UNIVERSITÉ DJILALI BOUNAÂMA-KHEMIS MILIANA
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER EN MATHÉMATIQUES

SPÉCIALITÉ : ANALYSE MATHÉMATIQUE ET APPLICATIONS

Présenté par

CHERABLI Halima

Existence et unicité de la solution d'un système fractionnaire

---

Soutenu publiquement en septembre 2017 devant le jury composé de :

Président du jury :	**Mr M. BENBACHIR** Université Khemis Miliana.
Encadrant :	**Mr M. HOUAS** Université Khemis Miliana.
Examinateur :	**Mme F. CHITA** Université Khemis Miliana.
Examinateur :	**Mr M. BEZZIOU** Université Khemis Miliana.

Dédicaces

Je dédie ce mémoire

À mes chers parents,

À mon très cher frère et à mes sœurs adorées,

À mon cher mari,

et ma chère et tendre fille, Sérine.

Remerciements

Aucun travail ne pourrait être achevé sans l'aide et le soutien de nos familles, nos amis et nos enseignants. Chacun d'eux à apporter sa pierre à l'édifice.Je sais que je ne pourrais citer toutes les personnes qui m'ont aidées et soutenues.Néaumoins, rien ne peut être fait ni réalisé sans l'aide de Dieu à qui je rends grâce aujourd'hui.

Vous, mes chers parents adorés, je ne vous remercierez jamais assez, et c'est grâce à vous que je suis là aujourd'hui.

Un grand merci à mon encadreur monsieur Haous Mohamed pour son soutien, sa compréhension et sa disponibilité. Je suis aussi reconnaissante à monsieur Benbachir pour tout le savoir qu'il nous a transmis pendant notre cursus, lui et tous les enseignants du département. Je remercie aussi les membres du jury qui ont accéptés de lire et d'évaluer mon travail.

Soumia, Souad, Sorya, Hamida et toutes mes amies pour leur soutient ainsi que toute ma promotion en leur souhaitant un avenir radieux.

Je ne saurais conclure sans exprimer ma grande gratitude à mon époux pour son soutien indéfectible.

Table des matières

Introduction

Le calcul fractionnaire est défini comme étant la branche mathématique qui étudie la généralisation des notions de dérivation et d'intégration à des ordres non nécessairement entiers[4][5][6].

L'histoire débute le 30 septembre 1695. Dans une lettre adressée à Gottfried Wilhelm Leibniz (le co-inventeur du calcul différentiel), le Marquis de l'Hôpital lui pose la question suivante : $\frac{d^n f}{dt^n} si\ n = \frac{1}{2}$? Le calcul différentiel étant encore à ses débuts, Leibniz réponds qu'il s'agit là d'un paradoxe, mais qu'un jour, il en découlera de très utiles conséquences.

aujourd'hui, et comme l'avait prédi Leibniz, le calcul fractionnaire a de très nombreuses applications, on citera à titre d'exemple : le traitement du signal et de l'image, les biotechnologies et les applications biomédicales, le diagnostique et la détection des défauts dans les machines par la modélisation.

Dans ce mémoire il sera question de traiter l'existence et l'unicité de la solution d'un système fractionnaire d'ordre différentiel. En effet, actuellement,un intérêt considérable est dérigé vers l'étude de l'existence et l'unicité de solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Cette étude est basée sur les théorèmes du point fixe (principe de contraction de Banach, théorème de Scheafer, Arzèla-Ascoli et Krasnosselski)[1][2][3]

Le présent travail se compose de trois chapitres. Le premier servira de support théorique dans lequel il sera question de définir les notions de base du calcul fractionnaire. Ensuite, mettre en évidence les relations qui existent entre leurs propriétés, dans l'objectif de servir les deux chapitres suivants. Le deuxième chapitre quant à lui sera consacré à la démonstration de l'existence et l'unicité de la solution d'un sytème d'équations différentielles fractionnaires avec des conditions intègrales fractionnaires au sens de Riemann -Liouville :

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) = f_1(t, x(t), y(t)) + \int_0^t \frac{(t-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} \varphi(s)\, g(s, x(s), y(s))\, ds \ t \in [0, T], \\ D^{\beta}y(t) = f_2(t, x(t), y(t)) \ + \int_0^t \frac{(t-s)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} \psi(s)\, h(s, x(s), y(s))\, ds \quad t \in [0, T], \\ x(0) = 0, \qquad D^{\mu}x(T) - \sum_{j=1}^{k} a_j D^{\mu}x(\eta_j) = \omega_1, \\ y(0) = 0, \qquad D^{\nu}y(T) - \sum_{j=1}^{k} a_j D^{\nu}y(\varepsilon_j) = \omega_2. \end{cases}$$

Enfin, dans le dernier chapitre, on présentera quelques résultats d'existence et d'unicité de solutions du sytème d'équation différentielle fractionnaire avec deux dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville :

$$\begin{cases} D^{\alpha_1}(D^{\alpha_2}+\lambda_1)x(t)=f_1(t,x(t),y(t)) \quad t\in[0,T]\,, \\ D^{\beta_2}(D^{\beta_2}+\lambda_2)y(t)=f_2(t,x(t),y(t)) \quad t\in[0,T]\,, \\ I^{1-\alpha_2}x(0)=0, \qquad D^{\sum_{i=1}^{2}\alpha_i-2}x(T)=\sum_{j=1}^{m}a_jI^{\sum_{i=1}^{2}\alpha_i-1}x(\eta_j), \\ I^{1-\beta_2}y(0)=0, \qquad D^{\sum_{i=1}^{2}\beta_i-2}y(T)=\sum_{j=1}^{m}b_jI^{\sum_{i=1}^{2}\beta_i-2}y(\varsigma_j), \end{cases}$$

Mots clés:

Calcul fractionnaire, Intégrale fractionnaire au sens de Riemann–Liouville, dérivée fractionnaire, théorèmes du point fixe, l'existence et l'unicitè de la solution d'un système d'équation diffèrentielle fractionnaire.

Key words:

Fractional calculus, Riemann-Liouville fractional integral, fractional derivative, fixed point theoreme, existence and uniqueness of the solution of fractional order differential equation systems.

Chapitre 1

Calcul fractionnaire

1.1 Fonctions spéciales

Dans cette section, on présentera les fonctions Gamma et Bèta ,qui seront utilisées dans les autres chapitres. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.[3][4][5]

Fonction Gamma

Définition 1 *L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$. la fonction Gamma $\Gamma(z)$est définie par l'intégrale suivante:*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

avec $\operatorname{Re}(z) > 0$

. Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z} dt = \left[-e^{-t} t^{z}\right]_0^{\infty} + z\int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z).$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Fonction Bêta

Définition 2 *La fonction $B(p,q)$ est la fonction Bêta (qui est un type d'intégrale d'Euler)définie par l'intégrale suivante:*

$$B(p,q) = \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q-1} dx.$$

Avec $RE(P) \succ 0; RE(q) \succ 0$

Lien entre la fonction Gamma et la fonction Bêta

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Avec $RE(P) \succ 0; RE(q) \succ 0$

1.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

nous allons suivre l'approche de Riemann pour proposer une première définition d'intégrale fractionnaire, l'intégrale de Riemann-Liouville.[2][3]

Définition 3 *L'intégrale d'ordre fractionnaire de la fonction $f \in L_1([a;b],\mathbb{R})$ d'ordre $\alpha > 0$; est*

définie par :

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt.$$

Théorème 1 *Pour $f \in C([a;b])$,l'intégrale fractionnaire de Riemann -Liouville possède la propriété de semi-groupe*

$$I_a^\alpha \left[\left(I_a^\beta f \right)(x) \right] = I^{\alpha+\beta} f(x)$$

Preuve. La preuve découle directement de la définition

$$I_a^\alpha \left[\left(I_a^\beta f \right)(x) \right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left[\int_a^t (t-u)^{\beta-1} f(u) du \right] dt$$

or $f \in C([a;b])$; d'après le théorème de Fubini et par le changement de variable $t = u + s(x-u)$

on obtient

$$I_a^\alpha\left[\left(I_a^\beta f\right)(x)\right]=\frac{B\left(\alpha,\beta\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (t-u)^{\beta-1}f(u)du=I_a^{(\alpha+\beta)}f\left(x\right).$$

■

Proposition 1 *On a les propriétés suivantes:*

i) l'opérateur intégral I_0^α *est linèaire.*

ii)$I_a^0 f(t)=f(t)$.

ii)$\frac{d}{dx}(I_a^\alpha f)(x)=(I^{\alpha-1}f)(x)$.

Exemple 1 *Soit* $f(x)=(x-a)^\beta$

calculer l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de f $(\alpha \succ 0)$

à l'aide de changement de variable $s=a+(t-a)x$ on obtient:

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(t) &= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^1 (1-x)^{\alpha-1}x^\beta dx \\ & \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\beta(\alpha,\beta+1) \\ & \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)} \end{aligned}$$

d'où

$$I_a^\alpha f(t)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\beta+\alpha}$$

1.3 Dérivation fractionnaire

1.3.1 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Définition 4 *Soit f une fonction intégrable sur* $[a;b]$*, alors la dérivée fractionnaire d'ordre* α *(avec* $n-1<\alpha<n$*) au sens de Riemann-Liouville est définie par :*

$$({}^{RL}D_a^\alpha f)(x)=\frac{d^n}{dx^n}(I_a^{n-\alpha}f)(x)$$

Exemple 2 *calculer la dèrivée fractionnaire d'ordre $n-1 < \alpha < n$ au sens de Riemann-Liouville de $f(x) = (x-a)^{\beta}$*

en faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on aura:

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D^{\alpha}(x-a)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{n-\beta+\alpha}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta}ds \\
&\frac{\Gamma(n+\beta+\alpha+1)\beta(n-\alpha,\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\
&\frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha+1)\Gamma(n+\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\
&\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

Lemme 1 *Soit $\alpha \in]m-1, m[\,; m \in \mathbb{N}^*$ alors:*

$$({}^{RL}D_a^{\alpha}f)(x) = 0 \Longrightarrow f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} C_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)}(x-a)^{j+\alpha-m}.$$

où C_j sont des constantes .

