REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE DJILALI BOUNAÂMA-KHEMIS MILIANA

Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire

Pour obtenir

Le diplôme de master en mathématiques

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Présenté par

MOKRAB Baya

Résolution Numérique des Équations Différentielles d'ordre Fractionnaire par la Méthode ADM

Soutenu le 23 /06/ 2018 devant les membres du jury :

Mr. Belkacem CHAOUCHI	*Univ. de Khemis Miliana*	**Président**
Mme. Fouzia CHITA	*Univ. de Khemis Miliana*	**Encadreur**
Mr. Maamar BENBACHIR	*Univ. de Khemis Miliana*	**Examiateur**
Mr. Mohamed HOUAS	*Univ. de Khemis Miliana*	**Examiateur**

Année Universitaire : ***2017/2018***

Dédicace

Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour, le respect, la reconnaissance, c'est tous simplement que : Je dédie cette mémoire de Master à :

A Ma très chère Mère ***Nacira :*** *Tu représente pour moi la source de tendresse et l'exemple de dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager. Tu as fait plus qu'une mère puisse faire pour que ses enfants suivent le bon chemin dans leur vie et leurs études.*

A Mon très cher Père ***Ahmed :*** *Aucune dédicace ne saurait exprimer le dévouement et le respect que j'ai toujours pour vous. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être.*

A mes chers frères : ***Dhiaa Eldine****,* ***Mohamed*** *et* ***Akram.***

A mes chère sœurs : ***Sara****,* ***Sadia****,* ***Aicha*** *et* ***Chaimaa.***

A mes très amis surtout : ***Ahlem****,* ***Fouzia****,* ***safia****,* ***Aicha****,* ***Meriem.***

Remerciement

*En premier lieu, je remercie "**ALLAH**" le tout puissant qui m'a donné la force, la volonté et le courage pour accomplir ce modeste travail.*

*Je remercie **Mme Fouzia CHITA**, ma encadrant de mémoire de fin d'étude, pour ses précieux conseils et son orientation ficelée tout au long de notre recherche.*

Je veux exprimer mes remerciements les plus dévoués aux membres de jury qui m'ont honorées en acceptant d'évaluer ce travail.

mes remerciements s'étendent également à tous mes enseignants durant les années des études.

A mes familles et mes amis qui par leurs prières et leur encouragements, on a pu surmonter tous les obstacles.

Je profite l'occasion ainsi à adresser mes remerciements à mes collègues de Master 2 et 1, et aussi de Master 2 de l'année passer.

Je remercie toute personne qui a participé et contribué de prés ou de loin à l'exécution de ce modeste travail.

Merci

Résumé

L'objectif de ce mémoire est savoir la méthode de ADM qui est une méthode numérique pour résoudre les équations différentielles d'ordre fractionnaires (au sens de Caputo), elle a été proposée par George Adomian en (1923-1996).

Mots clés : Équation Différentielles, Dérivée au sens de Caputo, Méthode de décomposition Adomian, Polynômes Adomian.

Abstract

The objective of this memory is know with the method of Adomian Decomposition Method is a numerical method to solve the fractional order differential equations(in the sense of **Caputo**), it is proposed by **George Adomian** in (1923-1996).

Keywords : differential equations, Derivative in the Caputo sense, Adomian Decomposition Method, Adomian Polynomials.

ملخص

الهدف من هذه الرسالة هو معرفة طريقة ADM وهي طريقة عددية لحل المعادلات التفاضلية للترتيب الكسري (بمعنى كابوتو)، وقد اقترحه جورج أدوميان في $(1996-1923)$.

الكلمات المفتاحية : المعادلات التفاضلية ، مشتقات كابوتو ، طريقة التحليل الآدمي ، كثيرات الأدومينية.

Table des matières

Introduction

Le concept de calcul fractionnaire est un ancien sujet, leur but est de prolonger la dérivation ou l'intégration d'ordre fractionnaire en utilisant non seulement un ordre entier mais également des ordres non entiers. De nombreuses tentatives pour résoudre les équations faisant intervenir différents types d'opérateurs d'ordre non entier peuvent être trouvées dans la littérature. Une liste des mathématiciens qui ont fourni des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du $20^{ème}$ siècle.

Durant les dernières années, les équations différentielles d'ordre fractionnaires ont trouvés des applications dans beaucoup des problèmes en physique. Comme la plupart du temps, ces équations différentielles d'ordre fractionnaires ne peuvent être résolue exactement Sur cette base, de nombreux chercheurs dans divers domaines étaient désireux de donner et de modéliser de nombreuses méthodes approximatives et quelques méthodes analytiques doivent être utilisées pour résoudre des problèmes non linéaires incluent ADM.

La méthode ADM consiste en calculer les solutions des équations sous la forme d'une série infinie convergente vers la solution du problème donné.

Ce mémoire est constitué de trois chapitres.
Le premier chapitre est une introduction sur notion de base des fonction, et aussi on parle sur l'intégrale et la dérivée fractionnaire, on s'intéresse à la dérivée au sens **Caputo** lesquels ont été utilisés dans les prochains chapitres de mémoire.

Dans deuxième chapitre, nous parlerons de la méthode de décomposition d'Adomian (le principe, les polynômes Adomian et la convergente,..) à l'aide des théorèmes et quelques exemples illustratif.

Le troisième chapitre, nous étudierons par la méthode ADM des équations différentielles fractionnaire de **Riccati**, des équations aux dérivés partielles et aussi des systèmes d'équations différentielles fractionnaire et on terminera par une comparaison numérique entre la solution approximative et la solution exacte.

Chapitre 1

Préliminaire

1 Fonctions spéciales

1.1 Fonction Gamma d'Euler

Permet des fonctions fondamentales qui interviennent dans la définition de la notion de l'intégration et de la notion de dérivation fractionnaires, la fonction Gamma d' Euler qui généralise le factoriel d'un entier.

Définition 1.1. *La fonction Gamma-d'Euler est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx, (Re(\alpha) > 0), \quad (\alpha \in \mathbb{C}) \tag{1.1}$$

avec $\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(0) = +\infty.$

Proposition 1.1. *La fonction Gamma est bien définie pour tout* $(Re(\alpha) > 0)$, *où* $(\alpha \in \mathbb{C})$

Preuve 1.1. *On va étudier la convergence de l'intégrale* $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$

Si $\alpha = 1$ *on a :*

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1.$$

Si $\alpha > 1$ *on a :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx = \int_0^{A} e^{-x} x^{\alpha-1} dx + \int_A^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$$

On a la première intégrale existe(bien définie)car $x^{\alpha-1}e^{-x}$ *continue sur [0,A],*

il reste à montre que la deuxième intégral est bien définie.

on a : $\lim_{x\longrightarrow\infty} x^2x^{\alpha-1}e^{-x} = 0 \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists B(\varepsilon) > 0; x > B(\varepsilon) \Rightarrow x^2x^{\alpha-1}e^{-x} < \varepsilon$

pour $\varepsilon = 1, \exists B(1) > 0, \forall x > B(1)$ *on a :* $x^{\alpha-1}e^{-x} < \frac{1}{x^2}$ *;*

comme $\int_A^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ *existe, il en résulte que l'intégrale* $\int_A^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ *existe.*

d'où $\Gamma(\alpha)$ *est bien définie.*

Si $0 < \alpha < 1$ *on a :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \int_0^{A} x^{\alpha-1}e^{-x}dx + \int_A^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

l'intégrale $\int_A^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ *existe(même preuve que* $\alpha > 1$*), et pour l'intégrale* $\int_0^A x^{\alpha-1}e^{-x}$

on a :

$$\int_0^A x^{\alpha-1}e^{-x}dx < \int_0^A x^{\alpha-1}dx = \frac{A^\alpha}{\alpha}$$

est converge, on déduit que :

$$\int_0^A x^{\alpha-1}e^{-x}dx \;\; existe$$

alors, $\Gamma(\alpha)$ *est bien définie pour tout* $\alpha > 0$.

Propriétés de la fonction Gamma :

- $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, on utilisant l'intégrale par partie, en effet :

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = [-x^\alpha e^{-x}]_0^\infty + \alpha\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \alpha\Gamma(\alpha).$$

  la fonction Gamma généralise le factoriel d'un entier, il suffit de prendre $\alpha = n$, pour avoir $\Gamma(n+1) = n!, \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.

- $n! = \Gamma(n+1)$

- $0! = \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} x^0 e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$

- $1! = \Gamma(2) = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = [-xe^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} = 1$

Prolongement analytique :

On définie par le principe du prolongement analytique, la fonction Gamma au valeur de α négative sans zéro ($\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$), comme suit :

$$-1 < \alpha < 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha + 1 < 1$$

$$\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)$$
$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$$

On procède de proche en proche alors pour :

$$-n-1 < \alpha < -n \Leftrightarrow 0 < \alpha + n + 1 < 1 \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$\Gamma(\alpha+n+1) = (\alpha+n)\Gamma(\alpha+n)$

$= (\alpha+n)(\alpha+n-1)\Gamma(\alpha+n-1)$

$= (\alpha+n)(\alpha+n-1)...(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)$

$\Rightarrow \Gamma(\alpha) = \dfrac{\Gamma(\alpha+n+1)}{(\alpha+n)(\alpha+n-1)...(\alpha+1)\alpha}$

par prolongement analytique, on a vu qu'on peut définir $\Gamma(\alpha)$, pour $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$

1.2 Fonction Bêta d'Euler

Définition 1.2. *On définit la fonction Bêta d'Euler par la formule d'intégration suivant :*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad , \quad Re(x) > 0, Re(y) > 0$$

Propriété de la fonction Bêta d'Euler :

pour tout x, y, tels que, $Re(x) > 0, Re(y) > 0$ et $m, n \in \mathbb{N}^*$ on a quelques Propriétés pour la fonction Bêta d'Euler

1. $B(x,y) = B(y,x)$
2. la fonction Gamma et la fonction Bêta sont liées par la relation suivante :

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Preuve de propriété 2 :

On donne l'expression de la fonction Bêta en coordonnés polaires.

on pose $t = (sin\theta)^2 \Rightarrow dt = 2cos(\theta)sin(\theta)d\theta.$

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = 2\int_0^{\pi/2} (sin\theta)^{2x-1}(cos\theta)^{2y-1}d\theta.$$

on commence maintenant par la première propriété :

$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-u}du \int_0^{+\infty} v^{y-1}e^{-v}dv = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} u^{x-1}v^{y-1}e^{-(u+v)}du\, dv.$

pour : $\int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-u}du, on\ pose\ \ u = t^2.$

et pour : $\int_0^{+\infty} v^{y-1}e^{-v}dv, on\ pose\ \ v = s^2.$

on obtient :

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{2x-1}s^{2y-1}e^{-(s^2+t^2)}ds\, dt.$$

on pose : $t = rcos\theta, s = rsin\theta$

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \left(2\int_0^{+\infty} r^{2x-1}r^{2y-1}re^{-r^2}dr\right)\left(2\int_0^{+\infty}(cos\theta)^{2x-1}(sin\theta)^{2y-1}d\theta\right)\\ &= \left(2\int_0^{+\infty} r^{2x-1}r^{2y-1}re^{-r^2}dr\right)B(x,y)\end{aligned}$$

on pose : $r^2 = R$

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \left(\int_0^{+\infty} R^{(x+y)-1}e^{-R}dR\right)B(x,y)$$

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)B(x,y)$$

d'où le résultat.

