
INTRODUCTION GENERALE

Introduction Générale

La transformée continue en ondelettes est devenue un outil très utile en géophysique (kumar et Foufoula-georgiou 1997).

Dans l'analyse de terrain potentielle, elle a été utilisée pour localiser et caractériser des sources causales homogènes pointant dans une direction (moreau et al. 1997). Martelet et al. (2001) ont publié un article sur la caractérisation des limites géologiques à l'aide de la TO 1D des données gravimétriques, la technique proposée a été appliquée sur l'Himalaya. La TOC complexe a été utilisée pour l'identification des sources de champs potentiels en utilisant les profils aéromagnétiques de la Guyane française (sailhac et al. 2000).

Sailhac et Gibert (2003) ont proposé une nouvelle technique d'identification des sources à partir du champ potentiel avec la transformée en ondelettes continue, basée sur les approximations d'ondelettes bidimensionnelles et multipolaires. La TO 1D a été utilisée pour l'identification des sources de champs potentiels avec la transformée en ondelettes continue (Boukerbout et al. 2003). Elle a été appliquée à des données à très basse fréquence.

Une nouvelle technique a été proposée par vallée et al (2004) pour estimer la profondeur et le type de modèle en utilisant la TOC des données magnétiques.

Boukerbout et Gibert (2006) ont appliqué le formalisme de la transformée en ondelettes continue au cas particulier des anomalies. Elles montrent que, pour ce type particulier d'anomalies, la TO bidimensionnelle correspond à l'analyse Ridgelet et réduite à la TO 1D appliquée dans le domaine du radon.

Récemment, notre enseignant monsieur Ouadfeul et al. (2011), ont publié un article qui utilise la TOC sur la cartographie des contacts géologiques à partir de données géomagnétiques, l'ondelette analysant est le chapeau mexicain, la méthode proposée a montré une bonne robustesse. Dans ce mémoire, nous proposons une nouvelle technique plus précise et non sensible au bruit; cette dernière technique est basée sur la transformée continue en ondelettes 2D directionnelle (TOCD) et l'analogie entre la transformée en ondelettes et la continuation vers le haut, après que la technique a été appliquée sur une donnée synthétique de prisme et un cylindre. Vérifier la robustesse de la méthode proposée sur le modèle synthétique bruité. Nous proposons un nouvel outil de réduction des effets du bruit dans les solutions fournies par le TOCD 2D. L'idée proposée a été appliquée au champ magnétique d'anomalie de la région d'In ouzzal.

Les résultats obtenus après l'application du filtre proposé ont été comparés à des solutions de signaux analytiques(SA) (Nabighian 1984, Roest et al, 1992). Nous avons finalisé le document en proposant un modèle de contacts pour ce domaine et une conclusion.

CHAPITRE I

TRANSFORMÉE DE FOURIER

I.1 Définitions :

I.1.1. Signal :

Le mot « signal » désigne l'évolution temporelle d'une grandeur physique mesurable (courant, tension, force, température, pression, etc.). Ces signaux physiques sont modélisés par des fonctions mathématiques x dépendant d'une variable représentant le temps t . En pratique un signal est issu d'une mesure par un capteur. (Notes des Cours sur Web)

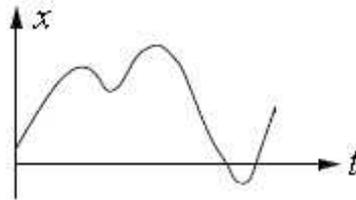


Figure I.1 : Un signal

I.1.2. Bruit :

Le *bruit* est défini comme toute perturbation gênante qui se superpose au signal. La différenciation entre le signal et le bruit dépend de l'intérêt de l'utilisateur : les ondes électromagnétiques d'origine galactique sont du bruit pour un ingénieur des télécommunications par satellites et un signal pour les radioastronomes. (Notes des Cours sur Web)

I.1.3. Rapport signal sur bruit :

Le rapport signal sur bruit mesure la quantité de bruit contenue dans le signal. Il s'exprime par le rapport des puissances du signal $x(t)$ et du bruit $n(t)$ (Notes des Cours sur Web)

. Il est souvent donné en décibels [dB]:

$$SNR = 10 \cdot \log\left(\frac{P_x}{P_n}\right) \quad \text{I.1}$$

I.2. Classification des signaux :

Pour faciliter l'étude des signaux, différents modes de classification peuvent être envisagés :

I.2.1 Signaux déterministes ou aléatoires :

La première classification, basée sur l'évolution du signal en fonction du temps, fait apparaître deux types fondamentaux:

-*Les signaux déterministes (ou certains)* dont l'évolution en fonction du temps peut être parfaitement décrite par un modèle mathématique. Ces signaux proviennent de phénomènes pour lesquels on connaît les lois physiques. A titre d'exemple, pour un

oscillateur qui délivre un signal sinusoïdal d'amplitude A et de fréquence f_0 , on peut prédire la valeur du signal à tout instant grâce au modèle mathématique $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$.

Une formule mathématique définit parfaitement le signal.

-Les signaux aléatoires (ou probabilistes) dont le comportement temporel est imprévisible. Il faut faire appel à leurs propriétés statistiques pour les décrire. Si leurs propriétés statistiques sont invariantes dans le temps, on dit qu'ils sont stationnaires.

Les paramètres statistiques définissant les possibilités d'évolution du signal.

(G. Blanchet and M. Charbit, Paris, 1998)

I.2.2. Classification morphologique :

Selon l'amplitude du signal et la variable t (M. KUNT, 1984), on distingue 4 cas possible :

1. Les signaux analogiques dont l'amplitude et le temps sont continus.
2. Les signaux quantifiés dont l'amplitude est discrète et le temps continu.
3. Les signaux échantillonnés dont l'amplitude est continue et le temps discret.
4. Les signaux numériques dont l'amplitude et le temps sont discrets.

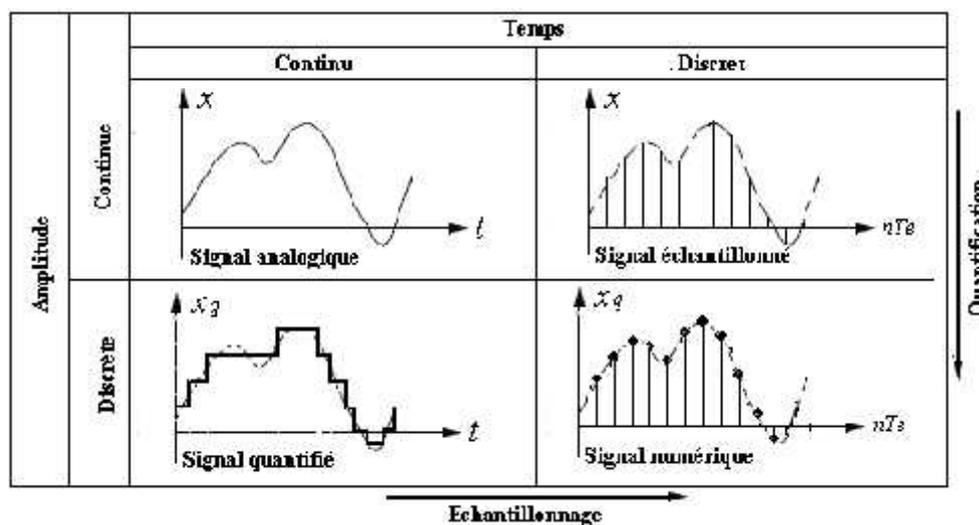


Figure I.2 : Classification morphologique des signaux

I.2.3. Classification énergétique :

La puissance électrique instantanée fournie à une résistance R (ou conductance G) est définie comme le produit des valeurs instantanées de la tension $u(t)$ à ses bornes et du courant $i(t)$ qui la traverse :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = Ri^2(t) = Gu^2(t)$$

L'énergie dissipée sur un intervalle $[t_1, t_2]$, avec $t_1 < t_2$, est l'intégrale de cette puissance instantanée et se mesure en joules (J) :

$$W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = R \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt = G \int_{t_1}^{t_2} u^2(t) dt$$

Par conséquent la puissance moyenne $P(t_1, t_2)$, mesurée en watts (W), s'exprime sous la forme suivante :

$$P(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \frac{R}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt = \frac{G}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} u^2(t) dt \quad \text{I.2}$$

On parle d'une puissance ou énergie normalisée quand $R = 1\Omega$. Par analogie, on définit pour un signal $x(t)$ une énergie $W_x(t_1, t_2)$ et une puissance moyenne $P_x(t_1, t_2)$:

$$W_x(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt, \quad P_x(t_1, t_2) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt$$

L'énergie totale w_x et la puissance moyenne totale p_x sont définies par:

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt, \quad P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt \quad \text{I.3}$$

-Remarque :

1. Pour un signal périodique de période T_0 , la puissance moyenne totale est calculée sur une période :

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^2(t) dt \quad \text{I.4}$$

2. Si le signal est représenté par une fonction complexe de la variable réelle t , les définitions sont équivalentes en remplaçant $x^2(t)$ par $|x(t)|^2$.

La plupart des signaux peuvent être classés à partir de leur énergie totale et puissance moyenne totale. On distingue:

- signaux à énergie finie qui satisfont à la condition suivante : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt < \infty$
- signaux à puissance moyenne finie qui satisfont à : $0 < \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt < \infty$

-Remarque :

Les signaux à énergie finie possèdent une énergie finie et une puissance moyenne nulle (signaux réalisable).

Les signaux à puissance moyenne finie possèdent une énergie infinie et sont donc physiquement irréalisable.

Un signal périodique est généralement à puissance moyenne finie et non nulle.

$$\text{La puissance instantanée : } P_x(t) = |x(t)|^2 \quad \text{I.5}$$

$$\text{La puissance moyenne } P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt \quad \text{I.6}$$

$$\text{L'énergie : } W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad \text{I.7}$$

I.2.4. Classification spectrale :

Un signal peut être classé suivant la distribution de son énergie ou de sa puissance en fonction de la fréquence (spectre du signal). Le domaine des fréquences occupé par son spectre F est aussi appelé la largeur de bande du signal: $\Delta F = F_{\max} - F_{\min}$

Suivant la fréquence moyenne $F_{\text{moy}} = (F_{\max} - F_{\min}) / 2$, on peut distinguer deux types de signaux :

- les signaux à bande étroite : $\Delta F / F_{\min}$ est petit ($F_{\max} \approx F_{\min}$).
- les signaux à large bande : $\Delta F / F_{\min}$ est grand ($F_{\max} \gg F_{\min}$).

Pour les signaux à bande étroite, les signaux sont classés suivant la valeur de la fréquence moyenne F_{moy} :

- $F_{\text{moy}} < 250\text{kHz}$ signaux basses fréquences (BF)
- $250\text{kHz} < F_{\text{moy}} < 30\text{MHz}$ signaux hautes fréquences (HF)
- $30\text{MHz} < F_{\text{moy}} < 300\text{MHz}$ signaux très hautes fréquences (VHF)
- $300\text{MHz} < F_{\text{moy}} < 3\text{GHz}$ signaux ultra hautes fréquences (UHF)
- $F_{\text{moy}} > 3\text{GHz}$ signaux super hautes fréquences (SHF)

[Li et al., 2009]

I.2.5. Signaux de durée finie :

Les signaux dont l'amplitude s'annule en dehors d'un intervalle de temps T $x(t) = 0, t \notin T$ sont appelés signaux de durée limitée ou à support borné. Un signal à durée limitée est généralement à puissance moyenne nulle.

I.2.6. Signaux bornés en amplitude :

C'est le cas de tous les signaux physiquement réalisables pour lesquels l'amplitude ne peut pas dépasser certaine valeur limite, souvent imposée par des dispositifs électroniques de traitement. On a dans ce cas: $|x(t)| \leq K$ pour $-\infty < t < \infty$

I.2.7. Signaux pairs et impairs :

Un signal est pair si : $x(t) = x(-t)$

Un signal est impair si : $x(t) = -x(-t)$

Remarque : Tout signal réel peut être décomposé en une partie paire et une partie impaire : $x(t) = x_p(t) + x_i(t)$

Avec $x_p(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$ et $x_i(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$

Exemple :

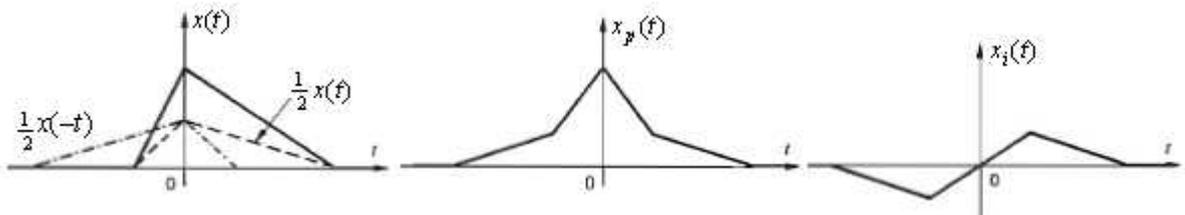


Figure I.3 : Les signaux paires est impaires

I.2.8. Signaux causals :

Un signal est dit causal s'il est nul pour toute valeur négative du temps

$x(t) = 0 \quad t < 0$

I.3. Signaux usuels :

I.3.1 Fonction signe (figure I.4):

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & \text{si } t < 0 \\ 1, & \text{si } t > 0 \end{cases}, \text{sgn}(0)$$

peut prendre toute valeur comprise entre -1 et 1, mais généralement on prend $\text{sgn}(0) = 0$

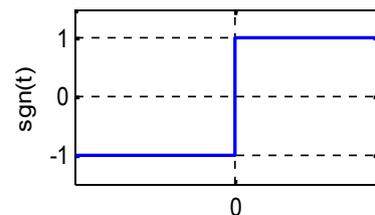


figure I.4

I.3.2 Fonction échelon unité (Figure I.5) :

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1, & \text{si } t > 0 \end{cases}, \text{ par convention } u(0) = 1/2$$

On peut montrer facilement que :

$$u(t) = \frac{1}{2} \text{sgn}(t) + \frac{1}{2}, \text{sgn}(t) = 2u(t) - 1$$

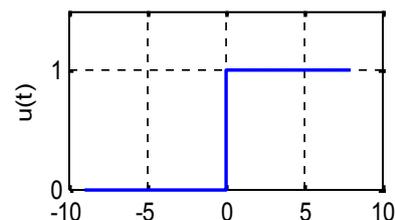


figure I.5

I.3.3 Fonction rampe (Figure I.6) :

$$r(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ t, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Ou d'une autre manière : $r(t) = \int_{-\infty}^t u(\ddagger) d\ddagger$

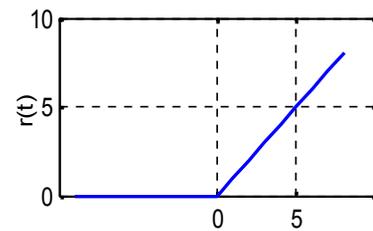


figure I.6

I.3.4 Fonction rectangle (Figure I.7) :

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < -1/2 \text{ et } t > 1/2 \\ 1, & \text{si } t < 1/2 \text{ et } t > -1/2 \end{cases}$$

Ou d'une autre manière :

$$\text{rect}(t) = u(t + 1/2) - u(t - 1/2)$$

Pour une fenêtre de largeur T , d'amplitude A et de retard ‡ :

$$A \text{rect}\left(\frac{t - \ddagger}{T}\right) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < -\frac{T}{2} + \ddagger \text{ et } t > \frac{T}{2} + \ddagger \\ A, & \text{si } t < \frac{T}{2} + \ddagger \text{ et } t > -\frac{T}{2} + \ddagger \end{cases}$$

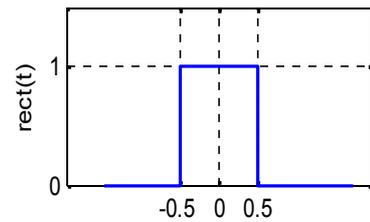


figure I.7

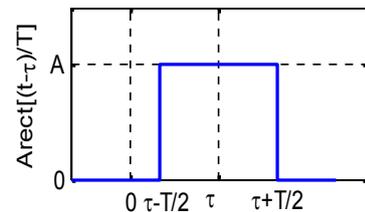


figure I.7

I.3.5 Fonction triangle (Figure I.8) :

$$\text{tri}(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{si } t < |t| \leq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

La surface d'une fonction tri(t) vaut 1 et la largeur de son support est égale à 2.

De la même manière que la fonction rectangulaire :

$$\text{tri}\left(\frac{t - \ddagger}{T}\right) = \begin{cases} 1 - |t - \ddagger|, & \text{si } |t - \ddagger| \leq T \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

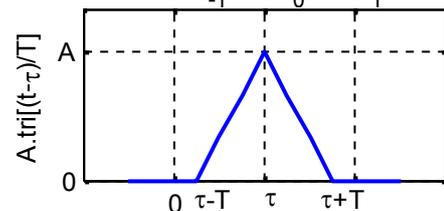
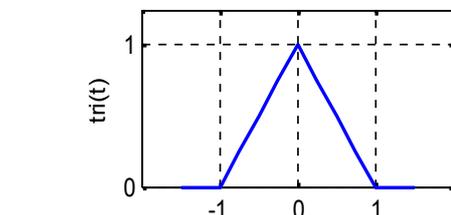
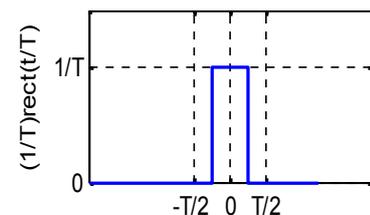


figure I.8

I.3.6 Impulsion de Dirac (Figure I.9) :

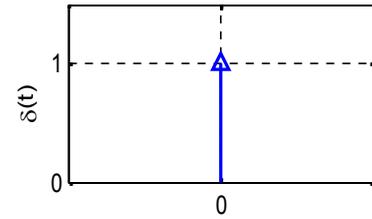
$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \neq 0 \\ +\infty, & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

L'impulsion de Dirac est une fenêtre rectangulaire centrée, de largeur ΔT et d'amplitude 1/ΔT quand ΔT → 0



$$u(t) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \text{rect}\left(\frac{t}{\Delta T}\right)$$

Elle vérifie : $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) dt = 1$



-Remarque : l'impulsion de Dirac est représentée par une flèche d'amplitude 1. Le 1 désigne la surface de l'impulsion mais pas son amplitude.