Preuve. On a par définition

$$({}^{RL}D^{\alpha}f)(x) = \frac{d^m}{dx^m}((I^{m-\alpha}f)(x)).$$

Si

$$\begin{aligned}
(D_a^{\alpha}f)(x) = 0 &\Longrightarrow \frac{d^m}{dx^m}((I_a^{m-\alpha}f)(x)) = 0 \\
&\Longrightarrow (I_a^{m-\alpha}f)(x) = \sum_{j=0}^{m-1} Cj(x-a)^j.
\end{aligned}$$

composons avec I^{α} on obtient

$$\begin{aligned}
I^{\alpha}(I_a^{m-\alpha}f)(x) &= I^{\alpha}(\sum_{j=0}^{m-1} Cj(x-a)^j) \\
(I_a^m f)(x) &= I_a^{\alpha}(\sum_{j=0}^{m-1} Cj(x-a)^j) \\
(I_a^m f)(x) &= \sum_{j=0}^{m-1} Cj\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)}(x-a)^{\alpha+j} \\
\frac{d^m}{dx^m}(I_a^m f)(x) = f(x) &= \sum_{j=0}^{m-1} Cj\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)}\frac{d^m}{dx^m}(x-a)^{\alpha+j} \\
f(x) &= \sum_{j=0}^{m-1} Cj\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+\alpha+1-m)}(x-a)^{j+\alpha-m}.
\end{aligned}$$

■

1.3.2 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 5 *Pour une fonction donnée f sur l'intervalle$[a;b]$ la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de f , d'ordre $a>0$ est définie par*

$$\begin{aligned}({}^{C}D^{\alpha}f)(x) &= (I_a^{m-\alpha}f^{m})(x)\\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1}f^{(m)}(t)dt.\end{aligned}$$

ici $n=[\alpha]+1et[\alpha]$ désignant la partie entière de α.

Exemple 3 *1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo.*

La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle.

$${}^{C}D_a^{\alpha}c=0.$$

2. La dérivèe fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de $f(x)=(x-a)^{\beta}$.

soit $a>0$ tel que $n-1<a<n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ avec $\beta>n-1$

$${}^{C}D_a^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)ds$$

pour $\beta>n-1$ on obtient

$$f^{n}(s)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(s-a)^{\beta-n}.$$

en effectuant le changement de variable $s=a+\tau(t-a)$ $(0\leq\tau\leq1)$ on aura:

$$\begin{aligned}{}^{C}D_a^{\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}\int_0^1(1-\tau)^{n-\alpha-1}\tau^{\beta-n}d\tau\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)B\left(n-\alpha,\beta-n+1\right)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}\\ &\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.\end{aligned}$$

La relation entre la dérivée au sens de Riemann-Liouville et Caputo

La relation entre la dérivée fractionnaire de Caputo et celle de Riemann-Liouville sur l'intervalle $[a,b]$ est décrite par le théorème suivant :

Théorème 2 *Soit $\alpha\succ0$ avec $n-1<a<n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$; supposons que f est une fonction telle que $({}^{C}D_a^{\alpha}f)(t)$ et $({}^{RL}D_a^{\alpha}f)(t)$ existent alors:*

$$({}^{C}D_a^{\alpha}f)(x)=({}^{RL}D_a^{\alpha}f)(x)-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+\alpha+1)}(x-a)^{j-\alpha}$$

Lemme 2 *si* $f^{(k)} = 0$ *pour* $k = 0, 1, 2...., n-1,$ *on aura*

$$({}^{C}D_a^{\alpha} f)(x) = ({}^{RL}D_a^{\alpha} f)(x)$$

Proposition 2 *1) Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire*

$${}^{C}D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f = f.$$

2)$({}^{C}D_a^{\alpha} f)(x) = 0 \Longrightarrow f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1)}(x-a)^j.$

3)$(I_a^{\alpha}\ {}^{C}D_a^{\alpha} f)(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1)}(x-a)^j.$

4)Si $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ *avec* $\alpha + \beta \leq 1$ *et* $f \in C^1([a,b], \mathbb{C})$ *alors*

$$({}^{C}D_a^{\alpha} o {}^{C}D_a^{\beta})(f)(x) = ({}^{C}D_a^{\alpha+\beta} f)(x).$$

1.4 Théorèmes de points fixes

Pour la résolution des équations différentielles et intégrales, les théorèmes du points fixes sont des outils extrêmement utiles.

En effet, ces théorèmes fournissent des conditions suffisantes pour les quelles une fonction donnée admet un point fixe, ainsi on assure l'existence de la solution d'un problème donné en le transformant en un problème de point fixe,et on détermine éventuellement ces points fixes qui sont les solutions du problème posé. Dans cette section on va présenter les théorèmes de points fixes qu'on va dans le but d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité.[3][5]

Soit $J := [0; T], T > 0$.Notons $C(J; \mathbb{R})$ est l'espace de Banach des fonctions continues définies de J dans $\mathbb{R}$; muni de la norme

$$\|x\|_{\infty} = \sup \{|x(t)|, t \in J\}.$$

On commence par la définition d'un point fixe.

Définition 6 *Soit f une application d'un ensemble E dans lui même. On appelle point fixe de* f *tout point* $u \in E$ *tel que*

$$f(u) = u.$$

Définition 7 *On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r,l'ensemble noté* $B(a; r)$ *telle que*

$$B(a, r) = \{x \in E / \|x - a\| < r\}.$$

Définition 8 *On appelle boule fermée de centre a et de rayon r,l'ensemble noté $B(a;r)$ telle que*

$$B\left(a,r\right)=\left\{x\in E/\left\|x-a\right\|\leq r\right\}.$$

Définition 9 *On dit qu'un espace vectoriel normé $(E,\|.\|)$ est complet, ou que c'est un espace de Banach, si toute suite de Cauchy dans E est convergente.*

Définition 10 *Soit (x_n) une suite de E, Alors (x_n) converge vers x dans $(E,\|.\|)$ si et seulement si*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left\|x_n-x\right\|_E=0.$$

Définition 11 *Une partie A de $(E,\|.\|)$ est dite relativement compact si son adhérence est compact.*

Définition 12 *Soient Eet F deux espace de banach, et $A: E\longrightarrow F$une application lineaire. On dit que A et borné si elle envoie les parties bornées de E sur des parties bornées de F*

Définition 13 *Soient E et F deux espaces de Banach. on appelle opérateur borné toute application linéaire continue de E dans F.*

Définition 14 *Soient E et F deux espaces de Banach et f une application définie de E à valeurs dans F On dit que f est complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de E en une ensemble relativement compact dans F. $f$est dite compact si $f(E)$ est relativement compact dans F.*

Définition 15 *Soit A un sous ensemble de $C(J;R)$; L'ensemble A est equicontinue. i.e pour tout $\varepsilon>0$; il existe $\delta>0$ tel que*

$$|t_2-t_1|<\delta\Longrightarrow\left\|f\left(t_2\right)-f\left(t_1\right)\right\|\leq\varepsilon \text{ pourtout } t_2,t_1\in J \text{ et tout } f\in A$$

Définition 16 *Soit (E,d) un espace métrique. Une application $f: E\longrightarrow E$ est dite Lipschitzienne de constante $L>0$ si elle vérifie*

$$\forall x,y\in E, d\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)\leq Ld\left(x,y\right)$$

1.4.1 théorème de point fixe de Banach

Théorème 3 *Soient X un espace de Banach, et $A: X\longrightarrow X$ un opérateur contractant. Alors A admet un point fixe unique i.e $\exists!x\in X$ tel que $f\left(x\right)=x$*

1.4.2 Théorème de point fixe de Schaefer

Théorème 4 *Soit X un espace de Banach et $A : X \longrightarrow X$ est un opérateur complètement continue. Si l'ensemble*

$$\varepsilon = \{x \in X : \lambda Ax = x \text{ pour certain } \lambda \in]0,1[\},$$

est borné, alors A possède au moins un point fixe.

1.4.3 Théorème de point fixe de krasnosselski

Théorème 5 *Soit X un espace de Banach, et soit M une partie non vide, convexe et fermé de X: On suppose que $A; B$ sont deux opèrateur de X dans X satisfaisants:*

i: $Ax + By \in M; \forall x; y \in M$.

ii:A est une contraction.

iii: B est continue et $B(M)$ est contenue dans un ensemble compact.

Alors $\exists x^* \in M$ tel que $Ax^* + Bx^* = x^*$.

1.4.4 Théorème de Arzèla-Ascoli

Théorème 6 *Soit A un sous ensemble de $C(J; R)$; A est relativement compact dans $C(J; R)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vériffées:*

i) L'ensemble A est uniformément borné. i.e il existe une constante $k > 0$telle que : $\|f(x)\| \leq K$ pour tout $x \in J$ et tout $f \in A$.

ii) L'ensemble A est equicontinue.i.e pour tout $\varepsilon > 0$; il existe $\delta > 0$ tel que

$|t_1 - t_2| < \delta \Longrightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon$ pour tout $t_1, t_2 \in J$ et tout $f \in A$.

Chapitre 2

Système d'équations différentielles fractionnaires avec des conditions intégrales fractionnaires

2.1 Introduction

Lors de ce chapitre, on abordera l'existence et l'unicité de la solution d'un système d'équations différentielles fractionnaires avec des conditions intègrales fractionnaires au sens de Riemann-liouville. Le système en question se présente comme suit:

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) = f_1(t,x(t),y(t)) + \int_0^t \frac{(t-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\varphi(s)\, g(s,x(s),y(s))\, ds, t \in J = [0,T], \\ D^{\beta}y(t) = f_2(t,x(t),y(t)) \ + \int_0^t \frac{(t-s)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)}\psi(s)\, h(s,x(s),y(s))\, ds, t \in J = [0,T], \\ x(0) = 0, \qquad D^{\mu}x(T) - \sum_{j=1}^{k} a_j D^{\mu}x(\eta_j) = \omega_1, 0 \leq \eta_j \leq T, \\ y(0) = 0, \qquad D^{\nu}y(T) - \sum_{j=1}^{k} b_j D^{\nu}y(\varepsilon_j) = \omega_2., 0 \leq \varepsilon_j \leq T, \end{cases} \tag{2.1}$$

Où D^{α} et D^{β} sont deux dérivées fractionnaires au sens Riemann-Liouville d'ordre α et β respectivement avec $0 < \alpha, \beta < 2$,

et $f_i; g \ et \ h : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues avec $(i = 1,2)$ et $\eta_j, \varepsilon_j \in [0,T]$,

$\lambda_i, (i = 1,2)$ sont des nombres réels ,$\omega_1, \omega_2 \in [0,T]$, sont des constantes réels,et $a_j, b_j \in \mathbb{R}, j = 1, ..., k$.