2 L'intégrale et la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.3. *Soit $f \in \mathbb{L}^1([a,b])$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(Re(\alpha) > 0)$ notée par $I_a^\alpha f$ est définie par :*

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \tag{1.2}$$

où $x > a$ et $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma donnée par (1.1).

Exemple 1.1. *Soient $\alpha > 0$, $\beta > -1$ et $f(x) = (s-a)^\beta$, alors on a*

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta dt \tag{1.3}$$

En utilisant le changement de variable suivante :

$$t = a + (x-a)y \text{ et } (0 \leq y \leq 1)$$

Alors l'équation (1.3) devient

$$\begin{aligned}
\int_a^x |(I_a^\alpha f)(x)|dx &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\beta dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-(a+(x-a)y))^{\alpha-1}(a+(x-a)-a)^\beta d(a+(x-a)y) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(x-a)(1-y)]^{\alpha-1}(x-a)^{\beta+1} y^\beta dy \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^\beta dy \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{(\beta+1)-1} dy
\end{aligned}$$

D'après la définition de la fonction Bêta et la propriété on obtient

$$\begin{aligned}(I_a^\alpha f)(x) &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\beta(\alpha,\beta+1)\\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\beta+\alpha}\end{aligned}$$

donc

$$(I_a^\alpha (t-a)^\beta)(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\beta+\alpha} \tag{1.4}$$

Exemple 1.2. *Soit* $f(x) = x^\beta$, $\beta > -1$ *on a*

$$(I_a^\alpha f)(x) := I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} t^\beta dt \tag{1.5}$$

En fait le changement de variable $t = xv$, *(1.5) devinent*

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-v)^{\alpha-1}(xv)^\beta x dv \tag{1.6}$$

En introduisant la définition de la fonction Bêta et utilisant la relation (1.3) on trouve

$$\begin{aligned}I_a^\alpha f(x) &= \frac{x^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-v)^{\alpha-1} v^\beta dv\\ &= \frac{x^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1,\alpha)\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}.\end{aligned}$$

3 La dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.4. *Soit* $\alpha \in]m-1, m[$ *et supposons que* f *une fonction de classe* $C^m([a,b])$, *la dérivée fractionnaire d'ordre* α *au sens de Caputo de la fonction* f *notée* $({}^C D_a^\alpha f)$ *est définie par.*

$$\begin{aligned}({}^C D_a^\alpha)(x) &= I_a^{m-\alpha}(f^{(m)})(x)\\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t)dt.\end{aligned}$$

Proposition 1.2. *La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo possède les propriétés suivants :*

1. $^{C}D_a^{\alpha} \circ I_a^{\alpha}(f)(x) = f(x)$

2. $(I_a^{\alpha} \circ^{c} D_a^{\alpha})(f)(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \dfrac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$
3. *Si* $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, *avec* $\alpha + \beta \leq 1$ *et si* $f \in C^1$ *alors :*

$$(^{C}D_a^{\alpha} \circ^{C} D_a^{\beta})(f)(x) = (^{C}D_a^{\beta} \circ^{C} D_a^{\alpha})(f)(x) = (^{C}D_a^{\alpha+\beta})(f)(x)$$

Preuve 1.2. *Si f est une fonction continue on a*

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}.\,^{C}D_a^{\alpha} \circ I_a^{\alpha}(f)(x) &= I_a^{m-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^m (I_a^{\alpha} f)(x)\right] \\
&= I_a^{m-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^m \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt\right)\right] \\
&= I_a^{m-\alpha}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-m)}(x-t)^{\alpha-1-m} f(t)dt\right] \\
&= I_a^{m-\alpha}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha-m)}\int_a^x (x-t)^{(\alpha-m)-1} f(t)dt\right] \\
&= (I_a^{m-\alpha}\left[I_a^{\alpha-m} f\right])(x) \\
&= I_a^0 f(x) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{2}.\, I_a^{\alpha}[^{C}D_a^{\alpha} f](x) &= I_a^{\alpha}[I_a^{m-\alpha} f^{(m)}(x)] \\
&= I_a^m f^{(m)}(x)
\end{aligned}$$

D'abord on montre que

$$I_a^m f^{(m)}(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^j}{j!}$$

L'égalité précédente a été obtenue après m intégration par parties et pour montrer ça on fait la démonstration par récurrence, on obtient *pour* $m = 1$

$$f(x) - \frac{f^{(0)}(a)(x-a)^0}{0!} = \left(I_a^1 f'\right)(x)$$

supposons qu'elle est vérifie pour m *et montre qu'elle est vrai pour l'étape* $m+1$*, dans la suite on prend* $f'(x) = g(x)$

$$\begin{aligned}
\left[I_a^{m+1} f^{m+1}\right](x) &= I_a^1 \left[I_a^m g^{(m)}\right](x) \\
&= I_a^1 \left[g(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{g^{(j)}(a)(x-a)^j}{j!}\right] \\
&= \int_a^x g(t)dt - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{g^{(j)}(a)(x-a)^{j+1}}{j+1!} \\
&= \int_a^x f'(t)dt - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j+1)}(a)(x-a)^{j+1}}{(j+1)!} \\
&= f(x) - f(a) - \sum_{j=1}^{m} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^j}{j!} \\
&= f(x) - \sum_{j=0}^{m} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^j}{j!}
\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}
({}^C D_a^\alpha \circ^C D_a^\beta) f &= ((I_a^{1-\alpha} \circ D^1) \circ (I_a^{1-\beta} \circ D^1)) f \\
&= \left(I_a^{1-\alpha-\beta} \circ I_a^\beta \circ D^1 \circ I_a^{1-\beta} \circ D^1\right) f \\
&= \left(I_a^{1-\alpha-\beta} \circ^C D_a^{1-\beta} \circ I_a^{1-\beta} \circ D^1\right) f \\
&= (I^{1-(\alpha+\beta)} \circ D^1) f \\
&= {}^C D_a^{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

Exemple 1.3. *Soit la fonction* $f(x) = (x-a)^\beta$ *avec* $\beta \leq 0$*, on a*

$${}^C D_a^\alpha f(x) = \begin{cases} 0 & si\ \beta \in 0, 1, 2, \ldots, m-1 \\ \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha} & si\ \beta > n-1 \end{cases}$$

En particulier si f *est constante sur* $[a, b]$*, alors*

$${}^C D_a^\alpha f(x) = 0$$

Chapitre 2

La méthode de décomposition d'Adomian

La méthode de décomposition d'Adomian (ADM) a été appliquée à des classes très larges des problèmes dans nombreux domaines, comme les mathématiques, la physique, la biologie etc...

cette méthode permet de résoudre les équations fonctionnelles de différents types. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de résoudre le problème considère par un schéma directe.

Dans ce chapitre, je vais exposer le principe de cette méthode, je présentais la méthode pratique de calcul des polynômes d'Adomian, ensuite je parlerais de la convergence de la méthode.

1 Principe générale de ADM

Pour illustrer les idées de base de cette méthode, considérons l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$Au = g \tag{2.1}$$

Où A : est un opérateur différentiel contenant des termes linéaires et non linéaires. Le terme linéaire est généralement décompose en $(L + R)$, où L est un opérateur inversible et R représente le reste de l'équation (2.1). Dans ces conditions l'équation précédente peut s'écrire de la forme suivante :

$$Lu + Nu + Ru = g$$

Avec :
Nu : le terme non linéaire, u est la fonction inconnue, g est une fonction donnée.
On prend L^{-1} aux deux côtés de l'équation (2.1) (après la décomposition), on obtient

$$L^{-1}(Lu + Nu + Ru) = L^{-1}g$$

$$L^{-1}L(u) = L^{-1}g - L^{-1}N(u) - L^{-1}R(u)$$

D'où

$$u = L^{-1}(g) - L^{-1}N(u) - L^{-1}R(u) + \phi \tag{2.2}$$

Où ϕ est obtenue à partir des conditions initiales où des conditions aux limités.
La méthode d'Adomian consiste à chercher la solution u sous la forme d'une séries :

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \tag{2.3}$$

et à décomposé le terme non linéaire Nu sous forme d'une série $Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$, où les A_n sont des polynômes qui dépendent de $u_0, u_1, \ldots, u_n$, appelés les polynômes Adomian.

En remplaçant u dans l'équation (2.2), on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = L^{-1}g - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} R(u_n) + \phi \tag{2.4}$$

Maintenant, à partir de l'équation (2.4), on peut obtenir l'algorithme de solution comme suit :

$$\begin{aligned}
u_0 &= \phi + L^{-1}(g) \\
u_1 &= L^{-1}R(u_0) - L^{-1}(A_0) \\
u_2 &= L^{-1}R(u_1) - L^{-1}(A_1) \\
&\vdots \\
u_{n+1} &= -L^{-1}R(u_n) - L^{-1}(A_n)
\end{aligned}$$

Étant donné u_0, les autres termes de u peuvent être déterminer respectivement. Si un terme de u_n est égale à zéro alors les termes suivants sont tous des zéro .

2 Les polynômes Adomian

Définition 2.1. *Les polynômes d'Adomian sont définis par la formule suivante :*

$$\begin{cases} A_0(u_0) = N(u_0) \\ A_n(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n) = \dfrac{1}{n!}\left[\dfrac{d^n}{d\lambda^n}\left[N(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i)\right]\right]_{|\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \tag{2.5}$$

La formule proposée par **G.Adomian** en 1992 pour le calcul des polynômes d'Adomian $(A_n)_{n\geq 0}$ est la suivante :[1]

$$\begin{aligned} & A_0(u_0) = N(u_0) \\ & A_1(u_0, u_1) = u_1 \frac{\partial}{\partial u} N(u_0). \\ & A_2(u_0, u_1, u_2) = u_2 \frac{\partial}{\partial u} N(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} N(u_0). \\ & A_3(u_0, u_1, u_2, u_3) = u_3 \frac{\partial}{\partial u} N(u_0) + u_1 u_2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} N(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 \frac{\partial^3}{\partial u^3} N(u_0). \\ & \dots \end{aligned}$$

Cette formule s'écrit sous la forme :

$$A_n = \sum_{v=0}^{n} c(v, n) N^{(v)}(u_0), \qquad n \geq 1. \tag{2.6}$$

où $c(v, n)$ représente la somme de tous les produits (divisées par m!) des v termes u_i dont la somme des indices i est égales à n; m étant le nombre de répétitions des mêmes termes dans le produit.
La relation (2.6) permet de trouver les polynômes A_n, mais en pratique, il est difficile de les déterminer quand n devient grand $(n > 5)$. Par la suite d'autres formule ont été proposées mais elles s'avèrent inefficaces en pratique vu leur complexité d'une part et l'absence de justification de l'écriture de ces formules d'autre part.

