

---

**République Algérienne Démocratique et Populaire**

**Ministère de l'Enseignement Supérieur**

**et de la Recherche Scientifique**

**Université de Khemis Miliana**



Mémoire de Fin d'Étude de Master Académique

Spécialité : **Analyse Mathématiques et Applications**

Filière : **Mathématiques**

**Présenté par**

**KHELILI Benmira**

---

**TOPOLOGIE DIFFERENTIELLE ET THEORIE DES  
JEUX**

---

Soutenu le 14/09 2017

Jury de soutenance

Mr : A. YACH

Président

Md: F. MEGHATRIA

Examineur 1

Mr : M. BOUKEDROUN

Examineur 2

Mr : A. KALI

Encadrant

*Année Universitaire 2016/2017*

# Dédicaces

## **Ce travail est dédié:**

À mon cher père et ma mère

À mes très chers frères et sœurs

À mes cher amis Lakhder Mohammedi et Mohamed Belarbi et

tous mes amis.

# Remerciements

En premier lieu je tiens à remercier **ALLAH** qui m'a aidé et m'a donné la patience et le courage durant ces longues années d'étude.

Je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Ces remerciements vont tout d'abord au corps professoral et administratif de la Faculté des Sciences Technologie, pour la richesse et la qualité de leur enseignement et qui déploient de grands efforts pour assurer à leurs étudiants une formation actualisée.

Je tiens à remercier sincèrement mon encadrant Mr : A. KALI qui est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans lui que ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

J'exprime aussi mes remerciements pour les membres de jury : Mr : A. YACH, Mr : M.

BOUKEDROUN et Madame : MEGHATRIA, qui ont accepté d'évaluer mon mémoire. Je n'oublie pas mes parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, sans oublier mes collègues de Master 2, qui m'ont toujours encouragée au cours de la réalisation de ce travail.

Merci à tous.

# Table des matières

• <b>Introduction</b> .....	6
<b>I. RAPPEL GÉOMÉTRIQUE ET TOPOLOGIQUE</b> .....	7
1. Définition du Point fixe.....	7
2. Définition des fonctions convexes .....	7
3. Cas où les fonctions sont strictement concaves .....	7
4. Définition de topologie .....	7
5. Définition de la topologie différentielle .....	8
6. Définition d'un espace topologique séparé.....	8
7. Définition de homéomorphisme .....	8
8. Définition de compact .....	8
9. Définition de connexe.....	9
10. Définition de variété topologique .....	9
11. Définition de carte .....	9
12. Définition de sous-variété .....	9
13. Définition de atlas.....	9
14. Définition de bord.....	9
15. Définition d'espace complet.....	10
16. Définition d'une norme.....	10
17. Définition d'un espace de Banach.....	11
18. Définition du fibré .....	11
19. Définition de sous-fibre.....	11
20. Définition de fibré tangent.....	11
21. Théorème de point fixe.....	11
22. Théorème de Von Neumann.....	12
23. structurellement stable.....	12
24. Le théorème des fonctions implicites.....	12

<b>II. TOPOLOGIE DIFFERENTIELLE ET THEORIE DES JEUX.....</b>	<b>14</b>
1. <b>LA THEORIE CLASSIQUE DES JEUX A DEUX PERSONNES.....</b>	<b>14</b>
1.1. Théorie des jeux.....	14
1.2. Ensemble de Pareto.....	16
1.3. Ensemble de Pareto dans le cas d'un jeu coopératif et dans le cas non coopératif.....	16
1.4. Notion d'équilibre.....	18
1.5. Hypothèse d'unicité (H).....	19
1.6. Théorème Lefschetz.....	19
2. <b>STABILITE STRUCTURELLE.....</b>	<b>21</b>
3. <b>SEUILS .....</b>	<b>35</b>
4. <b>STABILITE STRUCTURELLE ET GENERICITE.....</b>	<b>39</b>
• <b>Conclusion .....</b>	<b>49</b>
• <b>Bibliographie.....</b>	<b>50</b>

## Introduction

Dans ce mémoire, nous allons donner quelques rappels topologique et géométrique dans le premier chapitre et dans le deuxième chapitre qui se compose de quatre parties nous allons expliquer la théorie de jeux à deux personnes et nous allons voir aussi la définition de la jeu avec des exemples et nous allons voir la définition de l'ensemble de Pareto, et on va nous allons voir aussi la stabilité structurelle d'un jeu et dans cette partie nous avons fait l'explication de quelques propriétés et des formules comme la formule de Künneth et l'étude de stabilité structurelle, et nous avons énoncé le théorème des fonctions implicites et nous connaissons l'utilisation de ce théorème, et donnons quelques démonstrations des propriétés, et nous allons voir les seuils dans la troisième partie et dans la dernière partie nous allons étudier et expliquer la stabilité structurelle et la genericité, et en concluons par une conclusion générale.

# CHAPITRE I

## RAPPEL GÉOMÉTRIQUE ET TOPOLOGIQUE

Dans ce chapitre nous allons rappelons quelques définitions géométrique et topologique et des théorèmes.

### 1. Définition du Point fixe

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I = [a, b]$  de  $\mathbb{R}$ , et à valeurs dans  $I$  On s'intéresse à la suite  $u_{n+1} = f(u_n)$ ,  $u_0 \in I$ .

Supposons que  $u_n$  converge vers une limite  $l \in I$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , alors la limite doit vérifier  $f(l) = l$ .

Puisque  $f$  est continue. On dit que  $l$  est un point fixe de  $f$ . Ceci amène à l'idée d'utiliser ces suites pour résoudre numériquement l'équation  $f(x) = x$ .

### 2. Définition des fonctions convexes

Une fonction  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dit convexe lorsque :

$$\forall (x, y) \in I \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

$f$  Sera dite concave si  $-f$  est convexe.

### 3. Cas où les fonctions sont strictement concaves

Remarquons simplement que si l'on remplace "concave" par "strictement concave", on est ramené à l'énoncé précédent:  $f(\cdot, v)$ , et  $g(u, \cdot)$  atteignent leur maximum en un point unique et  $U$  et  $V$  sont contractiles puisque convexes.

### 4. Définition de topologie:

Une **topologie** sur  $E$  est une famille  $T$  de parties de  $E$  vérifiant :

- 1)  $\emptyset$  et  $E$  sont des éléments de  $T$ .
- 2) Toute réunion quelconque d'éléments de  $T$  est un élément de  $T$ .
- 3) toute intersection finie d'éléments de  $T$  est un élément de  $T$ .

Les éléments de  $T$  sont appelés les ouverts de la topologie. Le couple  $(E, T)$ , est appelé un espace topologique.

**5. Définition de la topologie différentielle:** est une branche des mathématiques qui étudie les fonctions différentiables définies sur des variétés différentielles, ainsi que les applications différentiables entre variétés différentielles. Elle est reliée à la géométrie différentielle, discipline avec laquelle elle se conjugue pour construire une théorie géométrique des variétés différentiables.

#### **6. Définition d'un espace topologique séparé**

Un espace topologique  $E$  est séparé si, quels que soient les points distincts  $x$  et  $y$  de  $E$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  et un voisinage  $V$  de  $y$  dont l'intersection est vide.

#### **7. Définition de homéomorphisme**

Soient  $X$  et  $Y$  des espaces topologiques. On dit que  $f : X \rightarrow Y$  est un homéomorphisme (ou que  $X$  et  $Y$  sont homéomorphes) si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- (1)  $f$  est continue
- (2)  $f$  est une bijection, dont l'inverse est noté  $f^{-1} : Y \rightarrow X$
- (3) L'application  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  est continue.

#### **8. Définition de compact**

Un espace topologique  $T$  est dit **compact** si et seulement si  $T$  est une partie fermée et bornée.

## 9. Définition de connexe

Un espace topologique  $T$  est dit **connexe** s'il ne s'écrit pas comme réunion disjointe de deux ouverts non vides. De façon équivalente, si les seules parties à la fois ouvertes et fermées de  $T$  sont l'ensemble vide et  $T$  lui-même.

## 10. Définition de variété topologique

Une **variété topologique** de dimension  $n$  est un espace topologique séparé et compact dont tout point admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

**11. Définition de carte:** Soit  $E$  un espace topologique, une carte sur  $E$  est une paire  $(U, X)$  où  $U$  est un ouvert de  $E$  et  $X = (x_1, \dots, x_p)$  est un homéomorphisme de  $U$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ . Les fonctions  $x_i$  sont les coordonnées de  $X$ , l'ouvert  $U$  est le domaine de la carte, l'entier  $p$  est la dimension de la carte.

**12. Définition de sous-variété :** Une partie  $Y$  d'une variété  $X$  est une **sous-variété** de dimension  $k$  si tout point de  $Y$  est contenu dans le domaine d'une carte  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  vérifiant

$$\varphi(Y \cap U) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^{n-k} \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k.$$

**13. Définition de atlas:** Un atlas est un ensemble de cartes  $\{(U_i, X_i)\}$  de même dimension qui sont  $C^\infty$  compatibles et telles que  $\{U_i\}$  est un recouvrement de  $E$ . (Deux cartes  $(U, X)$  et  $(V, Y)$  sont  $C^\infty$ -compatibles si le changement de cartes  $Y \circ X^{-1}$  de  $X(U \cap V)$  vers  $Y(U \cap V)$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme).

**14. Définition de bord :** Soit  $M$  une variété différentiable avec un atlas  $A = \{g_i : U_i \rightarrow V_i\}$ . On définit le **bord** de  $M$  noté  $\partial M$  par  $\partial M \cap U_i = g_i^{-1}(V_i \cap \partial \mathbb{R}^n)$ ,  
 $(\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \leq 0\})$ .

Le bord de  $M$  est une variété sans bord (i.e., à bord vide) de dimension  $n - 1$ . Son atlas est donné par la restriction des  $g_i$  à  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1}$ . L'intérieur est formé des points de  $M$  qui ne sont pas sur le bord : toujours par le lemme d'invariance du bord, ce sont exactement ceux qui ont une carte dans un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

(Une variété à bord est un ensemble  $M \subset \mathbb{R}^k$  tel que, pour tout  $x \in M$ , il existe un voisinage de  $x$  qui est difféomorphe à un ouvert de  $H^k$ . Le bord de  $M$ , noté  $\partial M$ , est l'ensemble des points dont l'image par le difféomorphisme est dans  $\partial H^m$

Telle que  $H^m := \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m / x_m \geq 0\}$ . Le bord de  $H^m$  est défini par  $\partial H^m = \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\} \subset H^m$ .)

**Lemme :** Soit  $M$  une variété à bord et  $N$  une variété. Soit  $f : M \rightarrow N$  une application lisse et  $y \in N$  une valeur régulière pour  $f$  et pour  $f|_{\partial M}$ . Alors  $M' := f^{-1}(y)$  est une variété à bord de dimension  $m - n$ . De plus,  $\partial M' = \partial M \cap f^{-1}(y)$ , [1]

**15. Définition d'espace complet:** Un espace métrique  $(X, d)$  est dit complet si toute suite de Cauchy de  $X$  est convergente dans  $X$ .

Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Une suite  $(x_n)_n$  est une suite de Cauchy si  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall p, q \geq n_0$  alors  $d(x_p, x_q) < \varepsilon$ .

**16. Définition d'une norme:** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Une application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}$  est une norme ssi

1.  $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$  (homogénéité)
2.  $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$  (inégalité triangulaire)
3.  $\forall x \in E, N(x) \geq 0$  (positive)
4.  $\forall x \in E, N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (définie).

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

## 17. Définition d'un espace de Banach

Espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

## 18. Définition du fibre : Soit $B$ un espace topologique. Un fibré vectoriel (vector bundle)

réel  $\xi$  de rang  $n$  sur  $B$  est la donnée d'un espace vectoriel réel  $\xi_b$  de dimension  $n$  dépendant continument de  $b \in B$ .

