République Algérienne Démocratique Et Populaire

Ministére De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

Université Djilali Bounaâma-Khemis Miliana

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département Mathématiques et Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de

Master en mathématiques

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Présenté par

ATMANI Imane

Introduction à la Géométrie Riemannienne

Soutenue publiquement le ***24*** *juin* ***2018*** *devant le jury composé de*

Mr. M. BOUDERBALA	Univ. de Khemis Miliana	**Président**
Mr. A. KALI	Univ. de Khemis Miliana	**Examiateur 1**
Pr. M. HACHAMA	Univ. de Khemis Miliana	**Examiateur 2**
Mr. A. YACHE	Univ. de Khemis Miliana	**Encadrant**

Année Universitaire : ***2017-2018***

Dédicace

Je dédie ce modeste travail et ma profonde gratitude :
Á ma très chère mère j'aimerai toujours te remercier pour tous
Ce que tu as fais jusqu'à notre jours là pour assurer l'éducation
Chère mère j'avoue vraiment
Que tu été la lumière qui me guide mes routes et qui m'emmène aux chemins
De la réussite, c'est grâce à toi que je doit toute ma réussite.
Á cher père, pour leur patience, leur amour, leur soutien et leurs
Encouragements.
Á tout ma famille pour l'amour et le respect qu'ils m'ont toujours accordé.
Á ma très chère soeur et son marie
Je leur souhaite tout le succès... tout le bonheur
Á mes très chères frères
Je leur souhaite tout le succès... tout le bonheur
Á mes amis et mes camarades.
Pour une sincérité si merveilleuse....jamais oubliable, en leur souhaitant
Tout le succès... tout le bonheur.
Sans oublier tous les professeurs que ce soit du
Primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.
Á tout personne
Qui m'a aidé à franchir un horizon dans ma vie.

Remerciements

Au terme de la rédaction de ce mémoire, je remercie **ALLAH** qui m'a toujours donné la patience et le courage durant ces langues années d'étude, et la force d'accomplir ce Modeste travail.

Je remercie sincèrement mon directeur de mémoire, Monsieur A. YACHE, pour son soutien scientifique, ainsi que pour ses judicieux conseils et ses encouragements. Je lui exprime toute ma gratitude

Je souhaite également remercier chaque membres du jury en commençant par monsieur M. BOUDERBALA, le professeur M. HACHAMA et monsieur A. KALI, pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Mes vifs remerciements à toute ma famille surtout mes parents, frères et soeur pour leur soutien, prières et encouragements.

Je tiens à remercier tous mes amis et mes collègues et surtout ceux avec qui on a passé une période agréable à l'université de Djilali Bounaâma-Khemis Miliana.

je remercie tous les professeurs qui nous ont enseigné et qui par leurs compétences nous ont soutenu dans la poursuite de nos études.

Dans l'impossibilité de citer tous les noms, nos sincères remerciements vont a tous ceux et celles, qui de prés ou de loin, ont permis par leurs conseils et leurs compétences dans la réalisation de ce mémoire.

MERCI Á TOUS.

Résumé

Ce mémoire donne une brève introduction aux les variétés Riemanniennes. Nous avons essayé de donner les définitions principales et importantes, ainsi que les théorèmes fondamentaux concernant cette étude, nous avons suivi l'ordre des effets qui ont été produits par les mathématiciens, tels que Riemann, Christoffel, Levi-Civita, nous avons ainsi expliqués leurs contributions à l'élaboration d'une telle théorie. Nous avons essayé de donner les métriques et comment les calculer. Et comme ce n'est qu'une introduction, on a donné beaucoup de définitions, tout en évitant de s'éloigner de notre sujet.

Mots clés : Variétés Riemanniennes, métrique.

Abstract

This work gives a brief introduction to the Riemannian manifolds. We tried to give the main and important definitions, as well as the fundamental theorems concerning this study, we followed the order of the effects that were produced by the mathematicians, such as Riemann, Christoffel, Levi-Civita, we thus explained their contributions to the elaboration of such a theory. We tried to give the metrics and how to calculate them. And as it is only an introduction, we have given many definitions, while avoiding to move away from our subject.

Keywords : Riemannian manifolds, metrics.

Table des matières

Table des figures

Introduction

La géométrie Riemannienne est une géométrie non euclidienne, mais elle lui donne une extension dans le cas ou la courbure ne s'annule pas, elle est nommée ainsi à l'honneur du grand mathématicien qui a initié la définition des variétés différentiables, *Bernhard Riemann*. Son rôle est de déterminer un produit scalaire pour ces variétés pour pouvoir faire des calculs tout en prenant compte des propriétés locales de ces structures. On verra qu'on a besoin beaucoup d'outils pour y parvenir a cette fin comme les connexions affines et le transport parallèle. Ce mémoire est organisé en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre de ce mémoire nous rappelons quelques définitions et résultats de la géométrie différentielles, nous définissons la notion de variété différentiable de manière abstraite, nous donnons ensuite quelques outils de base permettant de travailler avec des variétés différentiables, nous présentons la notion d'espace tangent et fibré tangent : En chaque point de la variété se trouve un espace tangent à ce point, l'union en elle-même est une variété connue comme le fibré tangent, nous introduisons aussi la définitions de fibré cotangent, ensuite nous donnons un petit rappel sur les formes différentielle.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons un rappel sur les champs vecteurs et quelques résultats : Un champ de vecteurs est une fonction d'une variété vers l'union disjointe de ses espaces tangents de telle manière que, en chaque point, la valeur obtenue est un élément de l'espace tangent en ce point. Ensuite nous parlons d'une opération importante sur les champs de vecteurs qui est le crochet de Lie.

Dans le troisième chapitre, nous définirons les tenseurs et leurs opérations algébriques. Avant d'en donner la définition, nous commençons par introduire une convention de notation inventée par Einstein.

Dans le quatrième chapitre, nous concentrons sur la définition de la métrique Riemannienne : Elle permet d'introduire une distance sur la variété. Infinitésimalement (dans un plan tangent), nous définissons ensuite la notion de variété Riemannienne, nous discutons aussi la notion de connexion affine, nous donnons une théorème fondamental de la géométrie Riemannienne (connexions de Levi-Civita), nous présentons aussi la notion de géodésiques, et finalement nous introduisons le concept de courbure Riemannienne.

Chapitre 1

Éléments de la géométrie différentielle

Dans ce premier chapitre, nous allons introduire les notions de base de la géométrie différentielle.

I Variété différentiable

Soit M une espace topologique.

Définition 1.1. *Une* ***carte locale*** (U, φ) *de dimension n pour M consiste en un ouvert U de M, appelé domaine de la carte, et un homéomorphisme*[1] $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, *appelé application de coordonnées.*

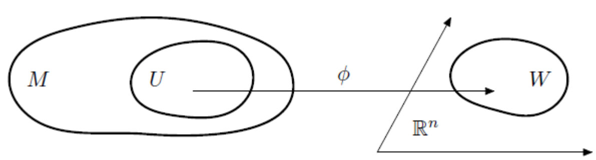

FIGURE 1.1 – *Représentation graphique d'une carte locale.*

Pour travailler sur la totalité de M, il faut se donner suffisamment de cartes locales. De plus, ces cartes locales ne peuvent être complètement arbitraires les unes par rapport aux autres.

1. Une application $\varphi : U \to \varphi(U)$ est un homéomorphisme si φ est bijective, et si φ et φ^{-1} sont continues.

Définition 1.2. *Un **atlas différentiable** A de dimension n pour M est une collection $A = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ des cartes locales de dimension n pour M telle que*

- $\bigcup_{i\in A} U_i = M$,

- si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ pour $i, j \in I$, alors l'application de changement de cartes

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n \to \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n$$

est différentiable.

Définition 1.3. *Une **variété topologique** est un espace M muni d'une topologie pour laquelle il est séparé*[2]*, qui est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, i.e. pour tout $x \in M$, il existe un homéomorphisme $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, où U est un voisinage ouvert de x dans M et $\varphi(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Exemple 1.1. *l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est une variété topologique de dimension n.*

Définition 1.4. *Deux cartes (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) d'une variété topologique M, d'ordre k $(k > 0)$ **compatibles** si $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ ou si l'application de changement de cartes*

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

est un $\mathbb{C}^k$ difféomorphisme[3] *(fonction de transition).*

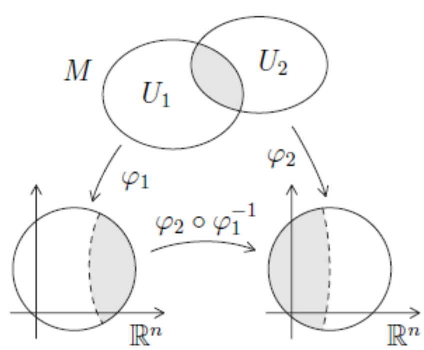

FIGURE 1.2 – *Application de changement de cartes.*

2. Une espace topologique M est dit séparé si deux points distincts de M possèdent des voisinages disjoints.

3. Un difféomorphisme de classe $\mathbb{C}^k$ est une application bijective de classe $\mathbb{C}^k$ dont la réciproque est de classe $\mathbb{C}^\infty$.

Exemple 1.2. *La sphère $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, est une variété de dimension 2 : on peut construire un atlas en utilisant la projection stéréographique. Les points $N(0,0,1)$ et $S(0,0,-1)$ désignant respectivement les pôles nord et sud, on considère les ouverts $U_N = \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ et $U_S = \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ et les applications $\varphi_N : U_N \to \mathbb{R}^2$ et $\varphi_S : U_S \to \mathbb{R}^2$.*

La première carte locale U_N de $\mathbb{S}^2$ est :

$$\varphi_N : \; U_N \to \; \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \; \frac{y}{1-z}\right).$$

L'application réciproque :

$$\varphi_N^{-1} : \; \mathbb{R}^2 \to \; U_N, \quad (X,Y) \mapsto \left(\frac{2X}{1+X^2+Y^2}, \; \frac{2Y}{1+X^2+Y^2}, \; \frac{-1+X^2+Y^2}{1+X^2+Y^2}\right).$$

La deuxième carte locale U_S de $\mathbb{S}^2$ est :

$$\varphi_S : \; U_S \to \; \mathbb{R}^2, \; (x,y,z) \mapsto \left(\frac{x}{1+z}, \; \frac{-y}{1+z}\right).$$

L'application réciproque :

$$\varphi_S^{-1} : \; \mathbb{R}^2 \to \; U_S, \quad (X,Y) \mapsto \left(\frac{2X}{1+X^2+Y^2}, \; \frac{-2Y}{1+X^2+Y^2}, \; \frac{1-X^2-Y^2}{1+X^2+Y^2}\right).$$

L'application correspondante de changement de cartes est :

$$\varphi_S \circ \varphi_U^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad (X,Y) \mapsto \left(\frac{X}{X^2+Y^2}, \; \frac{-Y}{X^2+Y^2}\right).$$

Les domaines de ces cartes recouvrent clairement la sphère : $U_N \cup U_S = \mathbb{S}^2$.
De plus $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}$ est un difféomorphisme, ce qui montre que les deux cartes sont compatibles. Ainsi $\{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$ est un atlas sur $\mathbb{S}^2$.

Définition 1.5. *Un atlas différentiable A pour une variété différentiable M est dit* ***maximal*** *si il n'est pas inclus strictement dans un autre atlas différentiable pour M.*

Définition 1.6. *Une* ***variété différentiable*** *de dimension n est un espace topologique M muni d'un atlas différentiable maximal de dimension n.*

Exemple 1.3. *L'espace $\mathbb{R}^n$ est une variété différentiable de dimension n et de classe $\mathbb{C}^\infty$.*

Exemple 1.4. *la sphère $\mathbb{S}^2$ est une variété différentiable de dimension 2.*

Dans ce qui suit, M signifie une variété différentiable de dimension n et de classe $\mathbb{C}^\infty$.

II Sous-variétés

Définition 1.7. *On dit que une variété différentiable $M \subset \mathbb{R}^n$ est une* ***sous-variété*** *de dimension m et de classe $\mathbb{C}^k$ de $\mathbb{R}^n$ si seulement si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$ et une application $f : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ de classe $\mathbb{C}^k$ vérifiant :*

- $U \cap M = f^{-1}(0)$,

- $d_x f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{n-m}$ est surjective (on dit que f est une submersion en x).