-Propriétés :

$$x(t)u(t-t_0) = x(t_0)u(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)u(t-t_0) dt = x(t_0)$$

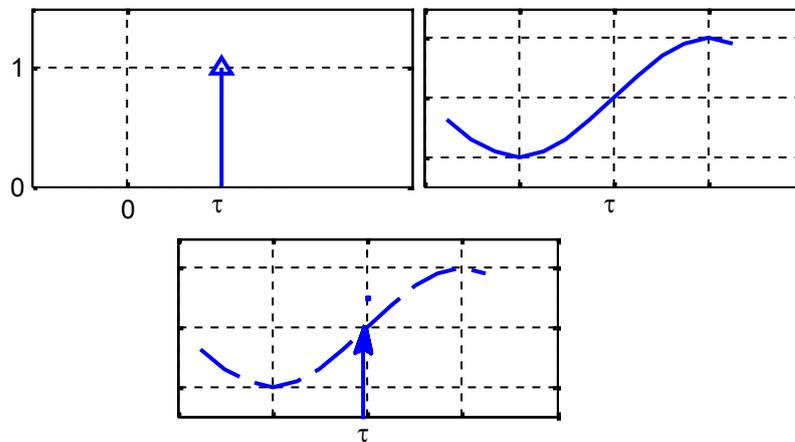


Figure I.9

I.3.7 Peigne de Dirac (Figure I.10) :

La fonction peigne de Dirac notée $u_T(t)$, est une suite d'impulsions de Dirac, périodiques et de période T .

$$u_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(t-kT)$$

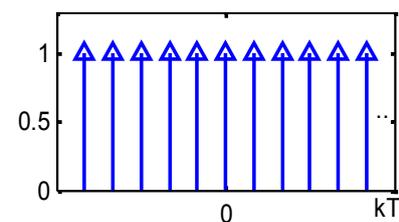


figure I.10

I.3.8 Fonction sinus cardinal (Figure I.11) :

La fonction sinus cardinal notée $\text{sinc}(r)$ est définie par :

$$\text{sinc}(r) = \frac{\sin(fr)}{fr}$$

$$\text{sinc}(r) = 1 \text{ si } r = 0$$

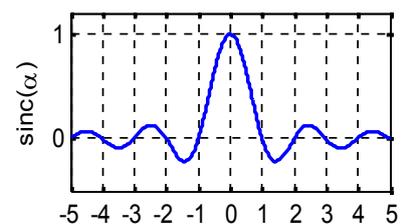


figure I.11

$\sin c(\Gamma) = 0$ si Γ est un entier.

I.4. Transformation de Fourier TF :

L'objectif de la TF est de trouver une nouvelle représentation du signal autre que l'espace amplitude - temps qui nous aide à la compréhension du contenu physique du signal. Prenant par exemple un signal de musique qui consiste en un mélange d'harmoniques. La visualisation de ce signal à l'aide d'un oscilloscope « espace temps amplitude » ne nous donne aucune information qu'on peut exploiter pour étudier ce signal. Par contre l'espace fréquence – amplitude nous permet de connaître les fréquences émises par ce signal de musique.

Donc la représentation fréquentielle d'un signal ou simplement le spectre d'un signal nous renseigne sur les différentes composantes spectrales qu'il contient. (T.W. Körner. University Press, 1988)

Exemples :

a- spectre d'un signal sinusoïdal : $x(t) = 10 \sin(2\pi 20000t)$

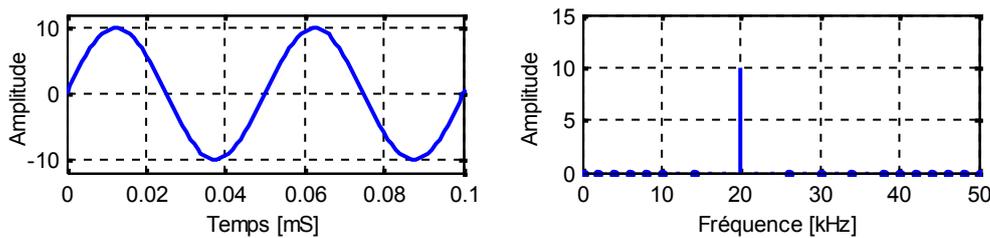


Figure I.12 : spectre d'un signal sinusoïdal, $x(t) = 10 \sin(2\pi 20000t)$

b- spectre d'un signal composite : $x(t) = 10 \sin(2\pi 20000t) + 5 \sin(2\pi 40000t)$

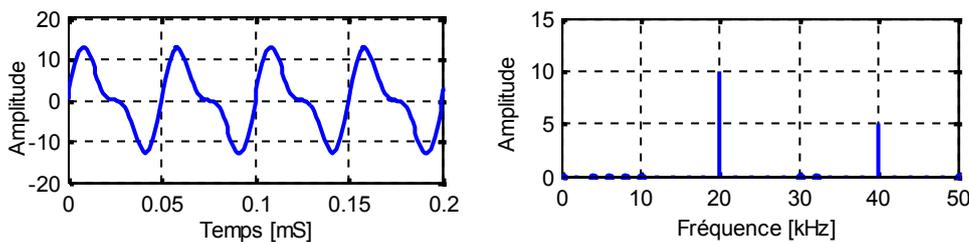


Figure I.13 : spectre d'un signal composite $x(t) = 10 \sin(2\pi 20000t) + 5 \sin(2\pi 40000t)$

I.4.1 Développement en séries de Fourier :

Soit un signal $x(t)$ périodique, de période $T_0 = \frac{2\pi}{\check{\omega}_0}$. Ce signal peut être développé

sous la forme :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\check{\omega}_0 t) + b_n \sin(n\check{\omega}_0 t) \tag{1.8}$$

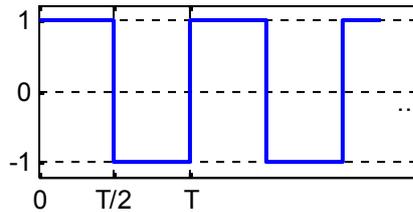
$$\text{Avec : } a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt \quad a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(n\check{S}_0 t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin(n\check{S}_0 t) dt$$

-Remarques:

$$\text{Si le signal est pair, } x(t) = x(-t), \quad b_n = 0, \quad a_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \cos(n\check{S}_0 t) dt$$

$$\text{Si le signal est impair, } x(t) = -x(-t), \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \sin(n\check{S}_0 t) dt$$

Exemple :



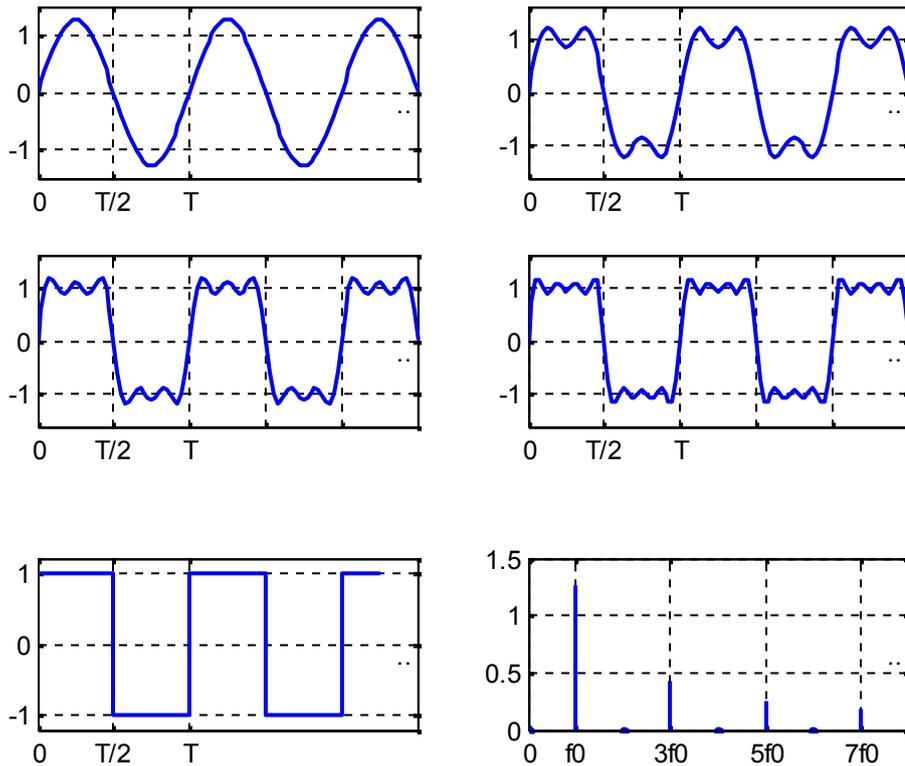
Le signal est centré, sa valeur moyenne est nulle, donc $a_0 = 0$. De même le signal est impair, donc $a_n = 0$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T_0} \left\{ \int_0^{T_0/2} 1 \sin(n\check{S}_0 t) dt - \int_{T_0/2}^{T_0} \sin(n\check{S}_0 t) dt \right\} = \frac{2}{T_0 n \check{S}_0} \left\{ [-\cos(n\check{S}_0 t)]_0^{T_0/2} + [\cos(n\check{S}_0 t)]_{T_0/2}^{T_0} \right\} \\ &= \frac{2}{T_0 n 2f / T_0} \left\{ \left[-\left(\cos\left(n \frac{2f T_0}{T_0} \frac{T_0}{2}\right) - 1 \right) \right] + \left[\cos\left(n \frac{2f T_0}{T_0} T_0\right) - \cos\left(n \frac{2f T_0}{T_0} \frac{T_0}{2}\right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{nf} \{ [1 - \cos(nf)] + [1 - \cos(nf)] \} \end{aligned}$$

Si n est pair, $b_n = 0$

Si n est impair, $b_n = \frac{4}{nf}$

$$\text{Donc : } x(t) = \frac{4}{f} \left\{ \sin(\check{S}_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\check{S}_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\check{S}_0 t) \dots \right\}$$



-Pour un signal où les a_n et les b_n sont non nuls, on a besoin de deux représentations fréquentielles, l'une en cosinus, l'autre en sinus. Pour regrouper les deux représentations en une seule, on utilise deux autres développements.

I.4.1.1 Représentation unilatérale :

A partir de l'équation $x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\check{S}_0 t) + b_n \sin(n\check{S}_0 t)$, on peut écrire :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos(n\check{S}_0 t) + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin(n\check{S}_0 t).$$

Posons : $X_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$, $Y_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \Rightarrow X_n^2 + Y_n^2 = 1$

En utilisant l'équation : $\cos^2(W_n) + \sin^2(W_n) = 1$ on peut mettre $X_n = \cos(W_n)$ et $Y_n = \sin(W_n)$.

Donc :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \{ \cos(W_n) \cos(n\check{S}_0 t) + \sin(W_n) \sin(n\check{S}_0 t) \}$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \{ \cos(n\check{S}_0 t - W_n) \}$$

Et comme $\frac{Y_n}{X_n} = \frac{b_n}{a_n} = \frac{\sin(W_n)}{\cos(W_n)} = \tan(W_n) \Rightarrow W_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$

Finalement : $x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\check{S}_0 t - W_n)$

Avec : $A_0 = a_0$, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\Rightarrow W_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$.

Le spectre de raies est représenté par deux figures, une pour le module et l'autre pour la phase du spectre. (Gasquet Witomski)

I.4.1.2 Représentation bilatérale :

En introduisant la notation complexe de $\cos(n\check{S}_0 t)$ et $\sin(n\check{S}_0 t)$, on peut écrire la série de Fourier sous la forme complexe.

$$\cos(n\check{S}_0 t) = \frac{e^{jn\check{S}_0 t} + e^{-jn\check{S}_0 t}}{2}, \quad \sin(n\check{S}_0 t) = \frac{e^{jn\check{S}_0 t} - e^{-jn\check{S}_0 t}}{2j}$$

En remplaçant ces deux termes dans l'expression de $x(t)$, on obtient :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{e^{jn\check{S}_0 t} + e^{-jn\check{S}_0 t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\check{S}_0 t} - e^{-jn\check{S}_0 t}}{2j}$$

Puisque $\frac{1}{j} = -j$, $\Rightarrow x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{e^{jn\check{S}_0 t} + e^{-jn\check{S}_0 t}}{2} + b_n \frac{-je^{jn\check{S}_0 t} + je^{-jn\check{S}_0 t}}{2}$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{jn\check{S}_0 t} \frac{a_n - jb_n}{2} + e^{-jn\check{S}_0 t} \frac{a_n + jb_n}{2}$$

Si on pose :

$$C_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, \quad C_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$$

On peut écrire :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{jn\check{S}_0 t} + C_{-n} e^{-jn\check{S}_0 t} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{jn\check{S}_0 t} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_{-n} e^{-jn\check{S}_0 t}$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{jn\check{S}_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n e^{jn\check{S}_0 t} = a_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} C_n e^{jn\check{S}_0 t}$$

Mais pour $n = 0$, $C_n e^{jn\check{S}_0 t} = C_0$. On peut écrire :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\check{S}_0 t} \text{ Avec } C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jn\check{S}_0 t} dt$$

I.4.1.3 Théorème de Parseval :

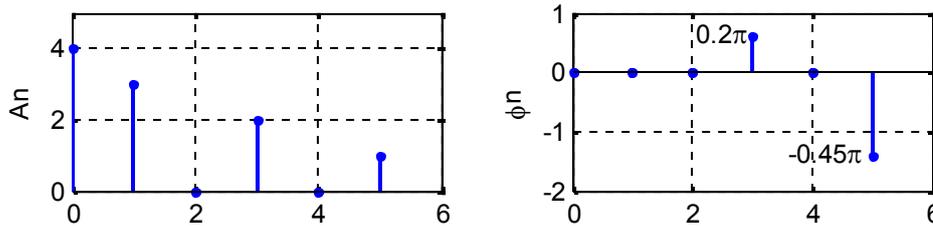
La puissance moyenne d'un signal périodique :

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \quad \text{I.9}$$

-Exemple :

Considérons les spectres unilatéraux d'un signal $x(t)$.

Trouver l'expression du signal $x(t)$, son spectre bilatéral et sa puissance moyenne.



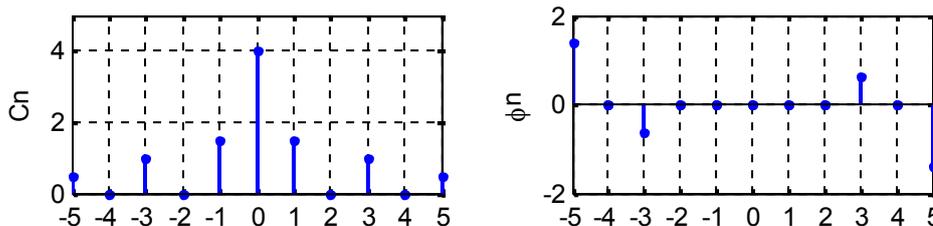
$$x(t) = 4 + 3\cos(\check{S}_0 t) + 2\cos(3\check{S}_0 t + 0.2f) + \cos(5\check{S}_0 t - 0.45f)$$

La forme complexe :

$$x(t) = 4 + 3 \frac{e^{j\check{S}_0 t} + e^{-j\check{S}_0 t}}{2} + 2 \frac{e^{j(3\check{S}_0 t + 0.2f)} + e^{-j(3\check{S}_0 t + 0.2f)}}{2} + \frac{e^{j(5\check{S}_0 t - 0.45f)} + e^{-j(5\check{S}_0 t - 0.45f)}}{2}$$

$$x(t) = 4 + 3 \frac{e^{j\check{S}_0 t}}{2} + e^{j0.2f} e^{j3\check{S}_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j0.45f} e^{j5\check{S}_0 t}$$

$$+ \frac{3e^{-j\check{S}_0 t}}{2} + e^{-j0.2f} e^{-j3\check{S}_0 t} + \frac{1}{2} e^{+j0.45f} e^{-j5\check{S}_0 t}$$



$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = 4^2 + 2(1.5^2 + 1^2 + 0.5^2) = 23V^2$$

I.4.2 Transformée de Fourier :**I.4.2.1 Définition :**

Comme on a vu dans la section précédente, tout signal périodique de période T_0 présente un spectre discret dont les raies sont espacées de f_0 . Plus la période est grande plus l'espace entre les raies est réduit. Quand la période tend vers l'infini, l'écart fréquentiel tend vers zéro et le spectre devient continu. (R. Dalmaso et P. Witomski. Masson, 1996.)

Lorsque le signal n'est pas périodique, on peut le supposer périodique à l'infini.

La transformée de Fourier d'un signal $x(t)$ est donnée par :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{I.10}$$

La transformée inverse est obtenue par :

$$x(t) = \int_{jf=-j\infty}^{jf=+j\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \quad \text{I.11}$$

I.4.2.2 Propriétés :**-Signaux réels :**

La transformée de Fourier d'un signal réel $x(t)$ est une fonction complexe $X(f)$ tel que :

$$X(f) = X_{re}(f) + jX_{im}(f) ;$$

Le module $|X(f)|$ est une fonction paire.

La phase $\angle X(f)$ est une fonction impaire.

-Parité :

Si $x(t)$ est une fonction paire, sa transformée de Fourier $X(f)$ possède une partie réelle paire et une partie imaginaire impaire.