2.2 Lemmes fondamentaux

Lemme 3 *[1][2][4][6]Soit $n-1<\alpha<n$ ou $n\in\mathbb{N}^*$et $x\in C([0;T])\cap L^1([0;T])$a solution gènèrale de l'équation différentielle fractionnaire homogène $D^\alpha x(t)=0$ est donnè par:*

$$x(t)=C_1t^{\alpha-1}+C_2t^{\alpha-2}+....+C_nt^{\alpha-n}\qquad t\in J=[0,T]$$

où $C_1,C_2,....,C_n$ sont des constantes.

Lemme 4 *[1][2][4][6]Soit x une fonction continue sur$C^n([0;T];\mathbb{R})$ et soit $n-1<\alpha<n$ alors*

$$(I_a^{\alpha RL}D_a^\alpha x)(t)=x(t)+C_0+C_1t^{\alpha-1}+C_2t^{\alpha-2}+....+C_nt^{\alpha-n}$$

où $C_i\in\mathbb{R},i=1,...,n-1,n=[\alpha]+1.$

Lemme 5 *Soit $x\in C(J;R)$; La solution de l'équation différentielle fractionnaire suivante*

$$\begin{cases} D^\alpha x(t)=f_1(t,x(t),y(t))\ +\int_0^t\frac{(t-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\varphi(s)\,g\,(s,x(s),y(s))\,ds, & t\in[0,T], \\ x(0)=0\quad ,D^\mu x(T)-\sum_{j=1}^k a_jD^\mu x(\eta_j)=\omega_1, & \end{cases}\tag{2.2}$$

est donnè par

$$\begin{aligned}x(t)&=I^\alpha f_1(t)+I^\alpha(\int_0^t\frac{(t-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\varphi(s)\,g\,(s,x(s),y(s))\,ds)\\&+t^{\alpha-1}\Delta\{I^{\alpha-\mu}f_1(T)+I^{\alpha-\mu}(\int_0^T\frac{(T-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\varphi(s)\,g\,(s,x(s),y(s))\,ds)\\&-\sum_{j=1}^k a_jI^{\alpha-\mu}f_1(\eta_j)-\sum_{j=1}^k a_jI^{\alpha-\mu}(\int_0^{\eta_j}\frac{(\eta_j-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\varphi(s)\,g\,(s,x(s),y(s))\,ds)-\omega_1\}\end{aligned}\tag{2.3}$$

où

$$\Delta=\frac{\Gamma(\alpha-\mu)}{\Gamma(\alpha)(\sum_{j=1}^k a_j\eta_j^{\alpha-\mu-1}-T^{\alpha-\mu-1})}.$$

Preuve. En appliquant les lemmes (3) et (4) on trouve:

$$x(t)=I^\alpha f_1(t)+I^\alpha(\int_0^t\frac{(t-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\varphi(s)\,g\,(s,x(s),y(s))\,ds)+C_1t^{\alpha-1}+C_2t^{\alpha-2}\tag{2.4}$$

où C_1 et C_2 sont des constants arbitraires.

d'après la condition $x(0)=0$ on peut écrire:

$$C_2=0$$

on utilise la condition

$$D^{\mu}x(T)-\sum_{j=1}^{k}a_jD^{\mu}x(\eta_j)=\omega_1$$

en prenant la dérivée de Riemann-Liouville fractionnaire d'ordre $\mu>0$;pour (2.4)

on obtient

$$\begin{aligned}D^{\mu}x(T)&=I^{\alpha-\mu}f_1(T)+I^{\alpha-\mu}(\int_0^T\frac{(T-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\varphi(s)\,g(s,x(s),y(s))\,ds)+C_1\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\mu)}T^{\alpha-\mu-1}\\&=\sum_{j=1}^{k}a_jI^{\alpha-\mu}f_1(\eta_j)+\sum_{j=1}^{k}a_jI^{\alpha-\mu}(\int_0^{\eta_j}\frac{(\eta_j-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\varphi(s)\,g(s,x(s),y(s))\,ds)\\&+\sum_{j=1}^{k}a_jC_1\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\mu)}\eta_j^{\alpha-\mu-1}+\omega_1\end{aligned}$$

on trouve :

$$\begin{aligned}C_1=&\frac{\Gamma(\alpha-\mu)}{\Gamma(\alpha)(\sum_{j=1}^{k}a_j\eta_j^{\alpha-\mu-1}-T^{\alpha-\mu-1})}\{I^{\alpha-\mu}f_1(T)+I^{\alpha-\mu}(\int_0^T\frac{(T-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\varphi(s)\,g(s,x(s),y(s))\,ds)\\&-\sum_{j=1}^{k}a_jI^{\alpha-\mu}f_1(\eta_j)-\sum_{j=1}^{k}a_jI^{\alpha-\mu}(\int_0^{\eta_j}\frac{(\eta_j-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\varphi(s)\,g(s,x(s),y(s))\,ds)-\omega_1\}\end{aligned}$$

alors on obtient la solution de l'équation différentielle fractionnaire (2.2)

$$\begin{aligned}x(t)=&I^{\alpha}f_1(t)+I^{\alpha}(\int_0^t\frac{(t-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\varphi(s)\,g(s,x(s),y(s))\,ds)\\&+t^{\alpha-1}\Delta\{I^{\alpha-\mu}f_1(T)+I^{\alpha-\mu}(\int_0^T\frac{(T-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\varphi(s)\,g(s,x(s),y(s))\,ds)\\&-\sum_{j=1}^{k}a_jI^{\alpha-\mu}f_1(\eta_j)-\sum_{j=1}^{k}a_jI^{\alpha-\mu}(\int_0^{\eta_j}\frac{(\eta_j-s)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\varphi(s)\,g(s,x(s),y(s))\,ds)-\omega_1\}\quad(2.5)\end{aligned}$$

où

$$\Delta=\frac{\Gamma(\alpha-\mu)}{\Gamma(\alpha)(\sum_{j=1}^{k}a_j\eta_j^{\alpha-\mu-1}-T^{\alpha-\mu-1})}.$$

■

Afin de prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1) on considère les hypothèses suivantes:

(H_1) : $f_{1,}, f_2, hetg : [0,T]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sont des fonctions continues .

$(H2)$: Il existe des constantes $(m_i,n_i,l_i,k_i,\ i=1,2)$; telles que pour tout $t\in J=[0,T]$ et $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$

$$|f_{i,}(t,x_2,y_2)-f_{i,}(t,x_1,y_1)|\leq m_i|x_2-x_1|+n_i|y_2-y_1|\,,i=1,2;$$

et

$$|g(t, x_2, y_2) - g(t, x_1, y_1)| \leq l_1 |x_2 - x_1| + l_2 |y_2 - y_1| ;$$

$$|h(t, x_2, y_2) - h(t, x_1, y_1)| \leq k_1 |x_2 - x_1| + k_2 |y_2 - y_1| ;$$

$(H3)$: Il existe des nombres positives $L_1; L_2, L^{'}, L^{''}$,tels que

$$|f_{1,}(t, x, y)| \leq L_1; \qquad |f_{2,}(t, x, y)| \leq L_2;$$

et

$$|g(t, x, y)| \leq L^{'}; \qquad |h(t, x, y)| \leq L^{''};$$

2.3 L'unicité de la solution du système

Soit $J := [0; T], T > 0$.Notons $C(J; \mathbb{R})$ est l'espace de Banach des fonctions continues définies de J dans $\mathbb{R}$; muni de la norme

$$X = \left\{ x : x \in C\left([0; T]\right) et \left\| x \right\| = \sup_{t \in J} |x(t)| \right\}$$

et

$$Y = \left\{ y : y \in C\left([0; T]\right) et \left\| y \right\| = \sup_{t \in J} |y(t)| \right\}$$

alors

$$X \times Y = \left\{ (x, y) : (x, y) \in C\left([0, T]\right) \ \ et \ \ \|(x, y)\| = \|x\| + \|y\| \right\}.$$

On définie l'opérateur $\Phi : X \times Y \to X \times Y$ par

$$\Phi(x, y)(t) = (\Phi_1(x, y)(t), \Phi_2(x, y)(t)) \ \ t \in [0, T]$$

où pour tout $t \in [0, T]$

$$\Phi_1(x,y)(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_1(s,x(s),y(s))\,ds + \int_0^t \frac{(t-s)^{\delta+\alpha-1}}{\Gamma(\delta+\alpha)} \varphi(s)\, g(s,x(s),y(s))\,ds$$
$$+ t^{\alpha-1}\Delta\{\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\alpha-\mu)} f_1(s,x(s),y(s))\,ds$$
$$+ \int_0^T \frac{(T-s)^{\delta+\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu)} \varphi(s)\, g(s,x(s),y(s))\,ds$$
$$- \sum_{j=1}^{k} a_j \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j-s)^{\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\alpha-\mu)} f_1(s,x(s),y(s))\,ds$$
$$- \sum_{j=1}^{k} a_j \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j-s)^{\delta+\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu)} \varphi(s)\, g(s,x(s),y(s))\,ds - \omega_1\}.$$

$$\Phi_2(x,y)(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f_2(s,x(s),y(s))\,ds + \int_0^t \frac{(t-s)^{\sigma+\beta-1}}{\Gamma(\sigma+\beta)} \Psi(s)\, h(s,x(s),y(s))\,ds$$
$$+ t^{\alpha-1}\Delta\{\int_0^T \frac{(T-s)^{\beta-\nu-1}}{\Gamma(\beta-\nu)} f_2(s,x(s),y(s))\,ds$$
$$+ \int_0^T \frac{(T-s)^{\sigma+\beta-\nu-1}}{\Gamma(\sigma+\alpha-\mu)} \Psi(s)\, h(s,x(s),y(s))\,ds$$
$$- \sum_{j=1}^{k} a_j \int_0^{\varepsilon_j} \frac{(\varepsilon_j-s)^{\beta-\nu-1}}{\Gamma(\beta-\nu)} f_2(s,x(s),y(s))\,ds$$
$$- \sum_{j=1}^{k} a_j \int_0^{\varepsilon_j} \frac{(\varepsilon_j-s)^{\sigma+\beta-\nu-1}}{\Gamma(\sigma+\beta-\nu)} \Psi(s)\, h(s,x(s),y(s))\,ds - \omega_2\}.$$