III Variétés orientables

Définition 1.8. *On dit que une variété différentiable M est* ***orientable****, si elle admet un atlas dont touts les changements de cartes $\varphi \circ \psi^{-1}$ sont positivement orientés, i.e. pour tout $x \in M$ et toutes cartes (U, φ) et (V, ψ) en x,*

$$det\ D_{\psi^{-1}(x)}(\varphi \circ \psi^{-1}) > 0$$

Une définition équivalente de l'orientable est l'existence d'une forme volume sur M, c'est-à-dire une forme différentielle de degré maximum qui ne s'annule jamais.

IV Applications différentiables

Définition 1.9. *Soient M et N des variétés différentiables de dimension m et n respectivement. On dit qu'une application $f : M \to N$ est* ***différentiable*** *si f est continue et si pour toute carte (U, φ) de M et toute carte (V, ψ) de N telles que $f(U) \subset V$, la composition suivante est différentiable.*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \in \mathbb{R}^m \to \psi(V) \in \mathbb{R}^n$$

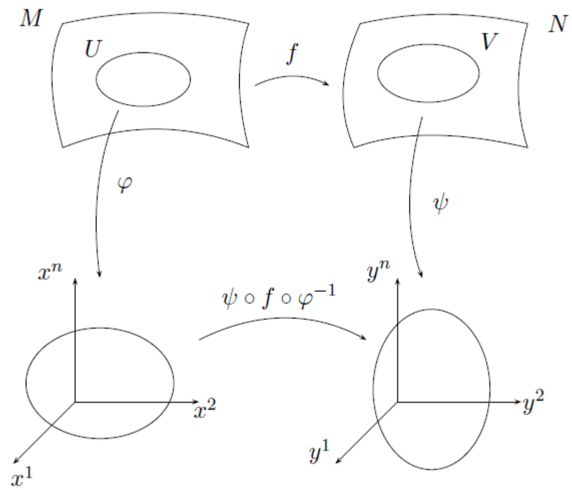

FIGURE 1.3 – *Représentation graphique d'une applications différentiable.*

Cette définition permet également de comprendre l'importance de la condition de différentiabilité pour les applications de changement de cartes $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ dans la définition d'atlas différentiable. En effet, étant donné une application continue $f : M \to N$, si (U, φ) et (V, ψ) sont des cartes de M et N respectivement telles que $f(U) \subset V$, si (U', φ') et (V', ψ') sont d'autres cartes de M et N avec $U \cap U' \neq \emptyset$ satisfaisant également $f(U') \subset V'$, alors

$$\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi'^{-1})$$

Par conséquent, si $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est différentiable, alors $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$ ne le sera aussi que si les applications de changement de cartes $\psi' \circ \psi^{-1}$ et $\varphi \circ \varphi'^{-1}$ sont différentiables également.

Passons maintenant à la notion d'équivalence pour les variétés différentiables.

Définition 1.10. *Soient M et N deux variétés différentiables. Une application $f : M \to N$ est un **difféomorphisme** si f est bijective et si f et f^{-1} sont différentiables.*

Si les variétés M et N sont difféomorphes, alors elles sont homéomorphes et $\dim M = \dim N$. De plus, l'image par le difféomorphisme de l'atlas maximal de M est un atlas maximal pour N, compatible avec l'atlas maximal définissant la structure de variété différentiable sur N. Par conséquent, les atlas maximaux de M et N se correspondent via le difféomorphisme. C'est pour cela que des variétés différentiables difféomorphes sont considérées comme équivalentes.

V Espace tangent et fibré tangent

Soit M une variété différentielle de dimension n. On note $\mathbb{C}^{\infty}(M)$ l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathbb{C}^{\infty}$ sur M.

Définition 1.11. *L'ensemble $\mathbb{C}^{\infty}(M)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est une algèbre associative et commutative avec le produit usuel $(fg)(x) = f(x)g(x)$, où $f, g \in \mathbb{C}^{\infty}(M)$ et $x \in M$.*

V.1 Espace tangent

Définition 1.12. *Un **vecteur tangent** en un point $p \in M$ est l'application $v : \mathbb{C}^{\infty}(M) \to \mathbb{R}$ telle que pour touts $a, b \in \mathbb{R}$, pour touts $f, g \in \mathbb{C}^{\infty}(M)$, on a*

- v est $\mathbb{R}$-linéaire : $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$,

- v satisfait la règle de Leibnitz : $v(f.g)(p) = v(f).g(p) + f(p).v(g)$.

*L'ensemble de vecteurs tangents au point p de M est noté par T_pM, et on l'appelle **l'espace tangent** en $p \in M$, c'est un espace vectoriel de dimension n (dim M).*

Il existe une autre notion de l'espace tangent "l'espace tangent à une courbe" :

Définition 1.13. *On définit l'espace tangent à M en un de ses points comme l'ensemble des vecteurs tangents à une courbe tracée dans M : un vecteur v de $\mathbb{R}^n$ est dit tangent à M en un point x de M s'il existe une courbe paramétrée de classe C^1*

$$\gamma \ : \ ]-\varepsilon, \varepsilon[\ \to \ M \subset \mathbb{R}^n$$

définie sur un voisinage de 0, telle que

$$\gamma(0) = x \ \text{ et } \ \gamma'(0) = v.$$

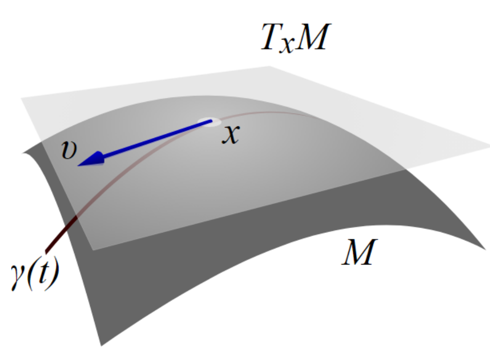

FIGURE 1.4 – *Représentation graphique d'un espace tangent.*

Exemple 1.5. *L'espace tangent en tout point p d'un ouvert U de* $\mathbb{R}^n$ *est* $T_pU = \mathbb{R}^n$.

Définition 1.14. *Soit* $p \in M$. *soient* γ_1 *et* γ_2 *deux courbes dans M qui sont différentiables et qui passent par p telle que :* $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\;\to\; M$ *, et* $\gamma(0) = p$.
Deux courbes γ_1 *et* γ_2 *sont tangents au point p si*

- $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$

- *Et s'il existe une carte locale* (U, φ) *telle que* $p \in U$ *et*

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)(0).$$

Démonstration. La définition est indépendante de la carte choisie. En effet si (V, ψ) est une autre carte autour de p, on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_1)(0) &= \frac{d}{dt}[(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma_1)](0) \\
&= D[(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)](0) \\
&= D[(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)](0) = \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_2)(0).
\end{aligned}$$

□

La relation : (γ_1 est tangent en p) $\sim$ (γ_2 est tangent en p) est une relation d'équivalence. Dans ce contexte, nous définissons un vecteur tangent en p à M comme une classe d'équivalence de courbes tangentes en p.

Proposition 1.1. *L'espace tangent* T_pM *est un espace vectoriel réel de dimension n. Si* (U, φ) *est une carte locale en p avec coordonnées locales* $(x^1, \ldots, x^n)$, *alors*

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = (\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n})$$

est une base de T_pM. *Par conséquent, tout vecteur tangent à M en p est de la forme*

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}|_p.$$

V.2 Fibré tangent

Définition 1.15. *On appelle **fibré tangent** à M, que l'on désigne par TM, l'ensemble de tous les vecteurs tangents de M en ses points, c'est donc la réunion de tous les espaces tangents T_pM en ses divers points :*

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM = \bigcup_{p \in M} \Big\{ (p, v) \ \mid p \in M, \ \ v \in T_pM \Big\}.$$

C'est une famille d'espaces vectoriels paramétrisès par M. On peut le munir d'une projection $\pi : TM \to M$ définie par $\pi(T_xM) = x$.

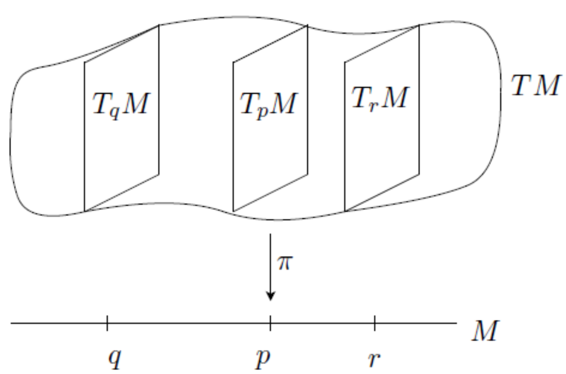

FIGURE 1.5 – *Représentation graphique d'un fibré tangent.*

Exemple 1.6. *Si $M = U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, l'espace tangent à M en chaque point x s'identifie canoniquement à $\mathbb{R}^n$, en utilisant l'atlas à un seul élément donné par l'inclusion de M dans $\mathbb{R}^n$. Le fibré tangent de U s'identifie alors à $U \times \mathbb{R}^n$.*

Exemple 1.7. *Le fibré tangent au cercle*

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$$

apparait ainsi comme la variété

$$\{(x, y, X, Y) \in \mathbb{R}^4, \ \ x^2 + y^2 = 1, \ \ xX + yY = 0\}$$

il est difféomorphe au cylindre $S^1 \times \mathbb{R}^n$.

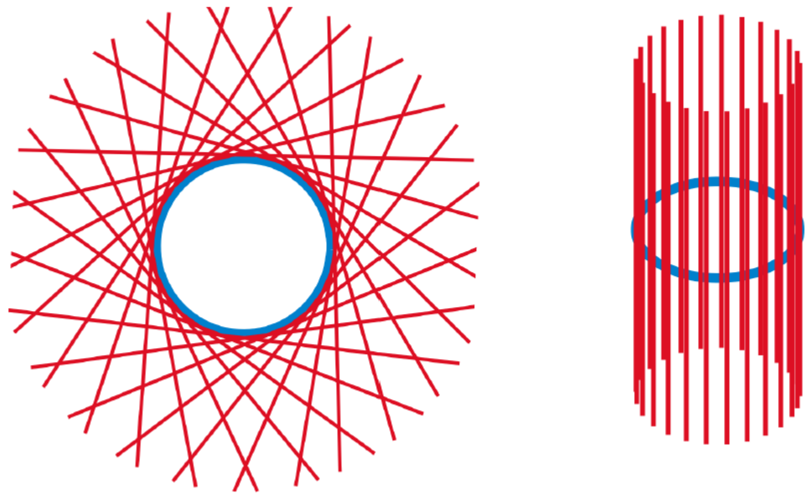

FIGURE 1.6 – *Représentation graphique d'un fibré tangent au cercle.*

Proposition 1.2. *[8].Si M est une variété différentiable de $\mathbb{R}^n$, de dimension n et de classe $\mathbb{C}^k$, $k \geq 1$, alors son fibré tangent est une variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de dimension $2n$ et de classe $\mathbb{C}^{k-1}$.*

VI Fibré cotangent

Définition 1.16. *On appelle T_p^*M **l'espace cotangent** à M en p, l'espace vectoriel dual de l'espace tangent T_pM.*

- T_p^*M est le vectoriel des formes linéaires $l : T_pM \to R$.
- La base duale des $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^1})$ dans T_p^*M est donnée par la différentielle $(dx^i) = (dx^1, \ldots, dx^n)$ des coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n)$.
- Les éléments de T_p^*M sont appelés **les covecteurs**.
- La différentielle d'une fonction $f \in \mathbb{C}^\infty(M)$, définie par $(df)_p(v) = v(f)$, pour tout $v \in T_pM$ dans les coordonnées locales : $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

Définition 1.17. *On appelle **fibré cotangent** à M, que l'on désigne par T^*M, la réunion de tous les espaces cotangents T_p^*M en ses divers points :*

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M = \bigcup_{p \in M} \left\{(p, l) \ \mid p \in M, \ \ l \in T_p^*M\right\},$$

le fibré cotangent muni de la projection $\pi : T^*M \to M : (p, l) \mapsto p$.

