Université Djilali Bounaâma-Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département Mathématiques et Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de

Master en mathématiques
Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Présenté par

ZIDANI Karima

Matrices de Riordan et polynômes orthogonaux

Soutenue publiquement le 23 juin 2018 devant le jury composé de

Président du jury :	**Mr. M. HOUAS.** Université Khemis Miliana.
Encadrant :	**Mr. A. KRELIFA.** Université Khemis Miliana.
Examinateur 1 :	**Mr. M. BENBACHIR.** Université Khemis Miliana.
Examinateur 2 :	**Mr. B. SADAOUI.** Université Khemis Miliana.

Année Universitaire : ***2017/2018***

Dédicaces

Je dédie ce travail
A mes très chers parents. Que Dieu les protèges,
A mes frères et mes soeurs,
A toute ma famille ainsi qu'à mes amis,
A tous mes collègues de la promotion 2017/2018.

Remerciements

Je remercie tout d'abord **ALLAH** le tout puissant de m'avoir donnée le courage et la force d'achever ce travail.

Je tiens à remercier sincèrement mon encadrant Mr : A. KRELIFA qui est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans lui que ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

J'exprime aussi mes remerciements pour les membres de jury : Mr : M. HOUAS, Mr : M. BENBACHIR et Mr : SADAOUI, qui ont accepté d'évaluer mon mémoire.

Je tiens à remercier tous les professeurs de l'université Djilali Bounaâma en particulier ceux du département de Mathématique et Informatique.

Je voudrais également remercier ma mère, mon père et toute ma famille.

Sans omettre bien sur de remercier profondément à tous ceux qui contribué de prés ou de loin à la réalisation du présent travail.

MERCI.

Résumé

Nous étudions dans ce travail les polynômes orthogonaux et les groupes de Riordan. Nous avons pu montrer que les suites de polynômes orthogonaux peuvent être également générées par ce type de groupe. De plus nous avons exhibé quelques de familles de polynômes orthogonaux à partir des coefficient de les matrices de Riordan.

Mots clés :
polynômes orthogonaux, matrice de Riordan, matrice de Riordan exponentielle, groupe de Riordan, matrice de production.

Abstract

In this research, we study the orthogonal polynomials that can be defined by ordinary and exponential Riordan arrays. we shall show that sequences of orthogonal polynomials, can be also generated by the Riordan group. We interpret some families of orthogonal polynomials within the framework of the Riordan group.

Key words :
orthogonal polynomails, Riordan array, Exponential Riordan array, Riordan group, Production matrix.

Table des matières

Introduction

Les polynômes orthogonaux formels ne sont pas seulement utilisés en mathématiques, ils sont très largement employés en physique, interviennent implicitement en traitement du signal et intéressent la biologie et la chimie. Les travaux sur le sujet sont donc importants et informatifs. Notre intention n'est pas d'en résumé tous les aspects. Nous avons porté notre attention sur la représentation algébrique et matricielle des polynômes orthogonaux formels.

Les résultats que nous avons étudient seront donc également valables pour les polynômes orthogonaux et les matrices de Riordan. L'objectif de ce mémoire est donc d'illustrer différentes formes sous lesquelles on trouve les polynômes orthogonaux formels dans des domaines aussi variés que le calcul formel, le traitement du signal, ou la théorie de combinatoire. La description qui suit ne prétend pas être exhaustive, elle a pour but essentiel de motiver la lecture de ce travail en exposant des points de vu qui concernent aussi bien le mathématicien que physicien. Ainsi, le mémoire est organisé de la manière suivante :

Nous commençant le premier chapitre par une description des résultats fondamentaux concernant l'orthogonalité et les représentations intégrales des formes linéaires et les récurrences des suites correspondantes, puis nous présentons les polynômes classiques et leurs caractérisations et classification. Nous consacrons la dernière étape dans ce chapitre à quelques notions sur les fractions continues.

Dans le chapitre deux, nous étudions la théorie des groupes de Riordan. Dans un premier temps nous donnons quelques définitions sur les séries formelles et les fonctions génératrices, puis nous avons énoncé le théorème d'inversion de Lagrange. Dans un deuxième temps nous définissons les matrices de Riordan (ordinaires et exponentielles) et nous citons plusieurs caractérisations de ces matrices .

Nous consacrons le chapitre trois à l'étude de la relation entre polynômes orthogonaux et matrices de Riordan. Nous avons montré que les suites de polynômes orthogonaux peuvent être également générées par les matrices de Riordan.

Chapitre 1

Orthogonalité en générale

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et propriétés de base sur l'orthogonalité. Ensuite, on présente les polynômes classiques et leurs caractérisations. La fin de ce chapitre est consacré aux notions préliminaires et quelques propriétés élémentaires des fractions continues qui vont nous aider dans la suite de notre travail.

I Fonctionnelle moment et orthogonalité

Nous désignerons par $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des polynômes à une variable réelle et par $\mathcal{P}_n$ l'espace des polynômes de degré n. Notons par $\mathcal{P}^*$ le dual algébrique de $\mathcal{P}$ et par $\langle .,. \rangle$ le crochet de dualité entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^*$.

Définition 1.1. *Soit $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes et £ une fonction à valeur complexe définie sur l'espaces des polynômes par*

$$\langle £, x^n \rangle = £(x^n) = \mu_n,\ n \geqslant 0$$
$$£(\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x)) = \alpha_1 £(p_1(x)) + \alpha_2 £(p_2(x))$$

pour tous nombres complexes α_i et tous polynômes $p_i(x)$, (i = 1, 2). Alors, la forme linéaire £ est dite fonctionnelle moment sur $\mathcal{P}$ et le nombre μ_n est appelé le moment d'ordre n de £.
Remarquons qu'avec cette définition, pour $\varphi_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k x^k$ on a

$$\langle £, \varphi_n(x) \rangle = £(\varphi_n(x)) = \sum_{k=0}^{n} c_k \mu_k.$$

Définition 1.2. *Une suite des polynômes $\{\varphi_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ est dite libre si et seulement si $deg(\varphi_n(x)) = n$, pour tout $n \geqslant 0$.*

Définition 1.3. *Une suite des polynômes $\{\varphi_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ est dite normalisée si chaque polynôme φ_n est écrit sous la forme suivante :*

$$\varphi_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}x^{n-k-1}, \text{ pour tout } n \geqslant 0.$$

Définition 1.4. *Une suite $\{\varphi_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ est dite suite de polynômes orthogonaux par rapport à une fonctionnelle moment £ si :*

(i) $\{\varphi_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ *est une suite libre,*

(ii)

$$\langle £, \varphi_n(x)\varphi_m(x)\rangle = 0, n \neq m; n, m \geqslant 0, \tag{1.1}$$

(iii)

$$\langle £, \varphi_n^2(x)\rangle \neq 0. \tag{1.2}$$

Notation 1.1. *Toute suite des polynômes orthogonaux normalisée sera abrégé par la notation SPON. Et toute fonctionnelle moment par FM.*

Définition 1.5. *Une suite des polynômes $\{\varphi_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ est dite faiblement orthogonale (en abréviation SPOF), s'il existe une FM $£ \neq 0$ telle que*

$$\langle £, \varphi_n(x)\varphi_m(x)\rangle = 0 \text{ pour } n \neq m.$$

Remarque 1.1. *La fonctionnelle moment £ peut se représenter sous forme d'intégrale ou d'une somme, i.e. Lorsqu'il existe une mesure réelle et positive Ψ vérifie l'orthogonalité suivante*

$$\langle £, \varphi_n(x)\varphi_m(x)\rangle = \int_S \varphi_n(x)\varphi_m(x)\, d\Psi(x) = \kappa_n\delta_{nm}, n, m \geqslant 0. \tag{1.3}$$

où S est le support de Ψ, κ_n est une constante non nulle et δ_{nm} est le symbole delta de Kronecker défini par

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq n \\ 1 \text{ si } m = n \end{cases}$$

Lorsque $\kappa_n = 1$, le système est dit orthonormal.

(i) Si la mesure Ψ admet une densité $w(x)$, alors (1.3) devient

$$\langle £, \varphi_n(x)\varphi_m(x)\rangle = \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)w(x)\, d(x) = \kappa_n\delta_{nm}, n, m \geqslant 0. \tag{1.4}$$

(ii) Dans le cas discret, i.e. si Ψ admet un poids $w(i)$ dans le point x_i , $i \in I$, alors l'orthogonalité est vérifiée dans l'ensemble $X = \{x_j\}_{j \in \mathbb{I}}$, i.e.

$$\langle \pounds, \varphi_n(x)\varphi_m(x)\rangle = \sum_{x_j \in X} \varphi_n(x_j)\varphi_m(x_j)w(x_j) = \kappa_n \delta_{nm}, n, m \geqslant 0. \qquad (1.5)$$

Dans la théorie des polynômes orthogonaux, la densité $w(x)$ ou bien le poids $w(i)$ sont appelés des fonctions poids.

Exemple 1.1. ***(Le cas continu)***
Les polynômes de Tchybechev $T_n(x)$ de la première espece sont des polynômes de degré n définis à l'aide de la relation suivante

$$T_n(x) = \cos(n\theta) \textit{ avec } x = \cos\theta$$

Pour tout x dans $[-1, 1]$, tel que $x = \cos\theta$, alors θ appartient à $[0, \pi]$.
Les polynômes de Tchybechev sont orthogonaux par rapport à la fonction poids $(1 - x^2)^{\frac{-1}{2}}$, i .e.

$$\int_{-1}^{1} T_m(x)T_n(x)(1 - x^2)^{\frac{-1}{2}}\, dx = 0, m \neq n.$$

Exemple 1.2. ***(Le cas discret)***
Soit la fonction à deux variables x et w avec le paramètre $a \neq 0$, dont le développement limité est :

$$\begin{aligned} G(x, w) &= e^{-aw}(1 + w)^x \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-a)^m w^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} w^n \end{aligned}$$

En appliquant le produit de Cauchy, on obtient :

$$\begin{aligned} G(x, w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) w^n \\ \varphi_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} \frac{(a)^{n-k}}{(n-k)!} \end{aligned}$$

Sachant que
$\binom{x}{k} = \frac{1}{k!} x(x-1)...(x-k+1), k = 1, ..., n$

Dans ce cas, les $\varphi_n(x)$ sont appelés polynômes de Charlier et $G(x,w)$ est la fonction génératrice. On veut maintenant trouver la relation d'orthogonalité. On a :

$$\begin{aligned} a^x G(x,v)G(x,w) &= e^{-a(v+w)}[a(1+v)(1+w)]^x \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k G(k,v)G(k,w)}{k!} &= e^{-a(v+w)} e^{a(1+v)(1+w)} \\ &= e^a e^{avw} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a a^n (vw)^n}{n!} \end{aligned}$$

On peut aussi écrire le développement suivant :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k G(k,v)G(k,w)}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \sum_{m,n=0}^{\infty} \varphi_m(x)\varphi_n(x) v^m w^n \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_m(k)\varphi_n(k) \frac{a^k}{k!} v^m w^n \end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_n(k)\varphi_m(k)\frac{a^k}{k!} = \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq n \\ \dfrac{e^a a^n}{n!} \text{ si } m = n \end{cases}$$

La fonction $\frac{a^k}{k!}$ est appelée fonction de masse du polynôme. En utilisant la fonction £, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \langle £, x^n \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{a^k}{k!} \\ \langle £, \varphi_n(x)\varphi_m(x) \rangle &= \frac{e^a a^n}{n!}\delta_{nm} \end{aligned}$$

Où $n = 0, 1, 2, ...$ et $m = 0, 1, 2, ...$

Corollaire 1.1. *Soient $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite de polynômes et £ une FM. Alors on a les équivalences suivantes*

(i) $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ *est une SPO par rapport à £.*

(ii) Pour tout polynôme π de degré m,
$\langle £, \pi(x)\varphi_n(x) \rangle = C_m \delta_{nm}$, $C_m \neq 0$.

