]-\left[\frac{x}{d}\right]\right)$$

$$\mid S_2 \mid \leqslant \sum_{\substack{y<d\leqslant x+y \\ d \ square-full}} \mid g(d) \mid \left(\left[\frac{x+y}{d}\right]-\left[\frac{x}{d}\right]\right).$$

On pose $d=a^2b^3$ tel que $\mu^2(b)=1$, alors on obtient

$$\mid S_2 \mid \leqslant \sum_{y<a^2b^3\leqslant x+y} \mid g(d) \mid \left(\left[\frac{x+y}{a^2b^3}\right]-\left[\frac{x}{a^2b^3}\right]\right).$$

On remarque que si $a^2b^3 > y$ $\left(y = y^{2/5}y^{3/5}\right)$ alors cela implique

$$\begin{cases} a^2 > y^{2/5},\ alors\ a > y^{1/5} \\ \text{où} \\ b^3 > y^{3/5},\ alors\ b > y^{1/5}. \end{cases}$$

Pour $a > y^{1/5}$ on a

$$\mid S_2 \mid \leqslant \sum_{y^{1/5}<a\leqslant(x+y)^{1/2}} \sum_{\left(\frac{y}{a^2}\right)^{1/3}<b\leqslant\left(\frac{x+y}{a^2}\right)^{1/3}} \left(\left[\frac{(x+y)a^{-2}}{b^3}\right]-\left[\frac{xa^{-2}}{b^3}\right]\right),$$

et comme

$$\begin{aligned}
\sum_{\left(\frac{y}{a^2}\right)^{1/3}<b\leqslant\left(\frac{x+y}{a^2}\right)^{1/3}} \left(\left[\frac{(x+y)a^{-2}}{b^3}\right]-\left[\frac{xa^{-2}}{b^3}\right]\right) &= \sum_{\left(\frac{y}{a^2}\right)^{1/3}<b\leqslant\left(\frac{x+y}{a^2}\right)^{1/3}} \sum_{\frac{xa^{-2}}{b^3}<k\leqslant\frac{(x+y)a^{-2}}{b^3}} 1 \\
&= \sum_{\left(\frac{y}{a^2}\right)^{1/3}<b\leqslant\left(\frac{x+y}{a^2}\right)^{1/3}} \sum_{\substack{b^3\mid n \\ \frac{x}{a^2}<n\leqslant\frac{x+y}{a^2}}} 1 \\
&= \sum_{\frac{x}{a^2}<n\leqslant\frac{x+y}{a^2}} \sum_{\substack{b^3\mid n \\ \left(\frac{y}{a^2}\right)^{1/3}<b\leqslant\left(\frac{x+y}{a^2}\right)^{1/3}}} 1.
\end{aligned}$$

de plus comme $\displaystyle\sum_{\substack{b^3\mid n \\ \left(\frac{y}{a^2}\right)^{1/3}<b\leqslant\left(\frac{x+y}{a^2}\right)^{1/3}}} 1 \leqslant d_{(3)}(n)$. Alors

$$\mid S_2 \mid \leqslant \sum_{y^{1/5}<a\leqslant(x+y)^{1/2}} \sum_{\frac{x}{a^2}<n\leqslant\frac{x+y}{a^2}} d_{(3)}(n) \tag{3.1}$$

de même pour $b > y^{1/5}$ on a

$$\mid S_2 \mid \leqslant \sum_{y^{1/5}<b\leqslant(x+y)^{1/3}} \ \sum_{\sqrt{\frac{y}{b^3}}<a\leqslant\sqrt{\frac{x+y}{b^3}}} \left(\left[\frac{(x+y)b^{-3}}{a^2}\right] - \left[\frac{xb^{-3}}{a^2}\right]\right)$$

et comme

$$\begin{aligned}\sum_{\sqrt{\frac{y}{b^3}}<a\leqslant\sqrt{\frac{x+y}{b^3}}} \left(\left[\frac{(x+y)b^{-3}}{a^2}\right] - \left[\frac{xb^{-3}}{a^2}\right]\right) &= \sum_{\sqrt{\frac{y}{b^3}}<a\leqslant\sqrt{\frac{x+y}{b^3}}} \ \sum_{\frac{xb^{-3}}{a^2}<k\leqslant\frac{(x+y)b^{-3}}{a^2}} 1 \\ &= \sum_{\sqrt{\frac{y}{b^3}}<a\leqslant\sqrt{\frac{x+y}{b^3}}} \ \sum_{\substack{a^2 \mid n \\ \frac{x}{b^3}<n\leqslant\frac{x+y}{b^3}}} 1 \\ &= \sum_{\frac{x}{b^3}<n\leqslant\frac{x+y}{b^3}} \ \sum_{\substack{a^2 \mid n \\ \left(\frac{y}{b^3}\right)^{1/2}<b\leqslant\left(\frac{x+y}{b^3}\right)^{1/2}}} 1\end{aligned}$$