VII Forme différentielle

Définition 1.18. *Une forme différentielle ω de degré r sur M est un champ d'applications $r-$linéaires alternées sur les espaces tangents T_xM avec une dépendance régulière en x : pour tous champs de vecteurs $X^1, \ldots, X^r$, la fonction $x \mapsto \omega_x(X_1(x), \ldots, X_r(x))$ est de classe $\mathbb{C}^\infty$.*

Définition 1.19. *Une $0-$forme différentielle $\omega \in \Omega^0$ est une fonction f des coordonnées.*

Définition 1.20. *Une $1-$forme différentielle $\omega \in \Omega^1$ est une expression de la forme*

$$\begin{aligned} &\omega = f dx \quad (sur \quad \mathbb{R}) \\ &\omega = f dx + g dy \quad (sur \quad \mathbb{R}^2) \\ &\omega = f dx + g dy + h dz \quad (sur \quad \mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

avec f, g et h des fonctions des coordonnées.

Exemple 1.8. $\omega = (x_1^2 + \sin x_2)dx^1 + e^{x_1 - x_2}dx^2$ *est une forme différentielle de degré* 1 *sur* $\mathbb{R}^2$.

Définition 1.21. *Une $2-$forme différentielle $\omega \in \Omega^2$ est une expression de la forme*

$$\begin{aligned} &\omega = f dx \wedge dy \quad (sur \quad \mathbb{R}^2) \\ &\omega = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy \quad (sur \quad \mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

avec f, g et h des fonctions des coordonnées.

Exemple 1.9. $\omega = (x_1^2 \cos x_2)dx^1 \wedge dx^2 + (x_3 - 2x_1x_2)dx^2 \wedge dx^3$ *est une forme différentielle de degré* 2 *sur* $\mathbb{R}^3$.

Les règles du calcul avec les formes différentielles sont les suivantes :

$$\begin{aligned} du \wedge dv \quad &= -dv \wedge \; du \text{ pour } u \text{ et } v \text{ des coordonnes}, \\ du \wedge (dv \wedge dw) &= (du \wedge dv) \wedge dw, \\ f \wedge \omega \quad &= f.\omega, \\ (\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta \quad &= \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta. \end{aligned}$$

De la première règle, on déduit

$$du \wedge du = 0.$$

Définition 1.22. *On définit la différentielle extérieure $d : \Omega^k \to \Omega^{k+1}$ par les règles suivantes :*

1. *La différentielle* $df \in \Omega^1$ *d'une* $0-$*forme (fonction)* f *est la* $1-$*forme différentielle définie par les dérivées partielles de la fonction :*

$$df = \acute{f}dx \quad (sur \quad \mathbb{R})$$
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \quad (sur \quad \mathbb{R}^2)$$
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \quad (sur \quad \mathbb{R}^3)$$

2. *Si* f *est une fonction et* ω *est une forme différentielle produit extérieur des formes coordonnées* dx, dy, dz *(par exemple* $\omega = dx$, $\omega = dz \wedge dx$ *ou* $\omega = dy \wedge dx \wedge dz$*) alors* $d(f \wedge \omega) = df \wedge \omega$.
3. *La différentielle est additive :* $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.

Définition 1.23. *On dit qu'une forme différentielle* ω *définie sur l'ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$ *est* ***exacte*** *s'il existe une application* f *de classe* $\mathbb{C}^1$ *de* U *dans* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$\omega = df.$$

Définition 1.24. *On dit que la forme différentielle de* $\mathbb{C}^1$ $\omega = \omega_1 dx^1 + \cdots + \omega_n dx^n$ *définie sur l'ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$ *est* ***fermée*** *si elle vérifie*

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \qquad pour \ \ tous \ \ (i, j) \in (1, \ldots, n)^2$$

VII.1 Théorème de Poincaré

Rappel :
Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dit étoilée par rapport à $N_0 \in A$ si $\forall N \in A, [N_0, N] \subset A$

Théorème 1.1. *Sur un ouvert étoilé, toute forme différentielle de classe* $\mathbb{C}^1$ *fermée est exacte.*

Exemple 1.10.
forme différentielle $\omega = (x + y)dx + (x - y)dy$ *est exacte sur* $\mathbb{R}^2$

En effet, avec $a(x, y) = x + y$ *et* $b(x, y) = x - y$, *on a* $b(x, y) = x - y$,

on a $\frac{\partial a}{\partial y} = 1 = \frac{\partial b}{\partial x}$ *donc* ω *est fermé, donc exacte (car* $\mathbb{R}^2$ *est étoilé).*

On cherche f *tel que* $\frac{\partial f}{\partial x} = x + y$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y} = x - y$ *donc* $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 + k$ *convient, avec* k *constante.*

VIII Champs de vecteurs

Après avoir étudié les vecteurs tangents à une variété différentiable M en un point, nous allons nous tourner vers les champs de vecteurs, c'est-à-dire la donnée en chaque point de M d'un vecteur tangent en ce point. Un champ de vecteurs ou champ vectoriel est une fonction qui associe un vecteur à chaque point d'un espace euclidien ou plus généralement d'une variété différentielle M.

Définition 1.25. *Un **champ de vecteurs**, sur une variété différentiable M est une application*

$$\begin{aligned} X : M &\to TM \\ p &\mapsto Xp \in T_pM \end{aligned}$$

où chaque vecteur X_p est appliqué au point p.

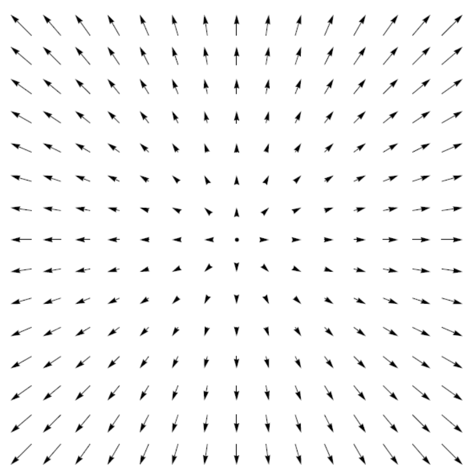

FIGURE 1.7 – *Représentation graphique d'un champ de vecteur dans* $\mathbb{R}^2$.

Définition 1.26. *On désigne par $\chi(M)$ l'ensemble de tous les champs de vecteurs sur M.*

Exemple 1.11. $X(x, y) = \sin x \frac{\partial}{\partial x} + \cos y \frac{\partial}{\partial y}$ *est un champ vecteur de classe* $\mathbb{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}^2$.

Exemple 1.12. $X(x, y, z) = e^{xz} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{x} \frac{\partial}{\partial y} + xz \frac{\partial}{\partial z}$ *est un champ vecteur de classe* $\mathbb{C}^\infty$ *sur* $U = \{f(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0\}$.

Exemple 1.13. *Le vecteur gradient d'une fonction de classe $\mathbb{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ définit un champ de vecteur sur cet ouvert. D'un point de vue physique, une force ou la vitesse en chaque point d'un fluide en mouvement définissent des champs de vecteurs.*

Lemme 1.1. *Soit X un champ de vecteur sur une variété différentiable M. Dans le système des coordonnées locales, un champ de vecteur est donné par*

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

tel que $X^i = X(x^i)$ sont les Composantes de X dans le système de coordonnées $(x^1, \dots, x^n)$.

Définition 1.27. *Un champ de vecteurs X sur une variété différentiable M est une dérivation de $\mathbb{C}^\infty(M)$, c'est-à-dire une application linéaire $X : \mathbb{C}^\infty(M) \to \mathbb{C}^\infty(M)$ telle que*

$$X(fg) = X(f)g + fX(g),$$

pour tout $f, g \in \mathbb{C}^\infty(M)$. Pour tout $p \in M$, on définit $X_p \in T_pM$.

Définition 1.28. *Un champ de vecteur X est une section*[4] *$\mathbb{C}^\infty$ du fibré tangent, i.e. une application $X : M \to TM$ de classe $\mathbb{C}^\infty$ et $\pi \circ X = Id$.*

Définition 1.29. *Un champ de vecteur local est une section lisse définie sur un voisinage ouvert.*

Définition 1.30. *L'ensemble $\chi(M)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (de dimension infinie) et aussi un module sur l'anneau des fonctions $\mathbb{C}^\infty(M)$, de rang n et de base $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$.*

Remarque 1.1. *Un module sur un anneau est l'analogue d'un espace vectoriel sur un corps, quand le corps n'a pas forcement tous les inverses (c'est un anneau). La dimension s'appelle alors rang.*

Démonstration. D'abord on définie sur $\chi(M)$ la structure de module sur $\mathbb{C}^\infty(M)$, comme suit :

► On muni $\chi(M)$ d'une addition : si $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ sont deux champs de vecteurs, on pose

$$X + Y = \sum_{i=1}^{n} (X^i + Y^i) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

► Cette addition est associative, commutative, et a l'élément neutre $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

4. Si $\pi : TM \to M$ est un fibré de fibre TM, une section est une application différentiable $X : M \to TM$ telle que : $\pi \circ X = Id_M$.

► On muni $\chi(M)$ d'un produit par scalaire (les fonctions) : si $X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ est un champ de vecteurs et f une fonction sur U, on pose

$$fX = \sum_{i=1}^{n} (fX^i) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Ce produit donne un champ de vecteur. Et il est associatif, dans le sens que

$$f(gX) = (fg)X.$$

► Enfin, on vérifie que vaut la distributivité :

$$f(X+Y) = fX + fY,$$

pour tout $X, Y \in \chi(M)$ et pour tout $f \in \mathbb{C}^\infty(M)$.

► Ensuite, vu la forme générale $X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ d'un champ vectoriel, avec $X_i \in \mathbb{C}^\infty(M)$. Alors l'ensemble $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ forme une base de $\chi(M)$ comme module sur $\mathbb{C}^\infty(M)$. □

VIII.1 Crochet de Lie des champs de vecteurs

Une opération importante sur les champs de vecteurs est le crochet de Lie :

Définition 1.31. *On appelle **crochet de Lie**, l'application $[.,.] : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$ qui définie par*

$$[X, Y] = X(Y) - Y(X),$$

Pour touts X, Y deux champs de vecteurs de $\chi(M)$.

Définition 1.32. *Soient X et Y deux champs de vecteurs. Leur crochet de Lie est le champ de vecteurs $[X, Y]$ tel que, pour toute fonction lisse f, on a*

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf).$$

Regardons sur un exemple simple comment calculer le crochet de Lie de deux champs de vecteurs.

Exemple 1.14. *Soit $M = \mathbb{R}^2$ avec les coordonnées globales x et y. Soient $X = \frac{\partial}{\partial x}$ et $Y = x\frac{\partial}{\partial y}$ deux champs de vecteurs de $\chi(M)$. Alors, pour $f \in \mathbb{C}^\infty(M)$, on a*

$$[X, Y]f = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial f}{\partial y}\right) - x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$= x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} - x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$
$$= \frac{\partial}{\partial y} f.$$

Par conséquent, $[X,Y] = \frac{\partial}{\partial y}$. *En fait, comme* $[X,Y]$ *est une dérivation, les termes d'ordre 2 dans cet opérateur différentiel se simplifient systématiquement. Pour calculer* $[X,Y]$ *rapidement, il suffit donc de faire agir* X *sur les composantes de* Y*, puis de soustraire l'action de* Y *sur les composantes de* X*.*

Remarque 1.2. *Toutefois, l'égalité* $X(Yf) = Y(Xf)$ *est fausse en générale, même pour des champs de vecteurs de* $\mathbb{R}^n$*.*

Exemple 1.15. *Soit* $X = y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ *et* $Y = \frac{\partial}{\partial y}$ *deux champs de vecteurs sur* $\mathbb{R}^2$*. Alors on a*

$$(Xf) = y\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y},$$
$$(Yf) = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Donc

$$X(Yf) = \frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$
$$Y(Xf) = y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

D' ou

$$X(Yf) - X(Yf) = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Définition 1.33. *Soient* X *et* Y *deux champs de vecteurs sur* M*. Soit* $(x^1, \ldots, x^n)$ *un système de coordonnées local sur* M*. Si* $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ *et* $Y = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ *Alors*

$$[X,Y] = \sum_{i,j=1}^{n} \left(X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \right) - Y^i \left(\frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

ne dépend pas du choix de coordonnées.