Autrement dit, on se donne un espace topologique  $E$  appelé espace total (total space) du fibré, une application continue  $\pi : E \rightarrow B$  et une structure d'espace vectoriel réel sur chaque fibre  $\xi_b = \pi^{-1}(b)$  qui est localement constante au sens suivant (trivialité locale) : pour chaque  $b \in B$ , il existe un voisinage  $U$  de  $b$  et un homéomorphisme

$$h : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U) := E(\xi|_U)$$

tel que chaque  $h_b : v \rightarrow h(b, v)$  soit un isomorphisme d'espaces vectoriels.

## 19. Définition de sous-fibre : Soient $\xi$ et $\eta$ des fibres sur $B$ . $\eta$ est un sous-fibré

(su bundle) de  $\xi$  si, pour chaque  $b \in B$ ,  $\eta_b$  est un sous-espace vectoriel de  $\xi_b$ .

## 20. Définition de fibré tangent : Soit $M$ une sous-variété de $\mathbb{R}^p$ , de dimension $m$ et de

classe  $C^1$  (au moins). Un chemin de classe  $C^1$  dans  $M$  est une application de classe  $C^1$  d'un intervalle dans  $M$ .

Pour  $a \in M$ , un vecteur  $u \in \mathbb{R}^p$  est tangent à  $M$  en  $a$  si et seulement s'il existe un chemin de classe  $C^1$ ,  $\gamma : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow M$ , tel que :  $\gamma(0) = a$ , et  $\gamma'(0) = u$ .

## 21. Théorème de point fixe

Une situation  $(\bar{u}, \bar{v})$  est un équilibre si et seulement si  $c$  est un point fixe de l'application  $m \times n$  de  $U \times V$  dans lui-même définie par  $(u, v) \rightarrow (m(v), n(u))$ [1].

Si en outre  $U$  et  $V$  sont des espaces topologiques compacts (On dit qu'une partie  $A$  d'un espace métrique est compacte si toute suite de  $A$  possède une suite extraite convergente.) et les fonctions  $f$  et  $g$  sont continues, les fonctions  $m$  et  $n$  le seront également.

## 22. Théorème de Von Neumann

Si  $U$  (resp.  $V$ ) est une partie convexe compacte d'un espace vectoriel topologique, si pour tout  $v \in V$  (resp. tout  $u \in U$ ) la fonction  $f(\cdot, v)$  (resp.  $g(u, \cdot)$ ) est concave et continue, il existe un équilibre[1].

## 23. structurellement stable

Soit  $E$  un espace topologique,  $\sim$  une relation d'équivalence sur  $E$ .

Si  $x, y \in E$  et si  $x \sim y$ , on dira que  $x$  et  $y$  ont même structure.

Si l'ensemble des  $y \in E$  ayant même structure que  $x$ , cet ensemble est dit un voisinage de  $x$ , i.e. contient un ouvert contenant  $x$ .

On dira que  $x$  est **structurellement stable** si tout  $y$  assez voisin de  $x$  dans  $E$  a la même structure que  $x$ . Il résulte de la définition que l'ensemble des  $x \in E$  qui sont structurellement stables forme un ouvert (éventuellement vide) de  $E$ .

## 24. Le théorème des fonctions implicites

Ici on se place dans la situation d'un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$  et on note  $(x, y) \in \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{n-p}$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-p})$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_p)$ . Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  continue et  $(x_0, y_0) \in U$ .

Hypothèse du théorème des fonctions implicites :

$\frac{df}{dy}(x, y)$  existe et est continue en  $(x, y)$  au voisinage de  $(x_0, y_0)$

Remarquons que  $c$ 'est une application linéaire de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^p$ .

- i)  $f(x_0, y_0) = 0$       ii)  $\frac{df}{dy}(x_0, y_0): \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  est bijective[1].

## CHAPITRE II

# TOPOLOGIE DIFFERENTIELLE ET THEORIE DES JEUX

### 1. LA THEORIE CLASSIQUE DES JEUX A DEUX PERSONNES

#### 1.1. Théorie des jeux

La théorie des jeux permet une analyse formelle des problèmes posés par l'interaction stratégique d'un groupe d'agents rationnels poursuivant des buts qui leur sont propres [2].

L'interaction stratégique fait référence à toutes les situations où le sort de chacun dépend non seulement de ses propres décisions mais aussi des décisions prises par les autres. Ce type de situations est très fréquent en économie (on pense bien sûr aux situations de concurrence imparfaite) mais aussi en sciences politiques (vote stratégique, compétition électorale...), en biologie (théorie de l'évolution) ou en sociologie (per pressure, société de la confiance/défiante ...). L'objet de la Théorie des jeux est de formaliser ces interactions pour tenter d'en prévoir l'issue (approche positive) mais aussi d'aider le ou les joueurs à choisir la « bonne » stratégie (approche normative). Il est convenu de distinguer deux grandes familles de jeu : les jeux coopératifs dans lesquelles joueurs peuvent passer des accords qui les lient de manière contraignante et les jeux non coopératifs dans lesquels les joueurs sont entièrement libres de leurs décisions au moment où ils font leurs choix [9].

Dans la suite de ce mémoire, nous nous limiterons au cas de deux personnes: l'une sera Bleu ou le premier joueur, l'autre sera Rouge ou le second joueur.

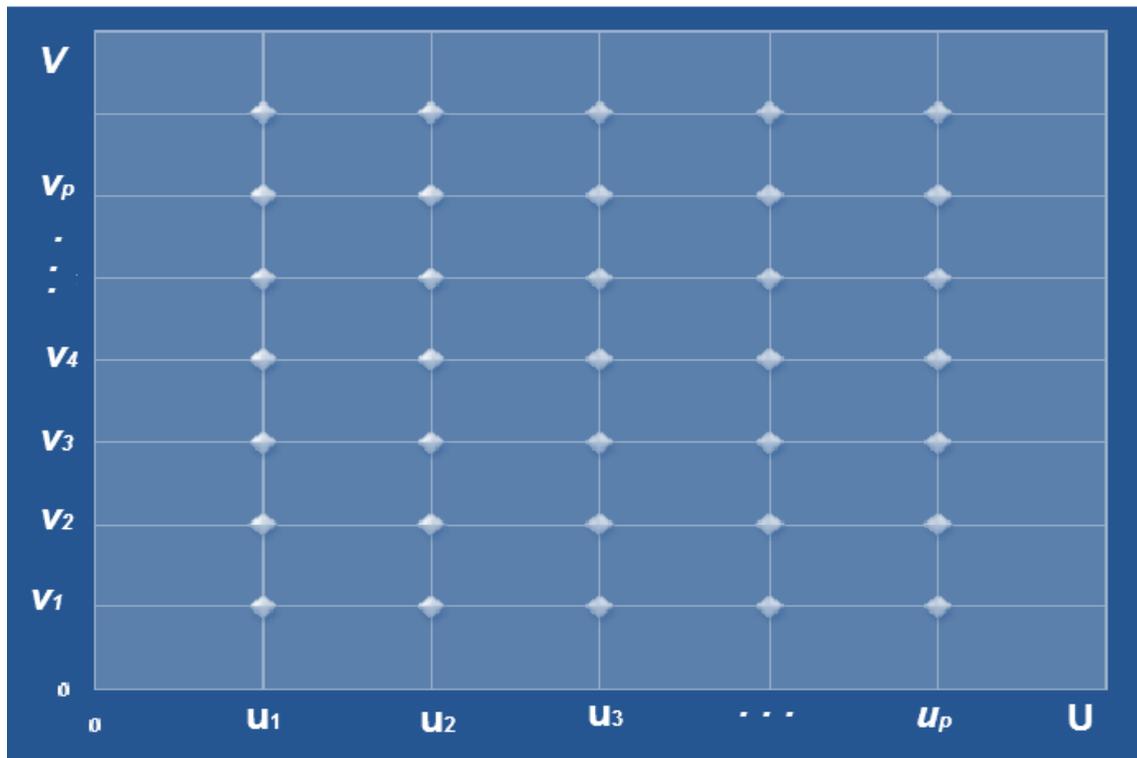
Depuis les travaux de **Von Neumann et Morgenstern (1944)[7]**, on adopte la formalisation suivante d'un jeu:

Un jeu est défini du point de vue formel par la donnée de trois éléments que sont l'ensemble des joueurs  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ , l'ensemble de stratégies  $S\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$  et les fonctions

dérèglement (ou critères)  $\{g_i, i = 1 \dots n\}$ , ces dernières étant définies sur le produit cartésien des ensembles de stratégies  $S = S_1 \times \dots \times S_n$  (qui constitue l'ensemble des résultats possibles du jeu) et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , [9].

Dans le cas de deux joueurs, le joueur Bleu a le choix parmi un certain ensemble  $U$  de stratégies possibles. Le joueur Rouge a le choix parmi un certain ensemble  $V$  de stratégies possibles. Lorsque Bleu a fixé sa stratégie  $u \in U$ : et que Rouge a fixé sa stratégie  $v \in V$ , il en résulte une situation, fonction de  $u$  et de  $v$  qu'ils apprécient différemment. Chacun d'eux chiffre la valeur qu'il attache à la situation  $(u, v)$ : Bleu l'évalue à  $f(u, v)$  et Rouge l'évalue à  $g(u, v)$ . Les fonctions  $f$  et  $g$ , de  $U \times V$  dans  $\mathbb{R}$  sont appelées critères. Chacun des joueurs désire une situation où son propre critère soit le plus grand possible.

Graphiquement (**fig. 1**), on peut se représenter l'ensemble des situations possibles comme le produit cartésien  $U \times V$ . Le choix de  $\bar{u} \in U$  par Bleu signifie l'acceptation par celui-ci de toutes les situations figurant sur la colonne  $\{(\bar{u}, v) | v \in V\}$  et l'élimination de toutes celles qui n'y figurent pas. Le choix de  $\bar{v} \in V$  par Rouge signifie l'acceptation par celui-ci de toutes les situations figurant sur la ligne  $\{(u, \bar{v}) | u \in U\}$  et l'élimination de toutes celles qui n'y figurent pas. À l'intersection de la ligne de Rouge et de la colonne de Bleu figure la situation  $(\bar{u}, \bar{v})$  qui en résulte. Le gain de Bleu est  $f(\bar{u}, \bar{v})$ , celui de Rouge est  $g(\bar{u}, \bar{v})$ .



**Fig. 1 : Représentation graphique d'un jeu entre deux personnes.**

Quelle peut être une issue naturelle du jeu? Une première réponse est apportée par l'ensemble de Pareto.