On insère les quantités suivantes:

$$M_1 = \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + T^{\alpha-1}|\Delta|\{\frac{T^{\alpha-\mu}}{\Gamma(\alpha-\mu+1)} + \sum_{j=1}^{k}|a_j|\frac{\eta_j{}^{\alpha-\nu}}{\Gamma(\alpha-\mu+1)}\}.$$
$$+ \|\varphi\|_\infty(\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha)} + T^{\alpha-1}|\Delta|\{\frac{T^{\delta+\alpha-\mu}}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu+1)} + \sum_{j=1}^{k}|a_j|\frac{\eta_j{}^{\delta+\alpha-\mu}}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu+1)}\}).$$

$$M_2 = \frac{T^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} + T^{\beta-1}|\Delta|\{\frac{T^{\sigma-\nu}}{\Gamma(\sigma-\nu+1)} + \sum_{j=1}^{k}|b_j|\frac{\varepsilon_j{}^{\sigma-\nu}}{\Gamma(\beta-\nu+1)}\}$$
$$+ \|\Psi\|_\infty(\frac{1}{\Gamma(\sigma+\beta)} + T^{\beta-1}|\Delta|\{\frac{T^{\sigma+\beta-\mu}}{\Gamma(\sigma+\beta-\nu+1)} + \sum_{j=1}^{k}|b_j|\frac{\varepsilon_j{}^{\sigma+\beta-v}}{\Gamma(\sigma+\beta-\nu+1)}\}).$$

Notre premier résultat est donnèe par

Théorème 7 *On suppose que les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *sont vérifiées. Si :*

$$L\left(M_1+M_2\right)\leq 1,$$

alors le système d'équation différentielle fractionnaire (2.1) *admet une seule solution sur* $[0;T]$.

Preuve. Dans le but d'établir l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1), on utilise le principe de contraction de Banach.

En effet pour $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in X\times Y$ et pour tout $t\in[0,T]$.

En utilisant l'hypothèse $(H2)$ on obtient:

$$|\Phi_1(x_2,y_2)(t)-\Phi_1(x_1,y_1)(t)|\leq$$

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]}\{\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|f_1\left(s,x_2(s),y_2(s)\right)-f_1\left(s,x_1(s),y_1(s)\right)\right|ds\\
&+\frac{\|\varphi\|_\infty}{\Gamma(\delta+\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\delta+\alpha-1}\left|g\left(s,x_2(s),y_2(s)\right)-g\left(s,x_1(s),y_1(s)\right)\right|ds\\
&+t^{\alpha-1}\left|\Delta\right|(\int_0^T\frac{(T-s)^{\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\alpha-\mu)}\left|f_1\left(s,x_2(s),y_2(s)\right)-f_1\left(s,x_1(s),y_1(s)\right)\right|ds\\
&+\frac{\|\varphi\|_\infty}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu)}\int_0^T(T-s)^{\delta+\alpha-\mu-1}\left|g\left(s,x_2(s),y_2(s)\right)-g\left(s,x_1(s),y_1(s)\right)\right|ds\\
&+\sum_{j=1}^k|a_j|\int_0^{\eta_j}\frac{(\eta_j-s)^{\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\alpha-\mu)}\left|f_1\left(s,x_2(s),y_2(s)\right)-f_1\left(s,x_1(s),y_1(s)\right)\right|ds\\
&+\sum_{j=1}^k|a_j|\frac{\|\varphi\|_\infty}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu)}\int_0^{\eta_j}(\eta_j-s)^{\delta+\alpha-\mu-1}\left|g\left(s,x_2(s),y_2(s)\right)-g\left(s,x_1(s),y_1(s)\right)\right|ds)\}
\end{aligned}$$

pour tout $t\in[0,T]$

$$\begin{aligned}
&\leq\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\sup_{s\in[0,T]}\left|f_1\left(s,x_2(s),y_2(s)\right)-f_1\left(s,x_1(s),y_1(s)\right)\right|\\
&+\frac{\|\varphi\|_\infty T^{\delta+\alpha}}{\Gamma(\delta+\alpha+1)}\sup_{s\in[0,T]}\left|g\left(s,x_2(s),y_2(s)\right)-g\left(s,x_1(s),y_1(s)\right)\right|\\
&+T^{\alpha-1}\left|\Delta\right|\{\frac{T^{\alpha-\mu}}{\Gamma(\alpha-\mu+1)}\sup_{s\in[0,T]}\left|f_1\left(s,x_2(s),y_2(s)\right)-f_1\left(s,x_1(s),y_1(s)\right)\right|\\
&+\frac{\|\varphi\|_\infty T^{\delta+\alpha-\mu}}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu+1)}\sup_{s\in[0,T]}g\left(s,x_2(s),y_2(s)\right)-g\left(s,x_1(s),y_1(s)\right)\\
&+\sum_{j=1}^k|a_j|\frac{\eta_j^{\alpha-\mu}}{\Gamma(\alpha-\mu+1)}\sup_{s\in[0,T]}\left|f_1\left(s,x_2(s),y_2(s)\right)-f_1\left(s,x_1(s),y_1(s)\right)\right|\\
&+\sum_{j=1}^k|a_j|\frac{\|\varphi\|_\infty\eta_j^{\delta+\alpha-\mu}}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu+1)}\sup_{s\in[0,T]}\left|g\left(s,x_2(s),y_2(s)\right)-g\left(s,x_1(s),y_1(s)\right)\right|
\end{aligned}$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \sup_{s\in[0,T]} \left(m_1 |x_2 - x_1| + n_1 |y_2 - y_1|\right) \\
&+ \frac{\|\varphi\|_\infty}{\Gamma(\delta+\alpha)} \sup_{s\in[0,T]} \left(l_1 |x_2 - x_1| + l_2 |y_2 - y_1|\right) \\
&+ T^{\alpha-1} |\Delta| \{ \frac{T^{\alpha-\mu}}{\Gamma(\alpha-\mu+1)} \sup_{s\in[0,T]} \left(m_1 |x_2 - x_1| + n_1 |y_2 - y_1|\right) \\
&+ \frac{\|\varphi\|_\infty T^{\delta+\alpha-\mu}}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu+1)} \sup_{s\in[0,T]} \left(l_1 |x_2 - x_1| + l_2 |y_2 - y_1|\right) \\
&+ \sum_{j=1}^{k} |a_j| \frac{\eta_j{}^{\alpha-\mu}}{\Gamma(\alpha-\mu+1)} \sup_{s\in[0,T]} \left(m_1 |x_2 - x_1| + n_1 |y_2 - y_1|\right) \\
&+ \sum_{j=1}^{k} |a_j| \frac{\|\varphi\|_\infty \eta_j{}^{\delta+\alpha-\mu}}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu+1)} \sup_{s\in[0,T]} \left(l_1 |x_2 - x_1| + l_2 |y_2 - y_1|\right) \}
\end{aligned}
$$

ce qui donne

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + T^{\alpha-1} |\Delta| \{ \frac{T^{\alpha-\mu}}{\Gamma(\alpha-\mu+1)} + \sum_{j=1}^{k} |a_j| \frac{\eta_j{}^{\alpha-\mu}}{\Gamma(\alpha-\mu+1)} \} \right) \\
&\times (m_1 + n_1)(\|x_2 - x_1\| + \|y_2 - y_1\|) \\
&+ \left(\frac{\|\varphi\|_\infty}{\Gamma(\delta+\alpha)} + T^{\alpha-1} |\Delta| \{ \frac{\|\varphi\|_\infty T^{\delta+\alpha-\mu}}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu+1)} + \sum_{j=1}^{k} |a_j| \frac{\|\varphi\|_\infty \eta_j{}^{\delta+\alpha-\mu}}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu+1)} \} \right) \\
&\times (l_1 + l_1)(\|x_2 - x_1\| + \|y_2 - y_1\|)
\end{aligned}
$$

$$
|\Phi_1(x_2, y_2)(t) - \Phi_1(x_1, y_1)(t)| \leq M_1 L(\|x_2 - x_1\| + \|y_2 - y_1\|) \quad (2.6)
$$

avec le même argument précédent, on peut écrire:

$$
|\Phi_2(x_2, y_2)(t) - \Phi_2(x_1, y_1)(t)| \leq M_2 L(\|x_2 - x_1\| + \|y_2 - y_1\|) \quad (2.7)
$$

finalement en utlisant (2.6) et (2.7), on déduit que:

$$
\|\Phi(x_2, y_2) - \Phi(x_1, y_1)\| \leq L\,(M_1 + M_2)\,(\|x_2 - x_1\| + \|y_2 - y_1\|)
$$

■

C'est sur le théorème du point fixe de Scheafer qu'on s'est basé pour notre prochain résultat concernant l'existence de la solution du problème fractionnaire (2.1)

2.3.1 l'existence de la solution du système

Théorème 8 *On suppose que les hypothèses* $(H1)$ *et* $(H3)$ *sont vérifiées .*

Alors le système fractionnaire (2.1) admet au moins une solution sur $[0;T]$

Théorème 9 ***Preuve.*** *On applique le théorème du point fixe de scheafer. On considère l'opérateur :* ■

$$\Phi : X \times Y \to X \times Y$$

définie par:

$$\Phi(x,y)(t) = (\Phi_1(x,y)(t), \Phi_2(x,y)(t)) \quad t \in [0,T]$$

Etape1:

(1)On montre que Φ_1 est continue telle que :

La continuité de $f_1; f_2$, $g; et\ h$ (hypothèse H_1) implique que l'opérateur est continue sur $X \times Y$.