donc

$$\mid S_2 \mid \leqslant \sum_{y^{1/5}<b\leqslant(x+y)^{1/3}} \ \sum_{\frac{x}{b^3}<n\leqslant\frac{x+y}{b^3}} d_{(2)}(n). \tag{3.2}$$

Alors on a

$$\mid S_2 \mid \leqslant \sum_{y^{1/5}<b\leqslant(x+y)^{1/3}} \ \sum_{\frac{x}{b^3}<n\leqslant\frac{x+y}{b^3}} d_{(2)}(n) + \sum_{y^{1/5}<a\leqslant(x+y)^{1/2}} \ \sum_{\frac{x}{a^2}<n\leqslant\frac{x+y}{a^2}} d_{(3)}(n).$$

D'autre part on a $\left(\sum_{y^{1/5}<b\leqslant(2y)^{1/3}} + \sum_{(2y)^{1/3}<b\leqslant(x+y)^{1/3}}\right) \sum_{\frac{x}{b^3}<n\leqslant\frac{x+y}{b^3}} d_{(2)}(n) +$ $\left(\sum_{y^{1/5}<a\leqslant(2y)^{1/2}} + \sum_{(2y)^{1/2}<a\leqslant(x+y)^{1/3}}\right) \sum_{\frac{x}{a^2}<n\leqslant\frac{x+y}{a^2}} d_{(3)}(n),$

Alors

$$\begin{aligned}\mid S_2 \mid \leqslant & \sum_{y^{1/5}<b\leqslant(2y)^{1/3}} \ \sum_{\frac{x}{b^3}<n\leqslant\frac{x+y}{b^3}} d_{(2)}(n) + \sum_{(2y)^{1/3}<b\leqslant(x+y)^{1/3}} \ \sum_{\frac{x}{b^3}<n\leqslant\frac{x+y}{b^3}} d_{(2)}(n) \\ & + \sum_{y^{1/5}<a\leqslant(2y)^{1/2}} \ \sum_{\frac{x}{a^2}<n\leqslant\frac{x+y}{a^2}} d_{(3)}(n) + \sum_{(2y)^{1/2}<a\leqslant(x+y)^{1/2}} \ \sum_{\frac{x}{a^2}<n\leqslant\frac{x+y}{a^2}} d_{(3)}(n).\end{aligned}$$

$$| S_2 | \leqslant \sum_1 + \sum_2 + \sum_3 + \sum_4 .$$

Pour les deux sommes $\sum_1$ et $\sum_3$ on utilise le lemme (3.2), et pour $y < x$, donc $\dfrac{x+y}{x} = 1 + \dfrac{y}{x} < 2$, alors $x + y < 2x = O(x)$, donc $(x+y)^{\epsilon} \ll x^{\epsilon}$,
ce qui implique

$$n^{\epsilon} < \left(\frac{x+y}{b^3} \right)^{\epsilon} \ll \frac{x^{\epsilon}}{b^{3\epsilon}} \ll_{\epsilon} x^{\epsilon}.$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_1 &= \sum_{y^{1/5} < b \leqslant (2y)^{1/3}} \; \sum_{\frac{x}{b^3} < n \leqslant \frac{x+y}{b^3}} d_{(2)}(n) \\
&\leqslant c(\epsilon) n^{\epsilon/2} \sum_{y^{1/5} < b \leqslant (2y)^{1/3}} \left(\left[\frac{x+y}{b^3} \right] - \left[\frac{x}{b^3} \right] \right) \\
&\ll_{\epsilon} x^{\epsilon} \sum_{y^{1/5} < b \leqslant (2y)^{1/3}} \left(\left[\frac{x+y}{b^3} \right] - \left[\frac{x}{b^3} \right] \right),
\end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned}
\sum_3 &= \sum_{y^{1/5} < a \leqslant (2y)^{1/2}} \; \sum_{\frac{x}{a^2} < n \leqslant \frac{x+y}{a^2}} d_{(3)}(n) \\
&\leqslant c(\epsilon) n^{\epsilon/3} \sum_{y^{1/5} < a \leqslant (2y)^{1/2}} \left(\left[\frac{x+y}{a^2} \right] - \left[\frac{x}{a^2} \right] \right) \\
&\ll_{\epsilon} x^{\epsilon} \sum_{y^{1/5} < a \leqslant (2y)^{1/2}} \left(\left[\frac{x+y}{a^2} \right] - \left[\frac{x}{a^2} \right] \right).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\sum_1 + \sum_3 &= x^{\epsilon} \sum_{y^{1/5} < b \leqslant (2y)^{1/3}} \left(\left[\frac{x+y}{b^3} \right] - \left[\frac{x}{b^3} \right] \right) + x^{\epsilon} \sum_{y^{1/5} < a \leqslant (2y)^{1/2}} \left(\left[\frac{x+y}{a^2} \right] - \left[\frac{x}{a^2} \right] \right) \\
&\leqslant x^{\epsilon} y \left(\sum_{b > y^{1/5}} \frac{1}{b^3} + \sum_{a > y^{1/5}} \frac{1}{a^2} \right)
\end{aligned}$$