-Linéarité :

Si $x(t)$ est composé de deux signaux pondérés, la transformée de Fourier du signal $x(t)$ est composée par les deux transformées pondérées des deux signaux.

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \Leftrightarrow X(f) = aX_1(f) + bX_2(f)$$

-Homothétie :

$$x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Ce phénomène peut être perçu lorsqu'on écoute un enregistrement avec une vitesse différente de l'originale. Si $a > 0$, la vitesse sera plus grande d'où un rétrécissement du signal et un étalement du spectre (le son de l'enregistrement devient plus aigu)

- Translation temporelle :

Un retard temporel provoque un déphasage qui s'ajoute à argument de la transformée de Fourier.

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

- Translation fréquentielle (modulation) :

La multiplication d'un signal avec un phaseur provoque un décalage fréquentiel du spectre.

$$x(t)e^{-j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f - f_0)$$

Cette propriété est très importante dans la transmission de plusieurs signaux sur un même support à condition que ces signaux soient à bande limitée

$$y(t) = \sum_{k=1}^N x_k(t)e^{j2\pi f_k t} \leftrightarrow \sum_{k=1}^N X_k(f - f_k)$$

-Dérivation :

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$$

-Convolution :

Une convolution dans le domaine temporel est équivalente à une multiplication dans le domaine fréquentiel.

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f) \cdot Y(f)$$

-Théorème de PARSEVAL (conservation de l'énergie) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

CHAPITRE II

TRANSFORMEE EN ONDELETTE

I.1 Notions de base et formalisme :

Ce chapitre est destiné à nous familiariser avec l'analyse « espace-échelle » par ondelettes. Nous commençons par préciser les notions d'espace, fréquence, échelle, résolution et période. Après avoir établi les limites des représentations spatiale et temporelle, nous introduisons les représentations « espace-fréquence » et « espace-échelle ». Nous poursuivons par le formalisme des ondelettes continues et un exemple d'application à l'étude des paramètres.

II .1.1 Cadre général :

Les recherches actuelles en géophysique et en géologie, visant à intégrer des données d'origines diverses impliquant des physiques ainsi que des échelles spatiales et temporelles différentes, nécessitent : (1) l'extraction, (2) la quantification et (3) la mise en relation d'informations obtenues à différentes échelles. Compte tenu de la nature non-stationnaire et/ou multi-échelles des signaux géophysiques, l'analyse conjointe « espace-échelle » apparaît comme l'outil privilégié pour remplir les fonctions d'extraction, de quantification et, même, de mise en relation d'information. On comprend ainsi l'engouement de plus en plus marqué pour ces techniques d'analyse multi-échelles locales, dont fait partie la transformée en ondelette.

La transformée en ondelette (TO) est apparue en géophysique au début des années 1980 pour l'analyse des signaux sismiques (Morlet et al., 1982a, b), et a été formalisée plus tard par Grossmann et Morlet (1984) et Goupillaud et al. (1984). Les ondelettes ont trouvé là une impulsion initiale fulgurante puis un terrain propice à un fantastique essor dans les communautés du traitement du signal et des mathématiques. C'est au sein de ces dernières communautés que des développements théoriques et appliqués majeurs ont eu lieu ces quinze dernières années. Des avancées significatives ont notamment été faite par Meyer (1992a, b), Mallat (1989a, b), Daubechies (1988, 1992), Chui (1992a, b), Wornell (1995) et Holschneider (1995). Ces avancées ont alors influencé d'autres domaines de recherche, dont en particulier, des applications pour la compréhension des processus géophysiques (Foufoula-Georgiou et Kumar, 1994). Ces interactions entre développement et application favorisent encore aujourd'hui l'évolution rapide de l'outil « ondelettes » et son intégration dans le formalisme plus large des « chirplets » (Mann et Haykin, 1992, 1995 ; Bultan, 1999).

Par la diversité de leurs potentialités, les transformées en ondelettes fascinent scientifiques, ingénieurs et mathématiciens. Pour illustration, nous renvoyons le lecteur au livre, édité par Meyer et Roques (1993), offrant un large panorama des applications des ondelettes. Pour une collection d'articles dédiés aux applications des ondelettes en

géophysique, on s'orientera plutôt vers le livre édité par Foufoula-Georgiou et Kumar (1994). D'autre part, on notera des contributions originales d'applications à l'analyse des données potentielles (Moreau et al. 1997 ; Sailhac, 1999) et géomagnétiques (Alexandrescu et al. 1995, 1996).

Les raisons de la polyvalence des ondelettes résident dans leurs propriétés intrinsèques. Ce sont ces propriétés, et les avantages qu'elles procurent par rapport aux méthodes classiques du traitement du signal ainsi que la mise en œuvre numérique de l'analyse multi-échelle par ondelettes continues, que nous allons présenter ci-après.

II.2 - Espace, fréquence, échelle, résolution et période :

Dans le contexte des analyses spectrales, telles que la Transformée de Fourier (TF), ou des analyses « espace-fréquence » et « espace-échelle », introduites un peu plus loin, de nombreux abus de langage conduisent souvent à confondre –sans gravité– les notions d'espace, de fréquence, d'échelle, de résolution et de période.

II.2.1 Espace :

Les outils du traitement du signal peuvent s'appliquer à des signaux de dimensions diverses. Le cas le plus simple est évidemment celui des données mono-dimensionnelles telles que des séries temporelles (sismogrammes, données climatiques ...) ou des diagraphies (données de puits, enregistrements sédimentaires ...). Dans ce cas, l'espace de travail est le temps ou la profondeur. En dimension supérieure, l'espace est alors l'espace géométrique de la dimension considérée. « Espace » est donc un terme général pouvant être le temps ou un espace géométrique de dimension donnée (z , (xx, xy) , (xx, xy, xz)). Dans cette première partie concernant les applications 1D, l'espace, noté x , représentera le temps ou la profondeur. En seconde partie, concernant les applications 2D, l'espace, x , sera le plan cartésien défini par (xx, xy) .

II.2.2 Fréquence, échelle, résolution et période :

La fréquence, n , est un attribut physique d'un processus ou d'un signal. Par exemple, les caractéristiques de propagation d'un milieu dépendent de la fréquence de l'onde qui le traverse. Alors que la lumière visible (4 10¹⁴ Hz (bleu) - 7.5 10¹⁴ Hz (rouge)) est incapable de traverser l'aluminium, les rayons X (~ 2.5 10¹⁷ Hz) le peuvent. A la différence de la fréquence, qui est une quantité physique bien définie et mesurée en cycles par seconde (ou un équivalent), différentes notions d'échelle existent selon le contexte.

Comme l'expliquent Bloschl et Sivapalan (1995) dans le contexte des applications géophysiques, l'échelle peut être vue selon deux manières : l'« échelle du processus » et l'«

échelle d'observation ». L'échelle du processus est l'échelle à laquelle le phénomène naturel existe et qui n'est donc pas sous notre contrôle. Typiquement, elle est caractérisée en termes de (1) durée de vie, (2) période, ou (3) longueur de corrélation du processus. L'échelle d'observation dépend, quant à elle, de la façon dont on décide de mesurer le phénomène. Ainsi, l'échelle d'observation est définie en termes (1) d'extension temporelle ou spatiale, et (2) de distance entre points d'échantillonnage. L'extension temporelle ou spatiale fixe le champ d'observation; la distance entre les points d'échantillonnage représente la résolution du signal.

Lors d'une étude multi-échelle par ondelettes, le terme "résolution" est malencontreusement aussi utilisé pour préciser l'échelle à laquelle est faite l'analyse. Ainsi suivant les auteurs, les termes échelle, facteur d'échelle et résolution seront synonymes. Bien que nous ne l'appliquons pas dans cette thèse nous proposons de réserver le terme résolution à la distance entre points d'échantillonnage. Le terme d'échelle fera alors référence à une certaine mesure de la largeur de l'ondelette. Plus l'échelle augmentera, plus la portion du signal analysé localement par l'ondelette sera grande et plus les détails seront lissés.

La période (inverse de la fréquence) est la période de Fourier correspondant aux oscillations de l'ondelette. Quelle que soit l'ondelette, il existe une relation un-pour-un entre échelle et période. Cette relation peut être déduite en calculant la TO d'une sinusoïde pure de fréquence (de Fourier) connue et en cherchant pour quelle échelle le spectre d'ondelette atteint son maximum. (Cohen, A. (1992).

II.3 Limites des représentations spatiales et fréquentielle :

Les ondelettes ont été introduites pour combler une lacune entre deux modes extrêmes de représentation du signal : la représentation spatiale d'une fonction par son graphe classique de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , ce qui correspond à une décomposition sur la base continue des distributions de Dirac :

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(u) \delta(x - u) du \quad \text{II.1}$$

et la représentation fréquentielle dans la base de Fourier :

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(v) e^{ivx} dv \quad \text{II.2}$$

La première représentation donne une information précise en espace (x): la valeur $f(x)$ indique l'intensité du signal à la position x . En revanche, l'information fréquentielle est nulle. La valeur en un point de f ne donne aucune information sur le « contenu fréquentiel » du signal f . A l'inverse, la représentation de Fourier donne une information très précise en

fréquence, mais ne donne aucune information spatiale. Pour prendre une analogie musicale, supposons que la courbe f représente un son. La représentation temporelle f permet de dire la localisation temporelle du signal, c'est-à-dire : ici on entend un son, là on n'entend rien, sans que l'on puisse savoir quelle est la hauteur du son, ou bien les notes qui composent un accord. En revanche, la représentation fréquentielle permet de dire : cet air de musique contient un la, un ré# et pas de sol, mais cette représentation ne permet pas de dire quand ces notes (de durée finie) sont jouées. (B. Torresani, 1995)

II.4 Transformée en ondelette continue :

Nous présentons ici la TO continue dans le domaine spatial et fréquentiel, puis, nous définissons son formalisme mathématique, ses propriétés et les restrictions qui y sont rattachées.

II.4.1 Introduction à la TO continue - domaine spatial :

La Transformée en Ondelette continue d'une fonction $f(x)$ est définie comme :

$$C_f(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \bar{\psi}_{a,b}(\tau) d\tau \quad \text{avec } a > 0 \quad \text{II.3}$$

Où

$$\psi_{a,b}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{\tau - b}{a}\right) \quad \text{II.4}$$

Représente une famille de fonctions, ψ_{ab} appelée ondelette analysante (ou ondelette fille ou tout simplement ondelette) dérivant toutes d'une fonction mère ψ . a est le paramètre d'échelle, b est le paramètre de position ou de translation et $\bar{\psi}_{ab}$ est le complexe conjugué de ψ_{ab} .

L'équation II.3 donne ce que l'on appelle le coefficient d'ondelette. Le coefficient d'ondelette (nombre à valeur généralement complexe) contient toutes les informations dont on a besoin pour conduire une analyse multi-échelle. Le calcul de ce coefficient et son comportement peuvent être représentés graphiquement grâce aux Fig. II.1 et II.2 (S. Mallat)

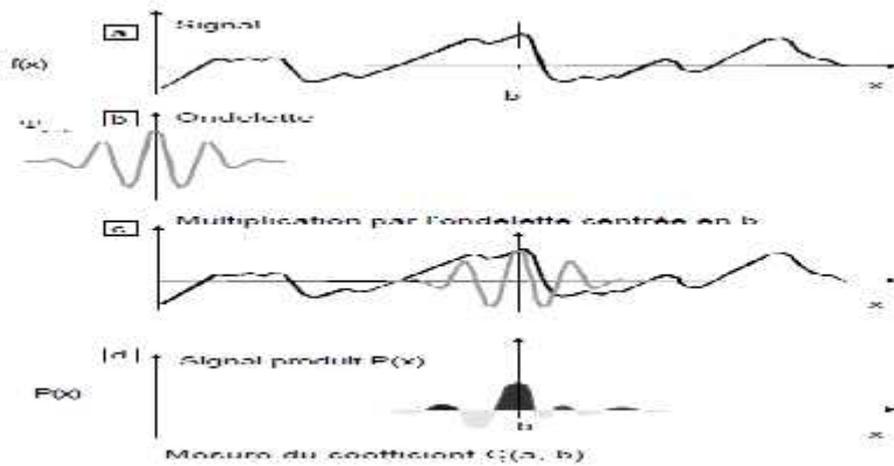


Figure II.1: Modèle graphique du calcul du coefficient d'ondelette $C_f(a, b)$.

(a) Soit $f(x)$ un signal analyser et (b) On prend une ondelette analysante (ici l'ondelette de Morlet $y(t)$ caractérisée par une "fréquence" $1/a$). (c) On centre l'ondelette sur une valeur b de l'espace et on multiplie le signal $f(x)$ par les valeurs de $y(x)$. (d) On calcule l'aire du signal produit $P(x)$ ainsi obtenu. L'aire est comptée positivement pour les parties de la courbe situées au dessus de l'axe des abscisses (gris foncé) et négativement dans le cas opposé (gris clair). Cette aire est égale au coefficient d'ondelette $C_f(a, b)$ correspondant à la valeur de la "fréquence" $1/a$ et de la position b (d'après Meyer et al., 1987).

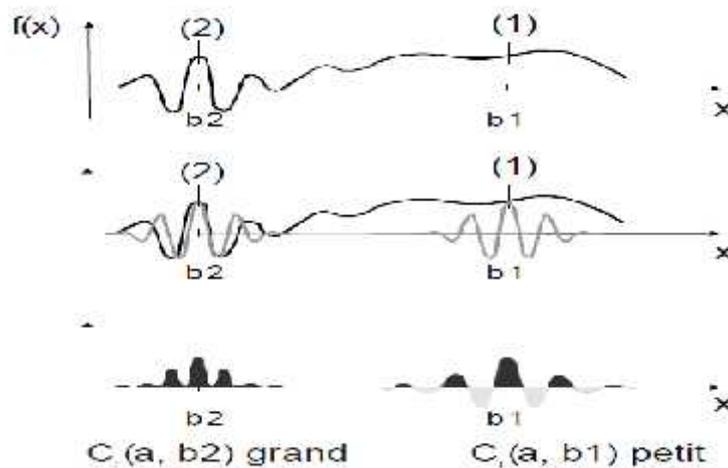


Figure II.2: Comportement du coefficient d'ondelette.

Le coefficient d'ondelette $C_f(a, b)$ d'un signal $f(x)$ dépend de la forme de celui-ci au voisinage de la position b . Quand $f(x)$ est à peu près constant (1) autour d'une position ($b = b_1$), le produit de $f(x)$ par $y(x)$ (d'aire nulle) a une aire très petite, donc $C_f(a, b_1)$ est très petit. Quand au contraire la portion de signal autour de $b = b_2$ est irrégulière (2) et que ses variations sont de "fréquence" comparable à celle de l'ondelette, l'aire du produit signal-ondelette, donc $C_f(a, b_2)$, est généralement beaucoup plus grande (d'après Meyer et al. 1987).

Donc :

Changer la valeur de a permet de dilater ($a > 1$) ou de contracter ($a < 1$) la fonction ψ_{ab} (propriété d'analyse multi-échelle); changer b autorise l'analyse de la fonction $f(x)$ au voisinage de différents points b (propriété d'analyse locale). Lorsque le paramètre d'échelle a croît, l'ondelette couvre une plus grande fraction du signal permettant d'extraire le comportement à long terme de $f(x)$. Au contraire, lorsque a diminue, la fraction du signal analysée diminue et rend possible l'étude des variations locales à hautes fréquences (Fig II.2).

Ainsi de par ses propriétés de dilatation-contraction et de translation, la transformée en ondelette est caractérisée dans le plan espace-échelle par une fenêtre dont la largeur diminue lorsqu'on se focalise sur les structures de petite échelle (haute fréquence) ou s'élargit lorsqu'on s'intéresse au comportement à grande échelle (basse fréquence). Cette capacité d'adaptation en fonction de l'échelle d'analyse lui a valu la dénomination de « microscope mathématique » dont le grossissement est donné par $1/a$ et dont l'optique est donnée par le choix de la fonction mère (Meyer et al. 1987).

A titre de résumé et d'illustration, la figure II.3 propose une comparaison des représentations temporelles, fréquentielle et «espace-échelle » par ondelettes de deux signaux synthétiques. Le premier signal (1) est la superposition de deux fréquences (1/83 HZ et 1/18 HZ) sur l'ensemble du domaine temporel étudié (Fig. II.3a) ; le second signal (2) comprend une unique basse fréquence (1/83 HZ) sur la première moitié du domaine temporel et une unique haute fréquence (1/18 Hz) sur la seconde moitié (Fig. II.3b). La figure II.3 illustre l'incapacité de la TF à caractériser des signaux évoluant dans l'espace. Bien que la TF nous informe qu'il y a deux fréquences majeures dans le signal, elle est incapable de faire une distinction entre ces deux signaux. Développant le signal sur une base dont les propriétés temps-fréquence sont adaptées à la structure locale du signal, les ondelettes sont capables d'évaluer le contenu fréquentiel du signal en fonction du temps.