(iii) $\langle £, x^m \varphi_n(x) \rangle = A_n \delta_{mn}$, $A_n \neq 0$, $0 \leqslant m \leqslant n$.

Théorème 1.1. *Soit $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ une SPO par rapport à £. Alors, pour tout polynôme $\pi(x)$ de degré n, on a*

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x) \quad avec \tag{1.6}$$

$$c_k = \frac{\langle £, \pi(x)\varphi_k(x) \rangle}{\langle £, \varphi_n^2(x) \rangle}, k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Démonstration. Si $\pi(x)$ est un polynôme de degré n, alors $\pi(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k \varphi_k$, en multiplient les deux cotés par φ_m, et en appliquant £, nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle £, \pi(x)\varphi_m(x) \rangle &= \sum_{k=0}^{n} c_k \langle £, \varphi_k(x)\varphi_n(x) \rangle, k \leqslant m \leqslant n \\ &= c_m \langle £, \varphi_m^2(x) \rangle \end{aligned}$$

et puisque $\langle £, \varphi_m^2(x) \rangle \neq 0$ la relation (1.6) est vérifier . □

II Existence et unicité des suites de polynômes orthogonaux

Définition 1.6. *Une FM £ est dite régulière, admissible ou bien quasi-définie s'il existe une suite $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ vérifiant les conditions d'orthogonalité* (1.1) *et* (1.2)*.*

Théorème 1.2. *Une FM £ dont la suite des moments est notée $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ est régulière, si et seulement si elle vérifie le critère de Humburger, i.e.,*

$$\Delta_n = \det[\mu_{i+j}]_{i,j=0}^{n} = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix} \neq 0, n \geqslant 0. \tag{1.7}$$

Où Δ_n est dit le déterminant de Hankel d'ordre n.

Démonstration. Nous écrivons $\varphi_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_{nk} x^k$ et on remarque que les conditions d'orthogonalité

$$\langle £, x^m \varphi_n(x) \rangle = \sum_{k=0}^{n} c_{nk} \mu_{k+m} = k_n \delta_{nm}, k_n \neq 0, m \leqslant n \tag{1.8}$$

sont équivalentes au système

$$\begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{n0} \\ c_{n1} \\ \dots \\ c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ k_n \end{bmatrix}$$

Maintenant, si SPO existe pour £, donc elle est déterminée uniquement par les constantes k_n dons (1.8), ainsi (1.8) admet une solution unique ssi $\Delta_n \neq 0, n \geqslant 0$. □

Définition 1.7. *Une fonctionnelle moment £* définie par*

$$\langle £^*, 1\rangle = 1, \langle £^*, \varphi_n\rangle = 0, \forall n \geqslant 0. \tag{1.9}$$

est dite fonctionnelle moment canonique de la suite de polynômes $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$.

Corollaire 1.2. *S'il existe une SPO par rapport à une FM £ elle est unique par rapport à un facteur multiplicatifs non nul. i.e.*
si $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ et $\{\Phi_n\}_{n\geqslant 0}$ sont deux SPO par rapport à £, il existe $c_n \neq 0$, $n \geqslant 0$, tel que $\Phi_n = c_n\varphi_n$, $n \geqslant 0$.

Théorème 1.3. *[4] Une FM £ admet une SPO si et seulement si elle est admissible.*

Théorème 1.4. *Soit $\{\varphi_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ une SPO par rapport à £. Alors pour tout polynôme $\pi_n(x) = a_n x_n + ... + a_0$ de degré n, on a*

$$\langle £, \pi_n(x)\varphi_n(x)\rangle = a_n\langle £, x^n\varphi_n(x)\rangle \tag{1.10}$$

Définition 1.8. *Une fonctionnelle moment £ est dite*

(i) définie positive si $\langle £, \pi(x)\rangle > 0$ pour tout polynôme non identiquement nul tel que $\pi(x) \geqslant 0$ pour tout x.

(i) définie négative si la fonctionnelle moment $\tilde{£} = -£$ est définie positive.

Théorème 1.5. *[4]*

Si £ est une fonctionnelle moment définie positive, alors tout ses moments sont réels, et $\Delta_n > 0$, $n \geqslant 0$.

III Caractérisation des SPO

La plus importante caractérisation des SPO est que chaque trois polynômes consécutifs sont liés par la relation de récurrence suivante.

Théorème 1.6. *[4][10]* ***(Récurrence à trois termes)*** *Soit $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ une SPON par rapport à une FM régulière £. Alors la suite $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ vérifie la récurrence d'ordre deux suivante*

$$\varphi_{n+1}(x) = (x - A_n)\varphi_n(x) - B_n\varphi_{n-1}(x), n \geqslant 0. \tag{1.11}$$

où $\varphi_{-1}(x) = 0$, B_0 est une constante arbitraire et $B_n \neq 0$, $\forall n \geqslant 1$.
Si on écrit $\varphi_n(x) = x^n + \theta_n x^{n-1} + R(x)$, alors

$$\begin{cases} A_n = \theta_n - \theta_{n+1}, n \geqslant 0 \\ avec \quad \theta_0 = 0, \end{cases} \tag{1.12}$$

ainsi,

$$B_n = \frac{\langle £, \varphi_n^2\rangle}{\langle £, \varphi_{n-1}^2\rangle}, n \geqslant 1 \qquad\qquad A_n = \frac{\langle £, x\varphi_n^2\rangle}{\langle £, \varphi_{n-1}^2\rangle}, n \geqslant 0 \tag{1.13}$$

$$\begin{cases} \langle £, \varphi_n^2\rangle = B_0B_1...B_n, n \geqslant 0 \\ avec \quad B_0 = \mu_0 = \langle £, 1\rangle \end{cases} \tag{1.14}$$

Si de plus, £ est définie positive, alors les A_n sont réels et les $B_n > 0, \forall n \geqslant 1$.

Démonstration. Remarquons que $x\varphi_n(x)$ est un polynôme de degré $n+1$, alors on a :

$$x\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{n,k}\varphi_k(x) \quad avec \quad c_{n,k} = \frac{\langle £, x\varphi_n(x)\varphi_k(x)\rangle}{\langle £, \varphi_n^2(x)\rangle}$$

De plus $x\varphi_k(x)$ est un polynôme de degré $k+1$, alors $c_{n,k} = 0$ pour $0 \leqslant k < n-1$. puisque $x\varphi_n(x)$ est normalisée on a aussi $c_{n,n+1} = 1$, d'où

$$x\varphi_n(x) = \varphi_{n+1}(x) + c_{n,n}\varphi_n(x) + c_{n,n-1}\varphi_{n-1}(x),\ n \geqslant 1,$$

qui est vrais aussi pour $n = 0$ si on définit $\varphi_{-1}(x) = 0$ et on choisi $\varphi_1(0) = -A_0$. Maintenant, d'après (1.11) on obtient après multiplication par x^{n-1}

$$0 = \langle £, x^n\varphi_n(x)\rangle - B_n\langle £, x^{n-1}\varphi_{n-1}(x)\rangle.$$

D'autre part $B_n \neq 0$ si £ est régulière et $B_n > 0$ lorsque £ est définie positive.
Multiplions maintenant (1.11) par $\varphi_n(x)$ et en appliquant £, nous obtenons

$$\langle £, \varphi_n(x)\varphi_{n+1}(x)\rangle = 0 = \langle £, x{\varphi_n}^2(x)\rangle - A_n\langle £, {\varphi_n}^2(x)\rangle.$$

Comparons le coefficient de x^n dans les deux cotés de (1.11), on obtient $\theta_{n+1} - \theta_n = -A_n$.
Soit par sommation de 0 à n : $\theta_{n+1} - \theta_0 = -(A_0 + \cdots + A_n)$ .Or $\theta_0 = 0$ car $\varphi_0 = 1$ et $\varphi_1(x) = x + \theta_1$. Ainsi, $\theta_{n+1} = -(A_0 + \cdots + A_n)$.
Dans le cas où $\{\varphi_n(x)\}$ n'est pas normalisée, i.e.,

$$\varphi_{n+1}(x) = (\gamma_n x - \alpha_n)\varphi_n(x) - \beta_n \varphi_{n-1}(x),$$

on écrit $\varphi_n(x) = k_n p_n(x)$ avec $\{p_n(x)\}$ normalise, on obtient

$$\frac{\varphi_{n+1}(x)}{k_{n+1}} = (x - A_n)\frac{\varphi_n(x)}{k_n} - B_n \frac{\varphi_{n-1}(x)}{k_{n-1}},$$

i.e.

$$\varphi_{n+1}(x) = (\frac{k_{n+1}}{k_n} x - A_n \frac{k_{n+1}}{k_n})\varphi_n(x) - \frac{k_{n+1}}{k_{n-1}}\varphi_{n-1}(x) \ ,$$

ainsi

$$\begin{cases} \gamma_n = k_n^{-1} k_{n+1} \\ \alpha_n = A_n k_n^{-1} k_{n+1} \\ \beta_n = B_n k_{n-1}^{-1} k_{n+1} \end{cases}$$

□

Exemple 1.3. *Pour les polynômes de Charlier, on manipule la fonction génératrice :*

$$G(x, w) = e^{-aw}(1 + w)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) w^n$$