Démonstration. Soient $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ deux champs de vecteurs sur M de $\chi(M)$, on a

$$X(Yf) = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} f\right) = \sum_{i,j} X^i \frac{\partial Y^i}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + \sum_{i,j} X^i Y^j \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) f,$$

et on a

$$Y(Xf) = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x^j} f\right) = \sum_{i,j} Y^i \frac{\partial X^i}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + \sum_{i,j} Y^i X^j \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) f.$$

Alors

$$X(Yf) - Y(Xf) = \sum_{i,j} X^i \frac{\partial Y^i}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} - \sum_{i,j} Y^i \frac{\partial X^i}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

D' ou

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^{n}\left(X^i\left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\right) - Y^i\left(\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

□

Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs possède de nombreuses propriétés :

Proposition 1.3. *Le crochet de Lie est une application* $[.,.] : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$ *a les propriétés suivantes :*

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ *(L' antisymétrie),*
2. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ *(identité de Jacobi),*
3. $[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X,$
4. $[X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y,$
5. $[X, Y](fg) = f[X, Y](g) + g[X, Y](f).$

Pour touts $X, Y, Z \in \chi(M)$ *et* $f, g \in \mathbb{C}^\infty(M)$.

Démonstration.
1- Pour la premier formule on a

$$\begin{aligned}[X, Y] &= X(Y) - Y(X)\\ &= -(-X(Y) + Y(X))\\ &= -(Y(X) - X(Y))\\ &= -[Y, X].\end{aligned}$$

2-Pour la deuxième formule on a

$$\begin{aligned}
[X,[Y,Z]]f &= X([Y,Z]f) - [Y,Z](Xf) \\
&= X(Y(Zf) - Z(Yf)) - Y(Z(Xf)) + Z(Y(Xf)) \\
&= X(Y(Zf)) - X(Z(Yf)) - Y(Z(Xf)) + Z(Y(Xf)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Y,[Z,X]]f &= Y([Z,X]f) - [Z,X](Yf) \\
&= Y(Z(Xf) - X(Zf)) - Z(X(Yf)) + X(Z(Yf)) \\
&= Y(Z(Xf)) - Y(X(Zf)) - Z(X(Yf)) + X(Z(Yf)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Z,[X,Y]]f &= Z([X,Y]f) - [X,Y](Zf) \\
&= Z(X(Yf) - Y(Xf)) - X(Y(Zf)) + Y(X(Zf)) \\
&= Z(X(Yf)) - Z(Y(Xf)) - X(Y(Zf)) + Y(X(Zf)).
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
[X,Y]f &= X(Yf) - Y(Xf). \\
[Z,X]f &= Z(Xf) - X(Zf). \\
[Y,Z]f &= Y(Zf) - Z(Yf).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] &= X(Y(Zf)) - X(Z(Yf)) - Y(Z(Xf)) + Z(Y(Xf)) \\
&\quad + Y(Z(Xf)) - Y(X(Zf)) - Z(X(Yf)) + X(Z(Yf)) \\
&\quad + Z(X(Yf)) - Z(Y(Xf)) - X(Y(Zf)) + Y(X(Zf)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

3-Pour la troisième formule on a

$$\begin{aligned}
[fX,Y] &= fX(Y) - Y(fX) \\
&= fX(Y) - Y(f)X - fY(X) \\
&= f[X,Y] - Y(f)X.
\end{aligned}$$

4-Pour la quatrième formule on a

$$\begin{aligned}
[X,fY] &= X(fY) - fY(X) \\
&= X(f)Y + fX(Y) - fY(X) \\
&= f[X,Y] + X(f)Y.
\end{aligned}$$

5-Pour la cinquième formule on a

$$\begin{aligned}
[X,Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) \\
&= fX(Y(g)) + gX(Y(f)) - fY(X(g)) - gY(X(f)) \\
&= fX(Y(g)) - fY(X(g)) + gX(Y(f)) - gY(X(f)) \\
&= f[X,Y](g) + g[X,Y](f).
\end{aligned}$$

□

Définition 1.34. *Si le crochet de Lie de deux champs de vecteurs est nul $[X,Y]=0$, on dit que les deux champs de vecteurs **commutent**.*

Exemple 1.16. *Soit X et Y deux champs de vecteurs telle que $X=\frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y=\frac{\partial}{\partial x^j}$, alors*

$$[X,Y] = \frac{\partial}{\partial x^i}(\frac{\partial}{\partial x^j}) - \frac{\partial}{\partial x^j}(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} = 0,$$

Donc on dit que X et Y sont commutent.

Chapitre 2

Algèbre tensorielle

Dans ce chapitre on définit les tenseurs et leurs opérations algébriques. Avant d'en donner la définition, on commence par introduire une convention de notation inventée par Einstein pour ses calculs en mécanique relativiste, et couramment utilisée aujourd'hui dans toutes les spécialités qui utilisent des calculs vectoriels, matriciels et tensoriels.

I Convention de sommation d'Einstein

Définition 2.1. *La convention d'Einstein consiste à omettre le signe somme $\sum$ lorsque l'indice est répété dans une expression.*

Les indices de sommation sont appelés **indices muets** car on peut changer leur nom sans changer la valeur du résultat. Les autres indices, qui n'apparaissent qu'une fois dans monôme, sont appelés **indices réels**.

Exemple 2.1. *Soient un espace vectoriel E de dimension m et l'une de ses bases (e_i). Si on décide de numéroter ses composantes avec un indice en haut, un vecteur $v \in E$ s'écrit :*

$$v = \sum_{i=1}^{m} v^i e_i = v^i e_i = v^n e_n.$$

Remarquer que dans la ligne ci-dessus, il n'y a pas d'indice réel.

Remarque 2.1. *Les indices en haut ne sont pas des puissances mais des numéros.*

II Composantes covariantes et contravariantes

Définition 2.2. *Soit (e_i) une base d'un espace vectoriel E. On appelle composantes **covariantes** d'un vecteur v, les n nombres v_i tels que :*

$$v_i = v.e_i$$

Elles sont représentées au moyen d'indices inférieurs.

Définition 2.3. *On appelle **base dual** de la base (e_i) la base notée (e^j) telle que :*

$$e^i.e_j = \delta^i_j.$$

*Où δ^i_j est le **symbole de Kröneker** qui défini par :*

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & si\ \ i = j \\ 0 & si\ \ i \neq j. \end{cases}$$

Définition 2.4. *Soit (e^i) une base dual d'un espace vectoriel dual E^*. On appelle composantes **contravariantes** d'un vecteur v, les n nombres v^i tels que :*

$$v^i = v.e^i$$

Elles sont représentées au moyen d'indices supérieurs.

Remarque 2.2.

- *On peut définir les composantes covariantes par :*

$$v = v_i.e^i.$$

- *On peut définir les composantes contracovariantes par :*

$$v = v^i.e_i.$$

III Produit tensoriel de deux vecteurs

Définition 2.5. *Soient E et F deux espaces vectoriels, de dimensions respectives m et r, et soit G un espace vectoriel à $q = m \times r$ dimensions. pour touts $x \in E$, $y \in F$, au couple de vecteurs (x, y) nous faisons correspondre l'élément noté $x \otimes y$ de l'espace G.*

La loi de composition $\otimes$ ayant les propriétés suivantes :

1. *Pour touts $(x, x_1, x_2) \in E$, $(y, y_1, y_2) \in F$, la loi $\otimes$ est distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition vectorielle (notée +) :*

$$x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x_1 \otimes y_2$$
$$(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y.$$

2. *Soit α un scalaire. La loi $\otimes$ est associative par rapport à la multiplication par un scalaire :*

$$\begin{aligned} \alpha(x \otimes y) &= \alpha x \otimes y \\ &= x \otimes \alpha y. \end{aligned}$$

3. *Soit e_i une base de E et soit f_j une base de F. Les mr éléments,*

$$e_i \otimes f_j$$

forment une base de G.

Définition 2.6. *(Élément produit tensoriel de deux vecteurs) La loi de composition $\otimes$ est appelée multiplication tensorielle. L'élément $x \otimes y$ est appelé produit tensoriel des vecteurs x et y.*

Définition 2.7. *(Espace produit tensoriel) L'espace vectoriel G muni de la multiplication tensorielle est appelé produit tensoriel des espaces vectoriels E et F, et est noté $E \otimes F$.*

IV Expression analytique du produit tensoriel

Cherchons comment, grâce aux trois propriétés précédents (2.5), définir de façon explicite la multiplication tensorielle de deux vecteurs.

Soient $(e_i)_{i=1,2,\ldots,m}$, $(f_j)_{\alpha=1,2,\ldots,r}$, et $(\epsilon_{ij})_{i=1,2,\ldots,m\ ;\ \alpha=1,2,\ldots,r}$ des bases respectives de E, F et de $E \otimes F$. Alors :

$$x \otimes y = x^i e_i \otimes y^j f_j \quad \textit{pour tout } x \in E, y \in F.$$

Posons $m = r = 2$:

$$x \otimes y = (x^1 e_1 + x^2 e_2) \otimes (y^1 f_1 + y^2 f_2).$$

En utilisant la propriété (1) :

$$x \otimes y = x^1 e_1 \otimes y^1 f_1 + x^1 e_1 \otimes y^2 f_2 + x^2 e_2 \otimes y^1 f_1 + x^2 e_2 \otimes y^2 f_2.$$

En utilisant la propriété (2) :

$$x \otimes y = x^1 y^1 e_1 \otimes f_1 + x^1 y^2 e_1 \otimes f_2 + x^2 y^1 e_2 \otimes f_1 + x^2 y^2 e_2 \otimes f_2.$$

En généralisant à m et r quelconques :

$$x \otimes y = x^i y^j e_i \otimes f_j,$$

et avec la propriété (3) :

$$x \otimes y = x^i y^j \epsilon_{ij}.$$

Les trois propriétés (2.5) impliquent que les composantes du produit tensoriel $x \otimes y$ s'écrivent sous la forme $x^i y^j$ dans la base ϵ_{ij}.

Notation 2.1. *Les composantes des éléments U de l'espace produit tensoriel sont notés*

$$u^{ij} = x^i y^j.$$

Les éléments U s'écrivent alors sous la forme :

$$\begin{aligned} U &= x \otimes y \\ &= x^i y^j e_i \otimes f_j \\ &= u^{ij} e_i \otimes f_j. \end{aligned}$$

Théorème 2.1. *Les espaces E, F, et $E \otimes F$ étant rapportés à des bases, associées par les relations $e_i \otimes f_j = \epsilon_{ij}$, la seule loi de composition satisfaisant aux propriété* (2.5) *est celle qui aux vecteurs $x = x^i e_i$ et $y = y^j f_j$ fait correspondre le vecteur $x^i y^j \epsilon_{ij}$ de $E \otimes F$.*

V Tenseur

V.1 Produit tensoriel de deux espaces identiques

En pratique, on a très souvent à effectuer le produit tensoriel de vecteurs appartenant à des espaces vectoriels identiques.

Définition 2.8. *Soient e_i les vecteurs de base de E, et soient $x = x^i e_i$ et $y = y^i e_i$ deux vecteurs de l'espace vectoriel E. Le produit tensoriel d'ordre 2 des vecteurs x et y s'écrit :*

$$\begin{aligned} U &= x \otimes y \\ &= x^i y^j (e_i \otimes e_j) \\ &= u^{ij} (e_i \otimes e_j). \end{aligned}$$

Le produit tensoriel de E par lui-même s'écrit $E \otimes E$ ou encore $E^{(2)}$.