C'est dans les années 1994 que **K.Abbaoui** propose et démontre une formule récurrente pratique de calcul des A_n.
La formule d'Abbaoui est déduite de la relation (2.5) donnée dans la définition des polynômes d'Adomian.

Les autres formules des polynômes d'Adomian :

1. Les polynômes d'Adomian sont déterminés à partir des formules suivantes :

$$\begin{aligned} A_0(u_0) &= N(u_0) \\ A_n(u_0, u_1, \ldots, u_n) &= \sum_{|nk|=n} N^{(|k|)}(u_0)\frac{u^k}{k!}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{2.7}$$

où

$$\begin{aligned} u^k &= u_1^{k_1} u_2^{k_2} \ldots u_n^{k_n}, \\ k! &= k_1! k_2! \ldots k_n!, \\ |nk| &= k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n. \end{aligned}$$

2. La formule suivante permet également de déterminer les polynômes d'Adomian :

$$\begin{aligned} &A_0(u_0) = N(u_0) \\ &A_n(u_0, u_1, \ldots, u_n) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=n} N^{(\alpha_1)} u_0 \frac{u_1^{(\alpha_1-\alpha_2)}}{(\alpha_1-\alpha_2)!} \cdots \frac{u_{n-1}^{(\alpha_{n-1}-\alpha_n)}}{(\alpha_{n-1}-\alpha_n)!} \frac{u_n^{\alpha_n}}{\alpha_n!}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{2.8}$$

3. La formule suivante est aussi permet de déterminer Les polynômes d'Adomian :

$$\begin{aligned} A_0(u_0) &= N(u_0) \\ A_{n+1} &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (k+1) u_{k+1} \frac{\partial A_k}{\partial u_k}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{2.9}$$

2.1 Exemples

Exemple 2.1. *On considère le problème suivant :*

$$\begin{cases} u' + u^2 = 0 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

On a

$$L(u) = u' = \frac{du}{dx} \Rightarrow L^{-1}(Lu) = \int_0^x u'(s)ds$$

et

$$u' = -u^2 \ \ /N(u) = u^2$$

donc

$$L^{-1}u' = L^{-1}(-u^2) = -L^{-1}N(u)$$
$$u(x) - u(0) = -L^{-1}N(u) \Rightarrow u(x) = u(0) - L^{-1}N(u).$$

La solution sera donnée par :

$$u(x) = \sum_{0}^{\infty} u_n$$

et la relation récurrente donnée comme :

$$\begin{cases} u_0 = u(0) \\ u_{n+1} = -L^{-1}A_n \end{cases}$$

avec :

$$N(u) = u^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

et on appliquant la formule des polynômes d'Adomian A_n *on trouve :*

$$\begin{aligned} A_0 &= N(u_0) = u^2 = 1 \\ A_1 &= 2u_0u_1 = -2x \\ A_2 &= u_1^2 + 2u_0u_2 = x^2 + 2x^2 = 3x^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned} u_1 &= -\int_0^x A_0 ds = \int_0^x (1) ds = -x \\ u_2 &= -\int_0^x A_1 ds = -\int_0^x (-2s) ds = x^2 \\ u_3 &= -\int_0^x A_2 ds = -\int_0^x (3x^2) ds = -x^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}.$$

Sachant que la solution exacte est :

$$u(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Exemple 2.2. *On considère le problème suivant :*

$$\begin{cases} u' - 2xu = 0 \\ u(0) = 5 \end{cases}$$

On va résoudre le problème par la méthode d'ADM :
l'équation de problème donnée est équivalente à :

$$L(u) = -R(u) + g$$

où $R(u) = -2xu$ *est le terme linéaire restant et* $g = 0$.

En appliquant $L^{-1} = \int_0^x (.)ds$ *aux deux côtés de l'équation de problème on a*

$$\int_0^x (u')ds = u(s)|_0^x = u(x) - u(0) = L^{-1}R(u) + 0$$

Alors

$$u(x) - u(0) = L^{-1}(2xu)$$

et comme $y(0) = 5$, *on a*

$$u(x) = \int_0^x (2su(s))ds + 5$$

En substituant la série de décomposition $u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ *dans l'équation ci-dessus, on obtient*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = L^{-1}(-R \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)) + 5$$

Ainsi la relation de récurrente est donnée comme suit :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = L^{-1}(2xu_n) \end{cases}$$

Alors les quatre premières termes sont donnés a partir de (2.4) (tous les intégrations suivantes sont trouvées par l'utilisation de l'intégration par parties) :

$$\begin{aligned}
&u_0 = 5 \\
&u_1 = L^{-1}(2su_0) = 10\int_0^x (s)ds = 10\frac{x^2}{2} = 5x^2 \\
&u_2 = L^{-1}(2su_1) = 10\int_0^x (s^3)ds = 5\frac{x^4}{2} = 5\frac{(x^2)^2}{2} \\
&u_3 = L^{-1}(2su_2) = 10L^{-1}(s\frac{(s^2)^2}{2}) = 10\int_0^x (\frac{(s^5)}{2})ds = 5\int_0^x (s^5)ds = 5\frac{x^6}{6} = 5\frac{x^6}{3!} = 5\frac{(x^3)^2}{3!} \\
&u_4 = L^{-1}(2su_3) = 10L^{-1}(s\frac{s^6}{6}) = 10L^{-1}(\frac{s^7}{6}) = 5\int_0^x (\frac{s^7}{3})ds = 5\frac{x^8}{24} = 5\frac{(x^2)^4}{24} = 5\frac{(x^2)^4}{4!} \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

A partir de l'équation (2.3) on a

$$u(x) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$

$$u(x) = 5 + 5x^2 + 5\frac{(x^2)^2}{2} + 5\frac{(x^3)^2}{3!} + 5\frac{(x^4)^2}{4!} + \cdots = 5(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}) = 5e^{x^2}.$$

Exemple 2.3. *On considère le problème suivant :[11]*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = x^2 - \dfrac{1}{4}(\dfrac{\partial u}{\partial x})^2 \\ u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \ \ 0 \le t \le 1 \end{cases} \tag{2.10}$$

La solution exacte de problème est :

$$u(x,t) = x^2 \tanh(t)$$

On a :
$Nu = \phi(u) = (\frac{\partial u}{\partial x})^2$, $g(x,t) = x^2$, $Ru = 0$, $Lu = \frac{\partial u}{\partial t}$ *et* $\phi = u(x,0) = 0$

En calculant maintenant les polynômes d'Adomian définie comme suit :

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}[\phi(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i)]_{|\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

On trouve :

$$\begin{aligned}
A_0 &= \phi(\frac{\partial u_0}{\partial x}) = (\frac{\partial u_0}{\partial x})^2 \\
A_1 &= \frac{d}{d\lambda}[\phi(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \lambda\frac{\partial u_1}{\partial x})]_{|\lambda=0} = \frac{\partial u_1}{\partial x}\phi'(\frac{\partial u_0}{\partial x}) = 2\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial x} \\
A_2 &= \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\lambda^2}[\phi(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \lambda\frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda^2\frac{\partial u_2}{\partial x})]_{|\lambda=0} = (\frac{\partial u_1}{\partial x})^2 + 2\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial x} \\
A_3 &= \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}[\phi(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \lambda\frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda^2\frac{\partial u_2}{\partial x}) + \lambda^3\frac{\partial u_3}{\partial x})]_{|\lambda=0} = 2\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial x} + 2\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial x} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

On utilise l'équation (2.4), on obtient

$$\begin{aligned}
u_0 &= L^{-1}(g) = \int_0^t x^2 ds = x^2\int_0^t ds = x^2 t \\
u_1 &= -L^{-1}(A_0) = \int_0^t A_0(s)ds = -\frac{1}{3}x^2t^3 \\
u_2 &= -L^{-1}(A_1) = \int_0^t A_1(s)ds = +\frac{2}{15}x^2t^5 \\
u_3 &= -L^{-1}(A_2) = \int_0^t A_2(s)ds = -\frac{17}{315}x^2t^7 \\
u_4 &= -L^{-1}(A_3) = \int_0^t A_3(s)ds = +\frac{62}{2835}x^2t^9 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

A partir de l'équation (2.3) on a :

$$u(x,t) = x^2t - \frac{1}{3}x^2t^3 + \frac{2}{15}x^2t^5 - \frac{17}{315}x^2t^7 + \frac{62}{2835}x^2t^9 + \cdots$$

$$= x^2[t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 + \frac{62}{2835}t^9 + \cdots].$$

Et comme $(t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 + \frac{62}{2835}t^9 + \cdots)$ *est le développement de Taylor de la fonction* $f(t) = \tanh(t)$*,*

D'où

$$u(x,t) = x^2 \tanh(t)$$

3 Analyse de convergence

Dans cette section, on étudie la convergence de la méthode ADM([1][10]). Les premières preuves de la convergence ont été précisées par **Y. Cherruault** et elles sont basées sur le théorème du point fixe, toujours en travaille sur l'hypothèse que la solution u et le terme non linéaire $N(u)$ sont décomposés en séries infinies .
Soit l'équation fonctionnelle général qui est appelée forme canonique d'Adomian :

$$u - Nu = f \qquad , \quad u \in H \tag{2.11}$$

Où

H : est un espace de Hilbert.

N : est un opérateur non linéaire qui est définit de H dans H.

f : est une fonction définie dans H par $f = L^{-1}(g)$.

En substituant les séries de décomposition dans (2.11), on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{+\infty} A_n = f$$

Alors les termes récursives sont obtenus à partir de cet algorithme

$$\begin{cases} u_0 = f \\ u_{n+1} = A_n(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n), \;\; pour \;\; n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{2.12}$$

La solution de l'équation (2.11) obtenue par la méthode ADM est équivalente à la détermination de la suite S_n donnée par

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \quad , \qquad S_0 = 0.$$

avec $S_0 = 0$ est vérifiant la relation récurrente suivante :

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_{n+1} = N(S_n + u_0). \end{cases} \tag{2.13}$$

où $N(S_n + u_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k$, si cette limite

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

existe dans un espace de Hilbert, alors S est une solution de l'équation fonctionnelle du point fixe $S = N(u_0 + S)$ dans H.