L'idée est de dériver la dernière expression par w et de comparer les deux côtés. On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial w} &= -ae^{-aw}(1 + w)^x + e^{-aw} x(1 + w)^{x-1} \\ &= \frac{x}{1 + w} G(x, w) - aG(x, w) \\ &= G(x, w)\left[\frac{x}{1 + w} - a\right] \end{aligned}$$

Et avec la deuxième relation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial w} &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) n w^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\left[\frac{x}{1 + w} - a\right] w^n \end{aligned}$$

En multipliant la dernière égalité par $1+w$ on obtient :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)n(w^{n-1}+w^n)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)(x-a(1+w))w^n\\
&\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}n\varphi_n(x)w^n+\sum_{n=0}^{\infty}n\varphi_n(x)w^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}x\varphi_n(x)w^n-\sum_{n=0}^{\infty}a\varphi_n(x)w^n-\sum_{n=0}^{\infty}a\varphi_n(x)w^{n+1}\\
&\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}n\varphi_n(x)w^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\varphi_{n+1}(x)w^n=\sum_{n=0}^{\infty}x\varphi_n(x)w^n-\sum_{n=0}^{\infty}a\varphi_n(x)w^n-\sum_{n=0}^{\infty}a\varphi_{n-1}(x)w^n\\
&\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)\varphi_{n+1}(x)+(n-x+a)\varphi_n(x)+a\varphi-n-1(x)]w^n=0
\end{aligned}$$

Donc la relation de récurrence est :

$$(n+1)\varphi_{n+1}(x)+(n-x+a)\varphi_n(x)+a\varphi_{n-1}(x)=0$$

La dernière étape consiste à normaliser cette relation. Pour ce faire, on pose :

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{n!}\hat{\varphi}_n(x)$$

Avec cette substitution on obtient :

$$\begin{aligned}
&(n+1)\frac{\hat{\varphi}_{n+1}(x)}{(n+1)!}+(n-x+a)\frac{\hat{\varphi}_n(x)}{n!}+a\frac{\hat{\varphi}_{n-1}(x)}{(n-1)!}=0\\
&\Rightarrow \frac{1}{n!}\hat{\varphi}_{n+1}(x)+\frac{n-x+a}{n!}\hat{\varphi}_n(x)+\frac{an}{n!}\hat{\varphi}_{n-1}(x)=0\\
&\Rightarrow \hat{\varphi}_{n+1}(x)+(n-x+a)\hat{\varphi}_n(x)+an\hat{\varphi}_{n-1}(x)=0
\end{aligned}$$

Théorème 1.7. ***(Théorème de Favard)****[4][10] Soient $\{A_n\}_{n\geqslant 0}$ et $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ deux suites de nombres complexes et $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite définie par la récurrence*

$$\begin{cases}\varphi_{n+1}(x)=(x-A_n)\varphi_n(x)-B_n\varphi_{n-1}(x), n\geqslant 0\\ \varphi_{-1}(x)=0, \varphi_0(x)=1,\end{cases}\tag{1.15}$$

alors, il existe une fonctionnelle moment £ unique telle que $\langle £, 1\rangle=\mu_0=B_0$ et

$$\langle £, \varphi_n\varphi_m\rangle=0, \quad si \quad n\neq m, n, m\geqslant 0\tag{1.16}$$

De plus, £ est admissible si et seulement si $B_n\neq 0$, $n\geqslant 0$ et £ est définie positive si et seulement si A_n sont réels et les $B_n>0$, $n\geqslant 0$.

Démonstration. Définissons la forme linéaire £ inductivement par

$$\langle £, 1\rangle = \mu_0 = B_0, \quad et \quad \langle £, \varphi_n(x)\rangle = 0, n \geqslant 1. \tag{1.17}$$

C'est-à-dire, on définit μ_1 par la condition $\langle £, \varphi_1(x)\rangle = \mu_1 - A_0\mu_0 = 0$, μ_2 par $\langle £, \varphi_2(x)\rangle = \mu_2 - (A_0 + A_1)\mu_1 + (B_2 - A_0A_1)\mu_0 = 0$ etc. Écrivons (1.15) sous la forme

$$x\varphi_n(x) = \varphi_{n+1}(x) + A_n\varphi_n(x) + B_n\varphi_{n-1}(x), n \geqslant 1, \tag{1.18}$$

on utilisons (1.17) on obtient

$$\langle £, x\varphi_n(x)\rangle = 0, n \geqslant 2.$$

Multiplions les deux cotés de (1.18) par x et utilisons le dernier résultat on voit que

$$\langle £, x^2\varphi_n(x)\rangle = 0, n \geqslant 3.$$

Continuons de la même manière, on en déduit

$$\begin{aligned}\langle £, x^k\varphi_n(x)\rangle &= 0, 0 \leqslant k \leqslant n.\\ \langle £, x^k\varphi_n(x)\rangle &= B_n\langle £, x^{n-1}\varphi_{n-1}(x)\rangle, n \geqslant 1.\end{aligned}$$

Il résulte que pour $m \neq n$, on a $\langle £, \varphi_m(x)\varphi_n(x)\rangle = 0$. Et

$$\langle £, \varphi_n^2(x)\rangle = \langle £, x^n\varphi_n(x)\rangle = B_0B_1\ldots B_n, n \geqslant 0.$$

Ainsi, £ est régulière si et seulement si $B_n \neq 0$ pour $n \geqslant 1$. □

Définition 1.9. *Une fonctionnelle moment est dite*

(a) symétrique si tous ses moments impairs sont nuls i.e.

$$\langle £, x^{2n+1}\rangle = \mu_{2n+1} = 0, \forall n \geqslant 0. \tag{1.19}$$

(b) antisymétrique si tous ses moments pairs sont nuls i.e.

$$\langle £, x^{2n}\rangle = \mu_{2n} = 0, \forall n \geqslant 1. \tag{1.20}$$

Théorème 1.8. *[4] Soit $\{\varphi_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ une SPO normalisée par rapport à £, alors on a les équivalences suivantes*

(i) £ est symétrique.

(ii) $\varphi_n(-x) = (-1)^n \varphi_n(x), \forall n \geqslant 0$

(iii) Les coefficients A_n de la récurrence, pour $n \geqslant 0$, sont tous nuls.

Remarque 1.2. *Il existe un lien très fort entre les SPO et les matrices de bandes. En effet, la relation de récurrence d'ordre deux* (1.15) *vérifiée par les SPO est le déterminant de la matrice tridiagonale représentée par*

$$\varphi_{n+1}(x) = \begin{vmatrix} x - A_n & 1 & 0 & \dots & 0 \\ B_n & x - A_{n-1} & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & 1 \\ 0 & \dots & 0 & B_1 & x - A_0 \end{vmatrix} \tag{1.21}$$

IV Identité de Cristoffel-Darboux

Théorème 1.9. *[4][10] Soit $\{\varphi_n(x)\}_{n \geqslant 0}$ une SPON vérifie la relation de récurrence d'ordre deux , alors*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle \pounds, \varphi_n^2 \rangle}{\langle \pounds, \varphi_k^2 \rangle} \varphi_k(x)\varphi_k(y) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{B_0 B_1 \ldots B_n}{B_0 B_1 \ldots B_k} \varphi_k(x)\varphi_k(y) \\ &= \frac{\varphi_{n+1}(x)\varphi_n(y) - \varphi_n(x)\varphi_{n+1}(y)}{x - y} \end{aligned} \tag{1.22}$$

En particulier, si en faisant tendre $y \to x$, on obtient la relation suivante

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\langle \pounds, \varphi_n^2 \rangle}{\langle \pounds, \varphi_k^2 \rangle} \varphi_k^2(x) = \varphi'_{n+1}(x)\varphi_n(x) - \varphi'_n(x)\varphi_{n+1}(x) \tag{1.23}$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi_n & \varphi_{n+1} \\ \varphi'_n & \varphi'_{n+1} \end{vmatrix} = \textit{Wronskien de } (\varphi_n, \varphi_{n+1}). \tag{1.24}$$

Si de plus £ est définie positive, alors la relation (1.23) *nous donne l'inégalité suivante*

$$\varphi'_{n+1}(x)\varphi_n(x) - \varphi'_n(x)\varphi_{n+1}(x) > 0, \forall n \geqslant 0 \textit{ et } \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.25}$$

Définition 1.10. *Soit $E \subset \mathbb{R}$. Une FM £ est dite définie positive sur E si pour tout polynôme réel $\pi(x)$ non négatif et non identiquement nul sur E, on ait $\langle \pounds, \pi(x) \rangle > 0$. L'ensemble E est dit support de £ .*

V Zéros des polynômes orthogonaux

Théorème 1.10. *[4][10][16] Soit $\{\varphi_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ une suite de polynômes orthogonaux par rapport à une fonctionnelle moment £ définie positive. Si le support de £ est un intervalle* I*, alors*

(i) Chaque polynôme φ_n possède n zéros $\{x_{n,k}\}_{k=1}^{n}$ réels $(n \geqslant 1)$, simples et distincts à l'intérieur de I*, qu'on supposera ordonnés d'une manière croissante i .e.*

$$x_{n1} < x_{n2} < ... < x_{nn}$$

(ii) Les zéros de $\varphi_n(x)$ et $\varphi_{n-1}(x)$ sont alternés, i .e. entre deux zéros de $\varphi_n(x)$ il y a un zéro de $\varphi_{n-1}(x)$,$n \geqslant 2$.

(iii) Pour tout $k \geqslant 1$, la suite des zéros $\{x_{n,k}\}_{n=k}^{\infty}$ est décroissante, cependant la suite $\{x_{n,n-k+1}\}_{n=k}^{\infty}$est croissante. En particulier, les limites

$$\xi_i = \lim_{n\to\infty} x_{n,i} \text{ et } \eta_j = \lim_{n\to\infty} x_{n,n-j+1}, i, j \geqslant 1$$

existent.

Définition 1.11. *L'intervalle $[\xi, \eta] = [\xi_1, \eta_1] = [\lim_{n\to\infty} x_{n,1}, \lim_{n\to\infty} x_{n,n}]$ est appelé le vrai intervalle d'orthogonalité de la fonctionnelle moment définie positive £.*

Théorème 1.11. *[4] Soient $\{\varphi_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ une SPON par rapport à une FM définie positive £ et $\{x_{n,k}\}_{k=1}^{n}$ les zéros de $\varphi_n(x)$, $n \geqslant 1$. Alors l'ensemble $\{x_{n,k} \mid n \geqslant 1, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ est le support de £. De plus le vrai intervalle d'orthogonalité $[\xi, \eta]$ est le plus petit intervalle fermé qui est le support de £. En particulier, $\varphi_n(\xi) \neq 0, \varphi_n(\eta) \neq 0, \forall n \geqslant 0$.*

VI Polynômes classiques

Définition 1.12. *une suite des polynômes orthogonaux $\{\varphi_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ est dite classique (en abréviation SPOC), si les dérivées successives quelconques sont orthogonaux.*

VI.1 Caractérisations des SPOC

- Bochner a démontré que les polynômes orthogonaux classiques sont les seules solutions de l'équation différentielle suivante :

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda_n y = 0, \tag{1.26}$$

avec $\sigma(x), \tau(x)$ sont des polynômes de degrés deux et un respectivement et λ_n est une constante de la forme suivante :

$$\lambda_n = \sigma''(x)n(n-1) + n\tau'(x)$$

En plus, Bochner a conclut qu'il existe seulement quatre familles de polynômes satisfont(1.26) sont les polynômes de Jacobi, Laguerre, Hermite et Bessel.