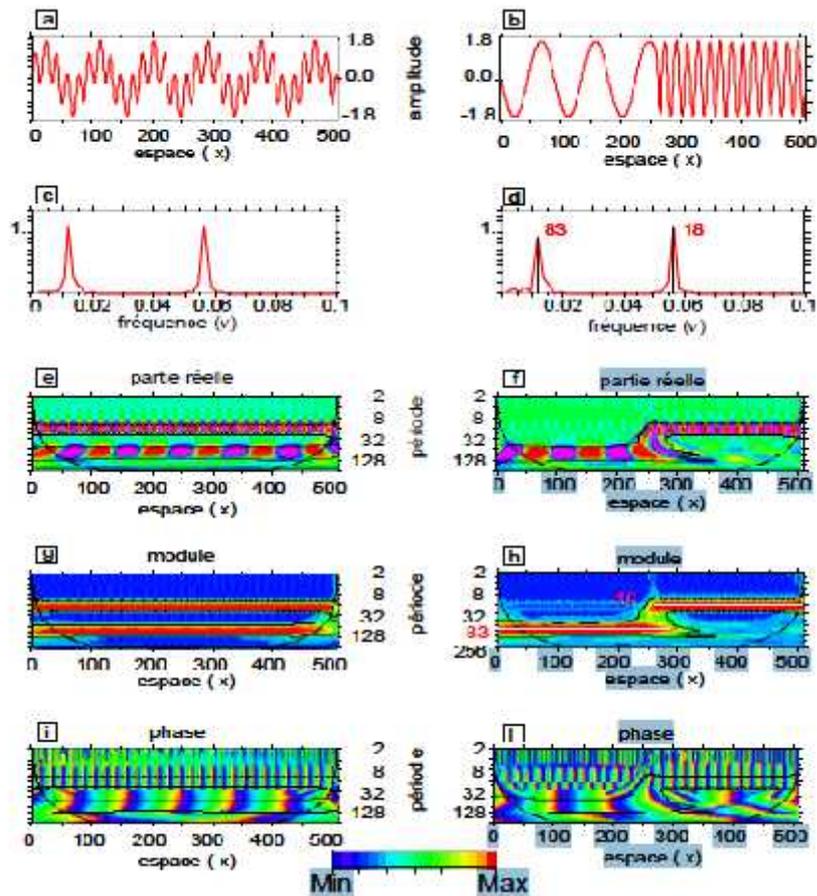


Figure II.3: Transformée de Fourier et Transformée en ondelette de deux signaux synthétiques.

Le premier signal (a) est construit en superposant deux périodes (18 et 83 unité d'espace arbitraire), et le second (b) est constitué des mêmes deux périodes, appliquée séparément sur chaque moitié du signal total. (c) et (d) montrent le spectre de Fourier (i.e. $|f(u)|^2$ en fonction de la fréquence) de (a) et (b) respectivement. (e) et (f) montrent la partie réelle, (g) et (h) montrent le module et (i) et (j) montrent la phase de la TO de (a) et (b) respectivement. L'ondelette utilisée, ici, est l'ondelette de Morlet. Noter (i) l'incapacité à distinguer les deux séries à partir de leur spectre de Fourier seul, (ii) la conservation de la polarité dans l'expression de la partie réelle de la TO, et (iii) la convergence des lignes de phases vers les singularités, malgré l'instabilité de celle-ci aux petites échelles (module de la TO très petit). La palette de couleurs va du bleu (valeur minimale) au rouge (valeur maximale). Les traits épais aux extrémités de la partie réelle, du module et de la phase marquent la limite où les effets de bord deviennent importants. Le trait fin souligne les zones statistiquement significatives

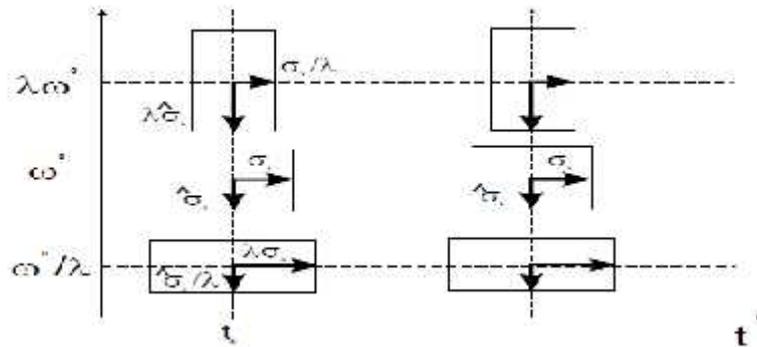


Figure II.4: Représentation temps-fréquence par ondelettes.

II.4.3 Formalisme :

La TO définie par l'équation II.10 est appelée transformée en ondelette continue car le paramètre d'échelle a et le paramètre de position b prennent des valeurs continues. Ce type de transformation fournit une représentation du signal contenant beaucoup *d'information redondantes*. En effet, la représentation du signal à l'échelle a et la position b peut être obtenue à partir de la TO continue de la même fonction à d'autres échelles et d'autres positions. La TO est une *transformation linéaire*. En d'autres termes, la TO de la somme de deux fonctions est la somme des TO de chaque signal individuel, et la TO d'une fonction vecteur est le vecteur dont les éléments sont les TO de chaque composante.

Comme la TF, la TO est inversible. La TO inverse est donnée par (Daubechies, 1992)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{K_\psi}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty a^{-2} C_f(a, b) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) da db \quad \text{II.6}$$

Où K_ψ est une constante qui dépend du choix de l'ondelette.

Connaissant la transformée en ondelette $C_f(a, b)$ du signal $f(x)$, l'équation II.6 donne la manière de reconstruire $f(x)$ par superposition des ondelettes $\psi_{a, b}(x)$

II.4.4 Propriétés, restrictions et fonctions mère :

Le choix de la fonction mère $\Psi(x)$ n'est ni unique ni arbitraire. La fonction $\Psi(x)$ doit répondre à certaines conditions. La fonction $\Psi(x)$ est prise de telle sorte que son énergie vaille 1 (i.e. $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1$) afin qu'elle ait (1) un support *compact* ou une décroissance suffisamment rapide pour être suffisamment bien localisée dans l'espace, et (2) une *moyenne nulle*

(i.e. $\int \Psi(x) dx = 0$) bien que les moments d'ordre supérieur (k) puissent aussi être nuls, c'est-à-dire que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \Psi(x) dx = 0 \text{ avec } k = 0, 1 \dots \quad \text{II.7}$$

La condition de «moyenne nulle» est appelée «*condition d'admissibilité*» de l'ondelette. $\Psi(x)$ n'est une ondelette que si elle répond aux deux conditions énoncées ci-dessus.

On remarque que si la TF de Ψ est régulière, elle doit nécessairement s'annuler en 0, ce qui exclut d'office la fonction de Gabor que nous avons indiquée ci-dessus. En pratique, on considérera que la fonction de Gabor satisfait presque la condition d'admissibilité, dans la mesure où sa TF prend une valeur très petite (mais non nulle) en 0. La seconde propriété assure que $\Psi(x)$ « ondule » (comme une onde, une vaguelette, d'où la terminologie anglo-saxonne de wavelet) et la première assure, contrairement à la TF, que ces oscillations s'atténuent rapidement.

Le facteur de normalisation $1/\sqrt{a}$ (Eq. II.4) est choisi de sorte que $\psi_{a,b}(x)$ ait la même énergie pour toutes les échelles a . La TO est isométrique.

Il est évident que les deux conditions précédentes ouvrent la possibilité d'utiliser différentes fonctions mères, $\Psi(x)$. Cependant le choix est guidé par diverses considérations incluant, en particulier, une base physique ou à défaut la ressemblance entre le signal analysé et la famille d'ondelette choisie.

Deux fonctions particulièrement populaires pour la TO sont le chapeau mexicain (Dérivée seconde d'une gaussienne (DOG, $m=2$) et ses dérivées d'ordre supérieur, et l'ondelette de Morlet (voir Daubechies, 1992; Fig. 2.5). Une autre ondelette, baptisée suivant les auteurs ondelette de Paul ou ondelette de Cauchy, est particulièrement adaptée à l'analyse des données dérivant de champs potentiels (Fig. II.5b; Moreau, 1995; Sailhac, 1999). Du fait de leur spectre en fréquence dissymétrique, l'ondelette de Morlet et l'ondelette de Paul (Cauchy) sont particulièrement attrayantes quand on a besoin d'éliminer les interférences entre les fréquences positives et négatives. D'autre part, ces dernières ondelettes, à valeur complexe (Figure II.5), permettent d'extraire des informations sur l'amplitude et la phase du processus analysé (Torrence et Compo, 1998). Les propriétés de ces ondelettes sont résumées dans le tableau suivant.

Nom	$\psi_0(\eta)$	$\tilde{\psi}_0(s\omega)$	ρ	ν
Morlet (ω_0)	$\pi^{-1/4} e^{i\omega_0\eta} e^{-\eta^2/2}$	$\pi^{-1/4} H(\omega) e^{-(i\omega - \omega_0)^2/2}$	$\sqrt{2}a$	$\frac{4\pi a}{\omega_c + \sqrt{2 + \omega_0^2}}$
Paul (m)	$\frac{2^m i^m m!}{\sqrt{\pi} (2m)!} (1 - i\eta)^{-(m+1)}$	$\frac{2^m}{\sqrt{m(2m-1)!}} H(\omega) (a\omega)^m e^{-im}$	$a / \sqrt{2}$	$\frac{4\pi a}{2m + 1}$
DOG (m)	$\frac{(-1)^{m+1}}{\sqrt{\Gamma(m+1/2)}} \frac{d^m}{d\eta^m} (e^{-\eta^2/2})$	$\frac{i^m}{\sqrt{\Gamma(m+1/2)}} (a\omega)^m e^{-i(a\omega)^2/2}$	$\sqrt{2}a$	$\frac{2\pi a}{\sqrt{m+1/2}}$

Tableau II.1: Fonctions mères et leurs propriétés. Les constantes, dans l'expression de $\omega_0(\eta)$ et $\tilde{\psi}_0(s\omega)$

, assurent une énergie unité. η est un paramètre d'espace sans dimension. (ρ) est une mesure des effets de bord et (ν) est la longueur d'onde de Fourier associée à l'échelle a . $H(\omega)$: fonction Heaviside, $H(\omega) =$

1 si $\omega > 0$, $H(\omega) = 0$ autrement; Γ : Fonction Gamma, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$; $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$;

DOG: dérivée d'une Gaussienne, $m = 2$ donne le chapeau mexicain (d'après Torrence et Compo, 1998).

Dans la suite de ce travail, pour les applications 1D, nous choisirons l'ondelette de Morlet pour l'étude des signaux climatiques et paléomagnétiques, et l'ondelette de Paul pour le pointé automatique des phases sismiques à cause de leur similitude de forme avec le signal analysé. Nous utiliserons le chapeau mexicain anisotrope pour les applications 2D du fait de sa grande souplesse pour détecter les anisotropies de formes et les singularités indépendamment de leur orientation.

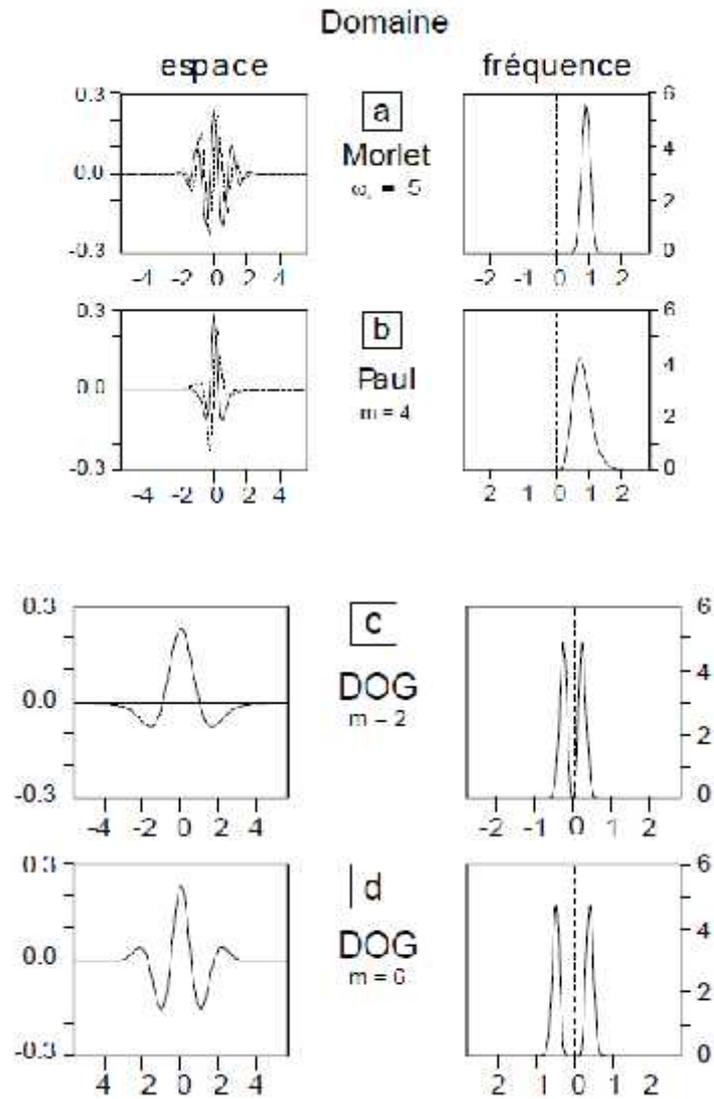


Figure II.5 : Fonctions mère.

Les graphes sur la gauche donnent la partie réelle (trait plein) et imaginaire (trait pointillé) pour les ondelettes de (a) Morlet, (b) Paul, (c) DOG ($m = 2$) et (d) DOG ($m = 6$). Les graphes de droite donne les ondelettes correspondantes dans le domaine fréquentiel (d'après Torrence et Compo, 1998).

CHAPITRE III

***TECHNIQUES D'INTERPRETATION
DES DONNEES GEOMAGNETIQUES***

III.1 –Introduction :

Nous utilisons dans cette partie la Transformée en Ondelettes Continue (TOC) directionnelle 2D pour la recherche des contacts géologiques à partir des données aéromagnétiques. Nous commençons le chapitre par un rappel des techniques classiques d'interprétation des champs de potentiels, puis nous appliquons la technique proposée sur un modèle synthétique composé d'un cylindre et d'un prisme pour montrer la robustesse de cette technique. L'effet du bruit est discuté par la suite. Nous terminons le chapitre par une application a des données aéromagnétiques enregistrées au-dessus de l'In-Ouzzal, situé dans le Hoggar occidental.

Soit \vec{T}_{OBS} le vecteur du champ magnétique mesuré en un point P quelconque de l'espace. Est \vec{T}_{Normal} le vecteur champ magnétique normal ou régional. L'anomalie du champ total est calculée par la relation suivante (Le Mouël, 1969) :

$$\Delta T = |\vec{T}_{OBS} - \vec{T}_{Normal}| \quad \text{III.1}$$

Si on désigne par \vec{T}_{Anom} le vecteur champ anomal dû à une source perturbatrice, alors on aura la relation suivante (fig. III.1) :

$$\vec{T}_{Anom} = \vec{T}_{OBS} - \vec{T}_{Normal} \quad \text{III.2}$$

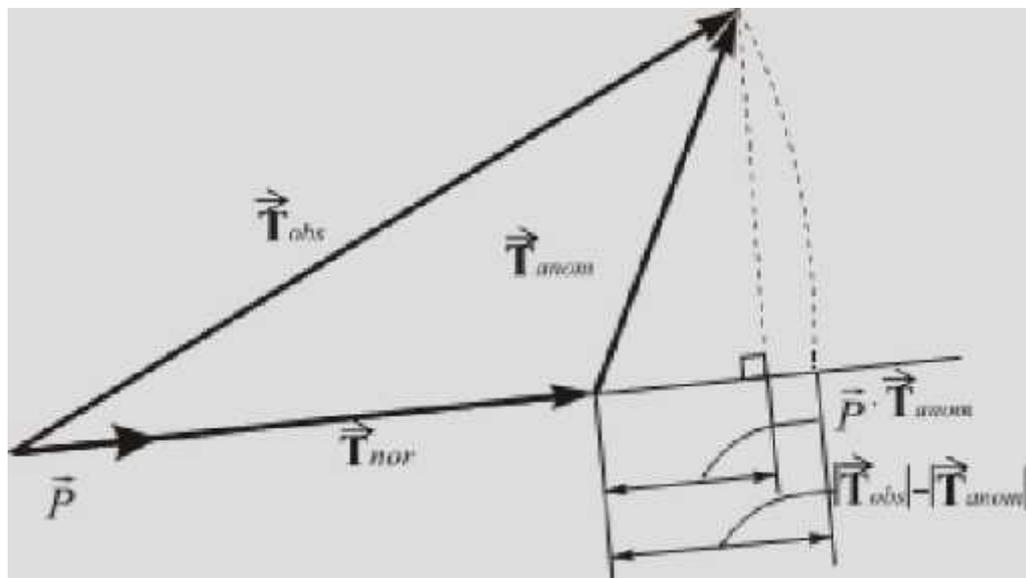


Figure III.1 : Représentation vectorielle du vecteur champ anomal.

Le vecteur \vec{T}_{OBS} est la Somme vectorielle du champ régional \vec{T}_{Normal} et du champ anomal \vec{T}_{Anom} . P étant le vecteur unitaire porté par le vecteur champ régional (d'après Bournas, 2001)

D'après la figure III.1 ; que l'anomalie du champ total n'équivaut pas l'intensité du champ anomal

$$\Delta T \neq |\Delta \vec{T}_{Anom}|$$

Afin de pouvoir faire les approximations nécessaires pour obtenir $\Delta \vec{T}_{Anom}$, on admet que les hypothèses suivantes sont bien considérées :

-L'intensité du champ d'anomalie est petite devant celle du champ normal. Cette condition est généralement vérifiée pour les anomalies crustales.

-Le vecteur champ normal est uniforme dans le domaine d'étude. Ceci est valable dans le cas d'un espace de dimension caractéristique assez restreinte pour être considéré comme une surface plane.

Alors l'approximation suivante (Blakely, 1995 ; Hamoudi et al., 2011) devient valide :

$$\Delta T = |\vec{T}_{OBS} - \vec{T}_{Normal}| \approx \vec{P} \cdot \vec{T}_{Anom} \quad \text{III.3}$$

Cette relation montre que l'anomalie du champ magnétique est représentée approximativement par la projection du vecteur champ anomal sur la direction du champ normal.