Théorème 2.1. *Soit N un opérateur non linéaire de H, où $N : H \to H$ et u est la solution exacte de (2.11) .*
La série $\sum_{i=0}^{+\infty} u_i$ est converge vers u quand $0 \leq \alpha < 1$, $\|u_{n+1}\| \leq \alpha\|u_n\|, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Preuve 2.1. *On a la suite*

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

on va montrer que cette suite est suite de Cauchy dans H.

$$\|S_{n+1} - S_n\| = \|u_{n+1}\| \leq \alpha\|u_n\| \leq \alpha^2\|u_{n-1}\| \leq \cdots \leq \alpha^{n+1}\|u_0\|$$

Afin de prouver que S_n est une suite de Cauchy, on a

pour tout $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\|S_m - S_n\| &= \|(S_m - S_{m-1}) + (S_{m-1} - S_{m-2}) + \cdots + (S_{n+1} - S_n)\| \\
&\leq \|S_m - S_{m-1}\| + \|S_{m-1} - S_{m-2}\| + \dots \\
&\leq \alpha^m\|u_0\| + \alpha^{m-1}\|u_0\| + \dots \\
&\leq (\alpha^m + \alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} \cdots + \alpha^{n+1})\|u_0\| \\
&\leq (\alpha^{n+1} + \alpha^{n+2} + \cdots)\|u_0\|
\end{aligned}$$

Ce qui est implique,

$$\|S_m - S_n\| = \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\|u_0\| \quad , \, pour \; tout \;\; n, m \in \mathbb{N}, \;\; m \geq n \tag{2.14}$$

Ainsi

$$\lim_{n.m \to 0} \|S_m - S_n\| = 0$$

Comme $\alpha < 1$, alors la suite S_n est une suite de Cauchy dans H, elle est convergente par conséquence

$$\exists \, S \in H, \; avec \quad \lim_{n \to \infty} S_n = S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \; , \quad pour \; tout \; S \in \; H.$$

La résolution de (2.11) est équivalente à résoudre l'équation fonctionnelle $N(S + u_0) = S$. Supposons que l'opérateur N est continue, on obtient que

$$\begin{aligned} N(S + u_0) &= N(\lim_{n \to \infty} S_n + u_0) \\ &= \lim_{n \to \infty} N(S_n + u_0) \\ &= \lim_{n \to \infty} S_{n+1} = S \end{aligned}$$

donc on conclure que la limite S est une solution de l'équation (2.11).

Chapitre 3

Applications de la méthode ADM pour résoudre des équations différentielles d'ordre fractionnaire

Dans ce chapitre, nous présentons quelques applications de la méthode décompositionnelle d'Adomian, ces applications sont cités dans ([6][8][4][7]), et on terminera par une comparaison numérique entre la solution approximative et la solution exacte.

1 Application de la méthode ADM pour les équations de Riccati

Nous allons considérer dans cette partie que la dérivée fractionnaire utilisée est au sens de Caputo.

Nous présentons l'équation différentielle fractionnaire de Riccati

$$ {}^{C}D^{\alpha}u(x) = A(t) + B(t)u(t) + C(t)u(t)^2 \tag{3.1} $$

Avec $u^{(j)}(0) = c_j$ et $m-1 < \alpha \leq m,\ \ t > 0$
ou $A(t),\ B(t),\ C(t)$ sont des fonctions données et c_j sont des constante arbitraire.
Appliquant l'opérateur inverse de l'opérateur ${}^{C}D_0^{\alpha}$, aux côtés de l'équation (3.1) et en utilisant les conditions initiales, on trouve

$$ u(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{t^j}{j!} + I^{\alpha}[A(t) + B(t)u(t) + C(t)u(t)^2] \tag{3.2} $$

La méthode ADM donnée la solution par la série suivante

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \tag{3.3}$$

et la fonction non linéaire définie en (3.2) soit décomposée comme suit

$$N(u) = u^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{3.4}$$

où les A_n sont les polynômes Adomian.
Substitution les séries de décomposition (3.3) et (3.4) dans les deux côtes de (3.2), on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{t^j}{j!} + I^\alpha[A(t) + B(t) \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) + C(t) \sum_{n=0}^{\infty} A_n] \tag{3.5}$$

A partir de cette équation, les itérations sont déterminer par l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} u_0 = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \dfrac{t^j}{j!} + I^\alpha(A(t)), \\ u_{n+1} = I^\alpha(B(t)u_n + C(t)A_n), \quad n \geq 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Exemple 3.1. *[7] Considérons l'équation fractionnaire suivante de Riccati*

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha u = -u^2(t) + 1 \\ u(0) = 0, \qquad 0 < \alpha \leq 1. \end{cases} \tag{3.7}$$

La solution exacte, quand $\alpha = 1$ est

$$u(t) = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} \tag{3.8}$$

On a quand $t \to \infty$, $u(t) \to 1$.

Pour trouver la solution, nous utilisons le schéma suivant :

$$\begin{cases} u_0 = u(0) + I^\alpha(1) = \dfrac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \\ u_{n+1} = -I^\alpha(A_n), \quad n \geq 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

où les A_n sont les polynômes d'Adomian pour le terme non linéaire tel que

$$F(u) = u^2.$$

En utilisant le schéma ci-dessus et la définition des polynômes d'Adomian, les premiers termes de la série de décomposition sont donnés par :

$$
\begin{aligned}
u_0 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha} \\
u_1 &= -I^{\alpha}(A_0) = -I^{\alpha}(F(u_0)) = -I^{\alpha}(u_0^2) = -\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\alpha^2\Gamma(1+3\alpha)} t^{3\alpha} \\
u_2 &= -I^{\alpha}(A_1) = -I^{\alpha}(u_1 F'(u_0)) = -I^{\alpha}(2u_0u_1) = \frac{16\Gamma(2\alpha)\Gamma(4\alpha)}{\alpha\Gamma(1+3\alpha)\Gamma(1+5\alpha)} t^{5\alpha} \\
u_3 &= -I^{\alpha}(A_2) = -I^{\alpha}(u_2F'(u_0) + \frac{1}{2}u_1^2F''(u_0)) = -I^{\alpha}(2u_0u_2 + u_1^2) \\
&= -\frac{(32\alpha^2\Gamma(2\alpha)\Gamma(4\alpha)\Gamma(1+3\alpha) + \Gamma(1+2\alpha)^2\Gamma(1+5\alpha))\Gamma(1+6\alpha)}{\alpha^4\Gamma(1+3\alpha)^2\Gamma(1+5\alpha)\Gamma(1+7\alpha)} t^{7\alpha}
\end{aligned}
$$

$$
u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha} - \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\alpha^2\Gamma(1+3\alpha)} t^{3\alpha} + \frac{16\Gamma(2\alpha)\Gamma(4\alpha)}{\alpha\Gamma(1+3\alpha)\Gamma(1+5\alpha)} t^{5\alpha} + \dots \tag{3.10}
$$

Le premier cas :

remplaçons $\alpha = 1$ dans (3.10), on obtient la solution approximative sous forme d'une série

$u(t) = t - 0.333333t^3 + 0.133333t^5 - 0.0539683t^7 + 0.0218695t^9 - 0.00886324t^{11} + 0.00359213t^{13} - 0.00145583t^{15} + 0.000590027t^{17} - 0.000239129t^{19} + 0.0000969154t^{21}$

Le deuxième cas :

Dans ce cas, nous examinerons l'équation fractionnaire de Riccati (3.10). Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient

$$
\begin{aligned}
u(t) = 2\sqrt{t} &- 3.00901t^{3/2} + 7.24332t^{5/2} - 19.6157t^{7/2} + 55.9634t^{9/2} - 164.385t^{11/2} \\
&+ 491.925t^{13/2} - 1491.22t^{15/2} + 4563.65t^{17/2} - 14068.5t^{19/2} + 43620.6t^{21/2}.
\end{aligned}
$$

Pour simplifier, soit $t^{1/2} = x$, alors

$$
\begin{aligned}
u(x) = 2x &- 3.00901x^3 + 7.24332x^5 - 19.6157x^7 + 55.9634x^9 - 164.385x^{11} \\
&+ 491.925x^{13} - 1491.22x^{15} + 4563.65x^{17} - 14068.5x^{19} + 43620.6x^{21}.
\end{aligned}
$$

Exemple 3.2. *[8] Considérons l'équation fractionnaire de Riccati :*

$$
\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}u = 2u(t) - u^2(t) + 1 \\ u(0) = 0, \qquad 0 < \alpha \leq 1. \end{cases} \tag{3.11}
$$

La solution exacte, où $\alpha = 1$, est

$$u(t) = 1 + \sqrt{2}\tanh\left(\sqrt{2}t + \frac{1}{2}log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right). \tag{3.12}$$

quand $t \to +\infty$, $u(t) \to 1 + \sqrt{2} = 2.4142$.