(2)On applique le thèorème $(d'Ascoli - Arzèla)$et on montre Φ est uniformément bornèe.

$$\forall (x,y) \in B_{r^*} = \{(x,y) \in C\left([0,T]\right), \|(x,y)\| \leq r^*\} \Longrightarrow \|\Phi(x,y)\| \leq l$$

Soit $(x,y) \in B_{r^*} \Longrightarrow \|(x,y)\| \leq r^*$

$$\begin{aligned}
\|\Phi_1(x,y)\| \leq & \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f_1(s,x(s),y(s))|\, ds + \int_0^t \frac{(t-s)^{\delta+\alpha-1}}{\Gamma(\delta+\alpha)} |\varphi(s)|\, |g(s,x(s),y(s))|\, ds \\
& + t^{\alpha-1} |\Delta| \{ \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\alpha-\mu)} |f_1(s,x(s),y(s))|\, ds \\
& + \int_0^T \frac{(T-s)^{\delta+\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu)} |\varphi(s)|\, |g(s,x(s),y(s))|\, ds \\
& + \sum_{j=1}^{k} |a_j| \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j-s)^{\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\alpha-\mu)} |f_1(s,x(s),y(s))|\, ds \\
& + \sum_{j=1}^{k} |a_j| \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j-s)^{\delta+\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu)} |\varphi(s)|\, |g(s,x(s),y(s))|\, ds + |\omega_1|
\end{aligned}$$

pour tout $t \in [0;T]$

$$\leq \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \sup_{s\in[0,T]} |f_1(s,x(s),y(s))| + \frac{\|\varphi\|_{\infty} T^{\delta+\alpha}}{\Gamma(\delta+\alpha+1)} \sup_{s\in[0,T]} |g(s,x(s),y(s))|$$

$$+T^{\alpha-1} |\Delta| \{ \frac{T^{\alpha-\mu}}{\Gamma(\alpha-\mu+1)} \sup_{s\in[0,T]} |f_1(s,x(s),y(s))| + \frac{\|\varphi\|_{\infty} T^{\delta+\alpha-\mu}}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu+1)} \sup_{s\in[0,T]} |g(s,x(s),y(s))|$$

$$+\sum_{j=1}^{k} |a_j| \frac{\eta_j^{\alpha-\mu}}{\Gamma(\alpha-\mu+1)} \sup_{s\in[0,T]} |f_1(s,x(s),y(s))|$$

$$+\sum_{j=1}^{k} |a_j| \frac{\|\varphi\|_{\infty} \eta_j^{\delta+\alpha-\mu}}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu+1)} \sup_{s\in[0,T]} |g(s,x(s),y(s))| + |\omega_1|$$

alors

$$\leq (\frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + T^{\alpha-1} |\Delta| \{ \frac{T^{\alpha-\mu}}{\Gamma(\alpha-\mu+1)} + \sum_{j=1}^{k} |a_j| \frac{\eta_j^{\alpha-\mu}}{\Gamma(\alpha-\mu+1)} \}) L_1$$

$$+ (\frac{\|\varphi\|_{\infty}}{\Gamma(\delta+\alpha)} + T^{\alpha-1} |\Delta| \{ \frac{\|\varphi\|_{\infty} T^{\delta+\alpha-\mu}}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu+1)} + \sum_{j=1}^{k} |a_j| \frac{\|\varphi\|_{\infty} \eta_j^{\delta+\alpha-\mu}}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu+1)} \}) L^{'} + |\omega_1|$$

$$\|\Phi_1(x,y)\| \leq M_1 \left(L_1 + L^{'} \right) + |\omega_1| < \infty \qquad (2.8)$$

de la même manière, on peut obtenir:

$$\|\Phi_2(x,y)\| \leq M_2 \left(L_2 + L^{''} \right) + |\omega_1| < \infty \qquad (2.9)$$

de(2.8)et (2.9), on trouve:

$$\|\Phi(x,y)\|_{X\times Y} < \infty$$

alors Φ est uniformément bornèe.

Etape2:

On montre que Φ est èquicontinue dans $X \times Y$, on voit les parties bornèes en parties èquicontinue dans $X \times Y$,soient $t_1, t_2 \in [0,T]$ tels que $t_1 < t_2$

$$
\begin{aligned}
&|\Phi_1(x,y)(t_2)-\Phi_1(x,y)(t_1)| \leq \\
&\left| \frac{\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_1(s,x(s),y(s))\,ds \right. \\
&+\int_0^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\delta+\alpha-1}}{\Gamma(\delta+\alpha)}\varphi(s)\,g(s,x(s),y(s))\,ds \\
&-\frac{\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_1(s,x(s),y(s))\,ds \\
&+\int_0^{t_1}\frac{(t_1-s)^{\delta+\alpha-1}}{\Gamma(\delta+\alpha)}\varphi(s)\,g(s,x(s),y(s))\,ds \\
&+\left(t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1}\right)\Delta\{\int_0^{T}\frac{(T-s)^{\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\alpha-\mu)} f_1(s,x(s),y(s))\,ds \\
&+\int_0^{T}\frac{(T-s)^{\delta+\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu)}\varphi(s)\,g(s,x(s),y(s))\,ds \\
&-\sum_{j=1}^{k}a_j\int_0^{\eta_j}\frac{(\eta_j-s)^{\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\alpha-\mu)} f_1(s,x(s),y(s))\,ds \\
&\left.-\sum_{j=1}^{k}a_j\int_0^{\eta_j}\frac{(\eta_j-s)^{\delta+\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu)}\varphi(s)\,g(s,x(s),y(s))\,ds\}\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left| \frac{\int_0^{t_1}(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_1(s,x(s),y(s))\,ds+\int_0^{t_1}\frac{(t_2-s)^{\delta+\alpha-1}}{\Gamma(\delta+\alpha)}\varphi(s)\,g(s,x(s),y(s))\,ds \right. \\
&+\frac{\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_1(s,x(s),y(s))\,ds+\int_{t_1}^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\delta+\alpha-1}}{\Gamma(\delta+\alpha)}\varphi(s)\,g(s,x(s),y(s))\,ds \\
&-\frac{\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_1(s,x(s),y(s))\,ds-\int_0^{t_1}\frac{(t_1-s)^{\delta+\alpha-1}}{\Gamma(\delta+\alpha)}\varphi(s)\,g(s,x(s),y(s))\,ds \\
&+\left(t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1}\right)\Delta\{\int_0^{T}\frac{(T-s)^{\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\alpha-\mu)} f_1(s,x(s),y(s))\,ds \\
&+\int_0^{T}\frac{(T-s)^{\delta+\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu)}\varphi(s)\,g(s,x(s),y(s))\,ds \\
&-\sum_{j=1}^{k}a_j\int_0^{\eta_j}\frac{(\eta_j-s)^{\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\alpha-\mu)} f_1(s,x(s),y(s))\,ds \\
&\left.-\sum_{j=1}^{k}a_j\int_0^{\eta_j}\frac{(\eta_j-s)^{\delta+\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu)}\varphi(s)\,g(s,x(s),y(s))\,ds\}\right|
\end{aligned}
$$

alors

$$\begin{aligned}
\leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(-\left(t_2-t_1\right)^{\alpha}+t_2^{\alpha}-t_1{}^{\alpha}\right) \sup_{s\in[0,T]}\left|f_1\left(s,x(s),y(s)\right)\right| \\
& +\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha+1)}\left(\left(t_2-t_1\right)^{\delta+\alpha}+t_2^{\delta+\alpha}-t_1{}^{\delta+\alpha}\right)\|\varphi\|_{\infty} \sup_{s\in[0,T]}\left|g\left(s,x(s),y(s)\right)\right| \\
& +\left(t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1}\right)\Delta\{\frac{T^{\alpha-\mu}}{\Gamma(\alpha-\mu+1)} \sup_{s\in[0,T]}\left|f_1\left(s,x(s),y(s)\right)\right| \\
& +\frac{\|\varphi\|_{\infty} T^{\delta+\alpha-\mu}}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu+1)} \sup_{s\in[0,T]}\left|g\left(s,x(s),y(s)\right)\right| \\
& +\sum_{j=1}^{k} a_j \frac{\eta_j{}^{\alpha-\mu}}{\Gamma(\alpha-\mu+1)} \sup_{s\in[0,T]}\left|f_1\left(s,x(s),y(s)\right)\right| \\
& +\sum_{j=1}^{k} a_j \frac{\|\varphi\|_{\infty}\eta_j{}^{\delta+\alpha-\mu}}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu+1)} \sup_{s\in[0,T]}\left|g\left(s,x(s),y(s)\right)\right|
\end{aligned}$$

par l'hypothèses $(H3)$; on trouve

$$\begin{aligned}
& \leq \frac{L_1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(-\left(t_2-t_1\right)^{\alpha}+t_2^{\alpha}-t_1{}^{\alpha}\right)+\frac{\|\varphi\|_{\infty} L'}{\Gamma(\delta+\alpha+1)}+\left(\left(t_2-t_1\right)^{\delta+\alpha}+t_2^{\delta+\alpha}-t_1{}^{\delta+\alpha}\right) \\
& +\left(t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1}\right)|\Delta|\{\frac{T^{\alpha-\mu}L_1}{\Gamma(\alpha-\mu+1)}+\frac{\|\varphi\|_{\infty} T^{\delta+\alpha-\mu}L'}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu+1)} \\
& +\sum_{j=1}^{k}\left|a_j\right| \frac{\eta_j{}^{\alpha-\mu}L_1}{\Gamma(\alpha-\mu+1)}+\sum_{j=1}^{k}\left|a_j\right| \frac{\|\varphi\|_{\infty}\eta_j{}^{\delta+\alpha-\mu}L'}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu+1)}\}
\end{aligned}$$

On conclue que $\Phi(B)$ est équicontinu. Par le théorème de $(d'Ascoli - Arzèla)$ on peut conclure que Φ est un opérateur complètement continu.