- Les polynômes orthogonaux classiques sont donnés par la formule d'orthogonalité (appelée formule de Rodrigues)

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{k_n w(x)} \frac{d^n}{dx^n}(\sigma^n(x)w(x)), \tag{1.27}$$

où k_n est une constante non nulle et w est une solution de l'équation différentielle dite de Pearson suivante

$$(\sigma w)' = \tau w, \tag{1.28}$$

avec $\sigma(x) = ax^2 + bx + c$ et $\tau(x) = dx + e$ donnons dans l'équation (1.26)

VI.2 Classification des SPOC

Par un changement de variable linéaire, les polynômes classiques admettent les représentations suivantes :

- **Jacobi :** notée $P_n^{(\alpha,\beta)}$ sont donnés par [14]

$$P_n^{(\alpha,\beta)} = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} C_{n+\alpha}^{n-k} C_{n+\beta}^{k} (x-1)^k (x+1)^{n-k}, n \geqslant 0. \tag{1.29}$$

qui sont satisfont l'équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre suivante

$$(1-x^2)y''(x) + [(\beta-\alpha) - (\alpha+\beta+2)x]y'(x) + n(n+\alpha+\beta+1)y(x) = 0. \tag{1.30}$$

- **Laguerre :** notée $L_n^{(\alpha)}$ sont donnés par [14]

$$L_n^{(\alpha)} = (-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} C_{n+\alpha}^{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}, n \geqslant 0. \tag{1.31}$$

Ainsi, l'équation différentielle correspondante est

$$xy''(x) + (\alpha + 1 - x)y'(x) = -ny(x). \tag{1.32}$$

- **Hermite :** notée $H_n(x)$ sont donnés par [14]

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n! x^{n-2k}}{k!(n-2k)!4^k}, n \geqslant 0. \tag{1.33}$$

Sont solution de l'équation suivante

$$y''(x) - 2xy'(x) = -2xy(x). \tag{1.34}$$

- **Bessel :** Sont solution de l'équation suivante [14]

$$x^2 y''(x) + (\alpha x + \beta)y'(x) = n(n + \alpha - 1)y(x). \tag{1.35}$$

Les polynômes de Bessel sont donnés par

$$B_n^{(\alpha,\beta)} = \begin{cases} x^n & si \quad e = 0 \\ \dfrac{e^{-n}}{\Gamma(d+2n-1)} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \Gamma(d+n+k-1) \left(\frac{x}{e}\right)^k & si \quad e \neq 0 \end{cases} \tag{1.36}$$

VII Théorie algébrique des fractions continues

Rappelons quelques notions sur les fractions continues.

Définition 1.13. *Soient $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ et $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ deux suites des nombres complexes. On appelle fraction continue toute expression de la forme suivante*

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \dots}}. \tag{1.37}$$

La réduite, ou le convergent, ou l'approximation, d'ordre n de la fraction continue, est la fraction

$$\pi_n = \frac{p_n}{q_n} = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{\ddots + \cfrac{b_n}{a_n}}}. \tag{1.38}$$

Avec p_n et q_n sont appelés les numérateurs et les dénominateurs respectivement et la fraction $(\frac{b_n}{a_n})$ est appelée le n-ième quotient partiel de la fraction continue (1.37).

Notation 1.2. *Pour simplifier l'écriture, quelques auteurs ont proposés divers notations pour écrire la fraction continue* (1.37)*. Par exemple*

$$a_0 + \frac{b_1|}{|a_1} + \frac{b_2|}{|a_2} + \cdots + \frac{b_n|}{|a_n} + \ldots \qquad \textit{(Pringsheim en 1898)}$$

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1+}\frac{b_2}{a_2+}\ldots\frac{b_n}{a_n+}\ldots \qquad \textit{(Rogers)}$$

Exemple 1.4. *Le nombre irrationnel $\sqrt{3}$ vérifie*

$$\sqrt{3} = 1 + (\sqrt{3} - 1) = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}+1} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{2}},$$

et puisque

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{3}},$$

alors

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\sqrt{3}}}.$$

Ainsi en remplaçant $\sqrt{3}$ par sa valeur on obtient la fraction continue infinie suivante

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}} = 1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} \dots.$$

Théorème 1.12. *Le numérateur et le dénominateur de la fraction continue* (1.37) *satisfont des relations de récurrence d'ordre* 2

$$\pi_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{a_{n+1}p_n + b_{n+1}p_{n-1}}{a_{n+1}q_n + b_{n+1}q_{n-1}}, \forall n \geqslant 0$$

avec

$$p_{-1} = 1, p_0 = a_0 \textit{ et } q_{-1} = 0, q_0 = 1$$

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur n. On peut écrire

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1p_0 + b_1p_{-1} \\ a_1q_0 + b_1q_{-1} \end{bmatrix}, \text{où} \begin{bmatrix} p_{-1} \\ q_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Supposons que, pour certain $n \geqslant 1$ on a

$$\frac{p_n}{q_n} = a_n \begin{bmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{bmatrix} + b_n \begin{bmatrix} p_{n-2} \\ q_{n-2} \end{bmatrix} \tag{1.39}$$

où $\begin{bmatrix} p_{-1} \\ q_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Ainsi, sachant que π_{n+1} est obtenu à partir de π_n en remplaçant a_n par $a_n + \dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$ alors les relations (1.39) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \pi_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} &= \frac{\left(a_n + \dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)p_{n-1} + b_np_{n-2}}{\left(a_n + \dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)q_{n-1} + b_nq_{n-2}} \\ &= \frac{a_{n+1}(a_np_n + b_np_{n-2}) + b_{n+1}p_{n-1}}{a_{n+1}(a_nq_n + b_nq_{n-2}) + b_{n+1}q_{n-1}} \\ &= \frac{a_{n+1}p_n + b_{n+1}p_{n-1}}{a_{n+1}q_n + b_{n+1}q_{n-1}} \end{aligned}$$

□

Théorème 1.13. *Tout nombre réel positif S a une écriture unique comme fraction continue*

$$a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots := [a_0, a_1, a_2, \ldots] \tag{1.40}$$

L'écriture est finie si et seulement si le nombre est rationnel.

Démonstration. Soit S un nombre réel positif. Alors, $S = [S] + \{S\}$, où $[S]$ est la partie entière de S et $\{S\}$ sa partie fractionnaire. Posons $a_0 = [S]$ et $\alpha_0 = \{S\}$. Alors, $\alpha_0 \in [0, 1[$. Si $\alpha_0 = 0$, l'écriture s'arrête là. sinon, $S_2 = \frac{1}{\alpha_0} > 1$. Alors $S_2 = [S_2] + \{S_2\}$. Posons $a_2 = [S_2]$ et $\alpha_1 = \{S_2\}$. Si $\alpha_1 = 0$, alors l'écriture s'arrête là. Sinon, $S_3 = \frac{1}{\alpha_1} > 1$. On itère.
Décrivons l'étape générale : $S_n = [S_n] + \{S_n\}$. Posons $a_n = [S_n]$ et $\alpha_n = \{S_n\}$. Si $\alpha_n = 0$, alors l'écriture s'arrête là. Sinon, $S_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n} > 1$.
Montrons l'unicité de cette écriture. Supposons que S ait deux écritures en fraction continue :

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots] = [c_0, c_1, c_2, \ldots].$$

Alors la partie entière de S, soit $[S]$, est égale à a_0 et aussi à c_0. Considérons maintenant $S_1 = \{S\} = S - [S]$. Alors $\frac{1}{S_1} = [a_1, a_2, a_3, \ldots] = [c_1, c_2, c_3, \ldots]$. Pour la même raison que précédemment, $a_1 = c_1$. Etc.
Il nous reste maintenant à montrer que l'écriture est finie si et seulement si le nombre est rationnel. Si on a une fraction continue finie, alors on peut simplifier la fraction en plusieurs étapes pour finalement la ramener à la forme $\frac{A}{B}$, où A et B sont deux entiers. Dans l'autre direction, supposons que $S = \frac{A}{B}$. Divisons A par B :

$$A = a_0 B + r_0,\ 0 \leqslant r_0 < B.$$

Alors, $[S] = a_0$ et $\{S\} = \alpha_0 = \frac{r_0}{B}$. Si $r_0 = 0$, on a fini. Sinon, $\frac{1}{\alpha_0} = \frac{B}{r_0}$. Divisons B par r_0 :

$$B = a_1 r_0 + r_1,\ 0 \leqslant r_1 < r_0.$$

Alors, $[\frac{1}{\alpha_0}] = a_1$ et $\{\frac{1}{\alpha_0}\} = \alpha_1 = \frac{r_1}{r_0}$. Si $r_1 = 0$, on a fini. Sinon, $\frac{1}{\alpha_1} = \frac{r_0}{r_1}$. Divisons r_0 par r_1 :

$$r_0 = a_2 r_1 + r_2,\ 0 \leqslant r_2 < r_1.$$

Etc. Peut-on continuer indéfiniment ? Non, puisqu'on a la suite décroissante

$$0 \leqslant \cdots \leqslant r_n < r_{n-1} < \cdots < r_2 < r_1 < r_0 < B,$$

il existe nécessairement n tel que $r_n = 0$ et on peut même voir que $n \leqslant B$. Donc, la fraction continue est finie. $\square$

Exemple 1.5. *Le nombre rationnel*

$$\frac{19}{12} = 1 + \frac{7}{12} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{12}{7}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{7}{5}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}.$$

Chapitre 2

Groupe de Riordan

Dans cette section, nous présentons les matrices de Riordan. Ces matrices jouent un rôle très important pour résoudre les problèmes combinatoires et aident pour construire une compréhension de nombreux modèles numériques.

I Séries formelles et fonctions génératrices

Définition 2.1. *Une série formelle est une somme infinie définie à partir d'une suite de nombre complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

où x est une variable formelle.