Suite à l'analyse présentée ci-dessus, soit la relation de récurrente :

$$\begin{cases} u_0 = u(0) + I^\alpha(1) = \dfrac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \\ u_{n+1} = I^\alpha(2u_n - A_n), \quad n \geq 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

où les A_n sont des polynômes d'Adomian, pour le terme non linéaire tel que

$$F(u) = u^2.$$

les premier termes de la série de décomposition sont donnés par :

$$u_0 = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$u_1 = I^\alpha(2u_0 - A_0) = I^\alpha(2u_0 - u_0^2) = \frac{2^{1-2\alpha}\cos(\pi\alpha)\Gamma(\frac{1}{2}-\alpha)}{\sqrt{\pi}\alpha\Gamma(\alpha)}t^{2\alpha} - \frac{2\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+3\alpha)}t^{3\alpha}$$

$$u_2 = I^\alpha(2u_1 - A_1) = I^\alpha(2u_1 - 2u_0u_1) = \frac{3^{3-2\alpha}cos(\pi\alpha)\Gamma(\frac{1}{2}-\alpha)\Gamma(2\alpha)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha)\Gamma(1+3\alpha)}t^{3\alpha} - \frac{2\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+4\alpha)}t^{4\alpha}$$
$$+ \frac{4\Gamma(2\alpha)\Gamma(1+4\alpha)}{\Gamma(\alpha)[\Gamma(1+\alpha)]^2\Gamma(1+3\alpha)\Gamma(1+5\alpha)}t^{5\alpha} + \frac{12\Gamma(-2\alpha)\Gamma(3\alpha)sin(2\pi\alpha)}{\pi\Gamma(\alpha)\Gamma(1+4\alpha)}t^{4\alpha},$$

et les premiers termes de la série de décomposition sont donnés par :

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha + \frac{2^{1-2\alpha}\cos(\pi\alpha)\Gamma(\frac{1}{2}-\alpha)}{\sqrt{\pi}\alpha\Gamma(\alpha)}t^{2\alpha} - \frac{2\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+3\alpha)}t^{3\alpha} + \cdots \tag{3.14}$$

Le premier cas :

Remplaçant $\alpha = 1$ dans (3.14), alors la solution de l'équation de Riccati est :

$$u(t) = t + t^2 + 0.333333t^3 - 0.333333t^4 + \cdots + 0.0000969154t^{21}. \tag{3.15}$$

Le deuxième cas :

Dans ce cas, nous examinerons l'équation fractionnaire de Riccati (3.14). Pour $\alpha = \frac{1}{2}$*, on obtient*

$$u(t) = 1.1283\sqrt{t} + 2.0t + 2.05121t^{3/2} - 0.27324t^2 + \cdots + 80.4206t^{21/2} \tag{3.16}$$

Pour simplifier, soit $t^{1/2} = x$*, alors*

$$u(x) = 1.1283x + 2.0x + 2.05121x^2 - 0.27324x^3 + \cdots + 80.4206x^{21} \tag{3.17}$$

Exemple 3.3. *[8] Considérons l'équation fractionnaire suivante de Riccati*

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}u = -u^2(t) + 1 \\ u(0) = c_0, \quad u'(0) = c_1, \qquad 1 < \alpha \leq 2 \end{cases} \tag{3.18}$$

Pour résoudre l'équation (3.18), on utilise la relation récurrente :

$$\begin{cases} u_0 = c_0 + c_1 t + I^{\alpha}(1) \\ u_{n+1} = -I^{\alpha}(A_n), \quad n \geq 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

Nous choisissons $c_0 = \sqrt{2}$*,* $c_1 = -1$ *et* $\alpha = \frac{3}{2}$*.*
A partir de (3.19), les premiers termes de la série de décomposition sont donné par :

$$u(t) = \sqrt{2} - t - 0.752253t^{1.5} + 0.851077t^{2.5} + 0.471405t^3 - 0.171943t^{3.5} + \ldots \tag{3.20}$$

Pour simplifier, soit $t^{1/2} = x$*, alors*

$$u(x) = \sqrt{2} - x^2 - 0.752253x^3 + 0.851077x^5 + 0.471405x^6 - 0.171943x^7 + \ldots \tag{3.21}$$

2 Application de la méthode ADM pour résoudre des équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire

Considérons l'équation différentielle

$$Lu + Ru + Nu = g$$

L : est un opérateur non linéaire inversible.
R : est l'opérateur linéaire.

g : une fonction donnée.
Nu est représente le terme non linéaire, la fonction $u(t)$ est supposé être borné pour tous $t \in I = [0.T]$ et le terme non linéaire satisfait la condition de Lipschitz i.e. $|Nu - Nv| \leq L_1|u - v|$, où L_1 est un constante positive.

Car L est inversible, on a

$$u = \phi + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{3.22}$$

Où ϕ est le reste d'intégration , il satisfait $L\phi = 0$ et on a $L^{-1}(.) = \int_0^t (.)dt$
La fonction inconnu u est obtenue par la série infinie

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \tag{3.23}$$

Nu est décomposée en série infinie

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, \dots, u_n) \tag{3.24}$$

Où A_n sont les polynômes d'Adomian calculons par la formule

$$A_n = \frac{1}{n!}[\frac{d^n}{d\lambda^n} N(v(\lambda)]_{\lambda=0} \quad n = 0, 1, \dots$$

En remplaçant (3.23) et (3.24) dans (3.22), on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \phi + L^{-1}g - L^{-1}R(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)) - L^{-1}(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n)) \tag{3.25}$$

2.1 Équations aux dérivées partielles de deuxième ordre fractionnaire

Exemple 3.4. *[6] Considérons l'équation suivante :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = (L_{xx}u(x,t)) - (u(x,t)L_x u(x,t)) \\ u(x,0) = \sin x, \quad (x,t) \in [0,1] \times (0,T], \end{cases} \tag{3.26}$$

tel que $L_{xx} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, $L_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$
et $\dfrac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ *est un opérateur différentiel fractionnaire.*

Soit I^α est l'inverse de l'opérateur $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$, maintenant en appliquant I^α à l'équation de problème (3.26), on obtient

$$u(x,t) = \phi + I^\alpha(L_{xx}u) - I^\alpha(Nu)$$

tel que $Nu = uL_x u$
Pour résoudre le problème (3.26), on doit généraliser ces polynômes d'Adomian par :

$$\boxed{A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i u_i\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0}$$

Les premiers termes des polynômes d'Adomian sont donnés par :

$$\begin{aligned}
A_0 &= u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}\\
A_1 &= \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{d\lambda}[(u_0+\lambda u_1)(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\lambda\frac{\partial u_1}{\partial x})]\right]_{\lambda=0} = u_0\frac{\partial u_1}{\partial x}+u_1\frac{\partial u_0}{\partial x}\\
A_2 &= \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}[(u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2)(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\lambda\frac{\partial u_1}{\partial x}+\lambda^2\frac{\partial u_2}{\partial x})]\right]_{\lambda=0} = u_0\frac{\partial u_2}{\partial x}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+u_2\frac{\partial u_0}{\partial x}\\
A_3 &= u_0\frac{\partial u_3}{\partial x}+u_1\frac{\partial u_2}{\partial x}+u_2\frac{\partial u_1}{\partial x}+u_3\frac{\partial u_0}{\partial x}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

A partir de (3.25), on trouve

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \phi + I^\alpha(\sum_{n=0}^{\infty}(L_{xx}u_n)) - I^\alpha(\sum_{n=0}^{\infty}(A_n)), \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &= \varphi = u(x,0)\\
u_1 &= I^\alpha(L_{xx}u_0) - I^\alpha(A_0)\\
u_2 &= I^\alpha(L_{xx}u_1) - I^\alpha(A_1)\\
&\vdots\\
u_{n+1} &= I^\alpha(L_{xx}u_n) - I^\alpha(A_n)
\end{aligned}$$

En substituant les valeurs de $u_0, u_1, \ldots$ dans (3.27), on obtient la solution de problème (3.26)

$$u(x,t) = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \ldots$$

tel que :

$$
\begin{aligned}
u_0 &= u(x,0) = f_0(x) = \sin x \\
u_1 &= I^\alpha(L_{xx}u_0) - I^\alpha(A_0) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\theta)^{\alpha-1} f''(x)d\theta - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\theta)^{\alpha-1} f(x)f'(x)d\theta = \frac{f_1(x)}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha \\
u_2 &= I^\alpha(L_{xx}u_1) - I^\alpha(A_1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\theta)^{\alpha-1} f''(x)d\theta - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\theta)^{\alpha-1} f(x)f'(x)d\theta \\
&= \frac{f_2(x)}{\Gamma(2\alpha+1)}t^{2\alpha} \\
u_3 &= I^\alpha(L_{xx}u_2) - I^\alpha(A_2) = I^\alpha(L_{xx}u_2) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\theta)^{\alpha-1}\left[u_0\frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_0}{\partial x}\right]d\theta \\
&= \frac{f_3(x)}{\Gamma(3\alpha+1)}t^{3\alpha} \\
u_4 &= I^\alpha(L_{xx}u_3) - I^\alpha(A_3) = \frac{f_4(x)}{\Gamma(4\alpha+1)}t^{4\alpha} \\
&\vdots \\
u_n &= \frac{f_n(x)}{\Gamma(n\alpha+1)}t^{n\alpha}
\end{aligned}
$$

et :

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= -f''(x) + f(x)f'(x) = \sin(x)(1+\cos x) \\
f_2(x) &= f_1''(x) - f(x)f_1' - f_1(x)f'(x) = \sin^3(x) + [-1 - 5\cos x - \cos^2 x - (1+\cos x)\cos x]\sin x \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

La solution de problème (3.26) est donnée par :

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= f_0(x) + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f_1(x) + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}f_2(x) + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}f_3(x) + \cdots + \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}f_n(x) + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}f_n(x)
\end{aligned}
$$

où $f_0(x)$ *est la condition initiale.*

Exemple 3.5. *[6] Considérons l'équation fractionnaire non linéaire suivante :*

$$\begin{cases} D_t^\alpha u + D_x^2 u - D_x u + u^2 = 0 \\ u(x,0) = \varphi = f(x) = x^2, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T] \\ 0 < x \leq 1, \quad 0 < t \leq 1, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \end{cases} \tag{3.28}$$

tel que $\Omega = (0,1)$

La forme standard de l'équation fractionnaire au une forme d'opérateur est

$D_t^\alpha u = -[u(x,t)]^2 - L_{xx}u(x,t) + L_x u(x,t)$
où :

$$L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, L_x = \frac{\partial}{\partial x}$$

En appliquant I^α *à l'équation (3.26), on obtient*

$$u(x,t) = \phi - I^\alpha(Nu) - I^\alpha(L_{xx}u(x,t)) + I^\alpha(L_x u(x,t)) \tag{3.29}$$

où $Nu = u^2$*, selon la méthode de décomposition, on suppose une solution en série pour la fonction inconnue* $u(x,t)$ *sous la forme*

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \tag{3.30}$$

Afin de résoudre le problème (3.28), généralisons ces polynômes d'Adomian comme par :

$$\boxed{A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i u_i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0}$$

Les premiers termes des polynômes d'Adomian sont donnés comme suit :

$$
\begin{aligned}
A_0 &= u_0.u_0 = u_0^2 \\
A_1 &= \frac{d}{d\lambda}[(u_0 + \lambda u_1)(u_0 + \lambda u_1)]_{\lambda=0} = u_0 u_1 + u_1 u_0 \\
&= 2u_0 u_1 \\
A_2 &= \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}[(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2)(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2)]_{\lambda=0} = u_0 u_1 + u_1 u_0 \\
&= 2u_0 u_2 + u_1^2 \\
A_3 &= \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}[(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3)(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3)]_{\lambda=0} = u_0 u_1 + u_1 u_0 \\
&= 2u_0 u_3 + 2u_1 u_2 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