Etape3: Finalement, on montre que l'ensemble ε déffni par :

$$\varepsilon=\{(x,y)\in C([0,T]),(x,y)=\rho\Phi(x,y),\rho\in]0,1[\}$$

est borné. en effet :

$$x(t)=\rho\Phi_1(x,y)(t)\ ,\ y(t)=\rho\Phi_2(x,y)(t)$$

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \|\rho\Phi_1(x,y)\| \\
&\leq \rho \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f_1(s,x(s),y(s))|\, ds \\
&+ \rho \int_0^t \frac{(t-s)^{\delta+\alpha-1}}{\Gamma(\delta+\alpha)} |\varphi(s)| |g(s,x(s),y(s))|\, ds \\
&+ \rho t^{\alpha-1} |\Delta| \{ \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\alpha-\mu)} |f_1(s,x(s),y(s))|\, ds \\
&+ \int_0^T \frac{(T-s)^{\delta+\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu)} |\varphi(s)| |g(s,x(s),y(s))|\, ds \\
&+ \sum_{j=1}^k |a_j| \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j-s)^{\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\alpha-\mu)} |f_1(s,x(s),y(s))|\, ds \\
&+ \sum_{j=1}^k |a_j| \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j-s)^{\delta+\alpha-\mu-1}}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu)} |\varphi(s)| |g(s,x(s),y(s))|\, ds + \rho|\omega_1|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\rho T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} L_1 + \frac{\rho \|\varphi\|_\infty T^{\delta+\alpha}}{\Gamma(\delta+\alpha+1)} L' \\
&+\rho T^{\alpha-1} |\Delta| \{ \frac{T^{\alpha-\mu}}{\Gamma(\alpha-\mu+1)} L_1 + \frac{\|\varphi\|_\infty T^{\delta+\alpha-\mu}}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu+1)} L' \\
&+ \sum_{j=1}^k |a_j| \frac{{\eta_j}^{\alpha-\mu}}{\Gamma(\alpha-\mu+1)} L_1 + \sum_{j=1}^k |a_j| \frac{\|\varphi\|_\infty {\eta_j}^{\delta+\alpha-\mu}}{\Gamma(\delta+\alpha-\mu+1)} L' + \rho|\omega_1|
\end{aligned}$$

donc

$$\|x\| \leq \rho M_1 \left(L_1 + L'\right) + \rho|\omega_1| \qquad (2.10)$$

de la même manière , on peut obtenir:

$$\|y\| \leq M_2 \left(L_2 + L''\right) + |\omega_2| \qquad (2.11)$$

en combinant (2.10) et (2.11) ; on obtient

$$\|(x,y)\|_{X\times Y} = M_1\left(L_1 + L'\right) + |\omega_1| + M_2\left(L_2 + L''\right) + |\omega_2|$$

Alors l'ensemble ε est bornèe .

D'après le théorème de Scheafer l'opérateur Φ admet un point fixe qui est une solution du système fractionnaire (2.1).

Chapitre 3

Sytème d'équations différentielles fractionnaires avec deux dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

3.1 Introduction

Le présent chapitre a pour objectif de démontrer l'existence et l'unicité d'un système d'équations différentielles fractionnaires avec deux dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville. Le système en question se présente sous la forme ce-dessous:

$$\begin{cases} D^{\alpha_1}(D^{\alpha_2}+\lambda_1)x(t)=f_1(t,x(t),y(t)) \quad t\in J=[0,T]\,, \\ D^{\beta_2}(D^{\beta_2}+\lambda_2)y(t)=f_2(t,x(t),y(t)) \quad t\in J=[0,T]\,, \\ I^{1-\alpha_2}x(0)=0, \qquad D^{\sum_{i=1}^{2}\alpha_i-2}x(T)=\sum_{j=1}^{m}a_jI^{\sum_{i=1}^{2}\alpha_i-1}x(\eta_j), \\ I^{1-\beta_2}y(0)=0, \qquad D^{\sum_{i=1}^{2}\beta_i-2}y(T)=\sum_{j=1}^{m}b_jI^{\sum_{i=1}^{2}\beta_i-2}y(\varsigma_j), \end{cases} \tag{3.1}$$

Où D^q est la dérivées fractionnaires au sens Riemann-Liouville d'ordre q

$q\in \left\{\alpha_i,\beta_i,\sum_{i=1}^{2}\alpha_i-2,\sum_{i=1}^{2}\beta_i-2\right\}$ avec $0<\alpha_i,\beta_i<1$,

$f_i:[0,T]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sont des fonctions continues $(i=1,2)$ et $1\leq\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\leq 2, 1\leq\sum_{i=1}^{2}\beta_i\leq 2$,

$\lambda_i,(i=1,2)$ sont des nombres réels;$a_j,b_j\in\mathbb{R}, j=1,...,m$ et $\eta_j,\varsigma_j\in[0,T]\,$,

I^{ϑ}est l'intègrale fractionnaires au sens Riemann-Liouville d'ordre $\vartheta>0$,

$\vartheta \in \left\{1-\alpha_2, 1-\beta_2, \sum_{i=1}^{2}\alpha_i - 1, \sum_{i=1}^{2}\beta_i - 1\right\}.$

3.2 Lemmes et Hypothèses

On introduit l'espace

$$X = \left\{x : x \in C\left([0,T]\right) \;\; et \;\; \|x\| = \sup_{t\in[0,T]} |x(t)|\right\}$$
$$Y = \left\{y : y \in C\left([0,T]\right) \;\; et \;\; \|y\| = \sup_{t\in[0,T]} |y(t)|\right\}$$

alors :.

$$X \times Y = \left\{(x,y) : (x,y) \in C\left([0,T]\right) \;\; et \;\; \|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|\right\}$$

.

Lemme 6 *Soit $x \in C([0,T]\,;R)$; La solution de l'équation différentielle fractionnaire suivante :*

$$\begin{cases} D^{\alpha_1}(D^{\alpha_2}+\lambda_1)x(t) = f_1(t,x(t),y(t)) \quad t\in[0,T], \\ I^{1-\alpha_2}x(0)=0 \qquad , D^{\sum_{i=1}^{2}\alpha_i-2}x(T) = \sum_{j=1}^{m} a_j I^{\sum_{i=1}^{2}\alpha_{i-1}}x(\eta_j), \end{cases} \tag{3.4}$$

est donnè par :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} f_1(s)ds - \lambda\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)}x(s)ds \\ &+ \frac{t^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{(\Pi-T)\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\left\{\int_0^T (T-s)f_1(s)ds - \lambda\int_0^T \frac{(T-s)^{1-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1)}x(s)ds\right. \\ &\left.-\sum_{j=1}^{m} a_j\int_0^{\eta_j}\frac{(\eta_j-s)^{2\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2-1)}f_1(s)ds + \lambda\sum_{j=1}^{m}\int_0^{\eta_j}\frac{(\eta_j-s)^{\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2-1)}x(s)ds\right\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

où

$$\Pi = \sum_{j=1}^{m} a_j \frac{\eta_j}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2-1)}.$$

Preuve. . En appliquant les lemmes(3.2), (3.3), on trouve

$$x(t) = I^{\alpha_1+\alpha_2}f_1(t) - \lambda I^{\alpha_2}x(t) + C_1 I^{\alpha_2}t^{\alpha_1-1} + C_2 t^{\alpha_2-1}$$

$$x(t) = I^{\alpha_1+\alpha_2} f_1(t) - \lambda I^{\alpha_2} x(t) + C_1 \frac{\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(\alpha_{1+}\alpha_2)} t^{\alpha_1+\alpha_2-1} + C_2 t^{\alpha_2-1} \qquad (3.6)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires.

d'après la condition $I^{1-\alpha_2}x(0) = 0$ on peut écrire :

$$I^{1-\alpha_2} x(t) = I^{1-\alpha_1} f_1(t) - \lambda I x(t) + C_1 \frac{\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(\alpha_{1+}1)} t^{\alpha_1} + C_2$$

ce qui donne :

$$C_2 = 0$$

on utilise la condition :

$$D^{\sum_{i=1}^{2} \alpha_i - 2} x(T) = \sum_{j=1}^{m} a_j I^{\sum_{i=1}^{2} \alpha_{i-1}} x(\eta_j)$$

en prenant la dérivée de Riemann-Liouville fractionnaire d'ordre $\alpha_{1+}\alpha_2 - 2 > 0$ pour (3.6)

on obtient

$$\begin{aligned} D^{\alpha_1+\alpha_2-2} x(T) &= I^2 f_1(T) - \lambda I^{2-\alpha_1} x(T) + C_1 \frac{\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(2)} T \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_j (I^{2\alpha_1+2\alpha_2-1} f_1(\eta_j) - \lambda \sum_{j=1}^{m} a_j I^{\alpha_1+2\alpha_2-1} x(\eta_j) \\ &+ C_1 \frac{\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2-1)} \sum_{j=1}^{m} a_j \eta_j^{2\alpha_1+2\alpha_2-1}. \end{aligned}$$

on trouve :

$$\begin{aligned} C_1 = \frac{1}{(T-\Pi)\Gamma(\alpha_1)} (- \sum_{j=1}^{m} a_j (I^{2\alpha_1+2\alpha_2-1} f_1(\eta_j) \\ + \lambda \sum_{j=1}^{m} a_j (I^{\alpha_1+2\alpha_2-1} x(\eta_j)) + I^2 f_1(T) - \lambda I^{2-\alpha_1} x(T)). \end{aligned}$$

$$\Pi = \sum_{j=1}^{m} a_j \frac{\eta_j^{2\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2-1)}.$$

alors on obtient la solution de l'équation différentielle fractionnaire (3.5)

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} f_1(s)ds - \lambda \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)} x(s)ds + \\ &+ \Delta t^{\alpha_1+\alpha_2-1} \{ \int_0^T (T-s) f_1(s)ds - \lambda \int_0^T \frac{(T-s)^{1-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1)} x(s)ds \\ &- \sum_{j=1}^{m} a_j \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j-s)^{2\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2-1)} f_1(s)ds + \lambda \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j-s)^{\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2-1)} x(s)ds \} \end{aligned} \qquad (3.7)$$

où

$$\Delta = \frac{1}{(\Pi - T)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

■

Afin de prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème $(3,1)$, nous considérons les hypothèses suivantes :

(H_1) : $f_1, f_2 : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues

$(H2)$: Il existe des constantes $(m_{i,} n_i \quad i = 1,2)$; telles que pour tout $t \in c$ et $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$|f_1(t, x_2, y_2) - f_1(t, x_1, y_1)| \leq m_1 |x_2 - x_1| + m_2 |y_2 - y_1| ;$$

et

$$|f_2(t, x_2, y_2) - f_2(t, x_1, y_1)| \leq n_1 |x_2 - x_1| + n_2 |y_2 - y_1| ;$$