III.2 Méthodes classiques d'interprétation :

III.2.1 Prolongement vertical et dérivation :

L'amplitude et la largeur de l'anomalie sont Généralement fonctions de l'altitude à laquelle on été collectées les mesures. La forme de l'anomalie est sa convexité ne changent pas avec l'altitude. La transformation qui permet de passer de l'anomalie à l'altitude $Z > 0$ à celle que l'on aurait à l'altitude $Z = 0$ est un lissage. Cela revient, autrement dit, à appliquer un filtre passe bas . La conservation de certaines propriétés comme celles liées à sa taille font du filtre un outil presque incontournable des champs du potentiel.

Ce filtre passe-bas n'est pas quelconque, mais prend la forme de la composante verticale du champ gravimétrique d'une source ponctuelle (équation III.4). On peut le montrer par différents moyens, par prolongement analytique par exemple ou par la résolution de l'équation de Laplace (Asfirane, 1994). Nous renvoyons le lecteur à la démonstration présentée dans (Blakely, 1995) utilisant le cadre le plus général quand à la géométrie du problème, qui découle de la troisième identité de Green, « ou formule de représentation ».

Dans ce théorème, il est stipulé que la valeur d'une fonction harmonique U peut être obtenue en tout point dans sa région d'analyticité R d'après seulement son comportement sur le contour S de R et celui de la dérivé normale à ce contour : si on choisit un contour limité en

dessous par un plan où le potentiel $U(x,y,0)=U_0(x,y)$ est connu, et s'éloignant à l'infini au dessus (où $U=0$), on peut démontrer que la fonction ($U(x,y, \alpha>0)$) vérifie l'équation suivante :

$$U(x,y,\alpha>0) = \frac{\alpha}{2\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' \frac{U(x',y',0)}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + \alpha^2]^{3/2}} \tag{III.4}$$

Cette intégrale est un produit de convolution de U_0 avec l'opérateur de prolongement vers le haut P_α . Ce dernier est le dilaté du noyau de Poisson P_1 .

$$P_\alpha(x,y) = \frac{1}{\alpha^2} P_1\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}\right) \quad \text{Où} \quad P_1(x,y) = \frac{1}{2\Pi} \frac{1}{[x^2 + y^2 + 1]^{3/2}} \tag{III.5}$$

Dans le domaine de Fourier, l'expression du gain de l'opérateur de prolongement vers le haut est plus simple

$$\hat{P}_\alpha(k) = e^{-\alpha|k|}$$

Où k est soit le vecteur d'onde (2D) soit le nombre d'onde $k=2\pi$ u (1D). Les expressions dans le domaine de Fourier permettent simplement d'obtenir l'opérateur de dérivation verticale vers le bas

$$OD_z(k) = |k|$$

Par combinaisons linéaires avec les dérivées horizontales OD_x et OD_y , on définit l'opérateur de dérivation oblique OD_n permettant une dérivation dans une direction quelconque

$$n = \alpha\hat{x} + \beta\hat{y} + \gamma\hat{z} \quad (\text{avec les vecteurs unitaires } \hat{x} \text{ dirigé vers nord, } \hat{y} \text{ vers l'est, } \hat{z} \text{ vers le bas et}$$

$$\rho = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} / 2\Pi = \sqrt{u^2 + v^2} ;$$

$$OD(k) = i(\alpha k_x + \beta k_y) + \gamma|k| = 2\Pi((iu + \beta v) + \gamma\rho) \tag{III.6}$$

Ces expressions concernent la transformation des données depuis un plan horizontal.

Mais il arrive que les données ne soient pas acquises sur un plan : c'est le cas par exemple de mesures dans une région à topographie accidentée. De nombreuses références décrivent les stratégies adoptées pour traiter la question. Elles vont du développement en série de Taylor (Pilkington et Roest, 1992) à la résolution d'un problème inverse (Ducruix et al, 1974) (Huestis et Parker, 1979). Une autre approche est celle de sources équivalentes (Bhattacharyya et Chan, 1977; Hansen et Miyazaki, 1984; Pedersen, 1989). Elle consiste à

calculer d'abord une source surfacique quelconque située plus haut. Cette dernière méthode a été appliquée à la recompilation de la carte aéromagnétique de l'Algérie du nord (Asfirane, 1994) à l'aide de l'algorithme mis au point par Ciminale et Loddo (1989).

III.2.2 Réduction au pôle et à l'équateur :

Généralement l'anomalie gravimétrique est à l'aplomb de la source: c'est le principe d'interprétation le plus intuitif, et on voudrait qu'il soit généralisé à tout type de champ de potentiel. Cependant, l'anomalie magnétique présente une oscillation non symétrique dont le maximum (ou le minimum d'ailleurs) n'est pas du tout à l'aplomb de la source. L'origine de cette dissymétrie est l'inclinaison de l'aimantation qui revient à calculer une dérivée oblique d'un champ pseudo-gravimétrique (équation III.7). L'anomalie du champ total est en fait le résultat de deux dérivations obliques successives du «potentiel newtonien», une première fois dans la direction de l'aimantation (donnant le potentiel magnétique) caractérisée par le vecteur unitaire :

$$n = (\alpha, \beta, \gamma)$$

Et une seconde fois dans celle du champ normal, de valeur unitaire :

$$n' = (\alpha', \beta', \gamma').$$

Il existe néanmoins des lieux à la Terre où l'anomalie magnétique due à une aimantation induite se trouve à l'aplomb des sources. Cela est le cas des pôles, où les deux vecteurs, champ normal et aimantation sont verticaux. Le cas de l'équateur où les deux vecteurs sont horizontaux est également un cas simple à traiter. Les deux opérateurs de réduction permettent de transformer le champ pour le ramener dans une de ces deux situations idéales pour l'interprétation. La réduction au pôle O_p intègre le champ suivant les deux directions n et n' et le dérive deux fois verticalement (LeMouél, 1969). La réduction à l'équateur O_s intègre le champ de potentiel suivant les deux directions n et n' et le dérive horizontalement (Gibert et Galdeano, 1985).

L'écriture de ces opérateurs est liée à celle de l'opérateur de dérivation oblique :

$$\hat{O}_p = \frac{OD^2}{OD_n OD_{n'}}$$

III.7

En pratique, les opérateurs de réduction au pôle ou à l'équateur sont limités pour deux raisons. La première est la méconnaissance de la direction de l'aimantation n même si celle du champ normal est connue. Cependant, même si n est connue, elle peut introduire des instabilités de l'opérateur de réduction si la direction du champ normal n'est pas uniforme.

Néanmoins, on se place souvent dans l'hypothèse où on suppose que l'aimantation à la même direction que le champ actuel (ou presque) : $n' = n$ comme cela est le souvent le cas dans les cas d'aimantation induite. On pourra alors interpréter la polarité de l'aimantation suivant le signe de l'anomalie réduite. La technique la plus répandue pour traiter ce problème est celle des sources équivalentes (Arkani-Hamed, 1988). La deuxième limite liée à la combinaison d'intégrations directionnelles (dénominateur de III.7) et dérivations directionnelles. Les opérateurs de réduction sont instables quand ces directions diffèrent de façon importante : l'opérateur O_P appliqué sur une anomalie proche de l'équateur atténue le signal de ses composantes principales (la direction horizontale) et amplifie le faible signal (et le bruit) dans la direction verticale. Réciproquement, l'opérateur O_{Pest} est instable si n' et n sont proches de la verticale.

La transformation du champ d'anomalies doit donc être réalisée avec un opérateur stable : un levé proche de l'équateur magnétique pourra être réduit à l'équateur et non au pôle (Gibert and Galdeano, 1985), ou bien il faudra tenter un filtrage du bruit (Hansen et Pawlowski, 1989) (Keating et Zerbo, 1996).

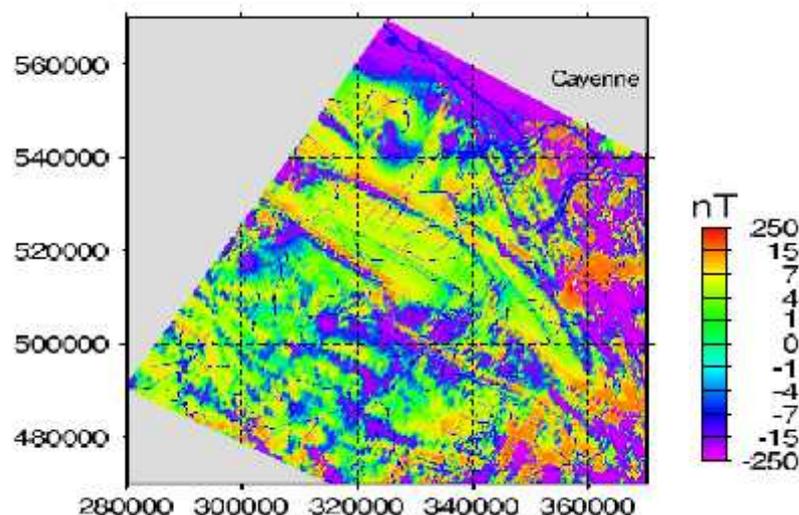


Figure III.2 : Carte d'anomalie magnétique réduite au pôle dans le Nord de la Guyane

III.2.3 Signal analytique :

Nous venons de voir que la réduction au pôle pouvait permettre de transformer une anomalie magnétique en une forme dont l'extremum de l'amplitude se trouve à l'aplomb de la source. Il s'agit d'une transformation intéressante dans les zones de forte inclinaison, où l'orientation de l'aimantation peut être assimilée à celle du champ principal en ce lieu, lequel est bien connu (Bournas, 1995). En cas de rémanence importante dans une autre direction cette méthode est limitée car l'orientation de l'aimantation peut être inconnue. Il existe une autre transformation conduisant également à un signal dont l'amplitude maximale se trouve à

l'aplomb des sources mais n'utilisant pas cette correction d'orientation il s'agit du signal analytique (Nabighian, 1984).

Cette méthode consiste à remplacer l'analyse du signal dissymétrique par son enveloppe symétrique. Le fondement réside dans l'analyticité des champs de potentiels.

Si au lieu de considérer l'anomalie du champ total seule on lui ajoute sa transformée de Hilbert pour sa partie imaginaire, nous obtenons alors une fonction complexe dont le module est symétrique et dont seule la phase rend compte de l'orientation de l'aimantation et du champ principal.

Classiquement, le signal analytique du champ de potentiel Φ est défini par sa dérivée (Nabighian, 1972; 1974). Pour le profil $\Phi(x, z)$ observé à l'altitude $a=-z$, le signal analytique associé $A_\Phi(x, z)$ est défini par la dérivée horizontale $\partial\Phi / \partial x$ pour la partie réelle, à laquelle on ajoute la dérivée verticale vers le bas $\partial\Phi / \partial z$ pour la partie imaginaire. Seul le module A_Φ est généralement utilisé car il permet d'obtenir l'enveloppe du signal, et on lui donne souvent le nom de signal analytique.

$$\tilde{A}_\Phi(x, z) = \partial\Phi / \partial x + i\partial\Phi / \partial z \tag{III.8}$$

$$A_\Phi(x, z) = \sqrt{(\partial\Phi / \partial x)^2 + (\partial\Phi / \partial z)^2} \tag{III.9}$$

Avec cette définition, \tilde{A}_Φ est bien un signal analytique :

$$\tilde{A}_\Phi(x, z) = (1 + iH) \frac{\partial\Phi(x, z)}{\partial x} = i(1 + iH) \frac{\partial\Phi(x, z)}{\partial z} \tag{III.10}$$

Ces expressions viennent de la propriété que possède un champ de potentiel que ses dérivées verticale et horizontale soient conjuguées de Hilbert l'une de l'autre:

$$\partial D_x = -H[\partial D_z] \tag{III.11}$$

$$\partial D_z = -H[\partial D_x] \tag{III.12}$$

Les travaux de Nabighian (1972) montrent que le module A_Φ est utilisé pour déterminer l'aplomb des sources et estimer leur profondeur d'après un ajustement de la largeur de chaque anomalie avec la profondeur d'un filon vertical d'extension infinie.

La phase : $\varphi = \text{Arg}(\tilde{A}_\Phi)$ n'a commencé à être utilisée que récemment, depuis les travaux de Smith et al (1998) montrant que sa dérivée horizontale $\partial\phi(x, z) / \partial x$ est elle aussi associée à la profondeur du toit des filons verticaux d'extension infinie.

Cette formulation à 1D se généralise pour des cartes : (1) soit simplement en ajoutant la deuxième composante de dérivation horizontale $\partial\phi / \partial y$ à la partie réelle dans l'équation (3.3), (2) soit d'une façon qui revient au même en généralisant la transformée de Hilbert.

D'après son expression dans le domaine spectral (Nabighian, 1984 ; Roest et al, 1992). La formule $-isgn(u)=-iu / |u|$ Où u est la fréquence, est remplacée par

$-isgn(u)=-ik / |k|$ ou $k = k_x\vec{x} + k_y\vec{y}$ est le vecteur d'onde de la transformée de Fourier 2D dont les composantes sont les réels k_x et k_y , et $K= |k|$ est son module. Ainsi la transformée de Hilbert à 2D peut s'écrire sous forme d'un opérateur vectoriel.

$$H=H_1\vec{x}+H_2\vec{y} \quad \text{III.13}$$

Où H_1 et H_2 sont les composantes de la Transformation de Hilbert, respectivement dans les directions \vec{x} et \vec{y} . Leurs expressions dans le domaine de Fourier k_x, k_y et dans le domaine spatial (x, y) s'écrivent :

$$\begin{cases} H_1(k_x, k_y) = ik_x / \rho \\ H_2(k_x, k_y) = -ik_y / \rho \end{cases} \text{ et } \begin{cases} H_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} x(x^2 + y^2)^{-3/2} \\ H_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} y(x^2 + y^2)^{-3/2} \end{cases} \quad \text{III.14}$$

Nabighian (1984) a montré que cette formulation permet de retrouver des relations entre la dérivée horizontale et la dérivée verticale comme transformées de Hilbert l'une de l'autre:

$$OD_x\vec{x}+OD_y\vec{y} = -H(OD_z\hat{z}) \quad \text{III.15}$$

$$OD_z = H (OD_x\vec{x}+ OD_y\vec{y}) \quad \text{III.16}$$

Le signal analytique 3D introduit par Nabighian (1984) s'écrit alors à l'aide du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \vec{A}_\phi &= (\vec{x} + \vec{y} + iH). (OD_x\vec{x}+OD_y\vec{y}) \quad \text{III.17} \\ &= i(\hat{z} + iH). (OD_z\hat{z})\phi \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} + i\frac{\partial\phi}{\partial z} \end{aligned}$$

Le signal analytique 3D, introduit plus tard par Roest et al. (1992) afin d'avoir une expression simple de sa norme, est le vecteur obtenu sans le produit scalaire.

$$\begin{aligned} \vec{A}_\phi &= i(\hat{z} + iH) OD_z\phi \quad \text{III.18} \\ &= \vec{x} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \vec{y} \frac{\partial\phi}{\partial y} + i\hat{z} \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{aligned}$$

Il a été généralisé par la suite à des ordres de dérivation plus élevés, permettant des interprétations par comparaison des largeurs des anomalies du signal analytique obtenu pour différents ordres n entiers (Hsu et al, 1996 ; 1998).

$$\vec{A}_{n,\phi} = \left(\vec{x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + i \hat{z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \partial^n \phi / \partial^n \quad \text{III.19}$$

La recherche des maxima du module du signal analytique permet simplement de localiser les sources. De plus, la comparaison avec des modèles synthétiques (classiquement un filon d'extension infinie) permet d'estimer les profondeurs des sources. Malgré ses propriétés intéressantes, la difficulté inhérente à *cette* méthode est l'amplification du bruit par l'opérateur de dérivation. Son application nécessite donc des filtrages préliminaires, sans lesquels le bruit des données produit de nombreux maxima locaux qui peuvent limiter la méthode. Nous verrons qu'un filtrage naturel est obtenu grâce au prolongement vers le haut par la technique de la Transformée en Ondelettes.

CHAPITRE I

***ANALYSE DES DONNEES
GEO.MAGNETIQUES POTENTIELLES DE
LA REGION D'IN OUZZAL PAR LA
TRANSFORMEE EN ONDELETTES
DIRECTIONNELLES***

IV.1 Introduction :

La théorie du potentiel se prête parfaitement à une analyse multi-échelle par les ondelettes. En effet, le calcul des maxima du module de la transformée en ondelettes continue à une échelle a donnée avec le choix d'une ondelette appropriée obtenu par dérivation du noyau de Poisson (Fedi et Cascone, 1998 ; Ouadfeul, 2012), est équivalent au calcul des maxima de l'amplitude du gradient horizontal du champ de potentiel prolongé à l'altitude $Z=a$ (Ouadfeul et al., 2012d).

L'ensemble des maxima du module de la TOC donne les différents contacts géologiques à plusieurs profondeurs. (Khatach et al, 2006).

IV.2 Transformée en ondelettes continue directionnelle :

La Transformée en Ondelettes Continue Directionnelle (TOCD) a été introduite par Murenzi(1989). La décomposition en ondelettes d'une fonction donnée $f \in L^2(\mathbb{R})$ avec une ondelette d'analyse $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ est défini pour tout $a>0, b \in \mathbb{R}^2, \Gamma \in [0, 2\pi]$ par :

$$W_g f(a, b, \Gamma) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x) \frac{1}{a} g(r_{-\Gamma} \left(\frac{x-b}{a} \right)) dx \quad \text{IV.1}$$

Où $r_{-\Gamma}$ est la rotation avec un angle $(-\Gamma)$.