V.2 Non commutativité du produit tensoriel

Le produit tensoriel d'un espace vectoriel E avec lui-même, $E \otimes E$, a pour vecteurs de base les produits tensoriels $e_i \otimes e_j$ Par exemple, les vecteurs $(e_1) \otimes e_2)et(e_2 \otimes e_1)$ sont chacun des vecteurs de base, et ne peuvent donc pas être confondus. Le produit tensoriel des vecteurs e_i et e_j n'est donc pas commutatif. Il en va de même pour tout produit tensoriel de vecteurs. Soit E un espace vectoriel :

$$\begin{aligned} x \otimes y &= x^i y^j (e_i \otimes e_j) \\ &= x^1 y^1 (e_1 \otimes e_1) + x^1 y^2 (e_1 \otimes e_2) + x^2 y^1 (e_2 \otimes e_1) + x^2 y^2 (e_2 \otimes e_2), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y \otimes x &= y^j x^i (e_j \otimes e_i) \\ &= y^1 x^1 (e_1 \otimes e_1) + y^1 x^2 (e_1 \otimes e_2) + y^2 x^1 (e_2 \otimes e_1) + y^2 x^2 (e_2 \otimes e_2), \end{aligned}$$

Par suite de la non-commutativité du produit tensoriel, nous avons :

$$\begin{gathered} x^1 y^2 (e_1 \otimes e_2) \neq y^2 x^1 (e_1 \otimes e_1) \\ x \otimes y \neq y \otimes x. \end{gathered}$$

V.3 Associativité du produit tensoriel

Soient x, y, z, trois vecteurs appartenant respectivement aux espaces vectoriels E, F, G. Nous pouvons multiplier tensoriellement l'élément $x \otimes y$ de $E \otimes F$ par le vecteur z de G. Nous obtenons alors l'élément $(x \otimes y) \otimes z$ de l'espace vectoriel

$$H = (E \otimes F) \otimes G.$$

Nous posons comme nouvel propriété que le produit tensoriel des espaces vectoriels est associatif, si bien que l'on a :

$$\begin{aligned} H &= (E \otimes F) \otimes G \\ &= E \otimes F \otimes G. \end{aligned}$$

Ceci revient à poser l'associativité des vecteurs de base :

$$(e_i \otimes f_j) \otimes g_k = e_i \otimes f_j \otimes g_k.$$

Pour les éléments résultants, nous avons :

$$(x \otimes y) \otimes z = (x^i e_i \otimes y^j f_j) \otimes z^k g_k.$$

En utilisant le théorème (IV) :

$$\begin{aligned}(x\otimes y)\otimes z &= (x^i y^j \epsilon_{ij})\otimes z^k g_k\\ &= x^i y^j z^k \epsilon_{ij}\otimes g_k\\ &= x^i y^j z^k (e_i\otimes f_j)\otimes g_k,\end{aligned}$$

et, en utilisant la propriété (V.3) :

$$\begin{aligned}(x\otimes y)\otimes z &= x^i y^j z^k e_i\otimes f_j\otimes g_k\\ &= x^i e_i\otimes (y^j z^k f_j\otimes g_k)\\ &= x^i e_i\otimes (y^j f_j\otimes z^k g_k)\\ &= x\otimes (y\otimes z)\\ &= x\otimes y\otimes z.\end{aligned}$$

VI Tenseur sur une variété

Définition 2.9. *Pour tout $x\in M$ nous définissons l'espace vectoriel*

$$T_x^{(p,q)}M = \underbrace{T_xM\otimes T_xM\otimes \ldots T_xM}_{p\ fois}\otimes \underbrace{T_x^*M\otimes T_x^*M\otimes \ldots T_x^*M}_{q\ fois}$$

- *Un élément $T\in T_x^{(p,q)}M$ est un tenseur de type (p,q) au-dessus de x.*
- *Dans une base associe à un système de coordonnées, (x^i) au voisinage de x, il s'écrit comme suit*
  $T|_x = T^{i_1 i_2\ldots i_p}_{j_1 j_2\ldots j_q}(x)\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}(x)\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_2}}(x)\otimes\ldots\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}(x)\otimes dx^{j_1}|_x\otimes dx^{j_2}|_x\cdots\otimes dx^{j_q}|_x$
  Où $T^{i_1 i_2\ldots i_p}_{j_1 j_2\ldots j_q}(x)$ sont des nombres réels.
- *On note $T^{(p,q)}M = \bigcup\limits_{x\in M} T_x^{(p,q)}M$.*

Définition 2.10. *Un champ de tenseur de type (p,q) (ou un tenseur sur M) est une section de $T^{(p,q)}M$. L'ensemble des champs de tenseur de type (p,q) est noté par $\Im(p,q)M$.*

Exemple 2.2.

- *Une fonction sur une variété M est un tenseur de type $(0,0)$.*
- *Un champ de vecteurs X est un tenseur de type $(1,0)$.*
- *Une $1-$forme différentiable ω sur une variété M est un tenseur de type $(0,1)$.*

Chapitre 3

Métriques Riemanniennes et connexion

La géométrie Riemannienne traite des propriétés intrinsèques des espaces courbés et représente une généralisation de la géométrie euclidienne. Une variété Riemannienne est une variété différentiable munie d'un tenseur fondamental qui fournit une structure euclidienne sur chaque espace tangent. Pour commencer on introduira les notions fondamentales de variété Riemannienne, dérivée covariante et connexion de Levi-Civita, géodésique et courbure.

I Métriques Riemanniennes

En coordonnées cartésiennes rectangulaires la distance entre deux voisinages $(x+dx, y+dy, z+dz)$ et (x,y,z) est donnée par :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Par extension à un espace de n dimensions, Riemann a définit la distance ds entre deux voisins x^i et $x^i + dx^i$, $(i = 1, \dots, n)$ par la forme quadratique suivante :

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{12}dx^1dx^2 + \cdots + g_{1n}dx^1dx^n + g_{21}dx^2dx^1 + g_{22}(dx^2)^2 + \cdots + g_{2n}dx^2dx^n$$

$$+ \cdots + g_{n2}dx^ndx^2 + g_{n2}dx^ndx^2 + \cdots + g_{nn}(dx^n)^2.$$

Qui peut s'écrire sous forme suivant :

$$ds^2 = g_{ij}dx^idx^j, \qquad (i,j = 1, \dots, n). \tag{3.1}$$

Où g_{ij} sont des fonctions des coordonnées $(x^1, \dots, x^n)$, La forme quadratique (3.1) est engendré par l' espace de dimension n qui appelée **l'espace Riemannien**.

I.1 Espace de Riemann

Définition 3.1. *Un espace de Riemann est une variété à laquelle on a attaché une métrique. Cela signifie que, dans chaque partie de la variété, représentée analytiquement au moyen d'un système de coordonnées* $(x^1, \ldots, x^n)$*, on s'est donné une métrique définie par la forme quadratique* (3.1).

Les coefficients g_{ij} ne sont pas entièrement arbitraires et doivent vérifier les conditions suivantes :

- Les composantes g_{ij} sont symétriques : $g_{ij} = g_{ji}$.
- Le déterminant de la matrice $\left(g_{ij}\right)$ est différent de zéro.
- Toutes les dérivées partielles d'ordre deux des g_{ij} existent et sont continues (on dit que g_{ij} sont de classe $\mathbb{C}^2$).

Un espace Riemannien est donc un espace de points chacun étant repéré par n coordonnées $(x^1, \ldots, x^n)$. doté d'une métrique quelconque de la forme (3.1) vérifiant les conditions ci-dessus. Cette **métrique** est dit **Riemannienne.**

Définition 3.2. *Une métrique Riemannienne g sur une variété différentiable M est une application,*

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to \mathbb{C}^\infty(M)$$
$$(X, Y) \mapsto g(X, Y), \quad X, Y \in \chi(M),$$

qui vérifie les conditions suivantes :

1. *g est une forme bilinéaire : pour touts $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \chi(M)$, et $a, b \in \mathbb{C}^\infty(M)$*
   $g(aX_1 + bX_2, Y) = ag(X_1, y) + bg(X_2, Y)$
   $g(X, aY_1 + bY_2) = ag(X, Y_1) + bg(X, Y_2)$,
2. *g est symétrique : $g(X, Y) = g(Y, X)$,*
3. *g est non dégénérée : $g(X, X) = 0 \Rightarrow X = 0$,*
4. *g est définie positive : $g(X, X) \geq 0$ pour tout X non nul.*

Définition 3.3. *L'expression d'une métrique g dans une carte (U, φ) de M avec coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n)$ est donc*

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Localement, si $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ sont deux champs de vecteur de $\chi(M)$ sur M. Alors on a

$$g(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j.$$

Exemple 3.1. *Un premier exemple est $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique euclidienne g, qui est le simple produit scalaire $(x, y) \mapsto x^\intercal y$ avec l'identification $T_x\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$.*

Exemple 3.2. *La première forme fondamentale*[1] *est une métrique Riemannienne.*

Exemple 3.3. *Soient $(x^1, x^2) = (x, y)$ les coordonnées cartésienne sur $\mathbb{R}^2$.*

Soient $(y^1, y^2) = (r, \theta)$ les coordonnées polaires. Alors les composantes du tenseur métrique par rapport aux coordonnées polaires sont :

$$\begin{aligned} g_{11} = g_{rr} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \\ g_{12} = g_{21} &= 0, \\ g_{22} = g_{\theta\theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= (-r\sin\theta)^2 + (r\cos\theta)^2 = r^2, \end{aligned}$$

donc

$$g = \left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

D' ou la métrique est

$$g = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2.$$

Exemple 3.4. *Soient $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ les coordonnées cartésiennes sur $\mathbb{R}^3$.*

Soient $(y^1, y^2, y^3) = (r, \theta, z)$ les coordonnées cylindriques. Alors les composantes g_{ij} par rapport aux coordonnées cylindrique sont :

$$\begin{aligned} g_{11} = g_{rr} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \\ g_{12} = g_{21} &= g_{13} = g_{31} = g_{23} = g_{32} = 0, \\ g_{22} &= r^2, \\ g_{33} &= 1, \end{aligned}$$

1. $ds^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 dx^2 + 2\left(\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 dy^2.$

donc

$$g = \left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La métrique devient alors

$$g = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + (dz)^2.$$

Exemple 3.5. *Soient* $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ *les coordonnées cartésiennes sur* $\mathbb{R}^3$.

Soient $(y^1, y^2, y^3) = (r, \theta, \varphi)$ *les coordonnées sphériques. Alors les composantes* g_{ij} *par rapport aux coordonnées sphériques sont :*

$$\begin{aligned} g_{11} = g_{rr} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \\ g_{12} = g_{21} &= g_{13} = g_{31} = g_{23} = g_{32} = 0, \\ g_{22} = g_{\theta\theta} &= (r\cos\theta\cos\varphi)^2 + (r\cos\theta\sin\varphi)^2 + (-r\sin\theta)^2 = r^2, \\ g_{33} = g_{\varphi\varphi} &= (-r\sin\theta\sin\varphi)^2 + (r\sin\theta\cos\varphi)^2 = r^2\sin^2\theta, \end{aligned}$$

donc

$$g = \left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

La métrique devient alors

$$g = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta(d\varphi)^2.$$

Remarque 3.1. *Une métrique Riemannienne* g *sur* M *est un tenseur de type* $(0, 2)$.

Définition 3.4. *On appelle l'inverse de la matrice* $\left(g_{ij}\right)$ *le tenseur métrique conjugué. On le note par* $\left(g^{ij}\right)$.