$(H3)$: Il existe des nombres positives $L_1; L_2$ tels que

$$|f_{1,}(t,x,y)| \leq L_1; \qquad |f_{2,}(t,x,y)| \leq L_2;$$

3.3 L'unicité de la solution d'un système fractionnaire

On définie l'opérateur $\Phi : X \times Y \to X \times Y$ par :

$$\Phi(x,y)(t) = (\Phi_1(x,y)(t), \Phi_2(x,y)(t)) \quad t \in [0,T];$$

où pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x,y)(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} f_1(s)ds - \lambda \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)} x(s)ds \\
&+ \Delta t^{\alpha_1+\alpha_2-1} \{ \int_0^T (T-s) f_1(s)ds - \lambda \int_0^T \frac{(T-s)^{1-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1)} x(s)ds \\
&- \sum_{j=1}^m a_j \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j - s)^{2\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2-1)} f_1(s)ds \\
&+ \lambda \sum_{j=1}^m \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j - s)^{\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2-1)} x(s)ds \}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(x,y)(t) = &\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta_1+\beta_2-1}}{\Gamma(\beta_1+\beta_2)} f_2(s)ds - \lambda \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta_2-1}}{\Gamma(\beta_2)} y(s)ds \\ &+ \Delta t^{\alpha_1+\alpha_2-1} \{ \int_0^T (T-s) f_2(s)ds - \lambda \int_0^T \frac{(T-s)^{1-\beta_1}}{\Gamma(2-\beta_1)} y(s)ds \\ &- \sum_{j=1}^m a_j \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j-s)^{2\beta_1+2\beta_2-2}}{\Gamma(2\beta_1+2\beta_2-1)} f_2(s)ds \\ &+ \lambda \sum_{j=1}^m \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j-s)^{\beta_1+2\beta_2-2}}{\Gamma(\beta_1+2\beta_2-1)} y(s)ds \}.\end{aligned}$$

On introduit les quantités suivantes:

$$M_1 = \frac{T^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)} + |\Delta| T^{\alpha_1+\alpha_2-1} (\frac{T^2}{2} + \sum_{j=1}^m |a_j| \frac{\eta_j^{2\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2)});$$

$$M_2 = |\lambda| (\frac{T^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)} + \frac{T^{2-\alpha_1}}{\Gamma(3-\alpha_1)} + |\Delta| T^{\alpha_1+\alpha_2-1} \sum_{j=1}^m \frac{\eta_j^{\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2)});$$

$$M_3 = \frac{T^{\beta_1+\beta_2}}{\Gamma(\beta_1+\beta_2+1)} + |\Delta| T^{\beta_1+\beta_2-1} (\frac{T^2}{2} + \sum_{j=1}^m |b_j| \frac{\varsigma_j^{2\beta_1+2\beta_2-1}}{\Gamma(2\beta_1+2\beta_2)});$$

$$M_4 = |\lambda| (\frac{T^{\beta_2}}{\Gamma(\beta_2+1)} + \frac{T^{2-\beta_1}}{\Gamma(3-\beta_1)} + |\Delta| T^{\beta_1+\beta_2-1} \sum_{j=1}^m \frac{\varsigma_j^{\beta_1+2\beta_2-1}}{\Gamma(\beta_1+2\beta_2)});$$

$$\theta_1 = |\Delta| t^{\alpha_1+\alpha_2-1} (\frac{T^2}{2} + \sum_{j=1}^m |a_j| \frac{\eta_j^{2\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2)});$$

$$\Delta_1 = |\lambda| (\frac{T^{2-\alpha_1}}{\Gamma(3-\alpha_1)} + \sum_{j=1}^m \frac{\eta_j^{\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2)});$$

Théorème 10 *On suppose que les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *sont vérifiées Si*

$$(B_1 + C_1) < 1.$$

Alors le système d'équation différentielle fractionnaire (3.1) *admet une seule solution sur* $[0.T]$.

Preuve. En vue d'établir l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1), on a eu recours au principe de contraction de Banach

En effet pour $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X \times Y$ et pour tout $t \in [0, T]$

en utilisant l'hypothèse $(H2)$; on obtient :

$$|\Phi_1(x_2,y_2)(t)-\Phi_1(x_1,y_1)(t)|\leq$$

$$\begin{gathered}\sup_{t\in[0,T]}\{\int_0^t \tfrac{(t-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\,|f_1(s,x_2(s),y_2(s))-f_1(s,x_1(s),y_1(s))|\,ds\\ +|\lambda|\int_0^t \tfrac{(t-s)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)}\,|(x_2-x_1)(s)|\,ds\\ +|\Delta|\,t^{\alpha_1+\alpha_2-1}[\int_0^T(T-s)\,|f_1(s,x_2(s),y_2(s))-f_1(s,x_2(s),y_2(s))|\,ds\\ +|\lambda|\int_0^T \tfrac{(T-s)^{1-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1)}\,|(x_2-x_1)(s)|\,ds\\ +\sum_{j=1}^m|a_j|\int_0^{\eta_j}\tfrac{(\eta_j-s)^{2\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2-1)}\,|f_1(s,x_2(s),y_2(s))-f_1(s,x_1(s),y_1(s))|\,ds\\ +|\lambda|\sum_{j=1}^m\int_0^{\eta_j}\tfrac{(\eta_j-s)^{\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2-1)}\,|(x_2-x_1)(s)|\,ds]\}\end{gathered}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}&\leq\sup_{t\in[0,T]}\{\frac{t^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}\int_0^t|f_1(s,x_2(s),y_2(s))-f_1(s,x_1(s),y_1(s))|\,ds\\ &+\frac{t^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}|\lambda|\int_0^t|(x_2-x_1)(s)|\,ds\\ &+|\Delta|\,t^{\alpha_1+\alpha_2-1}[\frac{T^2}{2}\int_0^T|f_1(s,x_2(s),y_2(s))-f_1(s,x_2(s),y_2(s))|\,ds\\ &+\frac{T^{2-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1+1)}|\lambda|\int_0^T|(x_2-x_1)(s)|\,ds\\ &+\sum_{j=1}^m|a_j|\frac{\eta_j^{2\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2)}\int_0^{\eta_j}|f_1(s,x_2(s),y_2(s))-f_1(s,x_1(s),y_1(s))|\,ds\\ &+|\lambda|\sum_{j=1}^m\frac{\eta_j^{\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2)}\int_0^{\eta_j}|(x_2-x_1)(s)|\,ds]\}\end{aligned}$$

pour $t\in[0,T]$

$$\begin{aligned}&\leq(\frac{T^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}+|\Delta|\,T^{\alpha_1+\alpha_2-1}[\frac{T^2}{2}+\sum_{j=1}^m|a_j|\frac{\eta_j^{2\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2)}])\\ &\sup_{t\in[0,T]}|f_1(s,x_2(s),y_2(s))-f_1(s,x_2(s),y_2(s))|\\ &+|\lambda|(\frac{T^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}+\frac{T^{2-\alpha_1}}{\Gamma(3-\alpha_1)}+|\Delta|\,T^{\alpha_1+\alpha_2-1}\sum_{j=1}^m\frac{\eta_j^{\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2)})\,\|x_2-x_1\|\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}&\leq(\frac{T^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}+|\Delta|\,T^{\alpha_1+\alpha_2-1}[\frac{T^2}{2}+\sum_{j=1}^m|a_j|\frac{\eta_j^{2\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2)}])(m_1+m_2)\,|\\ &\times(\|x_2-x_1\|+\|y_2-y_1\|)\\ &+|\lambda|(\frac{T^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}+\frac{T^{2-\alpha_1}}{\Gamma(3-\alpha_1)}+|\Delta|\,T^{\alpha_1+\alpha_2-1}\sum_{j=1}^m\frac{\eta_j^{\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2)})\,\|x_2-x_1\|\end{aligned}$$

$$\|\Phi_1(x_2,y_2)-\Phi_1(x_1,y_1)\| \leq M_1(m_1+M_2)\,\|x_2-x_1\|+m_2\,\|y_2-y_1\|)$$

ce qui implique que

$$\|\Phi_1(x_2,y_2)-\Phi_1(x_1,y_1)\| \leq B_1(\|x_2-x_1\|+\|y_2-y_1\|) \quad (3.8)$$

avec le même argument précédent, on peut écrire :

$$\|\Phi_2(x_2,y_2)-\Phi_2(x_1,y_1)\| \leq M_3(m_1+M_4)\,\|x_2-x_1\|+m_2\,\|y_2-y_1\|)$$

$$\|\Phi_2(x_2,y_2)-\Phi_2(x_1,y_1)\| \leq C_1(\|x_2-x_1\|+\|y_2-y_1\|) \quad (3.9)$$

finalement, en utlisant (3.8) et (3.9), on déduit que

$$\|\Phi(x_2,y_2)-\Phi(x_1,y_1)\| \leq (B_1+C_1)(\|x_2-x_1\|+\|y_2-y_1\|)$$

Donc Φ est une contraction et d'après le théorème de Banach admet un seul point fixe qui est une solution du problème (3.1) ∎

On finalise ce chapitre par l'exemple illustratif suivant :

Exemple

$$\begin{cases} D^{2/3}(D^{1/9}+\frac{1}{15})x(t)=\frac{|x|\sin(\pi t)}{e^t(1+t)^2}+\frac{1}{16}\,|y\,(t)|+\arctan\,(t+2)\;\; t\in[0,T]\,; \\ D^{1/8}(D^{1/10}+\frac{1}{13})y(t)=\frac{|y(t)|}{(10+t)^2}+\ln\,(2+t)+\frac{1}{16}\,|x\,(t)| \quad t\in[0,T]\,; \\ I^{1-1/9}x(0)=0, D^{2/3+1/9-2}x(T)=(1/14)\,I^{2/3+1/9-1}x\,(1/47)+(1/13)\,I^{2/3+1/9-1}x\,(1/32)\,; \\ I^{1+1/7}y(0)=0, D^{1/8+110-2}y(T)=(1/23)\,I^{1/8+110-1}x\,(1/15)+(1/5)\,I^{1/8+110-1}x\,(1/19)\,; \end{cases}$$

On prend

$f_1(t;x;y)=\frac{|x(t)|\sin(\pi t)}{2(2+t)^2}+\frac{1}{16}\,|y\,(t)|+\arctan\,(t+2)$, $\quad x,y\in\mathbb{R};t\in[0;T]$,