Un exemple de transformée en ondelettes directionnelle est le gradient de la gaussienne ∇G . La convolution d'une image avec ∇G équivaut à l'analyse du gradient du module de la transformée en ondelettes continue. Canny (Arneodo et al, 2003) a introduit un autre outil pour la détection de contours. Après la convolution d'une image avec une gaussienne, nous calculons le gradient pour chercher l'ensemble des points qui correspondent à la forte variation de l'intensité de transformée en ondelettes continue (Arneodo et al, 2003). L'utilisation du gradient de la gaussienne comme ondelette d'analyse a été introduit par Mallat et Hwang (1992). La transformée en ondelettes d'une fonction f , avec une ondelette analysante $g = \nabla G$ est un vecteur, défini pour tout $a > 0, b \in \mathbb{R}^2$ par :

$$W_{\nabla G} f(a, b) = \iint_{R^2} f(x) \frac{1}{a} \nabla G\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \quad \text{IV.2}$$

Si nous choisissons $g = \frac{\partial G}{\partial x}$, nous avons la relation suivante:

$$\frac{\partial}{\partial x} W_{\nabla G} f(a, b, r) = u_r \cdot W\{\nabla G\} f(a, b) \quad \text{IV.3}$$

Où u_r est le vecteur unitaire dans la direction $r : u_r = (\cos(r), \sin(r))$

"." Est le produit scalaire euclidien dans R^2 .

Dans ce travail, nous utilisons un nouveau type d'ondelette directionnelle basée sur le noyau de Poisson. Le module de la transformée en ondelettes directionnelle d'un champ F à l'échelle a est équivalente à un prolongement vers le haut à l'altitude $Z=a$.

Le positionnement de maxima du module de la transformée en ondelettes continue à cette échelle est équivalente aux maxima du gradient horizontal du champ de potentiel prolongé à l'altitude $Z=a$.

VI.3 Application aux données magnétiques de la région d'In Ouzzal :

Nous appliquons le formalisme détaillé ci-dessus aux données aéromagnétiques collectées lors du levé aéroporté au-dessus d'In Ouzzal (Hoggar Occidental). Nous commencerons par un bref aperçu géologique de ce massif.

IV.3.1 Géologie régionale :

Le Hoggar est la principale composante du bouclier Touareg et fait partie de la chaîne panafricaine transsaharienne (Cahen et al. 1984). Il est subdivisé en trois principaux domaines allongés N-S et présentant des caractéristiques structurales et lithologiques différentes (figure VI.1): le Hoggar occidental (chaîne Pharusienne), le Hoggar central polycyclique et le Hoggar oriental. Ces trois domaines sont respectivement séparés par des accidents majeurs subméridiens : l'accident $4^{\circ}50'$ et l'accident $8^{\circ}30'$. Une telle disposition de ces domaines résulte d'une compression E-W extrême durant le pan-africain (600 Ma) du bouclier Touareg par deux plaques rigides : le craton ouest africain et le craton est-africain (Bertrand et Caby, 1978, Black et al., 1979).

Le Hoggar occidental (chaîne Pharusienne) est limité à l'ouest par le craton ouest-africain à noyaux d'âge Archéen. A l'est, il est séparé du Hoggar central par l'accident subméridien $4^{\circ}50'$. Deux rameaux y sont distingués (occidental et central, Caby, 1970 ; Black, 1978) , séparés par le môle granulitique d'In-Ouzzal, lequel est constitué de formations archéennes, structurées et métamorphisées à l'Eburnéen.

Chapitre IV : Analyse des données géomagnétiques potentielles de la région d'In Ouzal par la transformée en ondelettes directionnelles

Le Hoggar central représente la partie médiane du bouclier, et est limité à l'est et à l'ouest par deux gigantesques accidents décrochant: $8^{\circ}30'$ et $4^{\circ}50'$. Par opposition au domaine précédent, le Hoggar central comporte très peu de matériel sédimentaire ou volcanique d'âge Protérozoïque supérieur ne formant que de sillons étroits allongés N-S (Bertrand et al., 1984).

Le Hoggar oriental est un domaine situé à l'est du cisaillement $8^{\circ}30'$ et comporte le socle de l'est : domaine Tafassasset-Djanet (non réactivé au cours de l'orogénèse pan-africaine, Caby et Andréopoulos, 1987) et la chaîne tiririnienne.

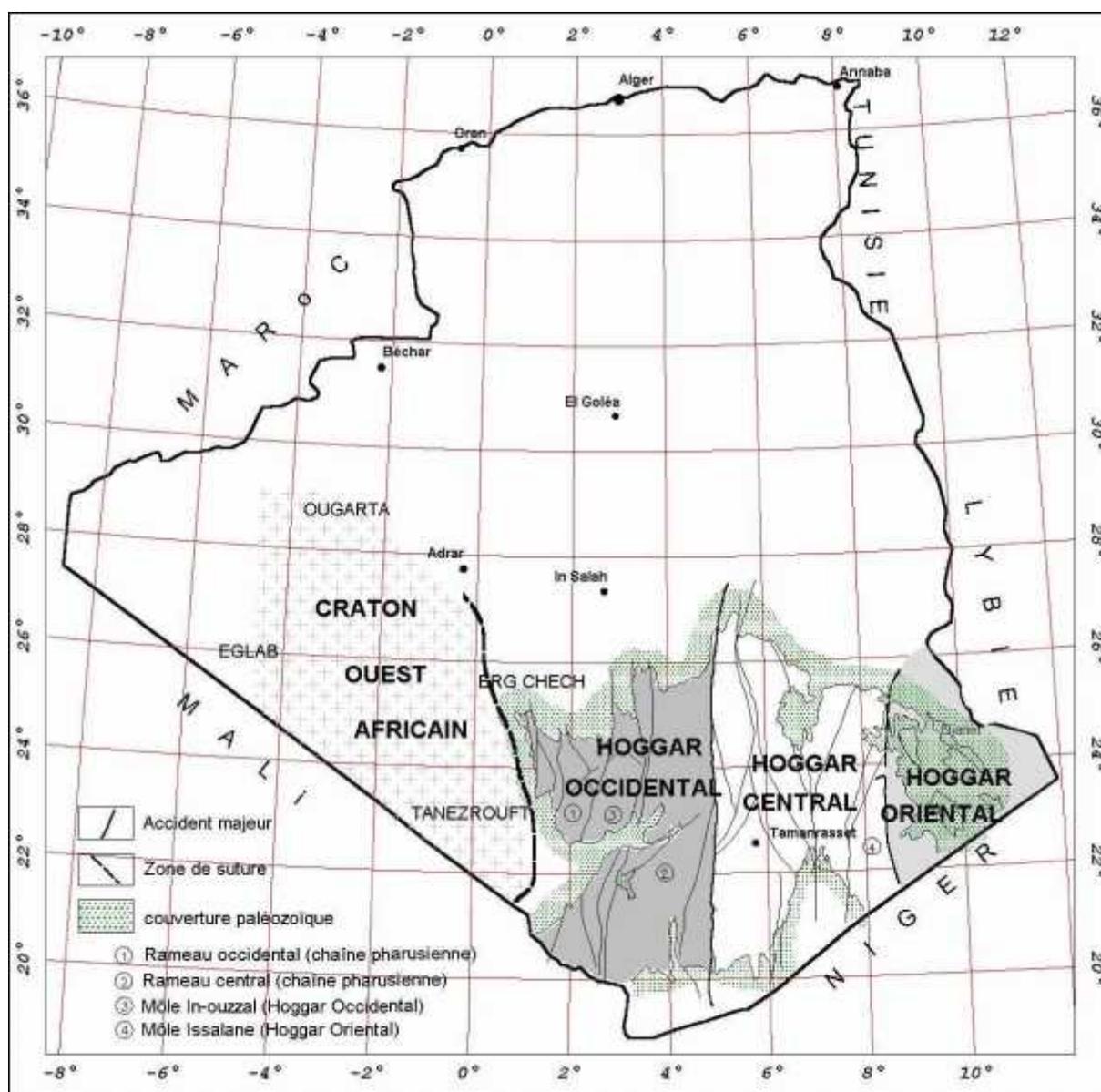


Figure VI.1 : Carte des principales subdivisions et des principaux domaines structuraux du Hoggar, d'après Caby et al. (1981)

IV.3.2 Géologie du Môle d'In Ouzzal :

Le Môle In Ouzzal constitue une exception dans le Hoggar du fait qu'il ne fut ni déformé, ni métamorphisé au panafricain (Haddoum, 1992). Il est demeuré rigide et à un niveau structural peu profond depuis 2000 Ma. Ses limites sont tectoniques, avec à l'Est une faille verticale mylonitique profonde liée à la collision entre le craton ouest africain et le Hoggar (Figure VI.1). C'est un compartiment de 450 Km de long biseauté au Sud et orienté Nord-Sud, large dans sa partie septentrionale d'environ 80 Km (Haddoum, 1992). Il est pris entre les formations des rameaux pharisiens du Hoggar occidental et s'effiloche vers le Sud, relayé par l'Adrar des Iforas. Son équivalent méridional forme également un autre coin à pointe dirigée vers le Nord et décalée vers l'Ouest par rapport à la pointe Sud du Môle In Ouzzal

- Métamorphisme

Le Môle d'In Ouzzal a été affectée par un métamorphisme granulitique de haut grade estimé à 1000°C (Ouzegane et Boumaza, 1996). Il a été daté approximativement à 2050 Ma (Lancelot, 1975). Cette zone d'étude est constituée essentiellement par deux formations : des charnockites et des métasédiments (Ouzegane, 1987).

- Les charnockites : Sont des orthogneiss, de couleur jaune orangé à quartz gris violacé caractérisés par une fine foliation marquée par des minéraux ferromagnésiens.

- Les métasédiments : Sont composés de marbres, de quartzites à magnétite et de granulites alumino-magnésiens.

- Tectonique

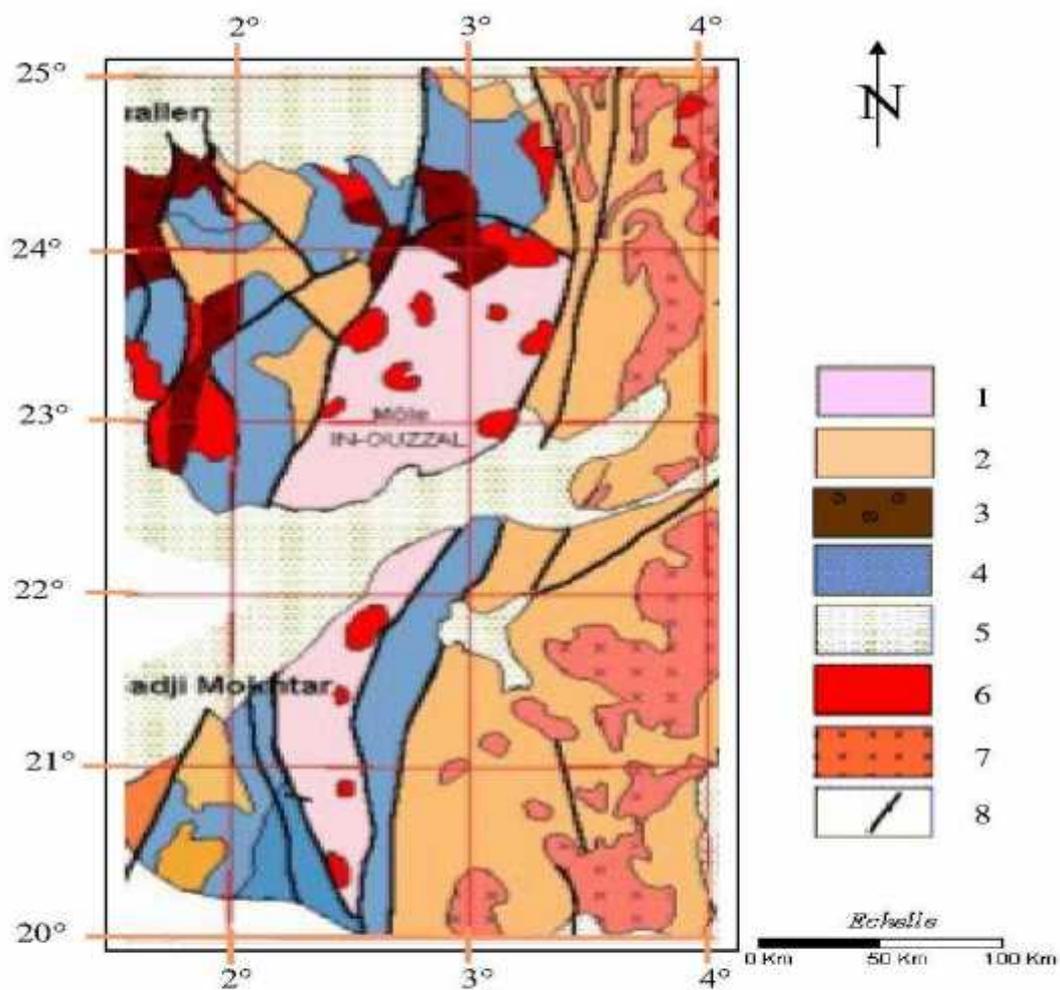
Les premières observations de la tectonique du Môle In Ouzzal, remontent à l'été en 1949 (Haddoum, 1992). Il a décrit des plis qui n'avaient pas les mêmes directions que ceux des terrains adjacents. Ces observations furent suivies plus tard par plusieurs chercheurs : Guiraud (1961) et Caby (1970).

Le Môle d'In Ouzzal est caractérisé par (figure VI.2) (Caby, 1981) :

- Le caractère général des plis d'orientation NE et E-NE d'échelle plurikilométrique.
- La présence des structures en dômes qui caractérisent les granito-gneiss et les charnockites, alors que les paragneiss forment des pincées très étroites et complexes à plans axiaux verticaux et à plongements axiaux très variables, suggérant que ces structures ne représentent pas une seule et unique phase de déformation.

Chapitre IV : Analyse des données géomagnétiques potentielles de la région d'In Ouzzal par la transformée en ondelettes directionnelles

• De nombreux minéraux montrent des traces de torsion et des fractures indiquant l'existence de déformations paracrystallines.



1-Granulites archéennes. 2-Greywackes pharusiens. 3-Molasses du Cambrien. 4-Gneiss indif (Pr3). 5-Couverture paléozoïque. 6-Granites panafricains tardifs. 7-Granites panafricains. 8-Failles majeures.

Figure VI.2 : Carte géologique du Mole d'In Ouzzal tirée de la carte du Hoggar (d'après Caby et al, 1981).

IV.3.3 Analyse multi-échelles des données magnétiques de la région d'In-Ouzzal :

Dans cette section nous avons analysé les données géomagnétiques afin de démontrer la puissance de la méthode dite transformée en ondelettes directionnelle pour prédire les contacts géologiques. La région analysée est celle d'In Ouzzal, située dans le Hoggar Occidental. Les données traitées sont les données aéromagnétiques avec une grille régulière de pas de 750m. La figure IV.3a est une représentation de ces données dans le plan.

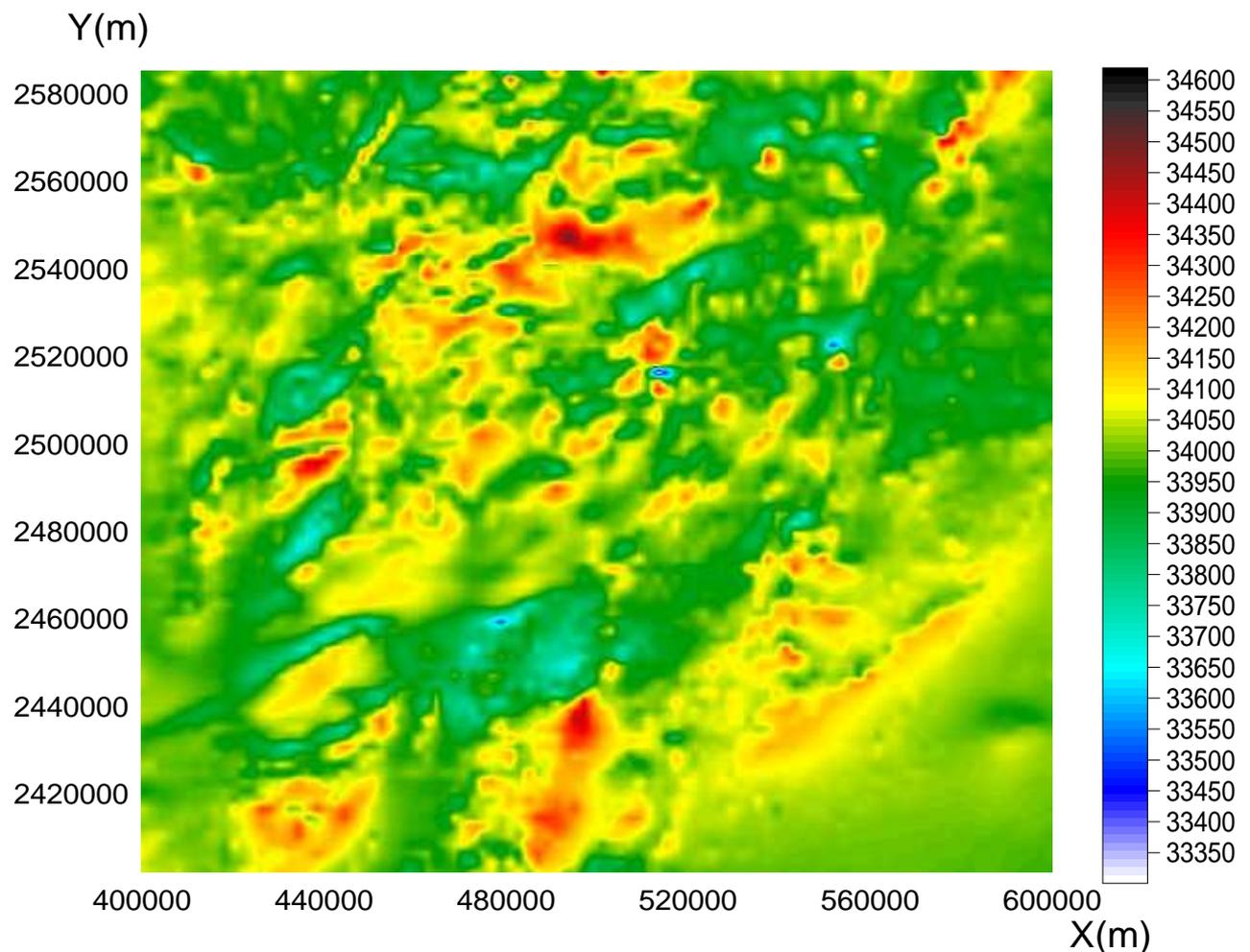


Figure IV.3a : Données aéromagnétiques de la région d'In Ouzzal. Les coordonnées X et Y sont données dans le système UTM 31N. L'échelle des couleurs est en nT