et on a $\sum_{b>y^{1/5}} \frac{1}{b^3} = O\left(y^{-1/5}\right)$ et $\sum_{a>y^{1/5}} \frac{1}{a^2} = O\left(y^{-1/5}\right)$, alors

$$\sum_1 + \sum_3 \ll_\epsilon yx^\epsilon 2y^{-1/5} \ll_\epsilon y^{4/5}x^\epsilon.$$

Pour la somme $\sum_2$, on a

$$\sum_2 = \sum_{(2y)^{1/3}<b\leqslant(x+y)^{1/3}} \sum_{\frac{x}{b^3}<n\leqslant\frac{x+y}{b^3}} d_{(2)}(n)$$

et d'après le lemme (2.2), tel que $\log\ x \leqslant 2(e\epsilon)^{-1}x^{\frac{\epsilon}{2}}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_2 &= \sum_{(2y)^{1/3}<b\leqslant(x+y)^{1/3}} \sum_{\frac{x}{b^3}<n\leqslant\frac{x+y}{b^3}} d_{(2)}(n) \\
&\leqslant c(\epsilon)x^{\frac{\epsilon}{2}} \sum_{(2y)^{1/3}<b\leqslant(x+y)^{1/3}} \left(\left[\frac{x+y}{b^3}\right] - \left[\frac{x}{b^3}\right]\right) \\
&\ll c(\epsilon)x^{\frac{\epsilon}{2}} \max_{(2y)^{1/3}<B\leqslant(x+y)^{1/3}} \mathcal{R}\left(\frac{x}{b^3}, B, \frac{y}{B^3}\right)\log x \\
&\ll 2^{2^{1/\epsilon}}\left(e\epsilon\log 2\right)^{-2^{1/\epsilon}} \max_{2y^{1/3}<B\leqslant(x+y)^{1/3}} \mathcal{R}\left(\frac{x}{b^3}, B, \frac{y}{B^3}\right) 2(e\epsilon)^{-1}x^{\frac{\epsilon}{2}} \\
&\ll cx^\epsilon \max_{2y^{1/3}<B\leqslant(x+y)^{1/3}} \mathcal{R}\left(\frac{x}{b^3}, B, \frac{y}{B^3}\right),
\end{aligned}$$

tel que $c = 2^{2^{1/\epsilon}}\left(e\epsilon\log 2\right)^{-2^{\frac{1}{\epsilon}}} 2(e\epsilon)^{-1}$.
Par le Lemme (3.3), la partie (i) avec $k = 3$, on obtient

$$\mathcal{R}\left(\frac{x}{b^3}, B, \frac{y}{B^3}\right) \ll B\lambda_3^{1/6} + B\left(\frac{y}{B^3}\right)^{1/3} + \left(\frac{y}{B^3}\lambda_3^{-1}\right)^{1/3} + 1$$

et comme on a $\lambda_3 \asymp xB^{-6}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_2 &\ll x^\epsilon\left(Bx^{1/6}B^{-1} + B\left(\frac{y}{B^3}\right)^{1/3} + y^{1/3}x^{-1/3}B + 1\right) \\
&\ll x^\epsilon\left(x^{1/6} + y^{1/3}\right),\ \textit{tel que } y \geqslant x^{6\epsilon}.
\end{aligned}$$