### 1.2. Ensemble de Pareto

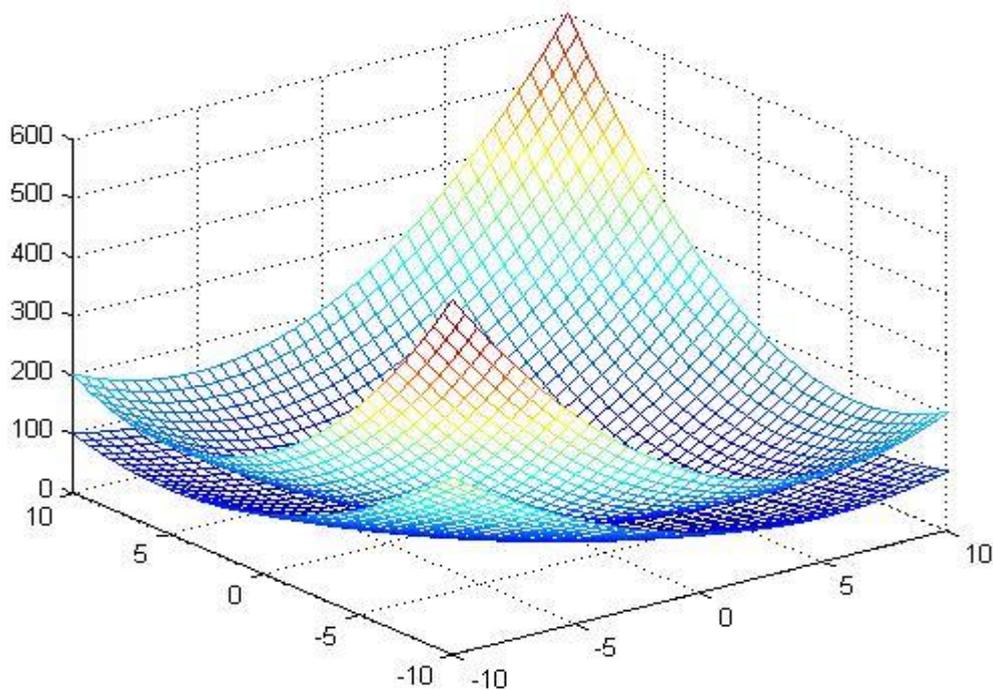
Il s'agit de l'ensemble des éléments de  $U \times V$  maxima pour la relation de préordre  $\preceq$  définie par :

$$(u_1, v_1) \preceq (u_2, v_2) \Leftrightarrow f(u_1, v_1) \leq f(u_2, v_2) \text{ et } g(u_1, v_1) \leq g(u_2, v_2). [4].$$

### 1.3. Ensemble de Pareto dans le cas d'un jeu coopératif et dans le cas non coopératif

L'intérêt que présente l'ensemble de Pareto dépend du degré de coopération possible entre les deux joueurs.

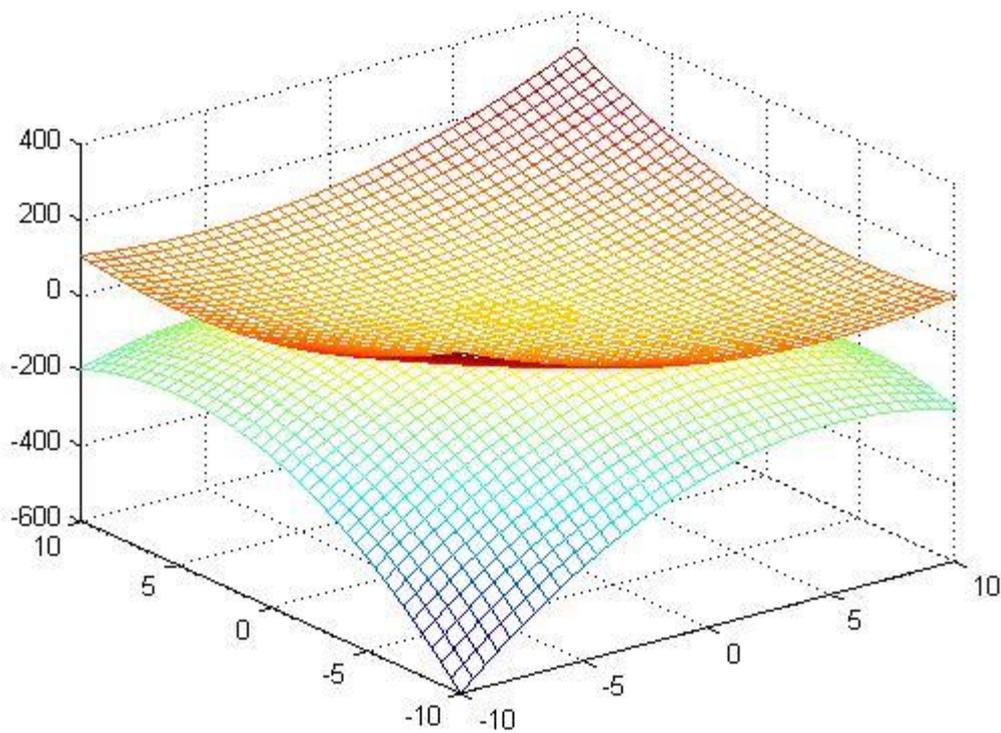
En effet, prenant l'exemple où  $f = \alpha g, \alpha > 0$ , il y a identité de vues entre Bleu et Rouge, l'ensemble de Pareto est réduit aux maxima de  $f$ , et il est clair que ce sont là les issues naturelles du jeu (**Voir fig. 2**).



**Fig. 2 : Ensemble de Pareto dans le cas d'un jeu non coopératif**

**(Exemple où  $f = \alpha g, \alpha > 0$ )**

Mais, dans l'autre cas où  $f = \alpha g, \alpha < 0$ , les intérêts des joueurs Bleu et Rouge sont diamétralement opposées, l'ensemble de Pareto est  $U \times V$  tout entier, et n'apporte donc plus aucune indication (**Voir fig. 3**). On voit donc qu'il est nécessaire de faire appel à d'autres notions pour décrire des situations de conflit.



**Fig. 3 : Ensemble de Pareto dans le cas d'un jeu coopératif**

**(Exemple où  $f = \alpha g, \alpha < 0$ )**

La notion classique est celle d'équilibre que l'on doit à [Von Neumann\(1944\)](#) [7]:

### 1.4. Notion d'équilibre

On appelle équilibre une situation  $(\bar{u}, \bar{v})$  telle que :

$$f(\bar{u}, \bar{v}) = \max\{f(u, \bar{v}), |u \in U\} \text{ et } g(\bar{u}, \bar{v}) = \max\{g(\bar{u}, v), |v \in V\}$$

Si nous faisons l'hypothèse de non-coopération (par exemple, que les joueurs ignorent le critère de leur adversaire), aucun des deux joueurs, à lui seul, ne peut plus améliorer son propre critère.

La première question qui se pose est bien entendu celle de l'existence, i.e., un jeu donné possède-t-il oui ou non des équilibres?

On y répond en se ramenant à un théorème de point fixe. Une façon simple de procéder est de faire l'hypothèse d'unicité suivante:

### **1.5. Hypothèse d'unicité (H)**

Pour tout  $v \in V$  la fonction  $f(\cdot, v)$  possède un unique maximum absolu  $m(v) \in V$  et, pour tout  $u \in U$ , la fonction  $g(u, \cdot)$  possède un unique maximum absolu  $n(u) \in U$ .

En d'autres termes, le joueur Bleu a une seule meilleure réponse  $m(v)$  à toute décision  $v$  du joueur Rouge, et le joueur Rouge a une seule meilleure réponse  $n(u)$  à toute décision  $u$  du joueur Bleu. L'équilibre est une situation où chacun se trouve avoir joué la meilleure réponse au choix de l'adversaire [1].

### **Preuve de l'implication**

On a  $U$  et  $V$  sont des espaces compacts et on a  $f$  et  $g$  sont définies de  $U \times V$  à valeur dans lui-même et sont continues.

On a aussi  $m$  définie de  $V$  dans  $V$  et  $n$  définie de  $U$  dans  $U$

Ceci implique que  $n$  et  $m$  sont des fonctions continues.

Ce qui nous permettra d'appliquer le théorème de Lefschetz.

### **1.6. Théorème Lefschetz**

Si l'index de  $\widetilde{m \times n}$  est non nul, il existera au moins un équilibre.

On énoncera par exemple : si  $U$  et  $V$  sont des espaces topologiques compacts et contractiles

(En mathématiques, un espace topologique est dit contractile s'il est homotopiquement

équivalent à un point. Tous ses groupes d'homotopie sont donc triviaux, ainsi que ses groupes d'homologie de degré  $> 0$ , si les fonctions  $f$  et  $g$  sont continues, et si l'hypothèse d'unicité ( $H$ ) est satisfaite, le jeu admettra un équilibre.

La théorie des jeux classique remplace l'hypothèse d'unicité ( $H$ ) par une hypothèse de convexité. On arrive ainsi à des énoncés dont le prototype est le théorème de **Von Neumann(1944)** [7].

## 2. STABILITE STRUCTURELLE

### 2.1. Propriété générique

Une propriété est dite générique si elle est satisfaite pour presque toutes les valeurs de ses paramètres[1].

### 2.2. Proposition 1

L'hypothèse d'unicité de point d'équilibre ( $H$ ) n'est pas générique [1].

#### Démonstration

Avant de donner un contre-exemple, rappelons ce que c'est un extremum **local**, un extremum **global** et un **extremum absolu** d'une fonction soient  $f$  une **fonction** définie sur un ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  à valeur dans  $\mathbb{R}$  et  $a$  un point de  $E$ .

On dit que  $f$  atteint en  $a$  un maximum (respectivement minimum) **local** s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que pour tout élément  $x$  de  $V$ , on ait  $f(x) \leq f(a)$  (respectivement  $f(x) \geq f(a)$ ).

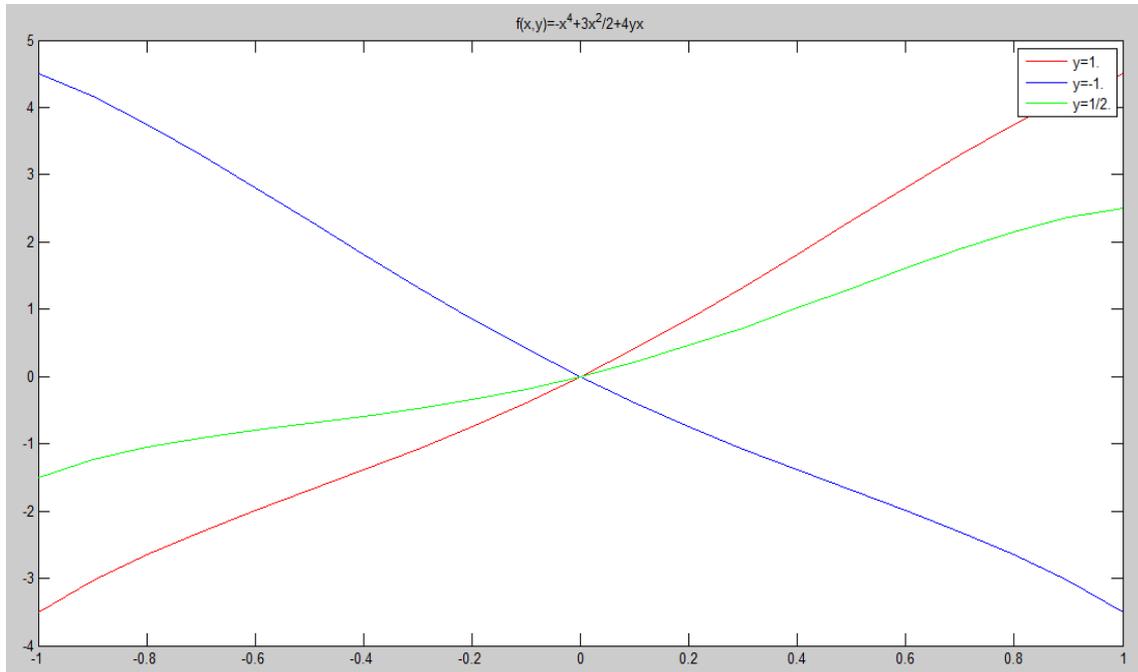
Le point  $a$  est dit maximum (respectivement minimum) **global** si pour tout élément  $x$  de  $E$ , on ait  $f(x) \leq f(a)$  (respectivement  $f(x) \geq f(a)$ ).

Le *maximum* (respectivement *minimum*) **absolu** est la plus grande (respectivement plus petite) valeur que peut prendre  $f(x)$  dans son  $E$ . Pour le trouver, il faut évaluer la fonction au maxima (minima) global de  $E$  et à ses frontières[1].