Chapitre IV : Analyse des données géomagnétiques potentielles de la région d'In Ouzzal par la transformée en ondelettes directionnelles

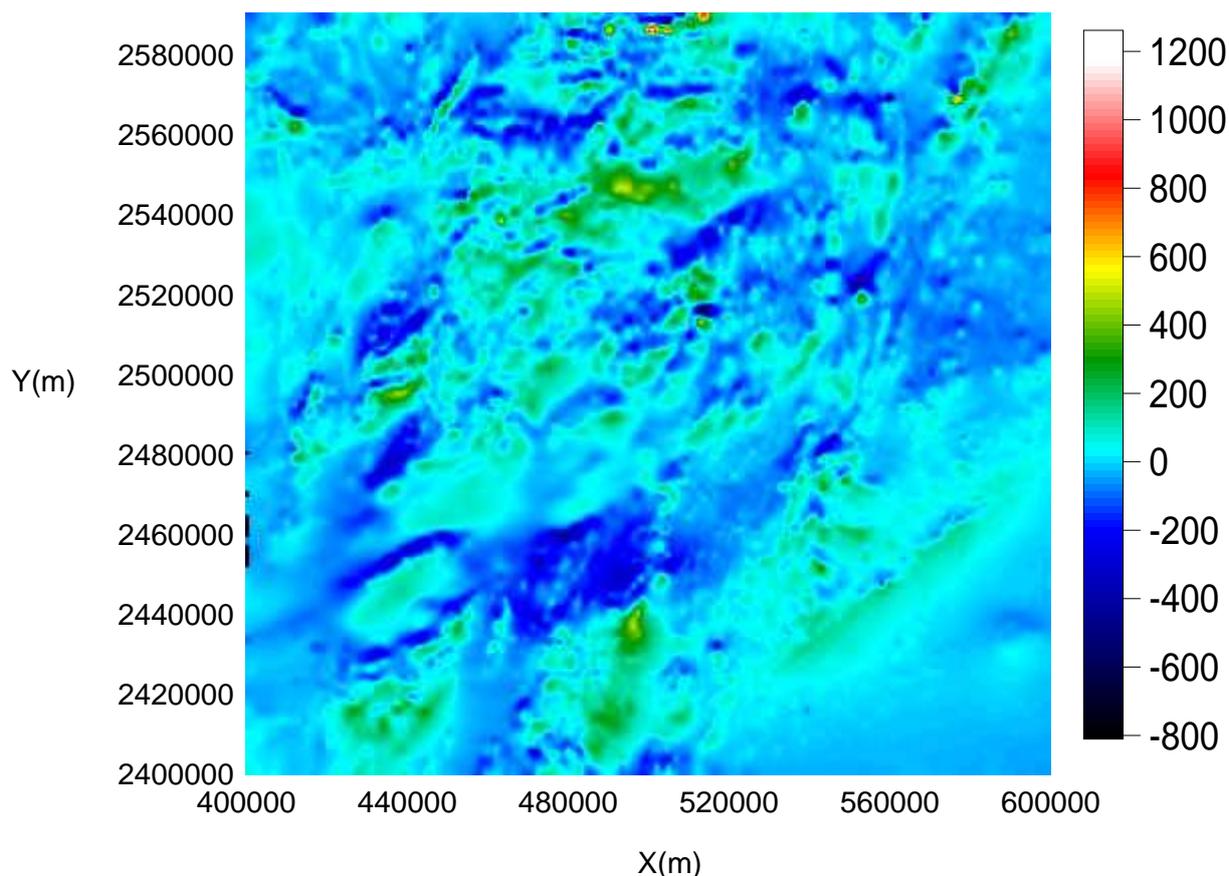


Figure IV.3b : Champ d'anomalies magnétiques au-dessus de l'In Ouzzal. Les coordonnées X et Y sont données dans le système UTM 31N.

La distribution du champ résiduel (anomal) obtenu par la suppression du champ normal des données brutes est représentée sur la figure IV.3b. Elle représente les anomalies magnétiques d'origine crustale du Mole In Ouzzal. La figure IV.4 représente la carte aéromagnétique après réduction au pôle. Cette réduction a été faite avec une inclinaison de 27.6° et une déclinaison de -4.38° . Rappelons que la réduction au pôle sert à rendre l'anomalie magnétique maximale à l'aplomb de la structure.

Chapitre IV : Analyse des données géomagnétiques potentielles de la région d'In Ouzzal par la transformée en ondelettes directionnelles

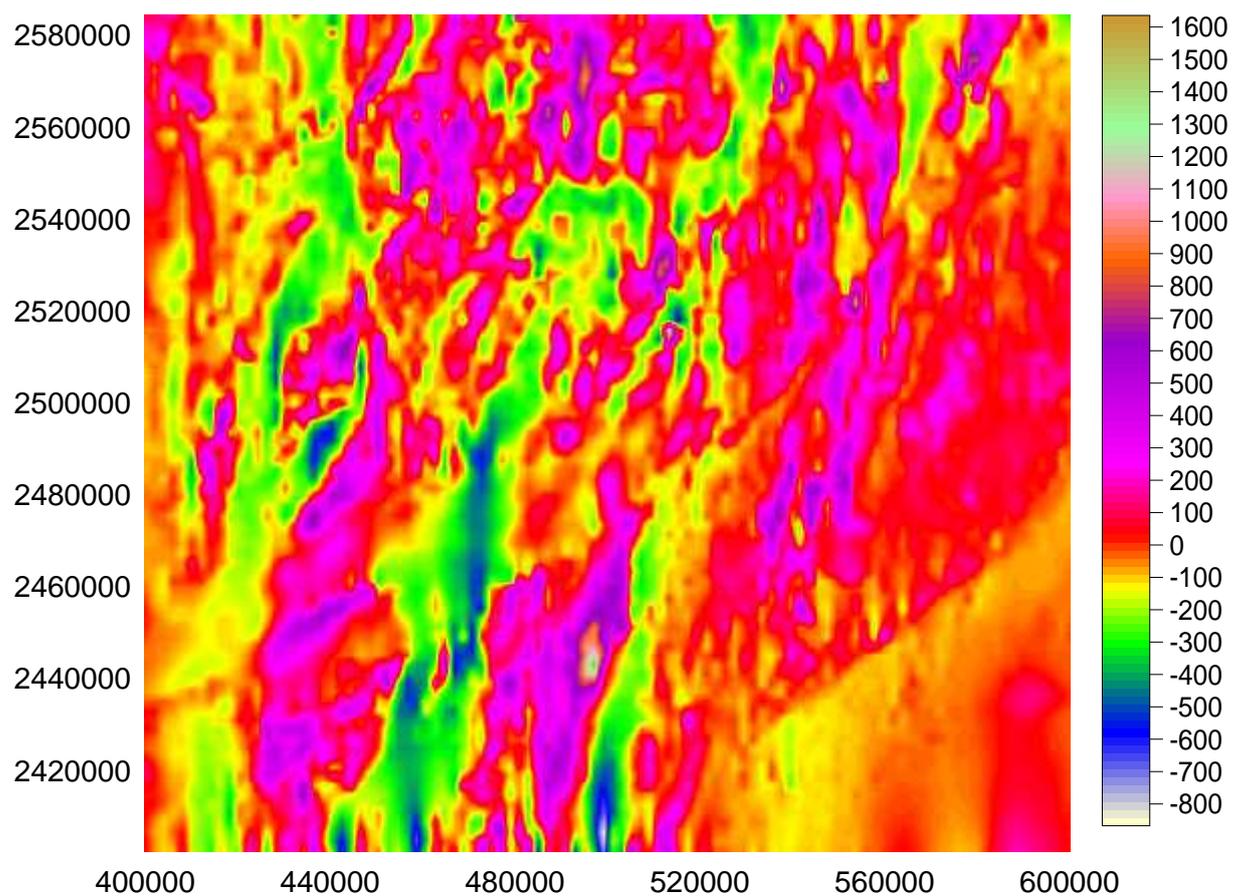


Figure IV.4 : Champ d'anomalies magnétiques au-dessus de l'In Ouzzal, après réduction au pôle.

Les coordonnées X et Y sont données dans le système UTM 31N. Unités échelle des couleurs est le nT

Chapitre IV : Analyse des données géomagnétiques potentielles de la région d'In Ouzzal par la transformée en ondelettes directionnelles

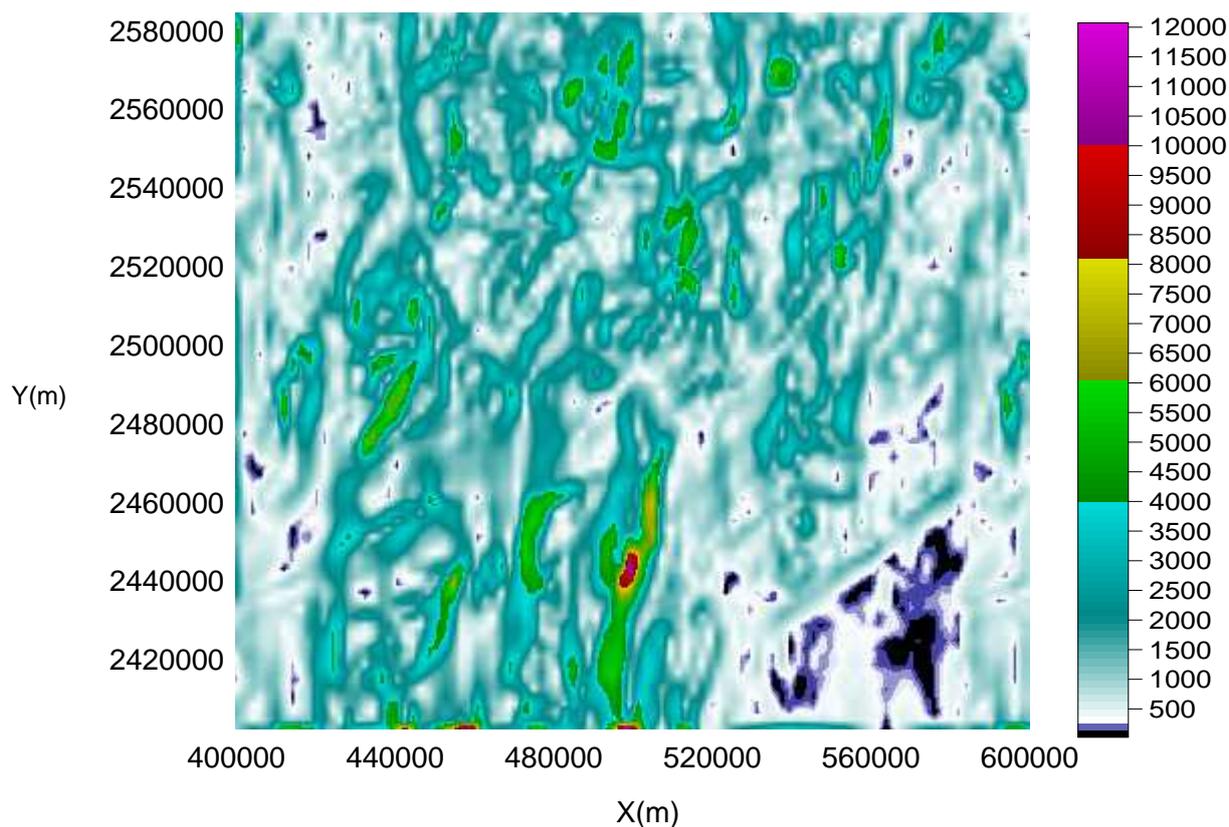


Figure IV.5 : Module de la transformée en ondelettes continue avec une dilatation fixe ($a= 2121.32\text{km}$) Les coordonnées X et Y sont données dans le système UTM 31N.

La figure IV.5 représente le module de la transformée en ondelettes continue dans le plan (X, Y) à l'échelle $a=2121.32\text{m}$, l'ondelette analysante est celle du noyau de Poisson (Fedi et Cascone, 2008). L'opération suivante consiste à calculer les maxima du module de la transformée en ondelettes continue à chaque dilatation (la dilatation variée entre 2121.32 et 9094m) .A chaque dilatation on représente les points de maxima dans le plan X-Y.

L'ensemble des maxima obtenus par balayage de toutes les dilatations variant de 2121 à 9094m (voir figure IV.6) nous donne la géométrie de tous les contacts géologiques.

Chapitre IV : Analyse des données géomagnétiques potentielles de la région d'In Ouzzal par la transformée en ondelettes directionnelles

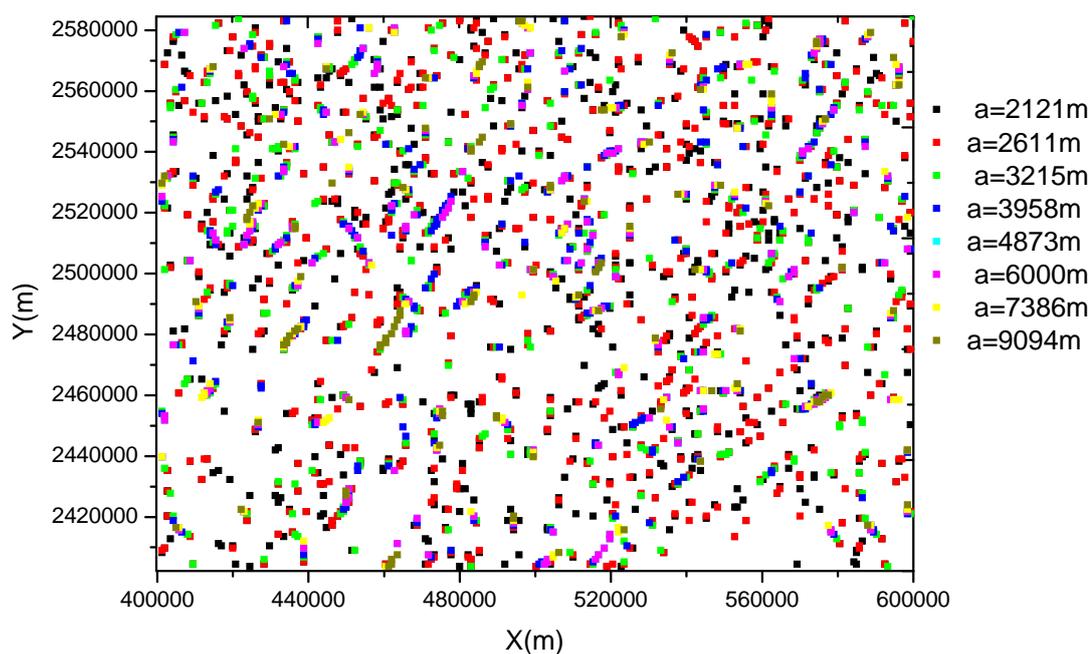


Figure IV.6 : Contacts obtenus par positionnement des transformée en ondelettes directionnelle. Les coordonnées X et Y sont données dans le système UTM 31N.