Pour la dernière somme $\sum_4$, si $y \leqslant c_0x^{1/2}$ tel que c_0 suffisamment petit on applique le lemme (3.3) et le lemme (3.4) on obtient

$$\sum_4 = \sum_{(2y)^{1/2} < a \leqslant (x+y)^{1/2}} \sum_{\frac{x}{a^2} < n \leqslant \frac{x+y}{a^2}} d_{(3)}(n)$$

$$\leqslant c(\epsilon) x^{\epsilon/3} \left\{ \max_{(2y)^{1/2} < A \leqslant c_0^{-1} y} \mathcal{R}\left(\frac{x}{a^2}, A, \frac{y}{A^2}\right) + \max_{c_0^{-1} y < A \leqslant (x+y)^{1/2}} \mathcal{R}\left(\frac{x}{a^2}, A, \frac{y}{A^2}\right) \right\}.$$

D'après le lemme (3.4) avec $k = 2$ on a

$$\mathcal{R}\left(\frac{x}{a^2}, A, \frac{y}{A^2}\right) \ll x^{1/5} + x^{1/15} y A^{5/3} A^{-2} = x^{1/5} + x^{1/15} y A^{-1/3}.$$

Pour $A = c_0^{-1} y$ on trouve

$$\max_{c_0^{-1} y < A \leqslant (x+y)^{1/2}} \mathcal{R}\left(\frac{x}{a^2}, A, \frac{y}{A^2}\right) \ll x^{1/5} + x^{1/15} y y^{-1/3} = x^{1/5} + x^{1/15} y^{2/3},$$

et par le lemme (3.3), avec $k = 3$ il vient

$$\mathcal{R}\left(\frac{x}{a^2}, A, \frac{y}{A^2}\right) \ll A \lambda_3^{1/6} + A \left(y A^{-2}\right)^{1/3} + \left(\frac{y}{A^2} \lambda_3^{-1}\right)^{1/3} + 1.$$

Comme $\lambda_3 \asymp x A^{-5}$ et $A = c_0^{-1} y$, on trouve

$$\begin{aligned}
\max_{(2y)^{1/2} < A \leqslant c_0^{-1} y} \mathcal{R}\left(\frac{x}{a^2}, A, \frac{y}{A^2}\right) &\ll A \left(x A^{-5}\right)^{1/6} + A y^{1/3} A^{-2/3} + x^{-1} y^{1/3} A + 1 \\
&\ll y x^{1/6} y^{-5/6} + y y^{1/3} y^{-2/3} + x^{-1/3} y^{4/3} + 1 \\
&\ll x^{1/6} y^{1/6} + y^{2/3} + y^{4/3} x^{-1/3} + 1 \\
&\ll (xy)^{1/6} + + y^{2/3} + y^{4/3} x^{-1/3},
\end{aligned}$$

par conséquent, on a

$$\sum_4 \ll x^{\epsilon} \left((xy)^{1/6} + x^{1/5} + x^{1/15} y^{2/3} \right).$$

Finalement, on a

$$S_2 \ll_{\epsilon} x^{\epsilon} \left(x^{1/15} y^{2/3} + y^{4/5} + (xy)^{1/6} + x^{1/5} + x^{1/6} + y^{1/3} \right)$$

et par les calculs on a l'estimation suivante

$$x^{1/15} y^{2/3} + y^{4/5} + (xy)^{1/6} + x^{1/5} + x^{1/6} + y^{1/3} \ll x^{1/15} y^{2/3} + y^{4/5}$$

en effet,

- $y^{1/3} < x^{1/15}y^{2/3} + y^{4/5} = x^{1/15}\left(y^{1/3}\right)^2 + y^{4/5}$
- $(xy)^{1/6} < x^{1/15}y^{2/3} + y^{4/5}$ comme $y \leqslant x^{1/5}$ on a

$$\begin{aligned} x^{1/6} &< x^{1/15}y^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} + y^{\frac{4}{5}-\frac{1}{6}} < x^{1/15}y^{1/2} + y^{19/30} \\ &< x^{1/15}x^{1/10} + x^{19/150} = x^{5/30} + x^{19/150} \\ &< x^{1/6} + x^{19/150.} \end{aligned}$$

- $x^{1/5} < x^{1/15}y^{2/3} + y^{4/5} < x^{1/15}x^{2/15} + x^{4/25} < x^{1/5} + x^{4/25}$.
- $x^{1/6} < x^{1/15}y^{2/3} + y^{4/5} < x^{1/15}x^{2/5} + x^{4/25} < x^{1/5} + x^{4/25}$.