Définition 2.2. *On définit la somme et le produit de deux séries formelles respectivement par*

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) + (\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n.$$

Notation 2.1. *Notons $\mathbb{C}[[x]]$ l'ensemble des séries formelles à coefficient dans $\mathbb{C}$ et en une variable x.*

Définition 2.3. *On appelle ordre (ou valuation) de la série formelle $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, noté $ord(S)$, le plus petit entier n pour lequel a_n est non nul.*

Théorème 2.1. *Si f et g sont deux séries formelles, on a :*

$$ord(f+g) \geqslant min(ord(f), ord(g))$$
$$ord(fg) = ord(f) + ord(g).$$

Définition 2.4. *Soit $f \in \mathbb{C}[[x]]$ telle que $ord(f) \geqslant 1$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$. On appelle composée de g par f et on note $g(f)$ (ou $g \circ f$) la série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} b_n f^n$. On dit que $g \circ f$ est obtenue par substitution de f à x dans g.*

Définition 2.5. *On définit la dérivée de la série formelle $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ par*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Définition 2.6. *Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$. On dit que f est inversible pour la multiplication dans $\mathbb{C}[[x]]$ si et seulement si $a_0 \neq 0$, c'est-à-dire que $ord(f) = 0$.*

Définition 2.7. *Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ telle que $a_1 \neq 0$. On appelle série reverse de f l'unique série sans terme constant, notée $\bar{f}$ ou $f^{<-1>}$ ou $Rev(f(x))$ satisfaisant*

$$f(x) \circ \bar{f}(x) = \bar{f}(x) \circ f(x) = x.$$

Définition 2.8. *La fonction génératrice ordinaire (en abréviation FGO) de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la série formelle*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{2.1}$$

Exemple 2.1. ***(Nombres de Catalan)***
Soit

$$C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

La fonction génératrice ordinaire de nombres de Catalan est donnée par la forme

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \quad avec \quad C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}.$$

Définition 2.9. *La fonction génératrice exponentielle (que le noter par FGE) de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la série formelle*

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!}. \tag{2.2}$$

Exemple 2.2. ***(Nombres quadruple factoriels)***
Soit

$$B(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$$

La fonction génératrice exponentielle de nombres quadruple factoriels est donnée par la forme

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} \quad \text{avec} \quad B_n = \frac{(2n)!}{n!}.$$

Définition 2.10. *La FGO à deux variables de la suite $(a_{n,k})$ (où n et k sont des entiers naturels) est la série formelle à deux variables*

$$f(x,y) = \sum_{n,k} a_{n,k} x^n y^k. \tag{2.3}$$

Définition 2.11. *La FGE à deux variables de la suite $(b_{n,k})$ (où n et k sont des entiers naturels) est la série formelle à deux variables*

$$g(x,y) = \sum_{n,k} b_{n,k} \frac{x^n}{n!} y^k. \tag{2.4}$$

Remarque 2.1. *Si le produit de deux séries formelles f et g est égal à 1, alors f et g sont appelés séries réciproques.*

Définition 2.12. *La série réciproque $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ avec $a_0 = 1$, de la série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ avec $b_0 = 1$, où $g(x)f(x) = 1$, est donnée comme suit*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} b_i a_{n-i} x^n, \quad a_0 = 1. \tag{2.5}$$

Définition 2.13. *La série réciproque $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ avec $a_0 = 1$, de la série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!}$ avec $b_0 = 1$, où $g(x)f(x) = 1$, est donnée comme suit*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} b_i a_{n-i} \frac{x^n}{n!}, \quad a_0 = 1. \tag{2.6}$$

Notation 2.2. *Si* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on notera le* n*-ième coefficient de* $f(x)$ *par*

$$a_n = [x^n]f(x).$$

On utilise la notation $0^n = [x^n]1$ *pour la suite* $1, 0, 0, 0, \ldots$.

II Théorème d'inversion de Lagrange

Le théorème d'inversion de Lagrange permet d'écrire explicitement les coefficient de l'inverse (pour la substitution) $\bar{f}(x)$ d'une telle série formelle $f(x)$.

Théorème 2.2. *[1] Soient* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *une séries formelle sans terme constant telle que* $a_1 \neq 0$*, et* $\bar{f}(x)$ *la série du même type telle que* $f \circ \bar{f}(x) = f(\bar{f}(x)) = x$*. Alors*

$$n[x^n]\left(\bar{f}(x)\right)^k = k[x^{n-k}]\left(\frac{x}{f(x)}\right)^n \tag{2.7}$$

pour tous $n, k \in \mathbb{Z}$.

Théorème 2.3. *[7] soit* $\phi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k u^k \in \mathbb{C}[[u]]$ *avec* $\phi_0 \neq 0$*. Ensuite, l'équation* $y = z\phi(y)$ *admet une solution unique dans* $\mathbb{C}[[u]]$ *dont les coefficients sont donnés par*

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_n z^n, \quad y_n = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\phi(u)^n.$$

Le théorème d'inversion de Lagrange peut être écrit comme

$$[x^n]G(\bar{f}(x)) = \frac{1}{n}[x^{n-1}]G'(x)\left(\frac{x}{f(x)}\right)^n.$$

Le cas le plus simple est celui de $G(x) = x$*, dans lequel nous obtenons*

$$[x^n]\bar{f}(x) = \frac{1}{n}[x^{n-1}]\left(\frac{x}{f(x)}\right)^n.$$

Exemple 2.3. *On a* $xC(x) = \overline{x(1-x)}$ *avec* $C(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$*. On veut calculer les coefficients de* $C(x)$*. Pour cela, on utilise le théorème d'inversion de Lagrange*

$$[x^n]xC(x) = \frac{1}{n}[x^{n-1}]\left(\frac{x}{x(1-x)}\right)^n = \frac{1}{n}[x^{n-1}]\left(\frac{1}{1-x}\right)^n.$$

Ainsi,

$$[x^{n-1}]C(x) = \frac{1}{n}[x^{n-1}]\left(\frac{1}{1-x}\right)^n$$

en changeant $n-1$ par n, on obtient

$$\begin{aligned}
[x^n]C(x) &= \frac{1}{n+1}[x^n]\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1}[x^n]\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-(n+j)}{j}(-x)^j \\
&= \frac{1}{n+1}[x^n]\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-(n+j)+j-1}{j}(-1)^j(-x)^j \\
&= \frac{1}{n+1}[x^n]\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n+j}{j}x^j \\
&= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.
\end{aligned}$$

Pour $[x^n]C(x)^k$, on utilise $G(x) = x^k$ avec $G'(x) = kx^{k-1}$ et on applique le théorème d'inversion de Lagrange à

$$xC(x) = \overline{x(1-x)}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
[x^n](xC(x))^k &= [x^{n-k}]C(x)^k \\
&= \frac{1}{n}[x^{n-1}]kx^{k-1}\left(\frac{x}{x(1-x)}\right)^n \\
&= \frac{1}{n}[x^{n-1}]kx^{k-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)^n
\end{aligned}$$

en changeant $n-k$ par n, on obtient

$$\begin{aligned}
[x^n]C(x)^k &= \frac{1}{n+k}[x^{n+k-1}]kx^{k-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n+k} \\
&= \frac{k}{n+k}[x^{n+k-1-(k-1)}]\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n+k} \\
&= \frac{k}{n+k}[x^n]\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n+k} \\
&= \frac{k}{n+k}[x^n](1-x)^{-(n+k)} \\
&= \frac{k}{n+k}[x^n]\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-(n+k)}{j}(-x)^j \\
&= \frac{k}{n+k}[x^n]\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n+k+j-1}{j}(-1)^j(-x)^j \\
&= \frac{k}{n+k}[x^n]\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n+k+j-1}{j}x^j \\
&= \frac{k}{n+k}\binom{n+k+n-1}{n} \\
&= \frac{k}{n+k}\binom{2n+k-1}{n}.
\end{aligned}$$

III Groupe de Riordan

Définition 2.14. *Une matrice de Riordan (ordinaire respectivement exponentielle) notée par* $((g(x), f(x))$ *respectivement* $[g(x), f(x)])$ *est une matrice triangulaire inférieure infinie* $L = (l_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ *construite à partir de deux séries formelles (ordinaires respectivement exponentielles)* $g(x)$ *et* $f(x)$ *telle que* $g(0) \neq 0$ *et* $f(0) = 0$*. De telle manière* $l_{n,k} = [x^n]g(x)(f(x))^k$ *respectivement* $l_{n,k} = \frac{n!}{k!}[x^n]g(x)(f(x))^k$*.*
Si $f'(0) \neq 0$ *on dit que la matrice de Riordan est propre.*

Exemple 2.4. *Un exemple d'une matrice de Riordan est la matrice de Pascal suivante*

$$P = (p_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{1-x}, \frac{x}{1-x}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

pour lequel on a

$$\begin{aligned} p_{n,k} &= [x^n]\frac{1}{1-x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k \\ &= [x^{n-k}](1-x)^{-(k+1)} \\ &= [x^{n-k}]\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-(k+1)}{j}(-x)^k \\ &= [x^{n-k}]\sum_{j=0}^{\infty}\binom{k+1+j-1}{j}(-1)^k(-x)^k \\ &= [x^{n-k}]\sum_{j=0}^{\infty}\binom{k+j}{j}(x)^k \\ &= \binom{k+n-k}{n-k} \\ &= \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Exemple 2.5. *On considère la matrice de Riordan exponentielle* $L = [1, \dfrac{x}{1-x}]$. *Le terme général de cette matrice est calculé comme suit*

$$\begin{aligned} l_{n,k} &= \frac{n!}{k!}[x^n]\frac{x^k}{(1-x)^k} \\ &= \frac{n!}{k!}[x^{n-k}](1-x)^{-k} \\ &= \frac{n!}{k!}[x^n]\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-k}{j}(-1)^j x^j \\ &= \frac{n!}{k!}[x^n]\sum_{j=0}^{\infty}\binom{k+j-1}{j}x^j \\ &= \frac{n!}{k!}\binom{k+n-k-1}{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{n-k}. \end{aligned}$$

Remarque 2.2.