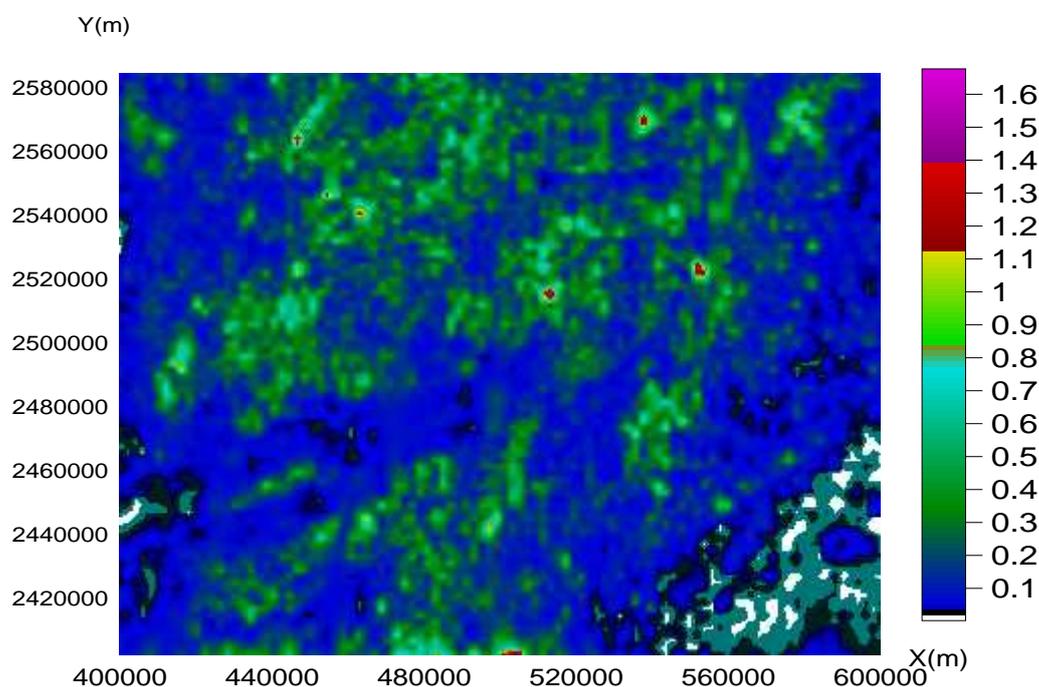


Figure IV.7 : Module du signal analytique du champ d'anomalies magnétiques au-dessus de la région d'In Ouzzal. Les coordonnées X et Y sont données dans le système UTM 31N. L'échelle des couleurs est en nT/m

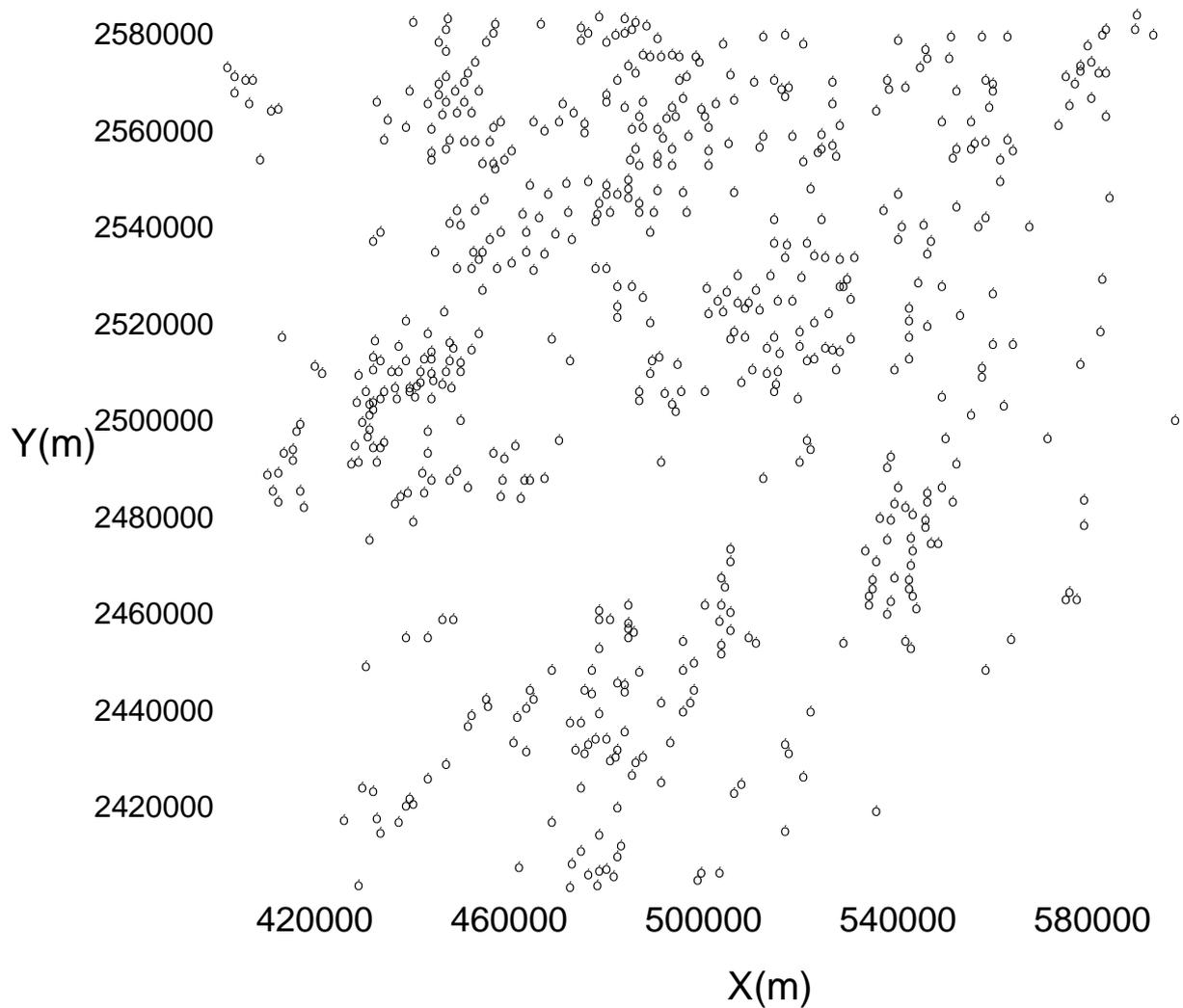


Figure IV.8 : Localisation des sources magnétiques par signal analytique.

Les cercles indiquent la position des maxima de l'amplitude du signal analytique déterminée suivant l'algorithme de Blakely et Simpson (1986). Le seuil minimal de détection d'un maximum étant fixé à 0.5nT/km.

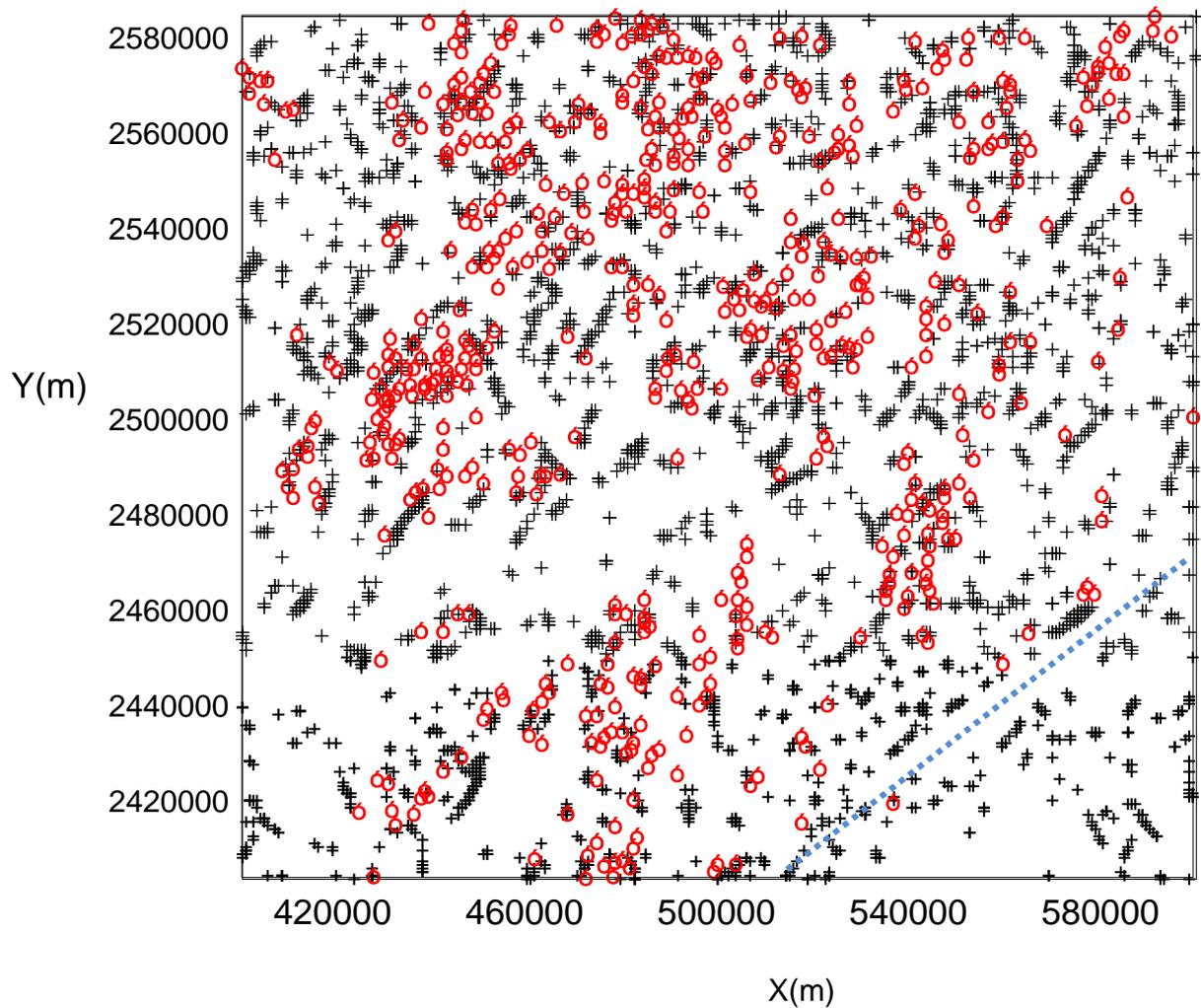


Figure IV.9 : Contacts obtenus par transformée en ondelettes continue comparés avec les contacts obtenus par signal analytique

- Contacts obtenus par TOC
- Contacts obtenus par signal analytique

IV.3.4 Interprétation des résultats et conclusion:

L'ensemble des contacts obtenus par positionnement des maxima de la transformée en ondelettes directionnelle sont comparés avec les contacts obtenus par la méthode du signal analytique. La figure VI.7 représente le module de ce signal, les contacts obtenus par cette méthode sont représentés dans la figure VI.8. La comparaison des deux méthodes (figure IV.9) montre que la technique basée sur la Transformée en Ondelettes Directionnelle, permet de détecter les contacts identifiés par signal analytique. De plus, elle permet de mettre en évidence d'autres contacts qui existent déjà dans la carte géologique. Ainsi, l'accident géologique de direction NE-SO (représenté en traits bleus dans la figure IV.9) qui existe dans la carte géologique (figure VI.2), n'est pas identifié par le signal analytique. La figure VI.10

Chapitre IV : Analyse des données géomagnétiques potentielles de la région d'In Ouzzal par la transformée en ondelettes directionnelles

est une représentation du modèle de contacts géologiques proposé d'après la technique de la transformée en ondelettes directionnelle. Donc la transformée en ondelettes directionnelle a détecté le modèle de contacts préposé par Caby (figure VI.2), en plus elle est capable de proposer un nouveau modèle de contacts.

Les comparions avec les résultats du signal analytiques et la carte géologique montrent que la méthode transformée en ondelettes directionnelle est un outil important pour la détection des contacts à partir de données de champs de potentiels.

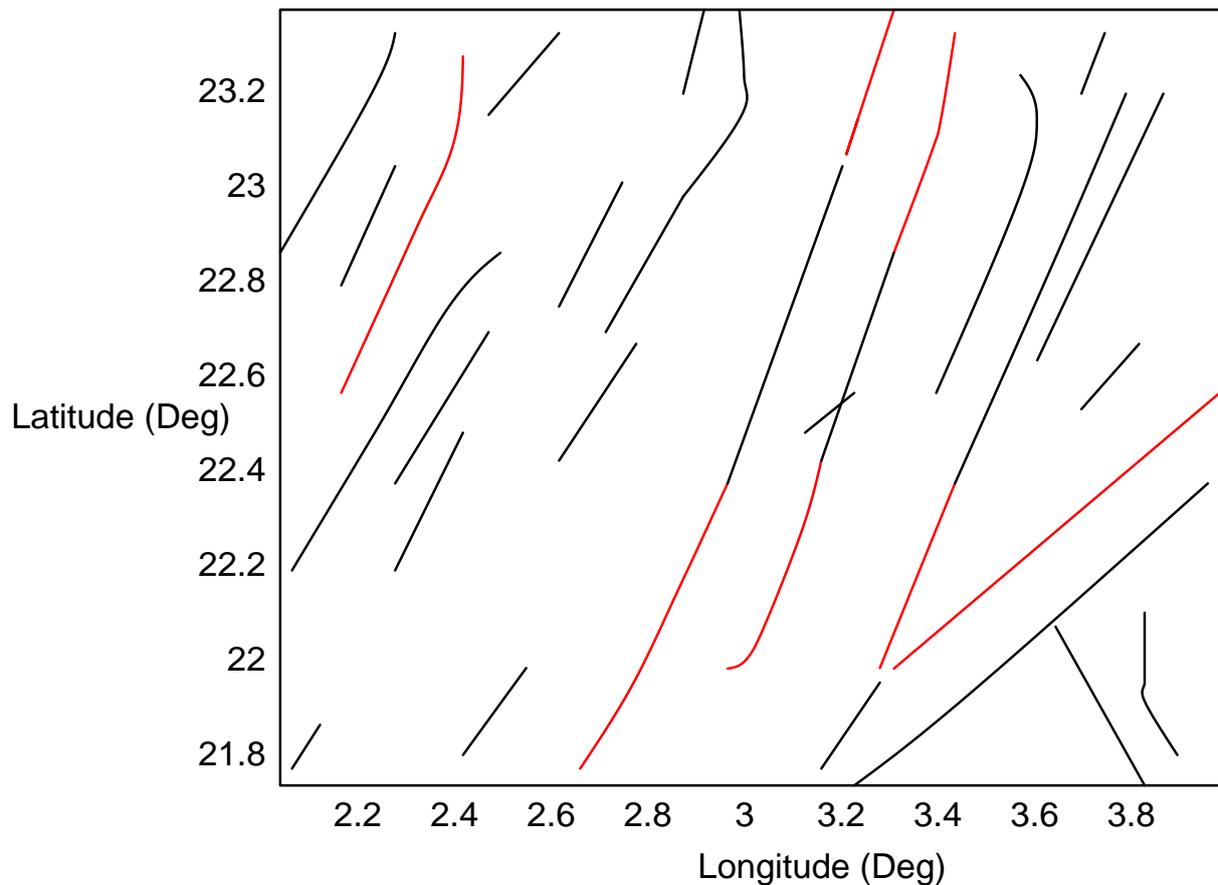


Figure VI.10 : Distribution de contacts structuraux déduits de la Transformée en ondelettes continue directionnelle.

- Contacts géologiques certains
- Contacts géologiques supposés d'après l'analyse multi-échelles par ondelettes

CONCLUSION GENERALE

Conclusion Générale

Dans cette section, nous avons analysé les données aéromagnétiques d'In-Ouzzal pour démontrer la puissance de la méthode 2D TOCD pour identifier les contacts géologiques.

Nous avons appliqué cette idée à un modèle synthétique, les résultats obtenus montrent la robustesse du TOCD 2D.

L'application sur un modèle bruité montre que le TOCD 2D est sensible au bruit. Pour résoudre ce problème, nous avons proposé une technique basée sur le filtre passe-bas exponentiel et un seuil appliqué aux coefficients d'ondelettes filtrés.

Nous avons appliqué cette technique aux données aéromagnétiques d'In Ouzzal. Les résultats obtenus sont comparés avec la carte géologique et les solutions de signaux analytiques. On peut remarquer que la TOD 2D est capable de détecter les limites définies par les géologues. La comparaison avec le signal analytique montre que le TOCD est capable d'identifier les contacts qui n'existent pas dans la carte des contacts définie par (SA).

Les résultats de cette étude montrent que la technique proposée de détection des contours basée sur la transformée en ondelettes est très efficace pour l'analyse des contacts géologiques à partir de cartes d'anomalies géomagnétiques

***REFERENCE
BIBLIOGRAPHIQUE***

Références bibliographiques

1. Arkani-hamed .1998 differential reduction-to-the-pole of regional magntic anomalies geophysic 53.1892.1600 .
2. B. Torresani Analyse continue par ondelettes, CNRS Editions, Paris, 1995
3. Bhattacharyya, B.K. and Chan, K.C. reduction of magnetic and gravity data on an arbitrary surface acquired in a region of high topographic relief. Geophysics, 42, 1411-1430, 1977
4. Bnjoly D ,perrinJ,trufferr C asfirane F1999couvertire géoplysique aréo-porteé du massif armoricain -Blakely .R.1995 potential theory ingvavity magnetic application xx+441PP.
5. Christopher Torrence and Gilbert P. CompoA Practical Guide to Wavelet Analysis, Program in Atmospheric and Oceanic Sciences, University of Colorado, Boulder, Colorado, 1998.
6. Cohen, A. (1992).Ondelettes et traitement numérique du signal. Masson.
7. G. Blanchet, M. Charbit, «Traitement numérique du signal, Simulation sous Matlab», Hermès, Paris, 1998.
8. Gasquet et Witomski,AnalysedeFourier et Applications
9. Gibert D. & Galdeano A. (1985) –A computer program to perform transformation of gravitic and aeromagnetic survey. -Computers and Geosciences, vol. 11, 5, 553-588.
10. Hoddoum .1992 ET AL .1994 ,peucat et al1996 .ce sont des formations de type lithologies occopent des ynformes an sein de grands espaces d’orthogneiss souvent migrmatiti.
11. Ingrid Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, philadelphia, États-Unis, 1992.
12. Kumar, p.Foufoula-georgiou, E 1997, wavelet analysis for geophysical applications. Reviews of geophysics.
13. Li et al., 2009] Li, Z., Liu, J., and Tang, X. (2009). Constrained clustering via spectral regularization. In International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, pages 421–428.
14. M. KUNT, Traitement Numérique des Signaux, Presse Polytechniques Romandes, 1984.
15. Maurizio Fedi, Lorenzo Cascone, Continuous wavelet transform of potential fields with different choices of analyzing wavelets, Article in Journal of Geophysical Research Atmospheres, 2011.
16. Meyer-Leon L, et al. (1987) Purification of the FLP site-specific recombinase by affinity chromatography and re-examination of basic properties of the system. Nucleic Acids Res 15(16):6469-88
17. Nabighian, M. N., 1972, The analytic signal of two-dimensional magnetic bodies with polygonal cross-section: Its properties and use for automated anomaly interpretation: Geophysics, 37, 507-517 .
18. nabighian-3D hilbert transforms -1984 .
19. Ouzegme1996 et 2003A consists of lingham-grade orthogneisses .
20. R. Dalmasso et P. Witomski. *Analyse de Fourier et Applications. Exercices corrigés.* Masson, 1996.)

21. S. Mallat, Une exploration des signaux en ondelettes, Les Editions de l'Ecole Polytechnique, 2000.
22. T.W. Körner. *Fourier Analysis*. Cambridge University Press, 1988
23. Wikon .C.J.N.rogon .a ,m.SMITH.I.E .U.northey D .J.nairn .La .and hourghton B.F.1984 .
24. Web: <https://www.cu-tamanrasset.dz/>