Dans le contre-exemple prenons  $U = V = [-1, 1]$  et considérons  $I = [-1, 1]$  et la fonction  $\varphi$  de  $I \times I$  dans  $\mathbb{R}$  définie par:

$$\varphi(x, y) = -x^4 + \frac{3x^2}{2} + 4yx$$

Pour tout  $y \in I$  la fonction  $\varphi(\cdot, y)$  admet deux maxima locaux  $\mu_1(y)$  et  $\mu_2(y)$  et un minimum local  $v(y)$ , de telle sorte que  $\mu_2(y) < v(y) < \mu_1(y)$ , voir la figure ci-dessous.



**Figure 4 :** Représentation graphique de la fonction  $\varphi$  dans les cas  $y = -1, 1/2, 1$

Les fonctions  $\mu_1, \mu_2$  et  $v$  de  $I$  dans  $I$  sont de classe  $C^\infty$ . En effet

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = -4x^3 + 3x + 4y$$

et l'équation  $\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = 0$  à variable  $x$  qui est une équation de troisième degré

$-4x^3 + 3x + 4y = 0$  admet trois solutions  $\mu_1(y)$  et  $\mu_2(y)$  et  $v(y)$  qui sont des fonctions de classe  $C^\infty$ .

On appliquant la méthode de Cardan [2]:

$$\Delta = -(4p^3 + 27q^2)$$

Où  $p = -\frac{3}{4}$  et  $q = -4y$ .

$$\Delta = -27 \left( -\frac{1}{16} + 16y^2 \right) = \frac{27}{16} (1 - (16y)^2)$$

$\Delta > 0$  Ssi :  $(1 - (16y)^2) > 0$  au  $1 > (16y)^2$

Donc :  $y \in ]-\infty ; -\frac{1}{16}[ \cup ]-\frac{1}{16} ; +\infty[$ .

Et les solutions sont données par formule :

$$x_k = \sqrt[2]{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{q}{2} \sqrt{\frac{27}{-p^3}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right) \text{ au } k = 0, 1, 2.$$

Donc

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(2y \sqrt{\frac{27}{\frac{27}{4}}}\right)\right) \\ &= \cos\left(\frac{1}{3} \arccos(y)\right) \end{aligned}$$

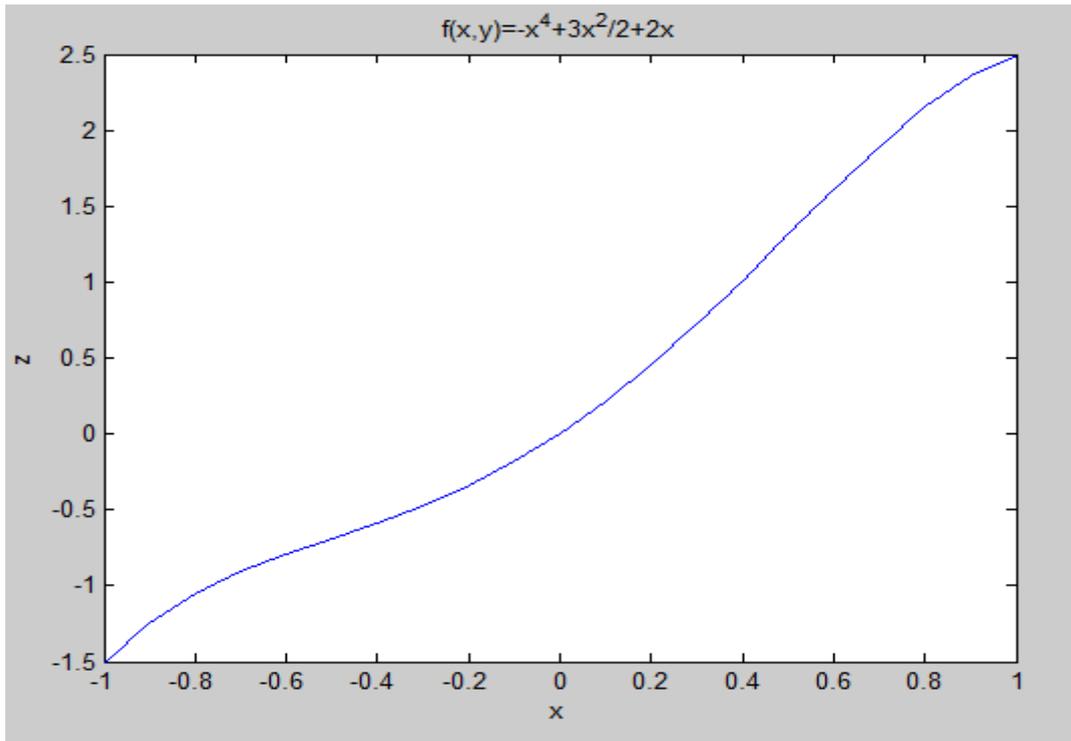
$$x_1 = \cos\left(\frac{1}{3} \arccos(y) + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$x_2 = \cos\left(\frac{1}{3} \arccos(y) + \frac{4\pi}{3}\right)$$

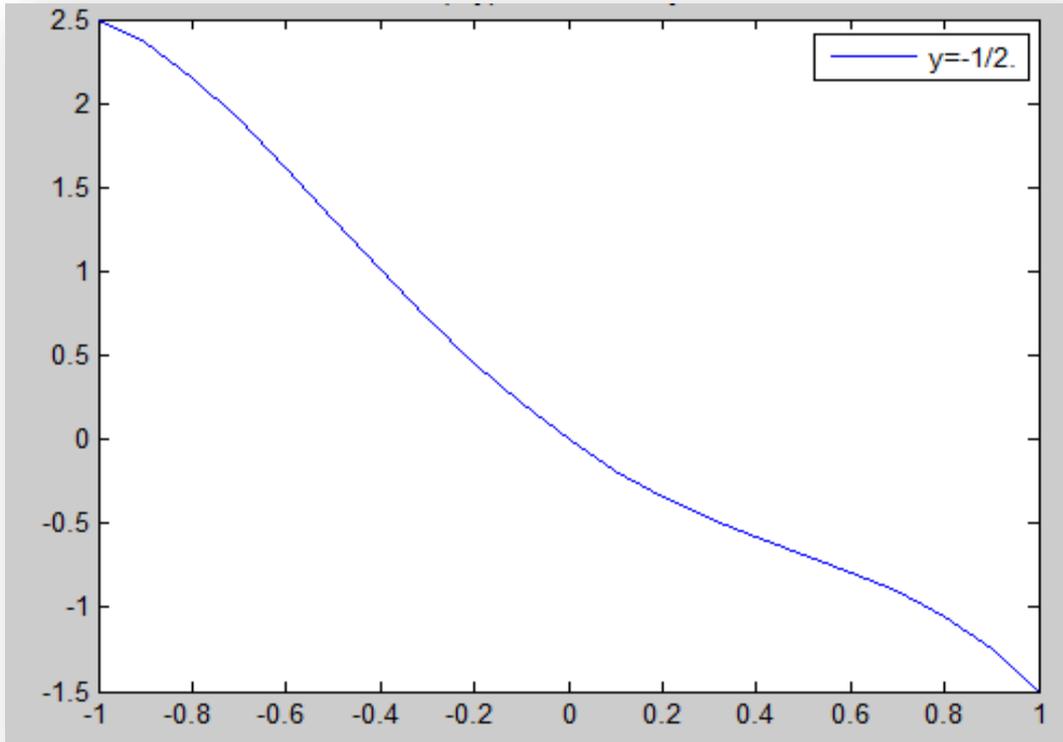
Et On sachant que la dérivée successivement d'une composant de deux fonctions trigonométrique est existé et continue jusqu'à  $n \in \mathbb{N}$  (nous avons utilisé la formule de **Leibnitz**).

Alors les fonctions  $x_0$  et  $x_1$  et  $x_2$  sont des fonctions de classe  $C^\infty$ .

Pour  $y \neq 0$  il y a un seul maximum absolu :  $\mu_1(y)$  pour  $y > 0$  et  $\mu_2(y)$  pour  $y < 0$ . Voir les deux figures ci-dessous:



**Figure 5:** Représentation graphique de la fonction  $\varphi(\cdot, \frac{1}{2})$



**Figure 5:** Représentation de la fonction  $\varphi(\cdot, -\frac{1}{2})$

On peut donc choisir  $\varepsilon > 0$  assez petit pour que:

- a)  $\forall y \in [\frac{1}{2}, 1], \varphi(\mu_1(y), y) - \varepsilon > \varphi(\mu_2(y), y) + \varepsilon;$
- b)  $\forall y \in [-1, -\frac{1}{2}], \varphi(\mu_2(y), y) - \varepsilon > \varphi(\mu_1(y), y) + \varepsilon;$
- c)  $\forall y \in [-1, 1], \varphi(\mu_1(y), y) - \varepsilon > \varphi(v(y), y) + \varepsilon;$
- d)  $\forall y \in [-1, 1], \varphi(\mu_2(y), y) - \varepsilon > \varphi(v(y), y) + \varepsilon.$

On a la proposition suivante

### 2.3. Proposition 2

Pour toute fonction continue  $\psi$  de  $I \times I$  dans  $\mathbb{R}$  assez voisine de  $\varphi$  pour la norme uniforme, il existera  $y \in I$  tel que  $\psi(\cdot, y)$  atteigne son maximum absolu sur  $I$  en deux points distincts[1].

### Démonstration

Supposons une fonction  $\psi \in C^0(I \times I)$  telle que  $\|\varphi - \psi\|_0 \leq \varepsilon$ , où  $\varepsilon > 0$  est choisit assez petit et  $\|\cdot\|_0$  est la norme uniforme; i.e., la norme définie pour une fonction donnée  $f$  définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  par  $\|f\|_0 = \sup\{|f(x)|, x \in I\}$ .

Raisonnons par l'absurde.

Supposons que pour tout  $y \in I$  la fonction  $\psi(\cdot, y)$  atteigne son maximum absolu sur  $I$  en un point unique  $\mu(y)$ . L'application  $\mu$  est alors continue de  $I$  dans  $I$ . D'après (a) on a  $\mu(y) > v(y)$  pour  $y \geq \frac{1}{2}$  d'après (b) on a  $\mu(y) < v(y)$  pour  $y \leq -\frac{1}{2}$  on doit donc avoir  $\mu(y) = v(y)$  pour un certain point  $y \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ , ce qui en contradiction avec (c) et (d).

Passons maintenant à l'étude de la stabilité structurelle. Mais avant, nous donnons quelques définitions qui sont utiles dans la compréhension se qui suit.

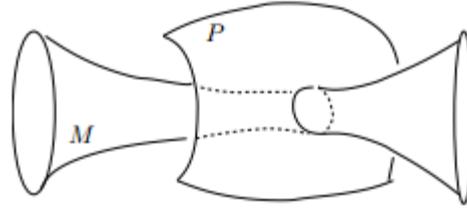
#### 2.4. Hypothèse de transversalité :

On se donne une application de classe  $C^1$ ,  $f : M^m \rightarrow N^n$ , et une sous-variété  $P^p$  de  $N$ . On dit que  $f$  est transversale sur  $P$  si, pour tout  $x \in f^{-1}(P)$ , on a  $T_{f(x)}N = T_{f(x)}P + Tf(T_xM) \dots \dots \dots (*)$

Si  $h = 0$  est une équation locale de  $P$  dans  $N$ , au voisinage de  $f(x)$  ( $h$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^{n-p}$ ), l'application  $T(h \circ f) : T_xM \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$  est de range maximum au voisinage de  $x$ .

Ainsi :

$f^{-1}(P)$  est une sous-variété de  $M$  de même Co dimension que celle de  $P$  dans  $N$ , [1].



**Figure 6.** Représentation de variété et sous-variété.

L'étude de la stabilité structurelle fait dans un cadre de la topologie différentielle, qui nécessite l'emploi de modèles réguliers.

$U$  et  $V$  seront des variétés compactes, connexes, sans bord, de classe  $C^\infty$ , de dimensions respectives  $p$  et  $q$ .