A partir de (3.25), on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,0) = \varphi - I^{\alpha}(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \ldots, u_n)) - I^{\alpha}(\sum_{n=0}^{\infty} L_{xx} u_n) + I^{\alpha}(\sum_{n=0}^{\infty} L_x u_n),$$

d'après l'équation ci-dessus, on a

$$
\begin{aligned}
u_0 &= u(x,t) = f_0(x) \\
u_1 &= -I^{\alpha}(A_0) - I^{\alpha}(L_{xx} u_0) + I^{\alpha}(L_x u_0) \\
u_2 &= -I^{\alpha}(A_1) - I^{\alpha}(L_{xx} u_1) + I^{\alpha}(L_x u_1) \\
&\vdots \\
u_{n+1} &= -I^{\alpha}(A_n) - I^{\alpha}(L_{xx} u_n) + I^{\alpha}(L_x u_n)
\end{aligned}
$$

En substituant les valeurs de $u_0, u_1, \ldots,$ *on trouve que la solution de problème (3.28) est :*

$$u(x,t) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{3.31}$$

Où :

$$
\begin{aligned}
u_0 &= u(x,0) = f_0(x) = x^2 \\
u_1 &= -I^\alpha A_0 - I^\alpha L_{xx}u_0 + I^\alpha L_x u_0 = \frac{f_1(x)}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha \\
u_2 &= -I^\alpha(A_1) - I^\alpha L_{xx}u_1 + I^\alpha L_x u_1 = \frac{f_2(x)}{\Gamma(2\alpha+1)}t^{2\alpha} \\
u_3 &= -I^\alpha(A_2) - I^\alpha L_{xx}u_2 + I^\alpha L_x u_2 = \frac{f_3}{\Gamma(3\alpha+1)}t^{3\alpha} \\
&\vdots \\
u_n &= \frac{f_n(x)}{\Gamma(2\alpha+1)}t^{n\alpha}
\end{aligned}
$$

tel que :

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= (f(x))^2 + f''(x) - f'(x) = x^4 - 2x + 2 \\
f_2(x) &= -[2f(x)f_1(x) + f_1''(x) - f_1'(x)] = -2x^6 + 8x^2 + 2 \\
f_3(x) &= -2f(x)f_2(x) - 2f_1^2(x) - 2f_2''(x) + f_2'(x) = 3x^8 - 8x^5 + 40x^4 - 8x^2 + 24x - 20 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

donc (3.29) devient

$$
u(x,t) = f_0(x) + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f_1(x) + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}f_2(x) + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}f_3(x) + \cdots + \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}f_n(x) + \cdots
$$

où $f_0(x)$ est la condition initiale.

Exemple 3.6. *[6] Considérons le problème de la valeur initiale (IVP) pour l'équation fractionnaire BBM-Buger de la forme*

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \\
u(x,0) = \varphi = f(x) = \sin(x), \quad x \in \Omega \times (0,T], \ ou \ \ \Omega = (0,1)
\end{cases}
\tag{3.32}
$$

La forme standard de l'équation de BBM-Buger fractionnaire sous forme d'opérateur :

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}u(x,t) = (L_{xx}u(x,t)) - (u(x,t)L_x u(x,t)) \tag{3.33}$$

où :

$$L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\ , \quad L_x = \frac{\partial}{\partial x}$$

En appliquant I^α à l'équation (3.33), on trouve

$$u(x,t) = \phi + I^\alpha(L_{xx}u) - I^\alpha(Nu)$$

tel que :

$$Nu = u\frac{\partial u}{\partial x}$$

Soit les polynômes d'Adomian donnés par :

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i)\frac{\partial}{\partial x}(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i)\right]_{|\lambda=0}, \quad n = 0,1,2,\dots \\
A_0 &= u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} \\
A_1 &= u_0\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1\frac{\partial u_0}{\partial x} \\
A_2 &= u_0\frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_0}{\partial x} \\
A_3 &= u_0\frac{\partial u_3}{\partial x} + v_0\frac{\partial u_3}{\partial y} + u_1\frac{\partial u_2}{\partial x} + v_1\frac{\partial u_2}{\partial y} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_2\frac{\partial u_1}{\partial y} + u_3\frac{\partial u_0}{\partial x} + v_3\frac{\partial u_0}{\partial y} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ainsi

$$u(x,t) = \phi + I^\alpha(\sum_{n=0}^{\infty}(L_{xx}u_n)) - I^\alpha(\sum_{n=0}^{\infty}(A_n))$$

tel que :

$$\begin{aligned}
u_0 &= \varphi = u(x,0) = f_0(x) = \sin x \\
u_1 &= I^\alpha(L_{xx}u_0) - I^\alpha(A_0) = \frac{f_1(x)}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha \\
u_2 &= I^\alpha(L_{xx}u_1) - I^\alpha(A_1) = \frac{f_2(x)}{\Gamma(2\alpha+1)}t^{2\alpha} \\
u_3 &= I^\alpha(L_{xx}u_2) - I^\alpha(A_2) = \frac{f_3(x)}{\Gamma(3\alpha+1)}t^{3\alpha} \\
&\vdots \\
u_{n+1} &= I^\alpha(L_{xx}u_n) - I^\alpha(A_n) = \frac{f_n(x)}{\Gamma(n\alpha+1)}t^{n\alpha}
\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= -f''(x) + f(x)f'(x) = \sin(x)(1+\cos x) \\
f_2(x) &= f_1''(x) - f(x)f_1'(x) - f_1(x)f'(x) = \sin^3(x) + [-1 - 5\cos x - \cos^2 x - (1+\cos x)\cos x] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Par conséquent $u(x,t) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$

Donc la solution de problème (IVP) est donnée par :

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= f_0(x) + \frac{f_1(x)}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha + \frac{f_2(x)}{\Gamma(2\alpha+1)}t^{2\alpha} + \frac{f_3(x)}{\Gamma(3\alpha+1)}t^{3\alpha} + \cdots + \frac{f_n(x)}{\Gamma(n\alpha+1)}t^{n\alpha} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} f_n(x)
\end{aligned}$$

où $f_0(x)$ *est la condition initiale.*

2.2 Équations aux dérivées partielles du troisième ordre fractionnaire

Exemple 3.7. *[6]*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ (x,t) \in \Omega \times (0,T] \;\; et \;\; 0 < \alpha \leq 1 \end{cases} \tag{3.34}$$

Avec la condition initiale $u(x,0) = f(x)$*, tel que* $f(x) = \cos x$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= -u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= -u(x,t)L_x u(x,t) + L_{xxx}u(x,t) - L_{xx}u(x,t) + L_x u(x,t)\end{aligned}$$

tel que

$$L_{xxx} = \frac{\partial^3}{\partial x^3},\ L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2},\ L_x = \frac{\partial}{\partial x}$$

D^α *est l'opérateur fractionnaire, on sait que* I^α *est l'opérateur inverse de* D^α*, alors en appliquant* I^α *aux deux cotés de l'équation donnée, on obtient*

$$u(x,t) = \phi - I^\alpha(Nu) + I^\alpha(L_{xxx}u) - I^\alpha(L_{xx}u) + I^\alpha(L_x u) \tag{3.35}$$

où $Nu = u\dfrac{\partial u}{\partial x}$
Les premiers termes des polynômes d'Adomian sont donnés par :

$$\begin{aligned}A_0 &= u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} \\ A_1 &= u_0\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1\frac{\partial u_0}{\partial x} \\ A_2 &= u_0\frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_0}{\partial x} \\ &\vdots\end{aligned}$$

A partir de (3.25),on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \varphi - I^\alpha(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0,u_1,\ldots,u_n)) + I^\alpha(\sum_{n=0}^{\infty} L_{xxx}u_n) - I^\alpha(\sum_{n=0}^{\infty} L_{xx}u_n) + I^\alpha(\sum_{n=0}^{\infty} L_x u_n),$$

$$\begin{aligned}u_0 &= u(x,0) = f_0(x) = \cos x \\ u_1 &= -I^\alpha A_0 + I^\alpha(L_{xxx}u_0) - I^\alpha(L_{xx}u_0) + I^\alpha(L_x u_0) \\ u_2 &= -I^\alpha A_1 + I^\alpha(L_{xxx}u_1) - I^\alpha(L_{xx}u_1) + I^\alpha(L_x u_1) \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -I^\alpha A_n + I^\alpha(L_{xxx}u_n) - I^\alpha(L_{xx}u_n) + I^\alpha(L_x u_n)\end{aligned}$$

En substituant les valeurs de $u_0, u_1, \ldots$ dans (3.35), on obtient la solution de problème

$$u(x,t) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{3.36}$$

Où

$$\begin{aligned}
u_0 &= u(x,0) = f_0(x) = \cos x \\
u_1 &= -I^\alpha A_0 + I^\alpha L_{xxx}(u_0) - I^\alpha(L_{xx}u_0) + I^\alpha(L_x u_0) = \frac{f(x)f'(x) - f'''(x) + f''(x) - f'(x)}{\Gamma(\alpha+1}t^\alpha \\
&= f_1(x)\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
u_2 &= -I^\alpha(A_1) + I^\alpha(L_{xxx}u_1) - I^\alpha(L_{xx}u_1) + I^\alpha(L_x u_1) \\
&= f_2(x)\frac{f_2}{\Gamma(2\alpha+1)}t^{2\alpha} \\
u_3 &= -I^\alpha A_2 + I^\alpha(L_{xxx}u_2) - I^\alpha(L_{xx}u_2) + I^\alpha(L_x u_2) = \frac{f_3}{\Gamma(3\alpha+1)}t^{3\alpha} \\
&\vdots \\
u_n &= -I^\alpha A_{n-1} + I^\alpha(L_{xxx}u_{n-1}) - I^\alpha(L_{xx}u_{n-1}) + I^\alpha(L_x u_{n-1}) = \frac{f_n}{\Gamma(2\alpha+1)}t^{n\alpha}
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= f(x)f'(x) - f'''(x) + f''(x) - f'(x) = (-\sin x - 1)\cos x - 2\sin x \\
f_2(x) &= -[f(x) + f_1'(x) + f_1(x)f'(x) - f_1'''(x) + f_1''(x) - f_1'(x)] \\
&= \cos^3 x + 3\cos^2 x + ((-\sin x - 1)\sin x - 2\sin x - 1)\cos x - 5\sin^2 x - 2\sin x,
\end{aligned}$$

donc (3.36) devient

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= f_0(x) + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f_1(x) + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}f_2(x) + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}f_3(x) + \cdots + \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}f_n(x) + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}f_n(x).
\end{aligned}$$

où $f_0(x)$ est la condition initiale.