1. $g(x)(f(x))^k$ *pour* $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ *est la fonction génératrice ordinaire de la k-ième colonne de la matrice de Riordan ordinaire.*
2. $g(x)\dfrac{(f(x))^k}{k!}$ *pour* $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ *est la fonction génératrice exponentielle de la k-ième colonne de la matrice de Riordan exponentielle.*

Définition 2.15. *Le groupe de Riordan* $\mathcal{R} = \{(g(x), f(x)) \mid (g(x), f(x))$ *est une matrice de Riordan avec* $f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \ldots,\ f_0 = 0$ *et* $f_1 = 1\}$ *, i.e., chaque élément de* $\mathcal{R}$ *est une matrice triangulaire inférieure avec* 1 *sur le diagonale principale.*
La multiplication dans $\mathcal{R}$ *définie par* $(g(x), f(x))(d(x), h(x)) = (g(x)d(f(x)), h(f(x))$.
L'identité (où l'élément neutre) de la multiplication des matrices de Riordan est $I = (1, x)$ *, i.e.*

$$(1, x)(g(x), f(x)) = (g(x), f(x))(1, x) = (g(x), f(x)).$$

L'inverse de $(g(x), f(x))$ *est* $\left(\dfrac{1}{g(\bar{f}(x))}, \bar{f}(x)\right)$, *où* $\bar{f}(x)$ *est la reverse de* f*, i.e.*

$$f(\bar{f}(x)) = \bar{f}(f(x)) = x.$$

Pour vérifier la propriété de l'inverse, nous calculons

$$\left(\frac{1}{g(\bar{f}(x))}, \bar{f}(x)\right)(g(x), f(x)) = \left(\frac{1}{g(\bar{f}(x))}g(\bar{f}(x)), f(\bar{f}(x))\right) = (1, x).$$

Exemple 2.6. *Soit la matrice de pascal suivante*

$$P = \left(\frac{1}{1-x}, \frac{x}{1-x}\right)$$

Donc

$$\begin{aligned} PP &= \left(\frac{1}{1-x}, \frac{x}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x}, \frac{x}{1-x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1-x}\frac{1-x}{1-2x}, \frac{x}{1-x}\frac{1-x}{1-2x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1-2x}, \frac{x}{1-2x}\right). \end{aligned}$$

Maintenant, on veut calculer l'inverse de P. On a la reverse de $\frac{x}{1-x}$ *est* $\frac{x}{1+x}$, *donc*

$$\begin{aligned} P^{-1} &= \left(\left(\frac{1}{1-\frac{x}{1+x}}\right)^{-1}, \frac{x}{1+x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1+x}, \frac{x}{1+x}\right). \end{aligned}$$

Remarque 2.3. *Certains des sous-groupes importants de $\mathcal{R}$ sont : Appel, Lagrange, Checkerboard, Bell, ...*

- *Le sous-groupe Appel est $\{(g(x), x)\}$. Par exemple*

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 2 & 1 & 1 & & & \\ 4 & 2 & 1 & 1 & & \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 1 & \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ & & & & \cdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

- *Le sous-groupe Lagrange (ou associé) est $\{(1, f(x))\}$. Par exemple*

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & 1 & & & \\ 0 & 2 & 2 & 1 & & \\ 0 & 5 & 5 & 3 & 1 & \\ 0 & 14 & 14 & 9 & 4 & 1 \\ & & & & \dots & & \ddots \end{bmatrix}$$

- *Le sous-groupe Checkerboard est* $\{(g(x), f(x)) \mid g(x)$ *est une fonction paire et* $f(x)$ *est une fonction impaire* $\}$ *. Par exemple*

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ 2 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 3 & 0 & 1 & & \\ 6 & 0 & 4 & 0 & 1 & \\ 0 & 10 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ & & & & \dots & & \ddots \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}, \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x}\right).$$

- *Le sous-groupe Bell est* $\{(g(x), xg(x)\}$*. La matrice de Pascal* $P = \left(\frac{1}{1-x}, \frac{x}{1-x}\right)$ *comme un exemple.*

- *Le sous-groupe Dérivé est* $\{(g(x), f(x)) \mid f'(x) = g(x)\}$*.*

IV Caractérisations des matrices de Riordan

IV.1 Théorème fondamentale des matrices de Riordan

le théorème fondamental des matrices de Riordan est une passerelle importante pour prouver de nombreuses identités combinatoires et résoudre des problèmes liés aux sommes combinatoires.
Le théorème fondamental des matrice de Riordan (noté TFMR) est :

Théorème 2.4. *Soit $(g(x), f(x))$ une matrice de Riordan. Alors on a*

$$(g(x), f(x)) \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow g(x)A(f(x)) = B(x),$$

où $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ sont deux fonctions génératrices des suites (a_n) et (b_n) respectivement.

Démonstration. Nous regardons la matrice de Riordan $(g(x), f(x))$ colonne par colonne, multiplions par le vecteur colonne sur le coté gauche

$$\begin{bmatrix} \\ g & gf & gf^2 & \dots \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

on obtient

$$a_0 g + a_1 gf + a_2 gf^2 + \cdots = g(a_0 + a_1 f + a_2 f^2 + \dots) = g(x)A(f(x)) = B(x),$$

d'où le résulta. □

IV.2 A-suite (A-sequence)

La A-suite introduite par Rogers en (1978). Rogers à caractérisé les éléments de la matrice de Riordan par les éléments de la première colonne.

Théorème 2.5. *[15] Une matrice triangulaire inférieure infinie $D = (d_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ est une matrice de Riordan, si et seulement s'il existe une suite $A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tel que pour tout $n, k \in \mathbb{N}$ on a*

$$d_{n+1,k+1} = \sum_{i=0}^{n-k} a_i d_{n,k+1}, \tag{2.8}$$

si de plus, $D = (d(x), h(x))$, alors la fonction génératrice $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ de A-suite vérifie

$$h(x) = xA(h(x)) \Rightarrow A(x) = \frac{x}{\bar{h}(x)}. \tag{2.9}$$

IV.3 Z-suite (Z-sequence)

La Z-suite introduite par Merlini et al. Merlini à caractérisé les éléments de la première colonne d'une matrice de Riordan propre comme suit :

Théorème 2.6. *[12] Soit $D = (d(x), h(x)) = (d_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$. Alors on peut déterminer une suite unique $Z = (z_0, z_1, z_2, \dots)$ telle que tout élément dans la colonne 0 sauf les éléments dans la première ligne on peut exprimer comme une combinaison linéaire par les éléments d'autres lignes, avec*

$$d_{n+1,0} = \sum_{i=0}^{n} z_i d_{n,i}, n \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

La fonction génératrice de Z-suite vérifie

$$d(x) = \frac{d_0}{1 - x(Z(h(x))} \Rightarrow Z(x) = \frac{1}{\bar{h}(x)} \left(1 - \frac{d_0}{d(\bar{h}(x)} \right). \tag{2.11}$$

V Matrice de stieljes

Définition 2.16. *Soit $L = (l_{n,k})_{n,k}$ une matrice triangulaire inférieure avec $l_{i,i} = 1$ pour tout $i \geqslant 0$. La matrice de Stieltjes S_L associée à L est donnée par $S_L = L^{-1}\bar{L}$ où $\bar{L}$ est obtenu de L en supprimant la première ligne de L, i.e. $\bar{l}_{n,k} = l_{n+1,k}$. Par exemple, si I est l'identité, alors*

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

Remarquons que $\bar{L} = \bar{I}L$.
Notons que S_L est unique, i.e., $S_L = S_K \Leftrightarrow L = K$.

Exemple 2.7. *La matrice de Stieltjes associée à la matrice de Pascal est :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ddots & \\ & & \dots & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}.$$

VI Matrice de production

Un concept important pour la suite est dite la matrice de production.
La matrice de Stieltjes comme on a vue précédemment est une matrice infinie tridiagonale, nous avons fait maintenant une généralisation de cette matrice au groupe de Riordan, appelé une matrice de production qui définie par les termes suivants :
Soit P une matrice infinie (le plus souvent les éléments de cette matrice sont des entiers) et soit $r_0 = (1, 0, 0, 0, \dots)$ vecteur ligne.
On définit les lignes d'une autre matrice A_P par $r_i = r_{i-1}P$, $i \geqslant 1$. Dans ce cas P est dite la matrice de production pour A_P.
Si on pose maintenant

$$U^T = (1, 0, 0, 0, \dots),$$

alors , on obtient

$$A_P = \begin{bmatrix} U^T \\ U^T P \\ U^T P^2 \\ \vdots \\ \end{bmatrix}$$

et

$$DA_P = A_P P$$

où

$$D = (\delta_{i,j+1})_{i,j \geqslant 0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dans le contexte des matrice de Riordan, la matrice de production associée à une matrice de Riordan propre prend une forme particulière.

Proposition 2.1. *[6] Soit P une matrice de production infinie et soit A_P la matrice induite par P. Alors A_P est une matrice de Riordan (ordinaire) si et seulement si P est de la forme*

$$P = \begin{bmatrix} \xi_0 & \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \xi_1 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \xi_2 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & 0 & \dots \\ \xi_3 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \dots \\ \xi_4 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \dots \\ \xi_5 & \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

De plus, les colonnes 0 *et* 1 *de la matrice* P *sont respectivement les* $Z-$ *et* $A-$*suites de la matrice de Riordan* A_P.

Exemple 2.8. *On veut calculer la matrice de production de la matrice de Riordan* $D = (d_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}} = (C(x), xC(x))$, *avec* $C(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. *Pour se faire, on a*

$$xC(x) = \overline{x(1-x)},$$

donc

$$A(x) = \frac{x}{x(1-x)} = \frac{1}{(1-x)},$$

et

$$\begin{aligned} Z(x) &= \frac{1}{x(1-x)}\left[1 - \frac{1}{C(x(1-x))}\right] \\ &= \frac{1}{x(1-x)}\left[1 - \frac{1}{\frac{1}{1-x}}\right] \\ &= \frac{1}{x(1-x)}[1-(1-x)] \\ &= \frac{1}{(1-x)}. \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice de production de $D = (C(x), xC(x))$ *est la matrice*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Chapitre 3

Relation entre polynômes orthogonaux et matrices de Riordan

Pour chaque matrice de Riordan $(g(t), f(t))$ on peut associer une suite de polynômes définis par [11]

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)t^n = (g(t), f(t))\frac{1}{1-xt} = \frac{g(t)}{1-xf(t)}.$$

Alors, on peut poser la question de savoir quelles conditions doivent être satisfaites par $g(t)$ et $f(t)$ afin de s'assurer que $\{p_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ soit une suite des polynômes orthogonaux.

I Coefficients de récurrence et matrices de Riordan

Définition 3.1. *On dit que la matrice de Riordan $L = (g(x), f(x)) = (l_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ admet une C-suite $(c_0, c_1, c_2, \dots)$ si*

$$l_{n+1,k} = l_{n,k-1} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i l_{n-i,k} \quad pour \quad n, k = 0, 1, 2, \dots \tag{3.1}$$

où $l_{n,-1} = 0$.