Les fonctions  $f: U \times V \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g: U \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  seront de classe  $C^2$ .

En outre, nous serons amenés à faire diverses hypothèses de transversalité.

Introduisons d'abord quelques notations.

On désigne par  $\mathcal{C}^2(U \times V)$  l'espace des fonctions deux fois continument différentiables sur  $U \times V$ , muni de sa structure naturelle d'espace de Banach (voir **Abraham-Robbin** [3]).

Dans le fibré  $J^1(U)$  des jet d'ordre 1 de fonctions numériques  $\varphi$  sur  $U$ , on distingue le sous-fibre  $J_0^1(U)$  défini par les équations locales :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) = \dots = \frac{\partial \varphi}{\partial u_p}(u) = 0.$$

Par abus de notation, on désignera également par  $J_0^1(U)$  le sous-fibre de  $J^1(U \times V)$  défini par les équations locales :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u, v) = \dots = \frac{\partial \varphi}{\partial u_p}(u, v) = 0.$$

On définit de même  $J_0^1(V)$  et on pose:

$$M = \{(u, v) \in U \times V \mid f(u, v) \in J_0^1(U)\}$$

$$N = \{(u, v) \in U \times V \mid g(u, v) \in J_0^1(V)\}.$$

Note première hypothèse de transversalité se formule de la façon suivante:

(T):  $J^1 f$  est transversal à  $J_0^1(U)$  et  $J^1 g$  est transversal à  $J_0^1(V)$ . Les sous-variétés  $M$  et  $N$  sont transversales dans  $U \times V$ .

La première partie de l'hypothèse assure que  $M$  et  $N$  sont des sous-variétés de classe  $C^1$  de dimensions respectives  $p$  et  $q$ , de  $U \times V$ , et donne donc un sens à la seconde. L'hypothèse (T) est structurellement stable et même générique pour la topologie  $C^2$ .

### 2.5. Proposition 3

L'ensemble des couples  $(f, g)$  qui vérifient (T) est un ouvert dense (Une partie  $D$  d'un espace topologique  $X$  est dite dense dans  $X$  si sa fermeture  $\bar{D}$  coïncide avec  $X$ ) de  $C^2(U \times V) \times C^2(U \times V)$ , noté  $\Theta$ , [1].

#### Démonstration

Cela résulte du théorème de transversalité de Thom donné ci-dessus, tels qu'ils sont exposés dans **Lévine**[11], ou dans **Abraham-Robbin**[3].

"Si une famille d'applications est transversale sur une sous-variété alors presque tous les membres de cette famille le sont."

On en déduit immédiatement l'ouverture dans  $C^2 \times C^2$  et la densité dans  $C^r \times C^r$ , pour  $r$  assez grand. Mais, pour  $r \geq 2$ ,  $C^r(U \times V)$  est dense dans  $C^2(U \times V)$  et est muni d'une topologie plus fine, d'où le résultat.

Les sous-variétés  $M$  et  $N$ , étant transversales et de dimensions complémentaires, se coupent en un nombre fini de points. Parmi ceux-ci figurent nécessairement les équilibres du jeu.

En effet, dire que  $(u, v) \in M \cap N$  signifie que  $u$  est un point critique de  $f(\cdot, v)$  et  $v$  un point critique de  $g(u, \cdot)$ , et dire que  $(u, v)$  est un équilibre signifie que  $u$  est un maximum absolu de  $f(\cdot, v)$  et  $v$  un maximum absolu de  $g(u, \cdot)$ .

On a donc une indication très précieuse avec le résultat suivant, qui a été signalé par René Thom, [1].

## 2.6. Proposition 4

Si les caractéristiques d'Euler-Poincaré de  $U$  et de  $V$  sont toutes deux non nulles (cas orientable) ou toutes deux impaires (cas non orientable), alors  $M \cap N \neq \emptyset$ , [1].

### Démonstration

#### Les caractéristiques d'Euler-Poincaré

La caractéristique d'Euler-Poincaré est un invariant fondamental en topologie. Il s'agit d'un entier  $\chi(X)$  associé à chaque polyèdre fini  $X$ . Un point important est que cet entier ne dépend que de  $X$  en tant qu'ensemble, pas de la manière dont on le décompose en faces, arêtes, sommets... Mieux, c'est un invariant topologique : il ne dépend de  $X$  qu'à homéomorphisme près. Ceci permet de définir la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une variété compacte (puisque une variété compacte est homéomorphe à un polyèdre fini). Encore mieux, l'entier  $\chi(X)$  ne dépend que du type d'homotopie de  $X$ . Les topologues ont pris l'habitude de penser à  $\chi(X)$  comme au « nombre de points de  $X$ , à homotopie près ».

Il suffit de remarquer que si  $M \cap N = \emptyset$ , alors  $T_u f \oplus T_v g$  définit un champ de vecteurs partout non nul sur la variété compacte  $U \times V$ , dont la caractéristique d'Euler-Poincaré doit donc être nulle si elle est orientable, paire si elle ne l'est pas.

On se convainc facilement que, si les hypothèses sur les caractéristiques d'Euler ne sont pas satisfaites ( $U = V = S^1$  par exemple) les variétés  $M$  et  $N$  peuvent ne pas se couper, et que même si elles le sont les variétés  $M$  et  $N$  peuvent se couper en des points dont aucun est un équilibre. On voit donc en quoi l'hypothèse (H) est nécessaire. On a vu qu'elle n'était pas générique. Elle n'est pas non plus structurellement stable; on s'en convainc aisément en considérant dans  $I \times I$  la famille de fonctions:

$$\varphi_\varepsilon(x, y) = x^4 - \varepsilon x^2 + xy.$$

Quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\varphi_\varepsilon$  tend vers  $\varphi_0$  dans  $C^\infty(I \times I)$  et cependant  $\varphi_0$  satisfait à (H) sans que les  $\varphi_\varepsilon$  y satisfait pour  $\varepsilon > 0$ . On peut cependant rendre l'hypothèse (H) structurellement stable en la renforçant légèrement:

(H') Pour tout  $v \in V$  la fonction  $f(\cdot, v)$  possède un unique maximum absolu  $m(v) \in U$ ; et pour tout  $u \in U$  la fonction  $g(u, v)$  possède un unique maximum absolu  $n(u) \in V$ . Les applications  $m: V \rightarrow U$  et  $n: U \rightarrow V$  sont de classe  $C^1$ .

Remarquons que, dans ces conditions, la projection de  $U \times V$  sur  $V$  induit un difféomorphisme du graphe de  $m$  sur  $V$ . Le graphe de  $m$  est donc une composante connexe de  $M$ , de même le graphe de  $n$  est une composante connexe de  $N$ .

(définition d'une composante connexe : On appelle composante connexe d'un point  $\in E$ ,  $E$  espace topologique, la plus grande partie connexe de  $E$  (au sens de l'inclusion) contenant ce point. On note  $C_x$  cet ensemble. On appelle composantes connexes d'une partie de  $E$  les composantes connexes des points de cette partie.) [1].

### 2.7. Proposition 5

L'ensemble des couples  $(f, g)$  satisfaisant à (T) et (H') est un ouvert  $\Omega$  de  $C^2(U \times V) \times C^2(U \times V)$ , [1].

#### Démonstration

L'équation  $(\partial f / \partial u)(m(v), v) = 0$  s'écrit aussi  $T_u f(m(v), v) = 0$  dans le fibré tangent à  $U \times V$ . On peut donc définir de manière intrinsèque des dérivées secondes  $T_{uu}^2 f$  et  $T_{uv}^2 f$  au point  $(m(v), v)$ . On obtient:

$$T_{uu}^2 f(m(v), v) \circ Tm(v) + T_{uv}^2 f(m(v), v) = 0$$

Ce qui prouve que:

$$Im T_{uv}^2 f(m(v), v) \subset Im T_{uu}^2 f(m(v), v).$$

Mais comme  $f$  satisfait à l'hypothèse (T),  $J^1 f(m(v), v)$  est transversal à  $J_0^1(U)$  ce qui s'exprime par:

$$ImT_{uv}^2 f(m(v), v) + ImT_{uu}^2 f(m(v), v) = \mathbb{R}^p$$

On a donc  $ImT_{uu}^2(m(v), v) \cong \mathbb{R}^p$ , ce qui signifie, compte tenu des dimensions, que  $T_{uu}^2(m(v), v)$  est un isomorphisme. D'après le théorème des fonctions implicites, pour tout  $v \in V$ , il existera un voisinage de  $v$  dans  $V$ , un voisinage de  $m(v)$  dans  $U$  et un voisinage  $w$  de  $f$  dans  $C^2(U \times V)$  tels que pour tout  $f' \in w$  et tout  $v' \in V$ , l'équation  $T_u' f'(u, v') = 0$  une solution unique  $u' = m(f', v')$  dans  $U$ , la fonction  $m : w \times v \rightarrow u$  étant de classe  $C^1$ . Par définition  $m(f, v) = m(v)$ .

Il est clair que si  $f'$  est assez voisin de  $f$  dans  $C^2(U \times V)$  et même dans  $C^0(U \times V)$ , les maxima absolus de  $f'(\cdot, v')$  seront tous contenus dans  $u$  si  $v' \in V$ . Le seul candidat possible est  $m(f', v')$  et on a ainsi démontré l'unicité et la différentiabilité du maximum au voisinage de  $f$  dans  $C^2(U \times V)$  et de  $v$  dans  $V$ . Il ne reste plus qu'à recouvrir le compact  $V$  par un nombre fini d'ouverts possédant la propriété requise, et à prendre l'intersection des voisinages de  $f$  correspondants. En procédant de même pour  $g$ , on voit que l'ensemble des couples  $(f, g)$  vérifiant  $(H')$  est ouvert dans  $\Theta$ , d'où le résultat, [1].

### 2.8. Proposition 6

Tout couple  $(f, g) \in \Omega$  possède un voisinage  $u_1 \times u_2$  où le nombre d'équilibres est fini et constant, chacun d'eux étant donné par une application de classe  $C^1$  de  $w_1 \times w_2$  dans  $U \times V$ , [1].

#### Démonstration

Nous venons de voir qu'au voisinage de  $(f, g) \in \Omega$  et d'un équilibre  $(u, v) \in U \times V$  associée au couple  $(f, g) \in \Omega$ . Les équilibres sont donnés par la résolution du système d'équations :

$$(s) \begin{cases} m(f', v') = u' \\ n(g', u') = v' \end{cases}$$

Les fonctions  $m$  et  $n$  sont de classe  $C^1$ . L'hypothèse (T) nous permet d'affirmer la transversalité de  $m(f, \cdot)$  et  $n(g, \cdot)$  en  $(u, v)$  et donc d'appliquer le théorème des fonctions implicites.

Il existe donc une fonction  $w$  de classe  $C^1$  définie sur un voisinage de  $(u, v)$  telle que l'unique solution de (s) au voisinage de  $(u, v)$  soit donnée par  $(u', v') = w(f', g')$ .

Soit  $(u_i, v_i)$ ,  $i \in I$ , l'ensemble des équilibres du jeu associé au couple  $(f, g)$ .