I.2 Longueur d'un arc

Définition 3.5. *Un arc de courbe différentiable est une application différentiable* $\gamma : [a, b] \mapsto M$*, où* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *est un intervalle fermé. Si de plus* M *est munie d'une métrique Riemannienne, la longueur d'un tel arc est définie par*

$$l(\gamma) = l_g(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_g \, dt.$$

I.3 Longueur d'un vecteur dans l'espace Riemannien

Définition 3.6. *Soit X un vecteur de T_pM pour tout $p \in M$. Alors on note sa longueur par $\|X\|$ et on la calcule comme suit,*

$$\|X\|_g = \sqrt{g_{ij}X^iX^j}.$$

Notation 3.1. *On définit le vecteur unité comme le vecteur de longueur 1.*

I.4 L'angle entre deux vecteur

Définition 3.7. *On définit l'angle α entre deux vecteurs X et Y pour $(X, Y) \in T_pM \setminus \{0\}$ comme l'unique réel θ de $[0, \pi]$ par la formule suivante :*

$$\cos\alpha = \frac{g_{ij}X^iY^j}{\|X^i\|\|Y^j\|}.$$

Exemple 3.6. *Soient X et Y deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ au point M dont les coordonnées cartésiennes sont (x, y, z) et les coordonnées cylindriques sont (r, θ, z), tels que*
les composantes cartésiennes du vecteur X sont :

$$X = 1\frac{\partial}{\partial x} + 0\frac{\partial}{\partial y} + 2\frac{\partial}{\partial z},$$

les composantes cylindrique du vecteur Y sont :

$$Y = r\frac{\partial}{\partial r} + 0\frac{\partial}{\partial \theta} + 1\frac{\partial}{\partial z}.$$

Trouvons l'angle entre X et Y. D'abord, calculons la longueur de X dans la métrique euclidienne. On obtient :

$$\|X\|^2 = (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 = 1 + 0 + 4 = 5.$$

Donc

$$\|X\| = \sqrt{5},$$

avec

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, calculons la longueur de Y dans la même métrique. La métrique en coordonnées cylindriques est donnée par la matrice

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent on obtient :

$$\|Y\|^2 = (Y^1)^2 + r^2(Y^2)^2 + (Y^3)^2 = r^2 + 0 + 1 = r^2 + 1.$$

Donc

$$\|Y\| = \sqrt{1+r^2}.$$

Pour calculer le produit scalaire, on calcule les coordonnées cartésiennes de Y. Notons la représentation cartésienne de

$$Y = (\bar{Y}^1, \bar{Y}^2, \bar{Y}^3),$$

et sa représentation en coordonnées cylindrique

$$Y = (Y^1, Y^2, Y^3).$$

On a la relation entre les deux représentation,

$$\begin{pmatrix} \bar{Y}^1 \\ \\ \bar{Y}^2 \\ \\ \bar{Y}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^1 \\ \\ Y^2 \\ \\ Y^3 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \bar{Y}^1 &= r\cos\theta + 0 = r\cos\theta = x \\ \bar{Y}^2 &= r\sin\theta + 0 = r\sin\theta = y \\ \bar{Y}^3 &= 1. \end{aligned}$$

Par conséquence

$$Y = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 1\frac{\partial}{\partial z}.$$

Donc

$$g_{ij}X^iY^j = (X^1Y^1 + X^2Y^2 + X^3Y^3) = x + 0 + 2 = x + 2.$$

D'où

$$\cos\alpha = \frac{x+2}{\sqrt{5}\,\sqrt{x^2+y^2+1}}.$$

II Variété Riemannienne

Définition 3.8. *Une **variété Riemannienne** (M, g), c'est la donnée d'une variété différentiable M et d'un produit scalaire sur chaque espace tangent. munie d'une métrique Riemannienne.*

Exemple 3.7. *(L'espace euclidien.)*
L'espace Euclidien $\mathbb{R}^n$ est l'exemple le plus simple de variété Riemannienne. On prend alors comme métrique g le produit scalaire usuel sur $T_p\mathbb{R}^n$ (que l'on identifie à $\mathbb{R}^n$ pour tout p de l'espace). Plus généralement, si E est un espace vectoriel de dimension n doté d'un produit scalaire, on peut définir la métrique Riemannienne $g(X, Y) =< X, Y >$ sur $T_pE = E$.

Remarque 3.2. *On dit qu'un variété Riemannienne est un espace euclidien s'il existe une base de T_pM telle que la matrice du produit scalaire dans cette base est I_n.*

Définition 3.9. *(**Isométries**)Soit (M, g) et (N, h) deux variétés Riemanniennes. Un difféomorphisme $\varphi : M \to N$ est appelé une isométrie si*

$$\varphi^* h = g$$

On dit que (M, g) et (N, h) sont isométriques s'il existe une isométrie entre les deux.

Exemple 3.8. *Soit V est un espace vectoriel de dimension n. En choisissant une base orthonormée $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ $(E_1, \ldots, E_n)$ de V, l'application qui à $(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ associe $X = x^iE_i \in V$ définit une isométrie de $(\mathbb{R}^n, g)$ dans (V, g).*

Remarque 3.3. *La relation être isométrique étant une relation d'équivalence sur la classe des variétés Riemanniennes, la géométrie Riemannienne s'intéresse principalement aux propriétés conservés par isométries.*

II.1 Sous-variétés Riemanniennes

Définition 3.10. *Soit N sous variété de M. N est munie canoniquement d'une structure de variétés Riemanniennes g_0 définie par la restriction à N de g. (N, g_0) est dite **sous variété Riemannienne** de (M, g).*

Définition 3.11. *Soit N une sous variété de $\mathbb{R}^n$. Alors la métrique canonique de $\mathbb{R}^n$ induit une structure de sous variété sur N donnée par :*

$$i^* <,>$$

$<,>$ étant le produit scalaire euclidien et $i : N \to M$ l'injection canonique.

II.2 Produit de deux variétés Riemanniennes

Définition 3.12. *Soient (M, g) et (N, h) deux variétés Riemanniennes. Le produit de deux variétés Riemanniennes (M, g) et (N, h) est donnée par :*

$$g \times h((X_M, X_N), (Y_M, Y_N)) = g(X_M, Y_M) + h(X_N, Y_N), \ (X_M, Y_M) \in T_pM, (X_N, Y_N) \in T_qN.$$

avec l'identification $T(p, q)M \times N = T_pM \oplus T_qN$.

III Connexion Riemannienne

Nous allons introduire maintenant une nouvelle structure sur M. Cette structure nous permettra de définir une nouvelle dérivation, la dérivation covariante, Cette dérivation agira tout d'abord sur les champs de vecteurs. La notion de connexion apporte un remède partiel à cette difficulté : c'est l'outil infinitésimal permettant de comparer entre eus des vecteurs tangents en deux points différents de M.

III.1 Connexion affine

Définition 3.13. *Une **connexion affine** sur une variété différentiable M est une opération ∇ qui associe à tout champs de vecteurs $X, Y \in \chi(M)$ une application linéaire*

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X, Y) &\to \nabla_X Y \end{aligned}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\nabla_X Y$ *est* $\mathbb{C}^\infty(M)$*-linéaire par rapport à* X *:*

$$\nabla_{fX_1+gX_2} Y \;=\; f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y, \quad f, g \in \mathbb{C}^\infty(M)$$

2. $\nabla_X Y$ *est* $\mathbb{R}$*-linéaire par rapport á* Y *:*

$$\nabla_X(aY_1 + bY_2) \;=\; a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

3. *vérifie la règle de Leibniz :*

$$\nabla_X(fY) \;=\; f\nabla_X Y + X(f)Y, \quad f \in \mathbb{C}^\infty(M)$$

$\nabla_X Y$ *est appelée la* ***dérivée covariante*** *de* Y *dans la direction de* X*.*

Exemple 3.9. *Une connexion sur la sphère fait rouler le plan tangent d'un point à un autre. Dans ce déplacement, le point de contact trace une courbe du plan : le développement.*

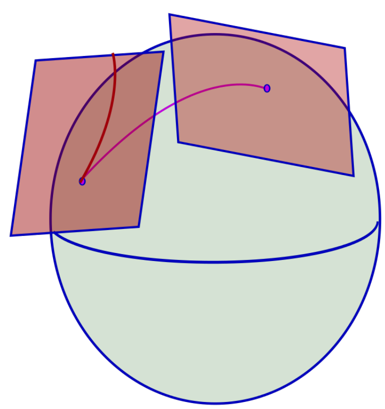

FIGURE 3.1 – *Représentation graphique d'un connexion sur la sphère.*

Remarque 3.4. *Toute variété différentiable admet une connexion affine.*

Définition 3.14. *On dit qu'une connexion affine* ∇ *sur* M *est* ***plate*** *si* $\nabla = 0$.

Définition 3.15. *On dit qu'une connexion affine* ∇ *est* ***symétrique*** *si elle vérifie :*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Dans tout qui suit on considère la convention d'Einstein (pour les sommes sans signe de sommation $\sum$).

Définition 3.16. *Dans un système de coordonnées locales $(x^1, \dots, x^n)$, une connexion affine est déterminée par* **les symboles de Christoffel** $(\Gamma^k_{ij}) \in \mathbb{C}^\infty(M)$ *donnés par :*

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{ij}\partial_k.$$

Où $\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$, *et* $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $\partial_l = \frac{\partial}{\partial x^l}$, $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$.

Exemple 3.10. *Soit le paramétrage de la sphère S^2 définie par*

$$\begin{aligned} f \ : \ [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] &\to S^2 \\ f(\theta, \varphi) &\mapsto (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta) \end{aligned}$$

Trouvons les symboles de Christoffel de la sphère S^2.
D'abord on calculer la métrique de la sphère

$$\begin{aligned} g_{11} &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = 1, \\ g_{22} &= \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \sin^2\theta, \\ g_{12} &= g_{21} = 0, \end{aligned}$$

alors la métrique est

$$g = \left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

D'où l'inverse de la métrique est

$$g^{-1} = \left(g^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2\theta} \end{pmatrix}.$$

On a

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_j g_{il} + \partial_i g_{jl} - \partial_l g_{ij}).$$

Alors pour $k = 1$,

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{1l}(\partial_1 g_{1l} + \partial_1 g_{1l} - \partial_l g_{11}),$$

avec $l = 1, 2$

Donc

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) + \frac{1}{2}g^{12}(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11}),$$

mais $g^{11} = 1$ *et* $g_{11} = 1,\ \partial_1 g_{11} = \partial_1(1) = 0$, *et* $g^{12} = 0$, $g_{12} = 0$

par conséquence

$$\Gamma^1_{11} = 0.$$

Même principe pour les autres en trouve alors :

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = 0\\
&\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \cot\theta,\\
&\Gamma^1_{22} = -\sin\theta\cos\theta.
\end{aligned}$$

Le lemme suivant montre que l'action de la connexion ∇ sur l'ouvert U est entièrement déterminée par ses symboles de Christoffel.

Lemme 3.1. *Soit* ∇ *une connexion sur* M, *et* $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i} = X^i\partial_i$, $Y = Y^j\frac{\partial}{\partial x^j} = Y^j\partial_j$, *dans le système de coordonnées locales associé à l'ouvert* U. *On a :*

$$\nabla_X Y = (XY^k + X^i Y^j \Gamma^k_{ij})\partial_k.$$

Démonstration. Soient $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i} = X^i\partial_i$, et $Y = Y^j\frac{\partial}{\partial x^j} = Y^j\partial_j$ deux champs de vecteurs.

On développe l'expression,

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_X(Y^j\partial_j)\\
&= X(Y^j)\partial_j + Y^j\nabla_X\partial_j\\
&= X(Y^j)\partial_j + Y^j X^i\nabla_{\partial_i}\partial_j\\
&= X(Y^k)\partial_k + Y^j X^i\Gamma^k_{ij}\partial_k\\
&= (XY^k + X^i Y^j\Gamma^k_{ij})\partial_k.
\end{aligned}$$

□

III.2 Torsion d'une connexion

Définition 3.17. *La torsion d'une connexion est le tenseur de type* $(1,2)$ *défini par l'expression*

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

$T(X,Y)$ *est un champ de vecteurs. De la définition, on remarque que* $T(X,Y) = -T(Y,X)$.

Expression locale de la torsion T d'une connexion ∇ :

Pour $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^i \partial_i$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} = Y^j \partial_j$, $\in \chi(M)$, o na

$$\begin{aligned}
T(X,Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \\
&= X^i \partial_i (Y^j) \partial_j + X^i Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j - Y^j \partial_j (x^i) \partial_i \\
&- Y^j X^i \nabla_{\partial_j} \partial_i - X^i \partial_i (Y^i) \partial_j + Y^j \partial_j (x^i) \partial_i \\
&= X^i Y^j (\nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i) \\
&= X^i Y^j (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}) \partial_k.
\end{aligned}$$

Définition 3.18. *Une connexion affine ∇ sur M est dite* ***sans torsion*** *si $T = 0$. C'est à dire on peut exprimer le crochet de Lie en fonction de la connexion*

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X, \qquad X, Y \in \chi(M).$$

III.3 Transport parallèle

Déplacer un vecteur en le gardant égal à lui-même tout au long du chemin s'appelle un transport parallèle. Comme nous allons le voir, le transport parallèle est défini quand nous avons une connexion.