Lemme 3.1. *Soient $L = (g(x), f(x))$ une matrice de Riordan et $C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_n x^k$ la fonction génératrice de C-suite, alors $f(x)$ et $C(x)$ sont liés par la relation suivante :*

$$f(x) = \frac{x}{1-xC(x)}. \tag{3.2}$$

Démonstration. Soient $L = (g(x), f(x)) = (l_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ une matrice de Riordan et $C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_n x^k$ la fonction génératrice de C-suite. On a

$$l_{n,k} = [x^n]g(x)f(x)^k,$$

de plus, on a

$$l_{n+1,k} = l_{n,k-1} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i l_{n-i,k} \text{ pour } n, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Donc la fonction génératrice du k-ième colonne de la matrice L est

$$g(x)f(x)^k = xg(x)f(x)^{k-1} + c_0 xg(x)f(x)^k + c_1 x^2 g(x)f(x)^k + \ldots$$

Par le calcul , on trouve

$$f(x) = \frac{x}{1 - xC(x)}.$$

□

Remarque 3.1. *Soit $\{p_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ une SPON vérifie*

$$\begin{cases} p_{n+1}(x) = (x - A_n)p_n(x) - B_n p_{n-1}(x) \\ p_0(x) = 1, p_1(x) = x - A_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

D'après l'expression (3.3), il est bien connu que $xP = JP$, avec $P = (p_0(x), p_1(x), p_2(x), \ldots,)^T$ et $J = (a_{i,j})_{i,j=0}^{\infty}$ est une matrice tridiagonale tels que

$$\begin{cases} a_{i,j} = 0 \quad pour \quad j > i + 1, \\ a_{i,j} = 1, i \geqslant 0, \\ a_{i,j} = 0 \quad pour \quad i > j + 1. \end{cases}$$

Plus précisément, la matrice J peut être écrite comme :

$$\begin{bmatrix} A_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ B_1 & A_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & B_2 & A_2 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & B_3 & A_3 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & B_4 & A_4 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_5 & A_5 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

et J est appelée la matrice de Jacobi normalisée de SPON $\{p_n\}_{n\geqslant 0}$.
Maintenant, si on pose

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^k,$$

alors d'après (3.3), *on a*

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_{n+1,k} x^k = (x - A_n) \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^k - B_n \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k} x^k$$

On déduit que

$$a_{n+1,0} = -A_n a_{n,0} - B_n a_{n-1,0} \tag{3.5}$$

$$a_{n+1,k} = a_{n,k-1} - A_n a_{n,k} - B_n a_{n-1,k} \tag{3.6}$$

Si A_n et B_n sont constantes avec $A_n = A$ et $B_n = B$, alors la suite $(1, -A, -B, 0, 0, \dots)$ forme une A-suite pour le tableau de coefficients.

II Polynômes orthogonaux et matrices de Riordan ordinaires

La question que se pose immédiatement, quelles sont les conditions pour une matrice de Riordan est un tableau de coefficients d'une suite des polynômes orthogonaux ? Une réponse partielle est donnée par la proposition suivante :

Proposition 3.1. *Chaque matrice de Riordan de la forme*

$$\left(\frac{1}{1 + rx + sx^2}, \frac{x}{1 + rx + sx^2} \right) \tag{3.7}$$

est un tableau de coefficients d'une SPON.

Démonstration. On remarque que $\dfrac{x}{1 + rx + sx^2} = \dfrac{x}{1 - xC(x)}$, avec $C(x) = -r - sx$, donc la matrice de Riordan $(a_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{1 + rx + sx^2}, \dfrac{x}{1 + rx + sx^2} \right)$ admet une C-suite, i.e.

$$a_{n+1,k} = a_{n,k-1} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i a_{n-i,k} \text{ pour } n, k = 0, 1, 2, \dots$$

où $a_{n,-1} = 0$ et $C(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_n x^n$ la fonction génératrice de C-suite.

Dans ce cas, on a

$$a_{n+1,k} = a_{n,k-1} - ra_{n,k} - sa_{n-1,k}$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} a_{n+1,k}x^k &= \sum_{k=1}^{n} a_{n,k-1}x^k - r\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}x^k - s\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}x^{k+1} - r\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}x^k - s\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}x^k \\ &= (x-r)\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}x^k - s\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}x^k\end{aligned}$$

Posons $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}x^k$, on obtient

$$p_{n+1}(x) = (x-r)p_n(x) - sp_{n-1}(x).$$

□

Exemple 3.1. *La matrice de Riordan* (3.7) *est un tableau de coefficients de polynômes de Tchebychev modifiés de la deuxième espèce donnés par*

$$P_n(x) = (\sqrt{s})^n U_n\left(\frac{x-r}{2\sqrt{s}}\right),\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

avec

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n-k}{k}(-1)^k(2x)^{n-2k}.$$

On a

$$\frac{1}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n.$$

Donc

$$\frac{1}{1-2\frac{x-r}{2\sqrt{s}}\sqrt{s}t+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n\left(\frac{x-r}{2\sqrt{s}}\right)(\sqrt{s}t)^n.$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-2\frac{x-r}{2\sqrt{s}}\sqrt{s}t+t^2} &= \frac{1}{1-(x-r)t+st^2}\\ &= \left(\frac{1}{1+rt+st^2}, \frac{t}{1+rt+st^2}\right)\frac{1}{1-xt}.\end{aligned}$$

Donc

$$\left(\frac{1}{1+rt+st^2}, \frac{t}{1+rt+st^2}\right)\frac{1}{1-xt} = \sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{s})^n U_n\left(\frac{x-r}{2\sqrt{s}}\right)t^n.$$

Proposition 3.2. *Chaque matrice de Riordan de la forme*

$$\left(\frac{1-\lambda x-\mu x^2}{1+rx+sx^2}, \frac{x}{1+rx+sx^2}\right) \tag{3.8}$$

est un tableau de coefficients d'une SPON.

Démonstration. On a

$$\left(\frac{1-\lambda x-\mu x^2}{1+rx+sx^2}, \frac{x}{1+rx+sx^2}\right) = (1-\lambda x-\mu x^2, x)\left(\frac{1}{1+rx+sx^2}, \frac{x}{1+rx+sx^2}\right),$$

où

$$(1-\lambda x-\mu x^2, x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\mu & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\mu & -\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\mu & -\lambda & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & -\lambda & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Posons

$$\begin{aligned} B = (b_{n,k}) &= \left(\frac{1-\lambda x-\mu x^2}{1+rx+sx^2}, \frac{x}{1+rx+sx^2}\right)\\ A = (a_{n,k}) &= \left(\frac{1}{1+rx+sx^2}, \frac{x}{1+rx+sx^2}\right),\end{aligned}$$

avec

$$a_{n+1,k} = a_{n,k-1} - ra_{n,k} - sa_{n-1,k} \tag{3.9}$$

$$\tag{3.10}$$

on a

$$B = \left(1 - \lambda x - \mu x^2, x\right) A,$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
b_{n+1,k} &= a_{n+1,k} - \lambda a_{n,k} - \mu a_{n-1,k},\\
b_{n,k-1} &= a_{n,k-1} - \lambda a_{n-1,k-1} - \mu a_{n-2,k-1},\\
b_{n,k} &= a_{n,k} - \lambda a_{n-1,k} - \mu a_{n-2,k},\\
b_{n-1,k} &= a_{n-1,k} - \lambda a_{n-2,k} - \mu a_{n-3,k}.
\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant l'équation (3.9) et les équations équivalentes pour $a_{n,k}$ et $a_{n-1,k}$, nous voyons que

$$b_{n+1,k} = b_{n,k-1} - r b_{n,k} - s b_{n-1,k}$$

posons $\varphi_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_{n,k} x^k$, on obtient

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x - r - \lambda, \quad \varphi_2(x) = x^2 - (2r+\lambda)x + \lambda r - \mu + r^2 - s, \ldots,$$

nous voyons que la suite de polynômes orthogonaux est défini par A-suite

$$(r + \lambda, r, r, r, \ldots)$$

et Z-suite

$$(s + \mu, s, s, s, \ldots).$$

□

III Polynômes orthogonaux et matrices de Stieltjes

Nous nous intéressons dans cette section à la relation entre Polynômes orthogonaux et matrices de Stieltjes.

Proposition 3.3. *Soit L une matrice de Riordan, où*

$$L^{-1} = \left(\frac{1 - \lambda x - \mu x^2}{1 + ax + bx^2}, \frac{x}{1 + ax + bx^2}\right).$$

Alors la matrice de Stieltjes de L donnée par

$$P = S_L = \begin{bmatrix} a+\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b+\mu & a & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b & a & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b & a & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & b & a & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & a & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Démonstration. Soit

$$(g(x), f(x)) = L = \left(\frac{1-\lambda x-\mu x^2}{1+ax+bx^2}, \frac{x}{1+ax+bx^2}\right)^{-1}.$$

Par la définition de l'inverse, on a

$$\bar{f}(x) = \frac{x}{1+ax+bx^2},$$

donc

$$A(x) = \frac{x}{\bar{f}(x)} = 1+ax+bx^2$$

de plus, on a

$$\frac{1}{g(\bar{f}(x))} = \frac{1-\lambda x-\mu x^2}{1+ax+bx^2}$$

donc

$$\begin{aligned} Z(x) &= \frac{1}{\bar{f}(x)}\left[1-\frac{1}{g(\bar{f}(x))}\right] \\ &= \frac{1+ax+bx^2}{x}\left[1-\frac{1-\lambda x-\mu x^2}{1+ax+bx^2}\right] \\ &= \frac{1+ax+bx^2}{x}\left[1-ax+bx^2-1+\lambda x+\mu x^2\right] \\ &= (a+\lambda)+(b+\mu)x. \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.1. *Si $L = (g(x), f(x))$ une matrice de Riordan et $P = S_L$ est tridiagonal, avec*

$$P = S_L = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b_1 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b & a & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b & a & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & b & a & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & a & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

alors L^{-1} est un tableau de coefficients d'une suite de polynômes orthogonaux $\{p_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ vérifié la récurrence suivante

$$\begin{cases} p_{n+1}(x) = (x-a)p_n(x) - b_n p_{n-1}(x), n \geqslant 2 \\ p_0(x) = 1, p_1(x) = x - a_1, \end{cases} \tag{3.12}$$

avec b_n est la suite $0, b_1, b, b, \dots$.