On a vu que  $I$  est fini et peut éventuellement être vide. On a donc un voisinage  $u_1 \times u_2$  de  $(f, g)$  et pour tout  $i \in I$  un voisinage  $(u_i \times v_i)$  de  $(u_i \times v_i)$  et une application de classe  $C^1$   $w_i : w_1 \times w_2 \rightarrow u_i \times v_i$  telle que l'unique équilibre associé au couple  $(f', g')$  dans  $u_i \times v_i$  soit  $w_i(f', g')$  il ne reste plus qu'à montrer qu'on peut choisir,  $w_1 \times w_2$  assez petit pour que tout équilibre associé à un couple  $(f', g')$  appartienne à un certain  $u_i \times v_i$ . Mais s'il en était autrement, on pourrait construire une suite  $(u'_n, v'_n)$  d'équilibres associés à des couples  $(f'_n, g'_n)$  tendant vers  $(f, g)$  telle que:

$$(e) \forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in I, (u'_n, v'_n) \notin u_i \times v_i.$$

par compacité, la suite  $(u'_n, v'_n)$  a un point d'adhérence  $(u, v)$  (la définition d'un point d'adhérence : Soit  $P$  une partie de  $E$  ( $E$  espace topologie) et  $x \in E$ . On dit que  $x$  est adhérent à  $P$  si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap P \neq \emptyset.$$

On appelle l'adhérence de  $P$  dans  $E$  et on note  $\bar{P}$  l'ensemble des points adhérents à  $P$ .) qui est un équilibre associé à  $(f, g)$ , qui appartient donc à  $u_i \times v_i$  pour un certain  $i \in I$ , en contradiction avec (e). D'où le résultat.

De la Proposition 6 il ressort que le nombre d'équilibres est constant sur chaque composante connexe de  $\Omega$ , c'est-à-dire qu'on ne peut modifier le nombre d'équilibres en restant dans  $\Omega$ .

Il ressort aussi que chacun des équilibres est structurellement stable dans  $\Omega$ .

En conclusion, les hypothèses de transversalité que nous avons introduites permettent de rendre structurellement stables les notions introduites au Chapitre I. Mais elles permettent aussi de relier l'index de  $\widetilde{m \times n}$  au nombre de points fixes et donc d'affiner les résultats énoncés à la fin du Chapitre I, [1].

### 2.9. Proposition 7

Si  $U$  et  $V$  sont orientables, si  $f$  et  $g$  vérifient  $(T)$  et  $(H')$ , si  $i$  est l'index de  $\widetilde{m \times n}$ , le jeu présente au moins  $|i|$  équilibres, [1].

#### Démonstration

Si  $(u, v)$  est un équilibre, les variétés  $M$  et  $N$  s'y coupent transversalement, c'est-à-dire que:

$$\begin{aligned} T_{u,v}(M) + T_{u,v}(N) &= T_{u,v}(U \times V) \\ (I \times T_u n)\mathbb{R}^p + (T_v m \times I)\mathbb{R}^q &= \mathbb{R}^{p+q} \end{aligned}$$

Je dis que  $T_{u,v}(\widetilde{m \times n}) = T_v \widetilde{m} \times T_u n$  ne saurait admettre la valeur propre 1. Si en effet on avait  $e_p \in \mathbb{R}^p$  et  $e_q \in \mathbb{R}^q$  tels que :

$$\begin{aligned} (T_v \widetilde{m} \times T_u n)(e_p, e_q) &= (e_p, e_q) \\ (\widetilde{T_v m})e_q = e_p \text{ et } (\widetilde{T_u n})e_p &= e_q \end{aligned}$$

Alors on obtient:

$$(I \times T_u n)e_p + (T_v m \times I)(\dots e_q) = 0$$

et l'opérateur  $(I \times T_u n) + (T_v m \times I)$  de  $\mathbb{R}^{p+q}$  dans lui-même ne serait pas une injection.

Or on a vu plus haut que c'est une surjection, d'où contradiction.

Donc l'index local de  $\widetilde{m \times n}$  au point  $(u, v)$  est  $\pm 1$ . L'index global est la somme des index locaux d'où le résultat.

Ainsi par exemple, si  $U = S^p$  et  $V = S^q$  l'index de  $\widetilde{m \times n}$  sera donné par:

$$\begin{aligned} i &= (-1)^{p+q} \text{ degré } (\widetilde{m \times n}) + 1 && \text{si } p \neq q \\ i &= \text{degré } (m) \cdot \text{degré } (n) + 2(-1)^{p+1} && \text{si } p = q \end{aligned}$$

Comme on s'en convainc aisément en appliquant la formule de **Künneth**.

### **La formule de Künneth**

Soit  $M$  et  $N$  deux variétés, l'une d'entre elle au moins étant de type fini. On note à les projections de  $M \times N$  sur les facteurs  $M$  et  $N$  respectivement, l'application

$\omega \otimes \eta \rightarrow \omega \times \eta := p^* \omega \wedge q^* \eta$  induit un isomorphisme, [1].

### 3. SEUILS

Nous allons maintenant apporter une troisième réponse à la question de l'issue naturelle du jeu. La notion d'équilibre menait à une issue symétrique. Structurellement stable mais non générique. La notion de seuil, que nous introduisons, conduit à une issue dissymétrique, structurellement stable et générique.

Nous nous plaçons pour l'instant au même degré de généralité qu'au paragraphe 1, c'est à dire que nous supposons simplement que  $U$  et  $V$  sont des espaces topologiques séparés. Soient  $N$  et  $N$  deux parties de  $U \times V$  définies par:

$$N_+ = \{(u, v) | v \text{ est un maximum absolu de } g(u, \cdot)\}$$

$$N_+^0 = \{(u, v) | v \text{ est l'unique maximum absolu de } g(u, \cdot)\}.$$

Il est clair que  $N_+^0 \subset N_+$ ; on peut dire qu'un point  $(u, v) \in N_+$  appartient à  $N_+^0$  s'il n'existe pas d'autre point de  $N$  dont la projection horizontale soit  $u$ .

#### 3.1. Définition

On dit qu'une situation  $(\bar{u}, \bar{v}) \in U \times V$  est un seuil si:

(a)  $(\bar{u}, \bar{v})$  est un maximum absolu de  $f$  sur  $N_+$  (b)  $(\bar{u}, \bar{v})$  est adhérent à l'intérieur de  $N_+^0$  dans  $N$ .

On a là une issue naturelle du jeu, si l'on convient par exemple que Bleu connaît le critère de Rouge, mais que Rouge ignore le critère de Bleu. Si alors une situation  $(\bar{u}, \bar{v})$  vérifie la condition (a), elle est satisfaisante pour Bleu. En effet, celui-ci, connaissant le critère de son partenaire, peut anticiper sur ses réactions; si donc il modifie sa propre décision en  $u \in U$ , il tiendra compte de la réaction de Rouge, dont la réponse sera une décision  $v \in V$  telle que  $(u, v) \in N_+$  il sera donc amené à comparer  $(\bar{u}, \bar{v})$  et  $(u, v)$  et comme  $f(\bar{u}, \bar{v}) \geq f(u, v)$  à décider qu'il ne gagne pas au changement. En termes d'escrime, on pourrait exprimer les

différences de comportement des deux joueurs en disant que Rouge tire en “première intention” et Bleu en “deuxième intention”. Mais la condition (a) à elle seule laisse planer une ambiguïté. En effet, si  $(\bar{u}, \bar{v})$  vérifie la condition (a), il peut se faire que  $(\bar{u}, \bar{v}) \notin N_+^0$ . La fonction  $g(\bar{u}, \cdot)$  atteint alors son maximum absolu sur  $V$  en plusieurs points, et comment Bleu peut-il contraindre Rouge à Choisir parmi ceux-ci précisément  $\bar{v}$ , et de s’y tenir ? La réponse est apportée par la condition (b), qui exprime qu’on peut trouver dans  $N_+^0$  une famille  $(u_i, v_i), i \in I$  tendant vers  $(\bar{u}, \bar{v})$ . A chacun des  $u_i$  la réponse de Rouge est  $v_i$ , sans aucune ambiguïté. Si donc Bleu ne joue la décision  $\bar{u}$  qu’au terme de toute la série d’intermédiaires  $u_i, i \in I$ , son partenaire

Rouge sera passé par toutes les décisions intermédiaires  $v_i, i \in I$  et sera naturellement amené par continuité. À jouer  $\bar{v}$ , Si ultérieurement il lui prenait fantaisie de s’en écarter au profil d’un autre maximum absolu  $v$  de  $g(\bar{u}, \cdot)$  il suffirait à Bleu de jouer un des  $u_i$  pour que la réponse obligée  $v_i$ , revienne dans n’importe quel voisinage de  $\bar{v}$  prescrit à l’avance.

Enfin l’hypothèse que l’on peut choisir la suite  $u_i, i \in I$ , dans l’intérieur de  $N_+^0$ , répond à une préoccupation de stabilité: si Bleu fait une légère erreur dans la détermination des  $u_i$ , et tombe en fait sur des  $u_i$  suffisamment voisins, tout ce qui précède reste valable.

En conclusion, remarquons que cette notion est dissymétrique et favorise Bleu : si le jeu présente simultanément un seuil  $(u_1, v_1)$  et un équilibre  $(u_2, v_2)$ , nécessairement  $(u_2, v_2) \in N_+$ . donc  $f(u_1, v_1) \geq f(u_2, v_2)$  d’après (a).

Eclairons tout ceci par un exemple. Prenons

$$U = \mathbb{R}, \quad V = [-2, 2], f(u, v) = -(u - \frac{1}{2})^2.$$

Si  $g(u, v) = uv$ , on représente aisément  $N_+$  sur une figure pour obtenir  $N_+^0$  il faut en exclure le segment  $\{0\} \times [-2, 2]$

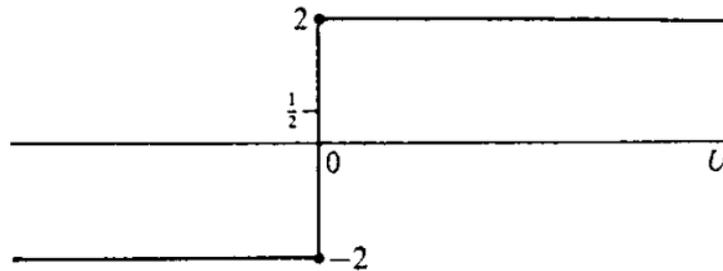


Figure 7 : Représentation de la fonction  $f$

Le seul point qui satisfait par (a) est  $(0, \frac{1}{2})$ , mais il ne vérifie pas (b), c'est bien qu'on ne voit pas comment Bleu peut être amené à privilégier  $v = \frac{1}{2}$  parmi toutes les réponses possible  $(-1 \leq v \leq 1)$  à  $u = 0$  C'est donc un exemple de modèle qui ne présente pas de seuil.

Si on le modifie légèrement, en prenant  $g(u, v) = uv - \varepsilon(v^2 - 1)^2$ , où  $\varepsilon > 0$  est petit, on représente facilement  $N_+$  qui se compose de demi-droites et de parties de la courbe

$$u = 4\varepsilon v(v^2 - 1).$$

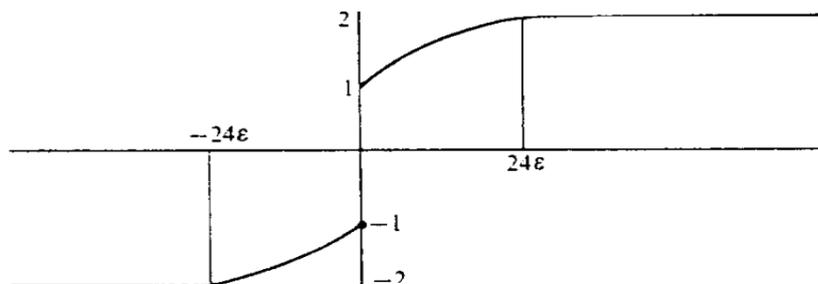


Figure 8: Représentation de la fonction  $g$

Pour obtenir  $N_+^0$ , il faut en exclure les deux points  $(0, 1)$  et  $(0, -1)$ . Le seul point qui satisfasse à (a) est  $(0, 1)$ . Il est clair qu'il vérifie (b). Ainsi, à la décision  $u = 0$ , Rouge a deux réponses possibles, une "bonne"  $v = 1$  et une "mauvaise"  $v = -1$ . Pour l'amener à choisir la bonne, Bleu n'a qu'à faire varier ses décisions continûment dans l'intervalle de temps  $[0; T]$  arbitrairement petit, suivant la loi:

$$[0, T] \ni t \rightarrow (T - t) \in U.$$

Tant que  $t < T$  Rouge répondra par  $1 + \frac{1+(T-t)}{8\varepsilon}$  et aura donc tendance, par continuité, à répondre par  $+1$  en  $t = T$ . Remarquons d'ailleurs que pour tout  $\varepsilon > 0$ , Rouge peut jouer  $u = \eta > 0$  assez petit pour que l'unique maximum absolu de  $g(u, v)$  soit  $v_\eta > 0$  tel que  $f(\eta, v_\eta) \geq f(0, 1) - \varepsilon$ . Si donc Rouge s'obstine à choisir en  $u = 0$  la "mauvaise" réponse  $v = -1$ , de telle sorte que Bleu ne peut réaliser son gain maximum de  $-\frac{1}{4}$ , du moins reste-t-il à ce dernier la possibilité de réaliser un gain  $-\frac{1}{4} - \varepsilon$ , arbitrairement voisin du maximum.