Définition 3.19. *Soit M munie d'une connexion ∇. Un champ de vecteurs X est dit* ***parallèle*** *si $\nabla X = 0$ au sens où, pour tout champ de vecteurs Y, $\nabla_Y X = 0$, i.e. un champ de vecteurs est parallèle si toutes ses dérivées sont nulles.*

Définition 3.20. *(Champ de vecteurs parallèle). On dit d'un champ de vecteurs V le long d'une courbe γ qu'il est parallèle le long de γ si*

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} V = 0.$$

Définition 3.21. *Si $\gamma : I \to M$ est un chemin (différentiable) paramétré par un intervalle $I = [a,b]$ et $V \in T_pM$, où $x = \gamma(a)$, un champ de vecteurs X le long de γ (et, en particulier, la valeur de ce champ en $y = \gamma(b)$) est appelé* ***le transport parallèle de*** *V* ***le long de*** *γ si :*

- $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} X = 0$, *pour tout $t \in [a,b]$,*

- $X_\gamma(a) = V$.

Exemple 3.11. *Dans le plan euclidien, un champ de vecteurs constant est parallèle le long de tout segment de droite.*

Exemple 3.12. *Transport parallèle d'un vecteur autour d'une boucle fermée (de A à N à B et retour en A) sur une sphère. L'angle α par lequel il a tourné est proportionnel à l'aire intérieure à la boucle.*

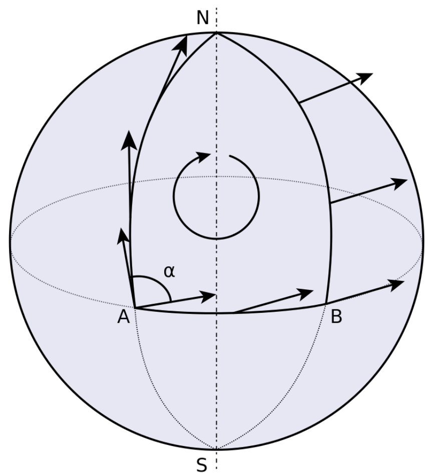

FIGURE 3.2 – *Représentation graphique d'un transport parallèle sur une sphère.*

Exemple 3.13. *Considérons un paramétrage en sphérique de la sphère unité*

$$(\theta, \varphi) \to \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\varphi \\ \sin\theta & \sin\varphi \\ \cos\theta & \end{pmatrix}.$$

La dérivation $\frac{\partial}{\partial\theta}$ correspond au vecteur $e_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\varphi \\ \cos\theta & \sin\varphi \\ -\sin\theta & \end{pmatrix}$ qui est unitaire,

et la dérivation $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ correspond au vecteur $e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\theta & \sin\varphi \\ \sin\theta & \cos\varphi \\ 0 & \end{pmatrix}$ qui n'est pas unitaire.

Posons $\partial_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ le vecteur unitaire colinéaire à e_φ, et $\partial_\theta = e_\theta$, de sorte que $(\partial_\theta, \partial_\varphi)$ constitue une base orthonormée du plan tangent à la sphère au point considéré.
On peut montrer que :

$$\nabla_{e_\varphi}\partial_\theta = \cos\theta\,\partial_\varphi \quad \textit{et} \quad \nabla_{e_\varphi}\partial_\varphi = -\cos\theta\,\partial_\theta$$

Cela signifie que, si on se déplace le long du parallèle θ de la sphère, la longitude φ étant variable, la base orthonormée $(\partial_\theta, \partial_\varphi)$ tourne à la vitesse angulaire $\cos\theta$ *par rapport à une base qui serait transportée parallèlement le long du parallèle. Réciproquement, un champ Y sera transporté parallèlement le long du parallèle s'il tourne à la vitesse angulaire* $-\cos\theta$ *par rapport à la base orthonormée $\partial_\theta, \partial_\varphi$. Sur l'équateur, la rotation est nulle. Aux pôles, elle est maximale. C'est ce phénomène qui est observé dans l'expérience du pendule de Foucault, dont le plan d'oscillation se transporte parallèlement le long du parallèle où il est situé avec la rotation de la Terre.*

III.4 Connexion de Levi-Civita

Définition 3.22. *On dit que la métrique g est compatible avec la connexion ∇ (ou parallèle), si*

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = 0,$$

ou

$$X.g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

pour tous $X, Y, Z \in \chi(M)$.

Théorème 3.1. *(Théorème fondamental de la géométrie Riemannienne). Soit (M, g) une variété Riemannienne. Il existe une unique connexion affine ∇ sur TM, compatible avec la métrique g et symétrique telle que*

- La torsion de ∇ s'annule, pour tous champs de vecteurs X et Y on a

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

- La métrique Riemannienne est parallèle, pour tous champs de vecteurs X,Y et Z on a

$$X.g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

*Cette connexion est appelée **la connexion de Levi-Civita** associée à la métrique g.*

Démonstration.
L'unicité : On montre ici l'unicité. Puisque ∇ est une connexion sans torsion sur M pour laquelle g est parallèle, alors pour tous champs de vecteurs X, Y et Z, on a :

$$\begin{aligned} X.g(Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \\ Y.g(Z, X) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X), \\ Z.g(X, Y) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y). \end{aligned}$$

La somme des deux premières identités moins la troisième donne :

$X.g(Y,Z)+Y.g(Z,X)-Z.g(X,Y) = g(\nabla_X Y+\nabla_Y X,Z)+g(\nabla_X Z-\nabla_Z X,Y)+g(\nabla_Y Z-\nabla_Z Y,X).$

Parce que la torsion est nulle, l'expression précédente se simplifie :

$2g(\nabla_X Y,Z) = X.g(Y,Z)+Y.g(Z,X)-Z.g(X,Y)+g([X,Y],Z)+g([Z,X],Y)-g([Y,Z],X),$

avec

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y+\nabla_Y X &= [X,Y]+2\nabla_Y X,\\
\nabla_X Z-\nabla_Z X &= [X,Z],\\
\nabla_Y Z-\nabla_Z Y &= [Y,Z].
\end{aligned}$$

Existence : Si X et Y sont deux champs de vecteurs sur M, on définit le champ $\nabla_X Y$ comme l'unique champ de vecteurs sur M vérifiant l'identité précédemment obtenue :

$2g(\nabla_X Y,Z) = X.g(Y,Z)+Y.g(Z,X)-Z.g(X,Y)+g([X,Y],Z)+g([Z,X],Y)-g([Y,Z],X)$

En effet, pour toutes fonctions f, on a :

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X(fY),Z) &= X.g(fY,Z)+(fY).g(Z,X)-Z.g(X,fY)\\
&+\ g([X,fY],Z)+g([Z,X],fY)-g([fY,Z],X)\\
&= df(X).g(Y,Z)-df(Z).g(X,Y)+df(X).g(Y,Z)\\
&+\ df(Z)g(X,Y)+f.2g(\nabla_X Y,Z)\\
&= 2g(df(X).Y+f\nabla_X Y,Z).
\end{aligned}$$

Et on a

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{fX}Y,Z) &= (fX).g(Y,Z)+Y.g(Z,fX)-Z.g(fX,Y)\\
&+\ g([fX,Y],Z)+g([Z,fX],Y)-g([Y,Z],fX)\\
&= df(Y).g(Z,X)-df(Z).g(X,Y)-df(Y).g(X,Z)\\
&+\ df(Z).g(X,Y)+f.2g(\nabla_X Y,Z)\\
&= 2g(f\nabla_X Y,Z).
\end{aligned}$$

∇ est bien sans torsion :

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y-\nabla_Y X,Z) &= X.g(Y,Z)+Y.g(Z,X)-Z.g(X,Y)\\
&+\ g([X,Y],Z)+g([Z,X],Y)-g([Y,Z],X)\\
&-\ Y.g(X,Z)-X.g(Z,Y)+Z.g(Y,X)\\
&-\ g([Y,X],Z)-g([Z,Y],X)+g([X,Z],Y)\\
&= 2g([X,Y],Z).
\end{aligned}$$

Enfin, g est bien parallèle pour la connexion ∇ :

$$\begin{aligned}2g(\nabla_X Y,Z)+2g(Y,\nabla_X Z) &= X.g(Y,Z)+Y.g(Z,X)-Z.g(X,Y)\\ &\quad+\ g([X,Y],Z)+g([Z,X],Y)-g([Y,Z],X)\\ &\quad+\ X.g(Z,Y)+Z.g(Y,X)-Y.g(X,Z)\\ &\quad+\ g([X,Z],Y)+g([Y,X],Z)-g([Z,Y],X)\\ &= 2X.g(Y,Z).\end{aligned}$$

□

Exemple 3.14. *Connexion de Levi-Civita d'une surface en coordonnées polaires. On munit $\mathbb{R}^2$ d'une métrique Riemannienne de la forme*

$$dr^2+f(r,\theta)^2d\theta^2$$

On note

$$e_r=\frac{\partial}{\partial r},\quad e_\theta=\frac{1}{f(r,\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta},$$

le repère orthonormé " tournant ". Alors

$$\nabla_{e_r}e_r=0\ ,\nabla_{e_\theta}e_r=f^{-1}\frac{\partial f}{\partial r}e_\theta,\ \ \nabla_{e_r}e_\theta=0,\ \ \nabla_{e_\theta}e_\theta=-f^{-1}\frac{\partial f}{\partial r}e_r.$$

Autrement dit, la matrice de la connexion de Levi-civita dans le repère (e_r,e_θ) est

$$\Gamma=\begin{pmatrix}0 & -\frac{\partial f}{\partial r}d\theta\\ \frac{\partial f}{\partial r}d\theta & 0\end{pmatrix}$$

En effet, comme la connexion est métrique et $|e_\theta|=1$, ∇e_θ est colinéaire à e_r. De même, ∇e_r est colinéaire à e_θ. D'autre part,

$$[e_r,f(r,\theta)e_\theta]=[\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial\theta}]=0$$

donc

$$[e_r,e_\theta]=-\frac{f'}{f}e_\theta,$$

Où on note $f'=\frac{\partial f}{\partial r}$. Comme la connexion est sans torsion ,

$$\nabla_{e_r}e_\theta-\nabla_{e_\theta}e_r=-\frac{f'}{f}e_\theta,$$

d'où

$$(\nabla_{e_r} e_\theta).e_r - (\nabla_{e_\theta} e_r).e_r = 0,$$

ce qui entraine que $\nabla_{e_r} e_\theta = 0$*, puis que* $\nabla_{e_\theta} e_r = \frac{f'}{f} e_\theta$*. Notons* J *la rotation de* $\frac{\pi}{2}$ *dans le plan tangent. C'est un endomorphisme du plan tangent défini uniquement à partir de la métrique (et d'un choix d'orientation). Comme la métrique est parallèle,* J *est aussi parallèle,* $\nabla_J = 0$*.*
Il vient

$$\nabla_{e_r} e_r = \nabla_{e_r}(-Je_\theta) = -J\nabla_{e_r} e_\theta = 0$$

$$\nabla_{e_\theta} e_\theta = \nabla_{e_\theta}(Je_r) = J\nabla_{e_\theta} e_r = J\frac{f'}{f} e_\theta = \frac{f'}{f} e_r$$

La matrice de la connexion de Levi-Civita s'écrit donc

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -f^{-1}\frac{\partial f}{\partial r} e_\theta^* \\ f^{-1}\frac{\partial f}{\partial r} e_\theta^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -f\frac{\partial f}{\partial r} d\theta \\ f\frac{\partial f}{\partial r} d\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

IV Géodésiques

Une géodésique désigne la généralisation d'une ligne droite sur une surface. En particulier, le chemin le plus court, ou l'un des plus courts chemins s'il en existe plusieurs, entre deux points d'un espace pourvu d'une métrique est une géodésique.