3 ADM pour résoudre des systèmes

3.1 Exemples

I. Considérons le système d'équations fractionnaires non-linéaires :[4]

$$\begin{cases} D^{\alpha}u_1(t) = u_1^2 + u_2 \\ D^{\beta}u_2(t) = u_2 \cos u_1, \quad u_1(0) = 0,\ u_2(0) = 1, \end{cases} \tag{3.37}$$

où $\alpha, \beta \in (0,1)$. d'après les résultats obtenus par **Daftardar-Gejji et Babakhani** [9], ce système admet une solution unique. pour de résoudre le système ci-dessus, on définissons les termes non linéaires par

$$N_1(\bar{u}) = u_1^2 + u_2 = \sum_{j=0}^{\infty} A_{1j},\ N_2(\bar{u}) = u_2 \cos u_1 = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j}.$$

on évaluons les polynômes d'Adomian par :

$$\begin{aligned}
A_{10} &= u_{10}^2 + u_{20} \\
A_{11} &= 2u_{10}u_{11} + u_{21} \\
A_{12} &= 2u_{11}^2 + 2u_{10}u_{12} + u_{22} \\
A_{13} &= 2u_{11}u_{12} + 2u_{10}u_{13} + u_{23} \\
A_{14} &= u_{12}^2 + 2u_{11}u_{13} + 2u_{10}u_{14} + u_{24} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
A_{20} &= u_{20}\cos u_{10}\\
A_{21} &= -u_{11}u_{12}\sin u_{10} + u_{21}\cos u_{10}\\
A_{22} &= \frac{1}{2}u_{11}^2u_{20}\cos u_{10} - u_{12}u_{20}\sin u_{10} - u_{11}u_{21}\sin u_{10} + u_{21}\cos u_{10}\\
A_{23} &= \frac{1}{6}((u_{11}^3u_{20}\sin u_{10} - 6u_{11}u_{12}\sin u_{10} - 6u_{13}\sin u_{10})u_{20} - 3(u_{11}^2\cos u_{10} + u_{12}\sin u_{10})u_{21}\\
&\quad - 6u_{11}u_{22}\sin u_{10} + 6u_{23}\cos u_{10})\\
A_{24} &= \frac{1}{24}((u_{11}^4\cos u_{10} + 12u_{11}^2u_{12}\sin u_{10} - 24u_{11}u_{13}\cos u_{10} - 12(u_{12}^2\cos u_{10}\\
&\quad + 2u_{14}\sin u_{10}))u_{20} + 4(u_{11}^3\sin u_{10} - 6y_{11}u_{12}\cos u_{10} - 6u_{13}\sin u_{10})u_{21}\\
&\quad - 12(u_{11}^2\cos u_{10} + u_{12}\sin u_{10})u_{22} - 24u_{11}u_{23}\sin u_{10} + 24u_{24}\cos u_{10})\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

La décomposition Adomian conduit au schéma suivant :

$$\begin{cases} u_{10} = 0, \quad u_{1,m+1} = I^\alpha A_{1m}\\ u_{20} = 1, \quad u_{2,m+1} = I^\beta A_{2m}, \quad m = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Dans la première itération on a

$$u_{11} = I^\alpha A_{10} \;\; et \;\; u_{21} = -I^\beta A_{20} = \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}.$$

Les termes suivants sont :

$$\begin{aligned}
u_{12} &= I^\alpha A_{11} = I^\alpha \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} = \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\\
u_{22} &= I^\beta A_{21} = I^\beta \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} = \frac{t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)}\\
u_{13} &= I^\alpha A_{12} = I^\alpha\left(\frac{t^{2\alpha}}{[\Gamma(\alpha+1)]^2} + \frac{t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)}\right) = \frac{\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{[\Gamma(\alpha+1)]^2\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{t^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)}\\
u_{23} &= I^\beta A_{22} = I^\beta\left(-\frac{t^{2\alpha}}{2[\Gamma(\alpha+1)]^2} + \frac{t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)}\right) = -\frac{\Gamma(2\alpha+1)t^{2\alpha+\beta}}{[\Gamma(\alpha+1)]^2\Gamma(2\alpha+\beta+1)} + \frac{t^{3\beta}}{\Gamma(3\beta+1)}
\end{aligned}$$

En utilisant les termes ci-dessus

$$u_1 = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{[\Gamma(\alpha+1)]^2\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{t^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)} + \cdots$$

$$u_2 = 1 + \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)} - \frac{\Gamma(2\alpha+1)t^{2\alpha+\beta}}{[\Gamma(\alpha+1)]^2\Gamma(2\alpha+\beta+1)} + \frac{t^{3\beta}}{\Gamma(3\beta+1)} + \cdots$$

II. Considérons le système d'équations fractionnaires non-linéaires[4]

$$\begin{cases} D^\alpha u_1 = 2u_2^2 \\ D^\beta u_2 = tu_1, \qquad u_1(0)=0,\ u_2(0)=1,\ u_3(0)=1, \\ D^\gamma u_3 = u_2u_3 \end{cases}$$

où $\alpha, \beta, \gamma \in (0,1)$.Pour résoudre le système précédent, on définie les termes non linéaires par

$$N_1(\bar{u}) = 2u_2^2 = \sum_{j=0}^{\infty} A_{1j}, \quad N_2(\bar{u}) = tu_1 = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j}, \quad N_3(\bar{u}) = u_2u_3 = \sum_{j=0}^{\infty} A_{3j}.$$

$$\begin{aligned}
A_{10} &= 2u_{20}^2 & A_{20} &= tu_{10} \\
A_{11} &= 4u_{20}u_{21} & A_{21} &= tu_{11} \\
A_{12} &= 2u_{21}^2 + 4u_{20}u_{22} & A_{22} &= tu_{12} \\
A_{13} &= 4u_{21}u_{22} + 4u_{20}u_{23} & A_{23} &= tu_{13} \\
A_{14} &= 2u_{22}^2 + 4u_{21}u_{23} + 4u_{20}u_{24} & A_{24} &= tu_{14} \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{30} &= u_{20}u_{30} \\
A_{31} &= u_{21}u_{30} + u_{20}u_{31} \\
A_{32} &= u_{22}u_{30} + u_{21}u_{31} + u_{20}u_{32} \\
A_{33} &= u_{23}u_{30} + u_{22}u_{31} + u_{21}u_{32} + u_{20}u_{33} \\
A_{34} &= u_{24}u_{30} + u_{23}u_{31} + u_{22}u_{32} + u_{21}u_{33} + u_{20}u_{34} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

La décomposition Adomian conduit au l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} u_{10} = 0, \\ u_{1,m+1} = I^{\alpha} A_{1m}, \end{cases} \quad \begin{cases} u_{20} = 1, \\ u_{2,m+1} = I^{\beta} A_{2m}, \end{cases} \quad \begin{cases} u_{30} = 1, \\ u_{3,m+1} = I^{\gamma} A_{3m}, \end{cases} \quad m = 0, 1, \ldots$$

Dans la première itération, on a

$$u_{11} = I^{\alpha} A_{10} = \frac{2t^{\alpha}}{\gamma(\alpha+1)}, u_{21} = I^{\beta} u_{20} = 0 \quad et \quad u_{31} = I^{\gamma} A_{30} \frac{t^{\gamma}}{\Gamma(\gamma+1)}.$$

Exemple 3.8. *[6] Considérons le système de problème (IVP) de valeur initiale des équations fractionnaires*

$$\begin{cases} {}^{C}D_t^{\alpha} u = uD_x u + vD_y u \\ {}^{C}D_t^{\alpha} v = uD_x u + vD_y v \end{cases} \tag{3.38}$$

où $0 < \alpha \leq 1$ *et* $(x,t) \in \Omega_x(0,T]$, *et avec les conditions initiales suivantes*
$u(x,y,0) = f(x,y)$
$v(x,y,0) = g(x,y)$,$x, y \in \Omega = (0,1)$
Le système (3.38) peut être écrit sous la forme suivant :

$$\begin{cases} {}^{C}D_t^{\alpha} = u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ {}^{C}D_t^{\alpha} = u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \tag{3.39}$$

$N_1(u,v) = u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = Lu$
$N_2(u,v) = u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = Lv$
Appliquant $L^{-1}(.) = I^{\alpha}$ *à (3.39), on obtient*

$$\begin{cases} u(x,y,t) = \phi + I^{\alpha} N_1(u,v) \\ v(x,y,t) = \phi + I^{\alpha} N_2(u,v) \end{cases} \tag{3.40}$$

où l'opérateur non linéaire $N_1(u,v)$ *et* $N_2(u,v)$ *sont eux écrits dans le formulaire de décomposition*

$N_1(u,v) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \ldots, u_n)$

$N_2(u,v) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(v_0, v_1, \ldots, v_n)$

tel que A_n *et* B_n *sont les polynômes d'Adomian*

$$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N_1(u,v)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{|\lambda=0}$$

$$B_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N_2(u,v)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i v_i\right)\right]_{|\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Les polynômes d'Adomian sont donnés par :

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n}(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i)(\frac{\partial}{\partial x}\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i) + (\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i v_i)(\frac{\partial}{\partial y}\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i)\right]_{|\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\
A_0 &= u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0\frac{\partial u_0}{\partial y} \\
A_1 &= u_0\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_0\frac{\partial u_1}{\partial y} + u_1\frac{\partial u_0}{\partial x} + v_1\frac{\partial u_0}{\partial y} \\
A_2 &= u_0\frac{\partial u_2}{\partial x} + v_0\frac{\partial u_2}{\partial y} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial y} + u_2\frac{\partial u_0}{\partial x} + v_2\frac{\partial u_0}{\partial y} \\
A_3 &= u_0\frac{\partial u_3}{\partial x} + v_0\frac{\partial u_3}{\partial y} + u_1\frac{\partial u_2}{\partial x} + v_1\frac{\partial u_2}{\partial y} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_2\frac{\partial u_1}{\partial y} + u_3\frac{\partial u_0}{\partial x} + v_3\frac{\partial u_0}{\partial y} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Maintenant, pour calculer les termes de la solutions, on doit généraliser ces polynômes d'Adomian dans ce qui suit.

$$
\begin{aligned}
B_n &= \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n}(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i u_i)(\frac{\partial}{\partial x}\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i v_i) + (\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i v_i)(\frac{\partial}{\partial y}\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i v_i)\right]_{|\lambda=0}, \quad n = 0,1,2,\dots \\
B_0 &= u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0\frac{\partial v_0}{\partial y} \\
B_1 &= u_0\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_0\frac{\partial v_1}{\partial y} + u_1\frac{\partial v_0}{\partial x} + v_1\frac{\partial v_0}{\partial y} \\
B_2 &= u_0\frac{\partial v_2}{\partial x} + v_0\frac{\partial v_2}{\partial y} + u_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial y} + u_2\frac{\partial v_0}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_0}{\partial y} \\
B_3 &= u_0\frac{\partial v_3}{\partial x} + v_0\frac{\partial v_3}{\partial y} + u_1\frac{\partial v_2}{\partial x} + v_1\frac{\partial v_2}{\partial y} + u_2\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial y} + u_3\frac{\partial v_0}{\partial x} + v_3\frac{\partial v_0}{\partial y} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