## 4. STABILITE STRUCTURELLE ET GENERICITE

Nous allons maintenant préciser et étudier la notion de seuil dans un cadre de géométrie différentielle. Dorénavant,  $U$  et  $V$  seront des variétés  $C^\infty$  compactes, de dimensions respectives  $p$  et  $q$ ,  $f$  et  $g$  seront des fonctions numériques  $C^\infty$  sur  $U \times V$ .

Il est nécessaire ici de rappeler quelques résultats de stratification de **JIMather**[13], et aussi l'exposé d'**A. Chenciner**, [12]). Pour tout entier  $k \geq 2$ , il existe un sous-fibré  $\Sigma_0^k(V)$  de  $J^k(V)$  et une stratification de Whitney de  $J^k(V) - \Sigma_0^k(V)$  par des sous-fibrés  $S_i^k(v)$  tels que:

- a) La fibre de  $\Sigma_0^k(V)$  est un sous-ensemble algébrique fermé de la fibre de  $J^k(V)$ .
- b) La codimension de  $\Sigma_0^k(V)$  dans  $J^k(V)$  tend vers l'infini avec  $k$ .
- c) Les strates  $S_i^k(v)$  sont en nombre fini  $0 \leq i \leq r$ . Ce sont des sous-variétés  $C^\infty$  de  $J^k(V)$ , de codimensions respectives  $i$ .

On peut interpréter géométriquement les premières strates. Dire que  $J^k\varphi(v) \in S_0^k(v)$  signifie que le point  $v \in V$  n'est pas un point critique de la fonction  $\varphi \in C^\infty(v)$ . Toutes les autres strates sont donc contenues dans la sous-variété de  $J^k(V)$  d'équation  $J^1\varphi(v) = 0$ . Dire que  $J^k\varphi(v) \in S_1^k(v)$  signifie que la fonction  $\varphi$  présente en  $v \in V$  un point critique du type de Morse (quadratique non dégénéré)[1].

Fixons  $k$  de façon que  $\text{codim } \Sigma_0^k(V) > p + q$ , ce qui est possible d'après (b), et déterminons  $r$  d'après (c). Notre hypothèse sur  $g$  s'énonce alors ainsi:

(T') L'application  $(u, v) \rightarrow J_v^k g(u, v)$  de  $U \times V$  dans  $J^k(V)$  est transversale à  $\Sigma_0^k(V)$ , et l'application  $(u, v) \rightarrow (u, J_v^k g(u, v))$  de  $U \times V$  dans  $U \times J^k(V)$  est multi transversale aux  $U \times S_1^k(v)$ ,  $1 \leq i \leq r$ .

La transversalité de  $J_v^k g$  à  $\Sigma_0^k(V)$ , compte tenu des dimensions, exprime simplement que  $J_v^k(g) \cap \Sigma_0^k(V) = \emptyset$ . La multi transversalité de  $(u, v) \rightarrow (u, J_v^k g(u, v))$  aux  $U \times S_1^k(v)$  exprime la propriété suivante: si en un point  $\bar{u} \in U$  il existe  $a$  points deux à deux distincts  $v_m \in V$  tels que :

$$T_v g(\bar{u}, v_1) = \dots = T_v g(\bar{u}, v_a) = 0$$

$$g(\bar{u}, v_1) = \dots = g(\bar{u}, v_a) = x \in \mathbb{R}$$

Si  $\sigma_m$  désigne le germe en  $J_v^k g(\bar{u}, v_m)$  de la strate contenant ce point, et si  $y_m$  désigne le germe en  $(\bar{u}, v_m)$  de l'application  $(u, v) \rightarrow (u, g(u, v))$  restreinte à  $(J_v^k g)^{-1}(\sigma_m)$ , alors les germes  $y_1, y_2, \dots, y_a$  se coupent en position générale en  $(\bar{u}, x)$  dans  $U \times \mathbb{R}$ . Il revient au même de dire que la germe produit  $(y_1, y_2, \dots, y_a)$  de  $\prod_{m=1}^a (J_v^k g)^{-1}(\sigma_m)$  dans  $(U \times \mathbb{R})^a$  est transversale en  $(\bar{u}, x)^a$  à la diagonale de  $(U \times \mathbb{R})^a$ . En particulier, compte tenu des dimensions.

On en déduit que  $a \leq p + 1$ : l'hypothèse de multitransversalité implique que la fonction  $g(u, \cdot)$  présente au plus  $(p + 1)$  points critiques distincts associés à une même valeur critique. D'où immédiatement, par application des théorèmes de transversalité de **R.**

**Thom**[10].

**4.3. PROPOSITION 8.** L'ensemble des fonctions  $g$  vérifiant l'hypothèse (T)

constitue un ouvert

dense de  $C^\infty(U \times V)$ , [1].

L'hypothèse (T). Comme l'hypothèse (T), implique que  $J_v^1 g$  est transversale à  $J_0^1(V)$ . et donc que  $N$ , définie par l'équation  $J_v^1 g(u, v) = 0$  est une sous-variété de  $U \times V$ . Mais elle permet en outre de définir sur  $N$  une stratification de Whitney, de la manière suivante.

Soit  $(u, v) \in N$ , avec  $g(u, v) = x$ ; on considère tous les  $(u, v') \in N$  tels que  $g(u, v') = x$ .

Ils sont en nombre fini  $a$ , compris entre 1 et  $p + 1$ : on dira que la valeur critique  $x$  est

$a$ -uplet. On les écrit sous la forme  $(u, v_m)$ ,  $1 \leq m \leq a$ , en commençant par  $(u, v_1)$  (ainsi  $v_1 = v$ ).

En reprenant les notations ci-dessus, on définit alors le germe en  $(u, v)$  de la strate contenant ce point comme l'image réciproque de  $\bigcap_{m=1}^a \gamma_m$  dans  $(J_v^k g)^{-1}(\sigma_1)$  par  $\gamma_1$ , ou, ce qui revient au même, comme la projection sur  $(J_v^k g)^{-1}(\sigma_1)$  de l'image réciproque de la diagonale de  $(U \times \mathbb{R})^a$  par  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_a)$ .

Chaque strate est une sous-variété de  $N$  possédant un nombre fini de composantes connexes, ses cellules. La strate de codimension zéro est un ouvert dense de  $N$ ; dire que le point  $(u, v) \in N$  lui appartient signifie que la fonction  $g(u, \cdot)$  présente en  $v$  un point critique de type de Morse,  $g(u, v)$  étant valeur critique simple. La strate de codimension un rassemble deux types de points:

- a) les points  $(u, v) \in N$  tels que la fonction  $g(u, \cdot)$  admet  $g(u, v)$  comme valeur critique double,  $v$  et l'autre point critique étant du type de Morse. Ce sont les points de croisement ou catastrophes de conflit dans la terminologie de R.

Thom[10].

- b) Les points  $(u, v) \in N$  tels que la fonction  $g(u, \cdot)$  présente en  $v$  un point critique du type :

$$-x_1^2 - \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_{q-1}^2 + x_q^2,$$

Donc non de Morse, la valeur critique  $g(u, v)$  étant simple. Ce sont les points de naissance ou catastrophes de bifurcation dans la terminologie de R. Thom.

Rappelons la définition des ensembles  $N_+$  et  $N_+^0$ , introduits au §3, et définissons  $N_+^1$ :

$$N_+ = \{(u, v) | v \text{ est un maximum absolu de } g(u, \cdot)\}$$

$$N_+^0 = \{(u, v) | v \text{ est l'unique maximum absolu de } g(u, \cdot)\}$$

$$N_+^1 = \left\{ (u, v) \left| \begin{array}{l} v \text{ est l'unique maximum absolu de } g(u, \cdot) \text{ et } c' \text{ est un point critique du} \\ \text{tupe de Morse} \end{array} \right. \right\}$$

Il est clair que  $N_+^1 \subset N_+^0 \subset N_+ \subset N$ . On peut aussi définir  $N_+^1$  comme l'intersection de  $N_+^0$  avec la strate de codimension zéro de  $N$ . Comme l'une et l'autre sont des ouverts de  $N$ , on en déduit que  $N_+^1$  est contenu dans l'intérieur de  $N_+$  relativement à  $N$ . Nous allons montrer que  $\overline{N_+^0} = N_+$  et même que  $\overline{N_+^1} = N_+$ . C'est ce qui fait l'intérêt de l'hypothèse (T), en nous permettant d'étudier commodément les seuils.

**4.2. PROPOSITION 9.** Sous l'hypothèse (T)

$$N_+ = \overline{N_+^1}, [1].$$

**Démonstration.** De la continuité de  $g$  et de la compacité de  $V$ , il ressort immédiatement que  $N_+$  est fermé dans  $U \times V$ . Pour la suite de la démonstration il faut faire usage de l'hypothèse (T) et de la stratification qui s'en déduit.

Nous supposons d'abord que  $(\bar{u}, \bar{v}) \in N_+$  est tel que tous les points critiques de  $g(\bar{u}, \cdot)$  soient du type de Morse, c'est-à-dire que l'application  $v \mapsto J_u^1 g(\bar{u}, v)$  soit transversale à  $J_0^1(V)$ . On sait que pour  $u$  assez voisin de  $\bar{u}$ , l'application  $v \mapsto J_u^1 g(u, v)$  reste transversale à  $J_0^1(V)$ . Il existe donc un ouvert  $O$  de  $U$  contenant  $\bar{u}$  tel que pour  $u \in O$ , la fonction  $g(u, \cdot)$  présente un nombre fixe de points critiques, tous du type de Morse et en dépendance  $C^\infty$  de  $u$ . Soit  $a$  le nombre de maxima absolus de  $g(\bar{u}, \cdot)$  on les

notera  $v_m \in V$  ENS 'arrangeant pour que  $v_1 = \bar{v}$ , et  $x \in \mathbb{R}$  leur commune valeur. Si  $a = 1$  le point  $(\bar{u}, \bar{v})$  appartient à  $N_+^1$ .

Sinon, nous introduisons dans  $(U \times \mathbb{R})^a$  sa diagonale  $\Delta$  et la sous-variété  $P_1$  définie par :

$$P_1 = \left\{ (u_i, x_i), 1 \leq i \leq a \mid \begin{array}{l} u_1 = u_2 = \dots = u_a \\ x_1 \geq x_2, \dots, x_1 \geq x_a \end{array} \right\}.$$

Il est clair que  $\Delta \subset \bar{P}_1$ , et que toute sous-variété transversale à  $\Delta$  sera transversale à  $P_1$ , au voisinage de  $\Delta$ . Mais l'hypothèse ( $T'$ ), dans ce cas particulier, exprime justement que l'application :

$$(u_i, v_i) \mapsto (u_i, g(u_i, v_i)), 1 \leq i \leq a$$

de  $N^a$  dans  $(U \times \mathbb{R})^a$  est transversale à  $\Delta$  en  $(\bar{u}, x)^a$ . On a donc la transversalité à  $P_1$ , au voisinage de  $(\bar{u}, x)^a$ . Il sera alors possible de trouver dans  $U$  une suite  $u_n, n \in \mathbb{N}$ , et dans  $V$  a suites  $v_{mn}, n \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq a$ , telles que :

- a)  $(u_n, v_{mn}) \rightarrow (\bar{u}, v_m)$  dans  $N$ .
- b)  $u_n \in O, \forall n \in \mathbb{N}$ .
- c)  $g(u_n, v_{1n}) > g(u_n, v_{mn})$  pour  $m \neq 1, n \in \mathbb{N}$ .