Définition 3.23. *Soit* S *une surface régulière munie d'une métrique Riemannienne* g *et* $\gamma : [a, b] \to M$ *une courbe paramétrée tracée sur* S*. La longueur de* γ *est définie par*

$$L[\gamma] = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}\ dt$$

qui ne dépend pas du paramétrage. L'énergie de γ *est définie par*

$$E[\gamma] = \frac{1}{2}\int_a^b \|\dot\gamma(t)\|_g^2 = \frac{1}{2}\int_a^b g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))\ dt$$

qui dépend du paramétrage

Proposition 3.1. *Pour* γ *tracée sur* S *munie de* g*, on a*

$$(L[\gamma])^2 \leq 2(b-a)E[\gamma].$$

Démonstration. O na

$$(L[\gamma])^2 = \left(\int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))}\ dt \right)^2$$

$$\leq \int_a^b 1 \int_a^b g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))\ dt.$$

Alors

$$\leq 2(b-a)\times E[\gamma],$$

avec égalité si seulement si $t \mapsto g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))$ est proportionnelle a 1, i.e. est constant si seulement si γ est paramétrée proportionnellement a la longueur d'arc. □

Définition 3.24. *On appelle géodésique sur une surface Riemannienne une courbe paramétrée telle que pour tout $t \in [a,b]$,*

$$\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t) = 0,$$

avec

$$\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t) = \frac{d^2x^k(\gamma(t))}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\frac{dx^i(\gamma(t))}{dt}\frac{dx^j(\gamma(t))}{dt}.$$

Définition 3.25. *Une géodésique est paramétrée proportionnellement à la longueur d'arc : il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout t,*

$$g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)) = A.$$

Exemple 3.15. *Sur la sphère unité avec une métrique Riemannienne obtenue par restriction du produit scalaire de $\mathbb{R}^3$. Aucun cercle ne vérifie*

$$\nabla_{\frac{\partial\gamma_\varphi}{\partial\theta}}\frac{\partial\gamma_\varphi}{\partial\theta} = 0,$$

sauf si $\varphi = \frac{\pi}{2}$ Les géodésiques sont donc des morceaux de grands cercles.

Le théorème principal concernant les géodésiques est le suivant :

Théorème 3.2. *[7](Existence et Unicité des géodésiques). Soient $p \in M$, $X \in T_pM$, $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant t_0 et une géodésique $\gamma : I \to M$ telle que $\dot\gamma(t_0) = X$. De plus deux telles géodésiques définies respectivement sur des intervalles I et I' contenant t_0 sont égales sur leur domaine de définition commun $(I \cap I')$.*

V Courbure Riemannienne

En géométrie Riemannienne, la courbure est un tenseur introduit à partir de la notion de connexion. Cet objet c'est dégagé comme le plus pertinent, mais il peut être difficile à appréhender en raison du formalisme nécessaire à son introduction.

Définition 3.26. *Sur une variété Riemannienne (M, g). Le tenseur de courbure de la connexion de Levi-Civita est appelé* ***tenseur de courbure Riemannienne*** *est le tenseur de type $(1,3)$, pour tous les champs vecteurs X, Y et Z. L'opérateur de la courbure Riemannienne est définie par :*

$$R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

tel que

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Propriétiés 3.1. *Pour touts $X, Y, Z, \in \chi(M)$ et $f, g, h \in \mathbb{C}^\infty(M)$*

1. $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$.
2. $R(fX, gY)hZ = fghR(X,Y)Z$.

Proposition 3.2. *Pour $f, g \in \mathbb{C}^\infty(M)$ et $X, Y, Z, W \in \chi(M)$, la courbure R a les propriétés suivantes :*

1. *R est bilinéaire, pour touts $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \chi(M)$*
   $R(fX_1 + gX_2, Y) = fR(X_1, y) + gR(X_2, Y)$,
   $R(X, fY_1 + gY_2) = fR(X, Y_1) + gR(X, Y_2)$.
2. $R(X,Y)(Z+W) = R(X,Y)(Z) + R(X,Y)(W)$.
3. $R(X,Y)(fZ) = fR(X,Y)(Z)$.

Démonstration.
1-Pour la premier partie on a

$$\begin{aligned}
R(fX_1 + gX_2, Y)Z &= \nabla_Y \nabla_{fX_1+gX_2} Z - \nabla_{fX_1+gX_2} \nabla_Y Z + \nabla_{[fX_1+gX_2,Y]} Z \\
&= \nabla_Y \nabla_{fX_1} Z - \nabla_{fX_1} \nabla_Y Z + \nabla_{[fX_1,Y]} Z + \nabla_Y \nabla_{gX_2} Z - \nabla_{gX_2} \nabla_Y Z + \nabla_{[gX_2,Y]} Z \\
&= f\nabla_Y \nabla_{X_1} Z + (\nabla_Y f)\nabla_{X_1} Z - f\nabla_{X_1} \nabla_Y Z + f\nabla_{[X_1,Y]} Z - \nabla_{(\nabla_Y f)X_1} Z \\
&+ \; g\nabla_Y \nabla_{X_2} Z + (\nabla_Y g)\nabla_{X_2} Z - g\nabla_{X_2} \nabla_Y Z + g\nabla_{[X_2,Y]} Z - \nabla_{(\nabla_Y g)X_2} Z \\
&= f\nabla_Y \nabla_{X_1} Z - f\nabla_{X_1} \nabla_Y Z + f\nabla_{[X_1,Y]} Z + g\nabla_Y \nabla_{X_2} Z - g\nabla_{X_2} \nabla_Y Z + g\nabla_{[X_2,Y]} Z \\
&= fR(X_1, Y) + gR(X_2, Y).
\end{aligned}$$

Et de la même méthode on montre que

$$R(X, fY_1 + gY_2) = fR(X, Y_1) + gR(X, Y_2).$$

2- Pour la deuxième partie

$$\begin{aligned} R(X,Y)(Z+W) &= \nabla_Y \nabla_X (Z+W) - \nabla_X \nabla_Y (Z+W) + \nabla_{[X,Y]}(Z+W) \\ &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z + \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_X \nabla_Y W + \nabla_{[X,Y]} W \\ &= R(X,Y)(Z) + R(X,Y)(W). \end{aligned}$$

3-Pour la troisième partie, remarquons que

$$\begin{aligned} \nabla_Y \nabla_X (fZ) &= \nabla_Y (f \nabla_X Z + \nabla_X f Z) \\ &= f \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_Y f (\nabla_X Z) + (\nabla_X f)(\nabla_Y Z) + (\nabla_Y (\nabla_X f)) Z. \end{aligned}$$

Alors

$$\nabla_Y \nabla_X (fZ) - \nabla_X \nabla Y (fZ) = f(\nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y) Z + ((\nabla_Y (\nabla_X f) - (\nabla_X (\nabla_Y f)) Z.$$

D'où

$$\begin{aligned} R(X,Y) fZ &= f \nabla_Y \nabla_X Z - f \nabla_X \nabla_Y Z + (\nabla_{[X,Y]} f) Z + f \nabla_{[X,Y]} f Z + (\nabla_{[X,Y]} f) Z \\ &= f R(X,Y) Z. \end{aligned}$$

□

Proposition 3.3. *Soit (M, g) une variété Riemannienne, le tenseur de courbure Riemannienne a les propriétés suivantes :*
Pour tous $X, Y, Z, W \in \chi(M)$, on a

1. *R vérifie l'identité de Bianchi algébrique (La premier identité de Bianchi)*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

2. *R vérifie l'identité de Bianchi différentielle (La seconde identité de Bianchi)*

$$(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0.$$

Démonstration.
Pour la premier identité de Bianchi. On démontre cette égalité en développant $R(X,Y)Z$ selon la définition :

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y &= \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_Y\nabla_Z X \\ &+ \nabla_{[Y,Z]}X + \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_Z\nabla_X Y + \nabla_{[Z,X]}Y \\ &= \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_{[Y,Z]}X + \nabla_{[Z,X]}Y \\ &- \nabla_Z[X,Y] - \nabla_X[Y,Z] - \nabla_Y[Z,X] \\ &= [Y,[X,Z]] + [Z,[Y,X]] + [X,[Z,Y]] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour la deuxième identité de Bianchi. En appliquant la règle de Leibnitz et la définition de la dérivée covariante sur le tenseur de la courbure R, on obtient

$$\nabla_Z(R(X,Y)W) = (\nabla_Z R)(X,Y)W + R(\nabla_Z X, Y)W + R(X, \nabla_Z Y)W + R(X,Y)\nabla_Z W.$$

Une sommation avec permutation circulaire de (X,Y,Z), on a

$$\begin{aligned} &\nabla_X R)(Y,Z)W + (\nabla_Y R)(Z,X)W + (\nabla_Z R)(X,Y)W \\ &\quad = \nabla_X(R(Y,Z)W) - R(\nabla_X Y, Z)W - R(Y, \nabla_X Z)W - R(Y,Z)\nabla_X W \\ &\quad + \nabla_Y(R(Z,X)W) - R(\nabla_Y Z, X)W - R(Z, \nabla_Y X)W - R(Z,X)\nabla_Y W \\ &\quad + \nabla_Z(R(X,Y)W) - R(\nabla_Z X, Y)W - R(X, \nabla_Z Y)W - R(X,Y)\nabla_Z W. \end{aligned}$$

Après développement, et en utilisant le fait que, dans le cas de la connexion de Levi-Civita, la tenseur $T(X,Y)$ est un vecteur nul ce qui implique que

$$R(T(X,Y),Z)W = R(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], Z)W = 0$$

et en utilisant les propriétés de la connexion et l'identité de Jacobi pour les champs de vecteurs, on obtient le résultat demandé. □

Remarque 3.5. *Soit (M,g) une variété Riemannienne On peut considérer le tenseur de courbure Riemannienne comme un tenseur de type $(0,4)$ avec*

$$R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W), \ \ pour \ \ tous \ \ X,Y,Z,W \in \chi(M).$$

Définition 3.27. *Sur une variété Riemannienne (M, g), le tenseur de courbure Riemannienne s'exprime en fonction des coefficients de Christoffel :*

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R^l_{ijk}\partial_l$$

$$R^l_{ijk} = \partial_i(\Gamma^l_{jk}) - \partial_j(\Gamma^l_{ik}) + \Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik}.$$

Avec $\quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i},\ \ \partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j},\ \ \partial_l = \frac{\partial}{\partial x^l},\ \ \partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}.$

Bibliographie

[1] E. Aubry *: Introduction à la Géométrie Riemannienne*, 2008.

[2] A. Awane *: Cours de Géométrie Différentielle*. DEA. 2001-2005 à la Faculté des Sciences Ben M'sik. Casablanca. Maroc, 2005.

[3] F. Bourgeois *: Géométrie Différentielle*. Université Libre de Bruxelles Faculté des Sciences BA3 Mathématiques.

[4] J. Cresson *: Promenade vers la Géométrie Différentielle*.

[5] O. Castéra *: Calcul tensoriel URL*. $http : //o.castera.free.fr/$

[6] M. Djaa *: Introduction à la Géométrie Riemannienne et l' Analyse Harmonique sur les Variétés*. Publication du Centre Universitaire Ahmed Zabana Relizane 2017-2018.

[7] J. Feydy *: Introduction à la Géométrie Riemannienne par l'étude des Espaces de Formes*. département de mathématiques de l'ENS Ulm.

[8] J. Frédéric *: Géométrie Différentielle et Application au Contrôle Géométrique*. Note de cours. Édition 2011-2012.

[9] J. Garrigues *: Algèbre et Analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*. Engineering school.Algèbre et Analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus, 2012, $pp.95. < cel - 00679923v1 >$

[10] J. Lafontaine *: Introduction aux Variétés Différentielles*.

[11] F. Labourie *: Géométrie Différentielle*, 25 septembre 2013.

[12] P. Pansu, relu par Antonin Pottier *: Géométrie différentielle*, 2 juillet 2007.

[13] P. Théo *: Géométrie Différentielle*, ENS Ker Lann.