on conclure

$$S_2 \ll_\epsilon x^\epsilon \left(x^{1/15}y^{2/3} + y^{4/5}\right) \ si \ y \geqslant x^{1/5}.$$

Comme $y \leqslant c_0 x^{1/2}$ alors $y^{4/5} \ll x^{1/15}y^{2/3}$ est équivalent à $y^{4/5-2/3} \leqslant x^{1/15}$ c-à-d $y^{2/15} < x^{1/15} \Rightarrow y^2 \leqslant x$. Donc, $y \leqslant x^{1/2}$. On déduit

$$S_2 \ll_\epsilon x^{1/15+\epsilon}y^{2/3}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \sum_{x<n\leq x+y} f(n) = S_1 + S_2 &= y\mathcal{P}(f) + O_\epsilon(y^{1/2}) + O_\epsilon\left(x^{1/15+\epsilon}y^{2/3}\right) \\ &= y\mathcal{P}(f) + O_\epsilon\left(x^{1/15+\epsilon}y^{2/3}\right). \end{aligned}$$

□

D'autre part si $y < x^{1/5}$, on a $y \ll x^{1/15}y^{2/3}$ et alors

$$\left| \sum_{x<n\leq x+y} f(n) - y\mathcal{P}(f) \right| \ll y \ll x^{1/15}y^{2/3}.$$

Application

On applique directement le théorème du chapitre précédent sur la fonction arithmétique définie par

$$f(n) = \frac{d^*(n)}{d(n)}$$

tels que $d(n)$, $d^*(n)$ sont le nombre de diviseurs et le nombre de diviseurs unitaires de l'entier positif n ça veut dire

$$d^*(n) = \sum_{\substack{d|n \\ (d,\frac{n}{d})=1}} 1.$$

La fonction f est multiplicative, et pour tout premier p on a $f(p) = 1$ et comme $d^*(n) \leqslant d(n)$, alors $0 < f(n) \leqslant 1$. Par conséquent, la fonction f satisfait aux conditions du théorème (3.1). Alors on a la formule asymptotique suivante

$$\sum_{x<n\leqslant x+y} f(n) = y\mathcal{P}(f) + O_\epsilon\left(x^{1/15+\epsilon}y^{2/3}\right).$$

On sait que $d^*(p^\alpha) = 2$, et $d(p^\alpha) = \alpha + 1$, donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(f) &= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \frac{1}{p^\alpha}\frac{d^*(p^\alpha)}{d(p^\alpha)}\right) \\
&= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \frac{2}{\alpha+1}\frac{1}{p^\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] *O. BORDELLÈS, Multiplicative functions over short segments", Acta Arithmetica (2013).*

[2] *M. FILASETA and O. TRIFONOV, The distribution of fractional parts with applications to gap results in Number Teory,Poc.LondonMath.Socc(1996).*

[3] *M. N. HUXLEY et P. SARGOS ,Points entiers au voisinage d'une courbe plane de classe C^n, Acta Arithmetica LXIX.4 (1995).*

[4] *M. N. HUXLEY and P. SARGOS , Points entiers au voisinage d'une courbe plane de classe C^n **II**, les prépublications de l'Institut Elie Cartan de Nancy(1997), Functiones et Approximatio XXXV (2006) .*

[5] *O. BORDELLÈS, Arithmetic Tales, © Springer Verlag London 2012.*

[6] *A. A. KARATSUBA, Complex analysis in number theory, CRS Press.*

[7] *M. FILASETA and O. TRIFONOV, The Distribution Of Frational Parts With Application To Gap Results In Number Theory.*

[8] *O. BORDELLÈS, On short sums of certain multiplicative functions, J. Inequal. Pure and Appl.Math., 3(5) (2002), Art. 70. .*

[9] *O. BORDELLÈS, Corrigendum to "On Short Sums of Certain Multiplicative Functions", J. Inequal. Pure and Appl.Math., 5(3) (2004), Art. 81.*

[10] *D. S. MITRINOVIC and J. SANDOR, in cooperation with B.Crstici, Handbook of Number Theory, Kluwer Academic Publisher (1996).*

[11] *T. M. APOSTOL, Introduction to Analytic Number Theory, Springer-Verlag Berlin,1976.*

[12] *D. S. MITRINOVIC and J. SANDOR, The distribution of frational parts with applications to gap results Number ; in cooperation with B.Crstici .*

[13] *O. BORDELLÈS, Short interval results for a class of arithmetic functions, arxiv.org/abs1605.00072v1*