A partir de (3.25), on a

$$\sum_{n}^{\infty} u_n(x,y,t) = u(x,y,0) + I^{\alpha}(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0,u_1,\dots,u_n))$$

$$\sum_{n}^{\infty} u_n(x,y,t) = v(x,y,0) + I^{\alpha}(\sum_{n=0}^{\infty} B_n(u_0,u_1,\dots,u_n))$$

La décomposition associée est donnée par :
$u_0 = u(x,y,0), u_{n+1} = I^{\alpha}(N_1(u_n,v_n))$
$v_0 = v(x,y,0), v_{n+1} = I^{\alpha}(N_2(u_n,v_n)), n = 0,1,\dots$
Ensuite, selon l'équation ci-dessus, on obtient

$$
\begin{aligned}
u_0 &= u(x,y,0) & v_0 &= v(x,y,0) \\
u_1 &= I^{\alpha}A_0 & v_1 &= I^{\alpha}B_0 \\
u_2 &= I^{\alpha}A_1 & v_2 &= I^{\alpha}B_1 \\
&\vdots & &\vdots \\
u_{n+1} &= I^{\alpha}A_n & v_{n+1} &= I^{\alpha}B_n
\end{aligned}
$$

En substituant les valeurs précédent, on obtient la solution de problème (IVP).

$$\begin{aligned}
u_0 &= u(x,y,0) = f(x,y)\\
v_0 &= v(x,y,0) = g(x,y)\\
u_1 &= I^\alpha A_0 = \frac{1}{\gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{1}{(t-\theta)^{1-\alpha}}\left[u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0\frac{\partial u_0}{\partial y}\right]d\theta = f_1(x,y)\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\\
v_1 &= I^\alpha B_0 = \frac{1}{\gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{1}{(t-\theta)^{1-\alpha}}\left[u_0\frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0\frac{\partial v_0}{\partial y}\right]d\theta = g_1(x,y)\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\\
u_2 &= I^\alpha A_1 = f_2(x,y)\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\\
v_2 &= I^\alpha B_1 = g_2(x,y)\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

tel que

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= -\left[fx,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]\\
g_1(x,y) &= -\left[fx,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right]\\
f_2(x,y) &= fx,y)\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} + f_1(x,y)\frac{f(x,y)}{\partial x} + g_1(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\\
g_2(x,y) &= fx,y)\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial y} + f_1(x,y)\frac{g(x,y)}{\partial x} + g_1(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}
\end{aligned}$$

On obtient

$$u(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0+u_1+\cdots+u_n+\cdots = f(x,y)+f_1(x,y)\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\cdots+f_n(x,y)\frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}+\cdots$$

$$v(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n = v_0+v_1+\cdots+v_n+\cdots = g(x,y)+g_1(x,y)\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\cdots+g_n(x,y)\frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}+\cdots$$

4 Comparaison numérique

Dans cette partie on va faire une comparaison entre la solution approximative par la méthode ADM et la solution exacte.

tous les calculs présentés dans cette partie ont été obtenus par logiciels maple.

Exemple 3.9. *Soit l'équation*

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}u = -u^{2}(t) + 1 \\ u(0) = 0, \qquad 0 < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

La solution exacte, quand $\alpha = 1$ *est*

$$u(t) = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$$

	la Solution exacte	*ADM*
t	*U(t)*	*U(t)*
0	*0*	*0*
0.5	*0.4621171572*	*0.4621171881*
1	*0.7615941560*	*0.7616220734*
1.5	*0.9051482536*	*1.135710936*
2	*0.9640275801*	*126.6692882*
2.5	*0.9866142982*	*15799.86150*
3	*0.9950547537*	*7.956412541* 10^{5}
3.5	*0.9981778976*	*2.148457529* 10^{7}
4	*0.9993292997*	*3.692894155* 10^{8}
4.5	*0.9997532108*	*4.507357447* 10^{9}
5	*0.9999092043*	*4.206155770* 10^{10}

Tableau 1 : *les résultats numériques de l'exemple* (3.9) *pour* $\alpha = 1$.

Dans Tableau 1, nous comparons la solution de l'exemple (3.9) *avec la solution exacte pour* t *dans* $[0, 5]$ *et pour* $\alpha = 1$.

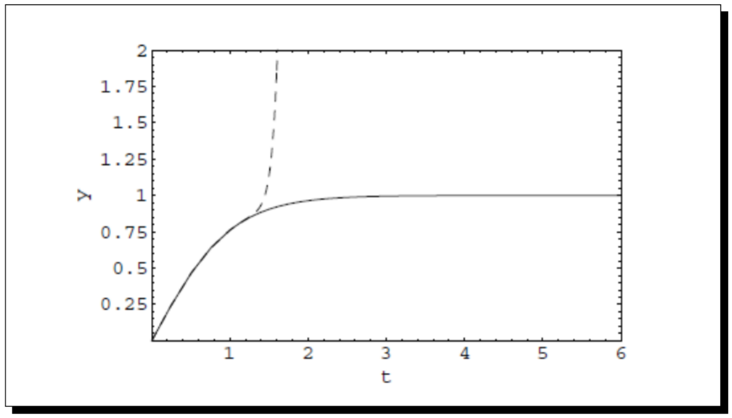

FIGURE 3.1 – La solution exacte (continue) par rapport à la solution de décomposition (ligne pointillée)lorsque $\alpha = 1$.

Figure 3.1 *: Montre la solution obtenue en utilisant ADM par rapport à la solution exacte quand* $\alpha = 1$

Exemple 3.10. *Soit l'équation*

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}u(t) = 2u(t) - u^2(t) + 1 \\ u(0) = 0, \qquad\qquad 0 < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

La solution exacte pour $\alpha = 1$*, est donnée par*

$$u(t) = 1 + \sqrt{2}\tanh\left(\sqrt{2}t + \frac{1}{2}log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right).$$

	la Solution exacte	ADM
t	U(t)	U(t)
0	0.4836486197	0
0.5	1.443239780	0.7708333125
1	2.095286316	2.000000000
1.5	2.329442246	3.187500563
2	2.393125869	3.333336000
2.5	2.409057696	0.93750781
3	2.412958353	-5.99998200
3.5	2.413908297	-19.97913093
4	2.414139341	-43.99993600
4.5	2.414195517	-81.56239368
5	2.414209175	-136.6665000

Tableau 2 : *les résultats numériques de l'exemple* (3.10) *pour* $\alpha = 1$.

Dans le Tableau 2*, nous comparons la solution de l'exemple (qui est résolu par la méthode ADM) avec la solution exacte. En utilisant la subdivision de l'intervalle pour* $\Delta t = 0.5$

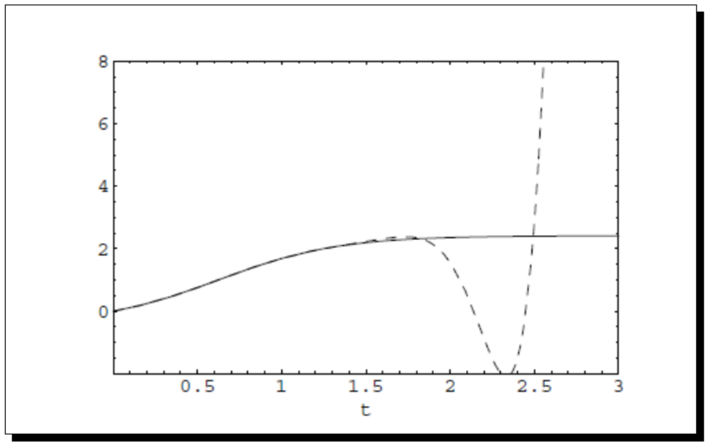

FIGURE 3.2 – La solution exacte (ligne continue) par rapport à la solution de décomposition (ligne pointillée)

Figure 3.2 *: Montre la solution obtenue en utilisant ADM par rapport à la solution exacte quand* $\alpha = 1$
Remarque : Remarquons que à partir de la comparaison entre la méthode ADM et la solution exacte que la méthode ADM est divergent juste après $t = 1$*.*

Conclusion générale :

Ce mémoire a pour but l'étude des équations différentielles d'ordre fractionnaire.
Dans le premier chapitre on a rassemblé les outils de base pour cette étude, dans le deuxième chapitre on a présenté la méthode ADM pour résoudre les équations différentielles d'ordre fractionnaire.
Dans le dernier chapitre nous avons présenté quelques applications de la méthode ADM et on a terminé ce chapitre par une comparaison numérique.

Bibliographie

[1] **Balira Ousmane KONFE**, Nouvelles méthodes mathématiques Alienor et Adomian pour la Biomédecine.

[2] **CHOUCHA AbdelBaki**, La Méthode d'Adomian Appliqée au Problème de Cauchy, Universttn kasdi Merbah Ouargla

[3] **Hamdi Chérif Mountassir**, Comparaisons des méthodes numériques des résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire, Université d'Oran Senia 2012.

[4] **Hossein Jafari, Varsha Daftardar-Gejji**, Solving a system of nonlinear fractional differential equations using Adomian decomposition, Jurnal of Computational and Applied Mathematic.

[5] **J-P. Demailly**, Analyse numérique et équations différentielles ; collection Grenoble Sciences, presses universitaires de Grenoble, Grenoble (1996)

[6] **Mahmoud M. El-Borai, Wagdy G. El-Sayed, Adham M.Jawad** Adomian Decomposition Method For solving Fractional Differential Equations, Volume : 02Issue : 06|Sep-2015.

[7] **O. S. Odetunde1. O. A. Taiwo** A Decomposition Algorithm for the Solution of Fractional Quadratic Riccati Differential Equations with Caputo Derivatives,American Journal of Computational and Applied Mathematics 2014.

[8] **Shaher Momani, Nabil Shawagfeh**, Decomposition method for solving fractional Riccati differential equations, Applied Mathematic and Computation 182(2006)1083-1092.

[9] **V. Daftardar-Gejji, A. Babakhani**, Analysis of a system of fractional differential equations, J. Math. Anal. Appl. 293 (2004) 511–522.

[10] **Y. Cherruault**, Convergence of Adomian's method, 18(1989)31-38, vol.22, $n^0$3,1988, p 291 à 299

[11] **Zahra Adabi Firoozjae, Allahbakhsh yazdani** : The Comparison Adomian Decomposition Method and Differential Quadrature Method for Solving Some Nonlinear Partial Diferential Equations, Published online April 15, 2015.

[12] **François Dubois, Ana-Cristina Galucio et Nelly Point**, Introduction à la dérivation fractionnaire Théorie et applications, mars 2009