Démonstration. D'après le théorème de Favard, il suffit de montrer que L^{-1} définit une suite des polynômes $\{p_n(x)\}$ vérifié la récurrence (3.12). Maintenant L est triangulaire inférieur et L^{-1} est un tableau de coefficients d'une suite de polynômes $p_n(x)$ (avec le $\deg(p_n(x)) = n$, alors

$$L^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ p_3(x) \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

On a

$$S_L.L^{-1} = L^{-1}.\bar{L}.L^{-1} = L^{-1}.\bar{I}.L.L^{-1} = L^{-1}.\bar{I}.$$

Ainsi

$$S_L.L^{-1}.(1, x, x^2, x^3, \dots)^T = L^{-1}.\bar{I}.(1, x, x^2, x^3, \dots)^T = L^{-1}.(x, x^2, x^3, \dots)^T.$$

On obtient donc

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b_1 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b & a & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b & a & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & b & a & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & a & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ p_3(x) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xp_0(x) \\ xp_1(x) \\ xp_2(x) \\ xp_3(x) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Finalement, on déduit que

$$p_1(x) = x - a_1,$$

et

$$p_{n+1}(x) + ap_n(x) + b_n p_{n-1}(x) = xp_n(x), \, n \geqslant 1,$$

or

$$p_{n+1}(x) = (x-a)p_n(x) - b_n p_{n-11}(x), \, n \geqslant 1.$$

□

En combinant les résultats avec le corollaire précédent, on obtient

Théorème 3.1. *Soit $L = (g(x), f(x))$ une matrice de Riordan. l'inverse de L est un tableau de coefficients d'une suite des polynômes orthogonaux si et seulement si la matrice de production $P = S_L$ est tridiagonale.*

Nous donnons l'exemple suivant

Exemple 3.2. *Si $L = (g(x), f(x))$ une matrice de Riordan et $P = S_L$ est tridiagonale, alors*

$$P = S_L = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b_1 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b & a & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b & a & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & b & a & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & a & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

où

$$f(x) = Rev\frac{x}{1+ax+bx^2} \text{ et } g(x) = \frac{1}{1-a_1x-b_1xf}$$

Nous donnons maintenant le résultat entre les moments et les matrices de Riordan

Proposition 3.4. *Soit $L = (g(x), f(x))$ une matrice de Riordan avec une matrice de production tridiagonale S_L. Alors*

$$[x^n]g(x) = £(x^n),$$

où £ est la fonctionnelle moment de la suite de polynômes orthogonaux.

Démonstration. Soit $L = (l_{i,j})_{i,j\geqslant 0}$. On a [17]

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} l_{n,i} p_i(x).$$

En appliquant £, on trouve

$$£(x^n) = £\left(\sum_{i=0}^{n} l_{n,i} p_i(x)\right) = \sum_{i=0}^{n} l_{n,i} £(p_i(x)) = \sum_{i=0}^{n} l_{n,i} \delta_{i,0} = l_{n,0} = [x^n]g(x).$$

□

Corollaire 3.2. *Soit $L = (g(x), f(x))$ une matrice de Riordan ordinaire avec S_L matrice tridiagonale. Alors les moments μ_n associe à une suite de polynômes orthogonaux sont donnés par les termes de la première colonne de la matrice L.*

Théorème 3.2. *Soit $\{p_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ une SPON par rapport à une FM £ vérifie la récurrence à trois termes suivante :*

$$p_{n+1}(x) = (x - A_n)p_n(x) - B_n p_{n-1}(x), n \geqslant 1.$$

Alors la série génératrice des moments $\mu_k = £(x^k)$ s'exprime par une fraction continue

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k x^k = \cfrac{\mu_0}{1 - A_0 x - \cfrac{B_1 x^2}{1 - A_1 x - \cfrac{B_2 x^2}{1 - A_2 x - \cfrac{B_3 x^2}{1 - A_3 x - \dots}}}}.$$

IV Polynômes orthogonaux et matrices de Riordan exponentielles

Proposition 3.5. *Soit $A = (a_{n,k})_{n,k\geqslant 0} = [g(x), f(x)]$ une matrice de Riordan exponentielle et soit*

$$c(y) = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \dots, \quad r(y) = r_0 + r_1 y + r_2 y^2 + \dots \tag{3.13}$$

deux séries formelles telles que

$$r(f(x)) = f'(x) \tag{3.14}$$

$$c(f(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}. \tag{3.15}$$

Alors

$$a_{n+1,0} = \sum_i i! c_i a_{n,i} \tag{3.16}$$

$$a_{n+1,k} = r_0 a_{n,k-1} + \frac{1}{k!} \sum_{i \geqslant k} i!(c_{i-k} + k r_{i-k+1}) a_{n,i} \tag{3.17}$$

or, en supposant $c_k = 0$ pour $k < 0$ et $r_k = 0$ pour $k < 0$,

$$a_{n+1,k} = \frac{1}{k!} \sum_{i \geqslant k-1} i!(c_{i-k} + k r_{i-k+1}) a_{n,i}. \tag{3.18}$$

Inversement, à partir des suites définies par (3.13)*, la matrice infinie $(a_{n,k})_{n,k\geqslant 0}$ défini par*(3.18) *est une matrice de Riordan exponentielle.*

Une conséquence de cette proposition est que la matrice de production $P = (p_{i,j})_{i,j\geqslant 0}$ pour une matrice de Riordan exponentielle obtenu comme dans la proposition satisfait[5][6]

$$p_{i,j} = \frac{i!}{j!}(c_{i-j} + j r_{i-j+1}) \quad (c_{-1} = 0).$$

De plus, la fonction génératrice exponentielle à deux variables

$$\phi_P(t,z) = \sum_{n,k} p_{n,k} t^k \frac{z^n}{n!}$$

de la matrice P est donnée par

$$\phi_P(t,z) = e^{tz}(c(z) + t r(z)).$$

Notez en particulier que nous avons

$$r(x) = f'(\bar{f}(x)), \tag{3.19}$$

et

$$c(x) = \frac{g'(\bar{f}(x))}{g(\bar{f}(x))} \tag{3.20}$$

Proposition 3.6. *[9] Si $L = [g(x), f(x)]$ est une matrice de Riordan exponentielle et $P = S_L$ est tridiagonale, alors forcément*

$$P = S_L = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \beta_1 & \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \beta_2 & \alpha_2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \beta_3 & \alpha_3 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4 & \alpha_4 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_5 & \alpha_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

où $\{\alpha_i\}_{i \geqslant 0}$ est une suite arithmétique avec une différence commune α, $\{\frac{\beta_i}{i}\}_{i \geqslant 1}$ est une suite arithmétique avec une différence commune β, et

$$\ln(g) = \int (\alpha_0 + \beta_1 f)\, dx,\ g(0) = 1,$$

où f est donné par

$$f' = 1 + \alpha f + \beta f^2,\ f(0) = 0.$$

Corollaire 3.3. *Si $L = [g(x), f(x)]$ une matrice de Riordan exponentielle et $P = S_L$ est tridiagonale, avec*

$$P = S_L = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \beta_1 & \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \beta_2 & \alpha_2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \beta_3 & \alpha_3 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4 & \alpha_4 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_5 & \alpha_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

alors L^{-1} est la matrice de coefficients de la suite des polynômes orthogonaux $\{p_n(x)\}_{n \geqslant 0}$ définie par la récurrence suivante

$$\begin{cases} p_{n+1}(x) = (x - \alpha_n) p_n(x) - \beta_n p_{n-1}(x), n \geqslant 0 \\ p_0(x) = 1, p_1(x) = x - \alpha_0 \end{cases}$$

Nous combinons les résultats précédents, nous avons le théorème suivant

Théorème 3.3. *Soit $L = [g(x), f(x)]$ une matrice de Riordan exponentielle. L'inverse de L est un tableau de coefficients d'une suite de polynômes orthogonaux si et seulement si la matrice de production $P = S_L$ est tridiagonale.*

Proposition 3.7. *Soit $L = [g(x), f(x)]$ une matrice de Riordan exponentielle avec S_L tridiagonale. Alors*

$$n![x^n]g(x) = \pounds(x^n) = \mu_n,$$

où £ est la fonctionnelle moment de la suite de polynômes orthogonaux.

Démonstration. Soit $L = (l_{i,j})_{i,j \geqslant 0}$. On a

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} l_{n,i} p_i(x).$$

En appliquant £, on trouve

$$\pounds(x^n) = \pounds\left(\sum_{i=0}^{n} l_{n,i} p_i(x)\right) = \sum_{i=0}^{n} l_{n,i} \pounds(p_i(x)) = \sum_{i=0}^{n} l_{n,i} \delta_{i,0} = l_{n,0} = n![x^n]g(x).$$

□

Corollaire 3.4. *Soit $L = [g(x), f(x)]$ une matrice de Riordan exponentielle avec S_L tridiagonale. Alors les moments μ_n associe à une suite de polynômes orthogonaux sont donnés par les termes de la première colonne de la matrice L.*

Bibliographie

[1] R. Bacher et B. Lass, Développements limités et réversion des séries, October 23,2006.

[2] P. Barry, Riordan Arrays, Orthogonal Polynomials as Moments, and Hankel Transforms, Vol. 14 (2011).

[3] P. Barry, A. Hennessy, Meixner-Type Results for Riordan Arrays and Associated Integer Sequences, Vol. 13 (2010).

[4] T. S. Chihara, An Introduction to Orthogonal Polynomials, Gordon and Breach, NewYork , 1978.

[5] E. Deutsch, L. Ferrari, S. Rinaldi, Production matrices, Adv. in Appl. Math. 34 (2005) 101-122.

[6] E. Deutsch, L. Ferrari, S. Rinaldi, Production matrices and Riordan arrays, Ann. Comb. 13 (2009) 65-85.

[7] P. Flajolet and R. Sedgewick, Analytic Combinatorics, Cambridge University press, Cambridge, UK, 2002.

[8] S.-T. Jin, A characterization of the Riordan Bell subgroup by C-sequences, Korean J. Math. 17 (2009),147-154.

[9] A. Krelifa and E. Zerouki, Riordan arrays and d-orthogonality, Linear Algebra and its Applications.

[10] K. H. Kwon, Orthogonal polynomials I (Lecture notes), Department of Mathematics. KAIST, (2001).

[11] A. Luzon and M. A. Moron, Recurrence relations for polynomial sequences via Riordan matrices, Linear Alg. Appl., 433 (2010), 1422-1446.

[12] D. Merlini, D. G. Rogers, R. Sprugnoli, M. C. Verri, On some alternative characterisation of Riordan arrays, Can. J. Math 49 (1997) 301-320.

[13] A. M. Mwafise, Riordan Arrays, Elliptic Functions and their Application, June (2017).

[14] E. D. Rainville, Special functions, TheMacmillan Company, New York, 1960.

[15] D. G. Rogers, Pascal triangles, Catalan numbers and Renewal arrays Discrete Math 22 (1978), 301-310.

[16] G. Szegö, Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol 23, Amer. Math. Soc. Providence, RI. 1975. Fourth Edition.

[17] G. Viennot, Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux, UQAM, Montreal, Quebec, 1983.