On en déduit que  $v_{1n}$  est l'unique maximum absolu de  $g(u_n, .)$ , et donc que  $(u_n, v_{1n}) \in N_+^1$ , d'où le résultat dans ce cas. On remarquera comment l'hypothèse de multi transversalité permet de déployer un maximum multiple d'ordre  $a$  en  $a$  maxima simples.

Revenons au cas général, où  $(\bar{u}, \bar{v})$  est un point quelconque de  $N_+$ . On sait que  $(\bar{u}, \bar{v})$  est adhérent à une cellule de codimension zéro dans  $N$ , se projetant sur  $U$  suivant un ouvert.

Mais on sait aussi que l'ensemble des  $u$  pour lesquels l'application  $v \mapsto J_v^1 g(u, v)$  est

transversale à  $J_0^1(v)$  est un ouvert dense de  $U$ . On peut donc trouver une suite  $(u_n, v_n)$  de  $N$  tendant vers  $(\bar{u}, \bar{v})$  et telle que tous les points critiques de  $g(u_n, \cdot)$  soient du type de Morse. D'ou le résultat

On a ainsi montré que le graphe  $N_+$  de la multi-application  $u \rightarrow \{(u, v) | v \text{ maximise } g(u, \cdot)\}$  se décompose comme l'adhérence d'un nombre fini de sous-variétés ouvertes de  $N$  telles que la restriction à chacune d'elles de la projection horizontale soit un difféomorphisme.

### 4.3. PROPOSITION 10

Si  $g$  satisfait à l'hypothèse  $(T')$  et si  $f$  est continue, le jeu associé au couple  $(f, g)$  possède au moins un seuil.

En effet  $N_+$  est compact et tout maximum de  $f$  sur  $N_+$  est un seuil. Ainsi donc, pour toutes les fonctions  $f$  continues sur  $U \times V$ , et pour des fonctions  $g$  constituant un ouvert dense de  $C^\infty(U \times V)$ , le modèle présente un seuil, ce qui répond à la question de la généricité, [1].

La question de la stabilité structurelle est plus complètement élucidée par la proposition suivante:

### 1.4. PROPOSITION 11.

Si  $g$  satisfait à  $(T')$ , il existe un ouvert dense  $O$  de  $C^2(U \times V)$  et une application de classe  $C^1$   $s : O \rightarrow N$  telle que  $s(f)$  soit l'unique seuil du jeu associé au couple  $(f, g)$ , [1].

**Démonstration.** Définissons  $O$  comme l'ensemble des fonctions de  $C^2(U \times V)$  au voisinage desquelles le seuil est unique, en dépendance  $C^1$  de  $f$ . Il en ressort immédiatement que  $c$ 'est un ouvert; reste simplement à montrer qu'il est dense.

Pour cela, nous partons d'un autre ouvert dense  $O'$  de  $C^2(U \times V)$ , défini à l'aide de la stratification de  $N$  associé à  $g$ , comme l'ensemble des  $f \in C^2(U \times V)$  tels que :

- Pour toute strate  $S$  de  $N$ , la restriction de  $f$  à  $S$  n'a que des points critiques du type de Morse.
- Toutes les valeurs critiques des restrictions de  $f$  à  $S$ , pour toutes les strates  $S$  de  $N$ ,

Sont distinctes.

Si  $f \in O'$ , le jeu associé au couple  $(f, g)$  possède un seuil unique  $s(f)$ . Par un argument de compacité, on montre aisément que l'application  $s$  est continue sur  $O'$ .

Soit donc  $\bar{f} \in O'$ , et  $S$  la cellule de  $s(\bar{f})$  dans  $N$ . Deux cas se présentent:

Cas (i) Il existe un voisinage  $\Omega$  de  $\bar{f}$  dans  $O'$  tel que  $s(\Omega) \subset S$ . Dans ces conditions, pour tout  $f$  de  $\Omega$ ,  $s(f)$  est l'unique maximum de  $f$  sur  $S$ . La propriété de transversalité traduisant le fait que  $c$  est un point de Morse implique que  $s$  est de classe  $C^1$  sur  $\Omega$ .

Cas (ii). On peut trouver dans  $N$  une cellule  $S' \neq S$  et dans  $O'$  une suite  $f_n \rightarrow \bar{f}$  telle que  $s(f_n) \in S', \forall n \in \mathbb{N}$ . Mais on sait également que  $s(f_n) \rightarrow s(\bar{f}) \in S$ . donc que  $S \cap \bar{S}' \neq \emptyset$ . D'après les propriétés usuelles des stratifications, ceci implique que  $S \subset \bar{S}'$  et  $\text{codim } S > \text{codim } S'$ .

Si l'on est dans le cas (i), alors  $\bar{f} \in O$ . Si l'on est dans le cas (ii), on se donne  $\varepsilon > 0$ , et on choisit  $f' \in O'$  tel que  $s(f') \in S'$  et  $\|f - f'\| \leq \varepsilon/2$  dans  $C^2(U \times V)$ . Puis on applique l'alternative (i)-(ii) à la fonction  $f'$ . Dans le cas (i),  $f' \in O$ ; dans le cas (ii) on peut trouver  $f'' \in O'$  tel que  $s(f'')$  appartienne à une cellule  $S''$  avec  $\text{codim } S'' < \text{codim } S'$ , et que

$$\|f' - f''\| \leq \varepsilon/4$$

Dans  $C^2(U \times V)$ . Et ainsi de suite. A force de descendre les codimensions on finit par s'arrêter, si bien qu'on aura trouvé une fonction  $\bar{f} \in O$  telle que  $\|\bar{f} - f\| \leq \varepsilon$  dans  $C^2(U \times V)$ .

Comme  $\varepsilon > 0$  est quelconque, ceci prouve que  $\bar{f} \in \bar{O}$ . Donc  $\bar{O} \supset \bar{O}' = C^2(U \times V)$ .

Terminons par quelques remarques sur la stratification de  $N$ . Tout d'abord, les cellules de la strate de codimension un contiennent, les unes uniquement des points de naissance, les autres uniquement des points de croisement. L'allure de la fonction  $g(u, \cdot)$  au voisinage d'un point de naissance montre aisément que celui-ci ne peut être un maximum local, a fortiori global. Ainsi donc  $N_+$  ne contient que des cellules de croisement.

Suivant la fonction  $f$ , le seuil pourra être atteint sur la strate de codimension zéro, ou sur la strate de codimension un auquel cas on observera une catastrophe de conflit et non une catastrophe de bifurcation; ou sur une strate de codimension plus élevée. Tous ces cas peuvent se présenter de manière structurellement stable, comme on peut s'en convaincre en examinant par exemple le "papillon" de **René Thom**[10].

La stratification de  $N$  a été construite à partir de la stratification de  $J^k(V)$ . On peut d'une manière analogue construire à partir de celle-ci une stratification de  $C^\infty(V)$ , puis en déduire une stratification de  $U$  par l'intermédiaire de l'application  $u \rightarrow g(u, \cdot)$  de  $U$  dans  $C(V)$ . On aura ainsi montré que la stratification de  $N$  se projette en une stratification de  $U$ .

Il peut être utile pour des applications au contrôle optimal et aux jeux différentiels de remarquer que la Proposition 9 donne une forme générique de la multi-application qui, à  $u \in U$ , associe l'ensemble des points  $v \in V$  où atteint son maximum. Plus précisément, introduisons la définition suivante :

### 1.5.Définition

Une multi-application  $\Gamma$  de  $U$  dans  $V$  sera dite excellente si:

- a)  $\Gamma(u)$  comporte au plus  $(\dim U + 1)$  points;
- b) il existe une stratification de Whitney de  $U$  dont les cellules de codimension zéro

Seront  $U_1, \dots, U_r$ , et  $r$  applications  $y_i : U_i \rightarrow V$ , continues sur  $\bar{U}_i$ , et de classe  $C^\infty$  sur  $U_i$ ,

Telle que :

$$\text{graphe}(\Gamma) = \bigcup_1^r \text{graphe}(y_i).$$

A toute fonction réelle  $g$  sur  $U \times V$  on peut associer une multi-application  $r$  de  $U$  dans  $V$  définie par:

$$\forall u \in U, \Gamma(u) = \{v \in V \mid g(u, v) \geq g(u, v') \forall v' \in V\}.$$

On a alors le résultat de généralité:

### 1.6.PROPOSITION 9

Si  $g \in C^\infty(U \times V)$  vérifie  $(T')$ , la multi-application  $r$  associée est excellente.

Enfin, nous aurions pu nous intéresser aux maxima locaux plutôt qu'aux maxima globaux. Cela revient à attribuer une certaine "myopie" à Bleu et Rouge, tout au moins à ce dernier. Il nous aurait alors fallu considérer, à la place de  $N_+$ , l'ensemble  $N'_+$  défini par :

$N'_+ = \{(u, v) \mid v \text{ est un maxima local de } g(u, \cdot)\}$  ou plutôt son adhérence.

Le centre d'intérêt de l'étude se serait déplacé, avec les seuils, des catastrophes de conflit aux catastrophes de bifurcation, [1].

## **Conclusion**

La théorie des jeux est nécessaire pour modéliser les vues des n'importe quelqu'un en formule mathématique et à travers ça on peut considérer le bon résultat et les buts dans beaucoup des domaines de la vie soit finance ou économie ou dans la guerre... etc.

# Bibliographie

1. Ivar Ekeland, Topologie différentielle et théorie des jeux, Topology vol. 13. pp. 375-388. pergamon press. printed in great britan.
2. Daniel PERRIN, La méthode de Cardan et les imaginaires.
3. R.ABRAHAM et J. ROBBIN : Transvrsal Mappings and Flows. Benjamin, New York (1967).
4. V. PARETO :Cours d'Économie Politique. Lausanne (I 596-1 897).
5. Rida Laraki, Jérôme Renault et Sylvain Sorin, les bases mathématiques de la théorie des jeux, Livre 2010.
6. S. SMALE :Global analysis and economics, in Dynamical systems, (Edited by M. PEIXOTO). Academic Press, New York (1973).
7. J. Von Neumann. Et O.MORGENSTERN :Theory of Games and Economic Behaciour. Princeton UniversityPress (1944).
8. Konieczny, S. (1999), Introduction à *la Théorie des Jeux*, présentation, CRIL-CNRS, Université d'Artois – Lens.
9. Paul M., Lepelley D. et Smaoui h.(2013) : *Introduction à la Théorie des Jeux*, CEMOI, Universite de la Reunion
10. R. Thom : Stabilité Structurelle et Morphogenèse. Benjamin, Kew York (1972).
11. H. LEVINE :Singularités of différentiable mappings, in Proceeding of Liverpool Singularities, Vol. I. Lecture Notes in Mathematics, NO. 192. Springer, Berlin (1971).
12. A. CHENCISER :Travaux de Thomet. Mather sur la stabilité topologique. Séminaire Bourbaki, No. 124 (Février 1973).
13. J. MATHER: Stratifications and mappings, in Dynamical Systems (Edited by M. PEISOTO), Academic Press. New York (1973).