$f_2(t;x;y)=\frac{1}{16}\,|x\,(t)|+\frac{|y(t)|}{(10+t)^2}+\ln\,(2+t)$, $\;x,y\in\mathbb{R};t\in[0;T]$,

pour tout $t\in[0;T]$ *et* $x;y\in R$; on a :

$$\begin{aligned} |f_{1,}(t,x_2,y_2)-f_{1,}(t,x_1,y_1)| &\leq \frac{\sin(\pi t)}{2\,(2+t)^2}\,|x_2-x_1|+\frac{1}{18}\,|y_2-y_1| \\ &\leq \frac{1}{18}\,(|x_2-x_1|+|y_2-y_1|)\,. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|f_{2,}(t,x_2,y_2)-f_2(t,x_1,y_1)| &\leq \frac{1}{16}|x_2-x_1|+\frac{1}{4(1+t)^2}|y_2-y_1| \\ &\leq \frac{1}{16}(|x_2-x_1|+|y_2-y_1|).\end{aligned}$$

par un calcul simple, on obtient :

$$M_1=\frac{T^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}+\Delta T^{\alpha_1+\alpha_2-1}(\frac{T^2}{2}+\sum_{j=1}^{m}a_j\frac{\eta_j^{2\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2)})=1.605\,4$$

$$M_2=|\lambda|\,(\frac{T^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}+\frac{T^{2-\alpha_1}}{\Gamma(3-\alpha_1)}+\Delta\lambda T^{\alpha_1+\alpha_2-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\eta_j^{\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2)})=0.313\,28$$

$$M_3=\frac{T^{\beta_1+\beta_2}}{\Gamma(\beta_1+\beta_2+1)}+\Delta T^{\beta_1+\beta_2-1}(\frac{T^2}{2}+\sum_{j=1}^{m}b_j\frac{\varsigma_j^{2\beta_1+2\beta_2-1}}{\Gamma(2\beta_1+2\beta_2)})=1.\,184$$

$$M_4=|\lambda|\,(\frac{T^{\beta_2}}{\Gamma(\beta_2+1)}+\frac{T^{2-\beta_1}}{\Gamma(3-\beta_1)}+\Delta T^{\beta_1+\beta_2-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\varsigma_j^{\beta_1+2\beta_2-1}}{\Gamma(\beta_1+2\beta_2)})=0.126\,27$$

ce qui donne

$$B_1=M_1(m_1+M_2)+m_2\simeq 0.647\,69$$

et

$$C_1=M_3(m_1+M_4)+m_2\simeq 0.286$$

on obtient

$$(B_1+C_1)\simeq 0.647\,69+0.286\ \simeq 0.933\,69<1$$

Donc d'aprés le théorème 9 le système fractionnaire (3.1) admet une solution unique sur $[0,1]$.

Notre prochain résultat d'existence de solutions du problème fractionnaire (3.1) est basé sur le théorème du point fixe de Scheafer et krasnoslskii.

3.4 l'existence de la solution d'un système fractionnaire

Théorème 11 *On suppose que les hypothèses* $(H1)$ *et* $(H3)$ *sont vérifiées .*

Alors le système fractionnaire (3.1) *admet au moins une solution sur* $[0;T]$.

Preuve. On applique le théorème du point fixe de scheafer. On considère l'opérateur ■

$$\Phi : X \times Y \to X \times Y$$

définie par :

$$\Phi(x,y)(t) = (\Phi_1(x,y)(t), \Phi_2(x,y)(t)) \quad t \in [0,T].$$

Etape1:

On montre que Φ_1 est continue telle que :

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x,y)(t) = & \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} f_1(s, x_1(s), y_1(s))ds \\
& - \lambda \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)} x(s)ds \\
& + \Delta t^{\alpha_1+\alpha_2-1} \{ \int_0^T (T-s) f_1(s)ds - \lambda \int_0^T \frac{(T-s)^{1-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1)} x(s)ds \\
& - \sum_{j=1}^m a_j \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j - s)^{2\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2-1)} f_1((s, x_1(s), y_1(s))ds \\
& + \lambda \sum_{j=1}^m \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j - s)^{\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2-1)} x(s)ds \}
\end{aligned}$$

Soit (x_n, y_n) une suite de fonctions de $X \times Y$ qui convèrge vers $X \times Y$ alors pour tout $t \in [0,T]$

$$\|\Phi_1(x_n, y_n) - \Phi_1(x,y)\| \leq$$

$$\sup_{t\in[0,T]}\{\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\left|f_1(s,x_n(s),y_n(s))-f_1(s,x(s),y(s))\right|ds$$
$$+\left|\lambda\right|\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)}\left|x_n-x\right|ds$$
$$+\left|\Delta\right|t^{\alpha_1+\alpha_2-1}[\int_0^T (T-s)\left|f_1(s,x_n(s),y_n(s))-f_1(s,x(s),y(s))\right|ds$$
$$+\left|\lambda\right|\int_0^T \frac{(T-s)^{1-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1)}\left|x_n-x\right|ds$$
$$+\sum_{j=1}^m\left|a_j\right|\int_0^{\eta_j}\frac{(\eta_j-s)^{2\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2-1)}\left|f_1(s,x_n(s),y_n(s))-f_1(s,x(s),y(s))\right|ds$$
$$+\left|\lambda\right|\sum_{j=1}^m\int_0^{\eta_j}\frac{(\eta_j-s)^{\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2-1)}\left|x_n-x\right|ds]\}$$

on obtient

$$\le\sup_{t\in[0,T]}\{\frac{t^{\alpha_1+\alpha_2}}{(\alpha_1+\alpha_2)\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\int_0^t\left|f_1(s,x_n(s),y_n(s))-f_1(s,x(s),y(s))\right|ds$$
$$+\frac{t^{\alpha_2}}{\alpha_2\Gamma(\alpha_2)}\left|\lambda\right|\int_0^t\left|x_n-x\right|ds$$
$$+\left|\Delta\right|t^{\alpha_1+\alpha_2-1}[\frac{T}{2}\int_0^T\left|f_1(s,x_n(s),y_n(s))-f_1(s,x(s),y(s))\right|ds$$
$$+\frac{T^{2-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1+1)}\left|\lambda\right|\int_0^T\left|x_n-x\right|$$
$$+\sum_{j=1}^m\left|a_j\right|\frac{\eta_j^{2\alpha_1+2\alpha_2-1}}{(2\alpha_1+2\alpha_2-1)\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2-1)}\int_0^{\eta_j}\left|f_1(s,x_n(s),y_n(s))-f_1(s,x(s),y(s))\right|ds$$
$$+\left|\lambda\right|\sum_{j=1}^m\frac{\eta_j^{\alpha_1+2\alpha_2-1}}{(\alpha_1+2\alpha_2-1)\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2-1)}\int_0^{\eta_j}\left|x_n-x\right|ds]\}$$

on trouve

$$\le\sup_{t\in[0,T]}\{\frac{t^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}\left\|f_1(s,x_n(s),y_n(s))-f_1(s,x(s),y(s))\right\|$$
$$+\left|\Delta\right|t^{\alpha_1+\alpha_2-1}[\frac{T}{2}\left\|f_1(s,x_n(s),y_n(s))-f_1(s,x(s),y(s))\right\|$$
$$+\sum_{j=1}^m\left|a_j\right|\frac{\eta_j^{2\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2)}\left\|f_1(s,x_n(s),y_n(s))-f_1(s,x(s),y(s))\right\|$$
$$+\left|\lambda\right|\sum_{j=1}^m\frac{\eta_j^{\alpha_1+2\alpha_2-1}\left\|x_n-x\right\|}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2)}]+\left|\lambda\right|\frac{t^{\alpha_2}\left\|x_n-x\right\|}{\Gamma(\alpha_2+1)}+\left|\Delta\right|\left|\lambda\right|t^{\alpha_1+\alpha_2-1}\frac{T^{2-\alpha_1}\left\|x_n-x\right\|}{\Gamma(3-\alpha_1)}\}$$

pour tout $t \in [0,T]$

$$\leq \sup_{t\in[0,T]} \{ (\frac{T^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)} + |\Delta| \, T^{\alpha_1+\alpha_2-1} [\frac{T}{2} + \sum_{j=1}^{m} |a_j| \, \frac{\eta_j^{2\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2)}]) \times \|f_1(s,x_n(s),y_n(s)) - f_1(s,x(s),y(s))\|$$

$$+ (|\lambda| \, |\Delta| \, T^{\alpha_1+\alpha_2-1} \sum_{j=1}^{m} \frac{\eta_j^{\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2)} + \frac{T^{2-\alpha_1}}{\Gamma(3-\alpha_1)}] + \frac{T^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}) \times \|x_n - x\| \}$$

$$\|\Phi_1(x_n,y_n) - \Phi_1(x,y)\| \longrightarrow_{n\infty} 0 \qquad (3.10)$$

donc Φ_1 est continue

avec le même argument précédent, on peut écrire:

$$\|\Phi_2(x_n,y_n) - \Phi_2(x,y)\| \longrightarrow_{n\infty} 0 \qquad (3.11)$$

finalement, en utlisant(3.10) et (3.11), on déduit que

$$\|\Phi(x_n,y_n) - \Phi(x,y)\| \longrightarrow_{n\infty} 0$$

donc Φ est continue

Etape2: On applique le thèorème d'Ascoli -Arzèla et on montre que Φ est uniformément bornée .Φ transforme tout ensemble bornèe en un ensemble bornèe dans $X \times Y$

Pour se faire ,il suffit de montrer que pour tout rèel positif $r^* \succ 0$ il existe une constante positif l telle que :

$$\forall (x,y) \in B_{r^*} = \{(x,y) \in C([0,T]), \|(x,y)\| \leq r^*\} \Longrightarrow \|\Phi(x,y)\| \leq l$$

Soit $(x,y) \in B_{r^*} \Longrightarrow \|(x,y)\| \leq r^*$

$$\|\Phi_1(x,y)\| \leq$$
$$\frac{t^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}\int_0^t |f_1(s,x_1(s),y_1(s))|ds + \frac{t^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}|\lambda|\int_0^t |x(s)|\,ds$$
$$+|\Delta|\, t^{\alpha_1+\alpha_2-1}\{\frac{T^2}{2}\int_0^T |f_1(s,x_1(s),y_1(s))|ds + |\lambda|\frac{T^{2-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1+1)}\int_0^T |x(s)|\,ds$$
$$+\sum_{j=1}^{m}|a_j|\frac{\eta_j^{2\alpha_1+2\alpha_2-1}}{(2\alpha_1+2\alpha_2-1)\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2-1)}\int_0^{\eta_j}|f_1(s,x_1(s),y_1(s))|ds$$
$$+|\lambda|\sum_{j=1}^{m}\frac{\eta_j^{\alpha_1+2\alpha_2-1}}{(\alpha_1+2\alpha_2-1)\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2-1)}\int_0^{\eta_j}|x(s)|\,ds$$

pour tout $t \in [0.T]$

$$\leq \frac{T^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}L_1 + \frac{T^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}|\lambda|\,\|x\|$$
$$+|\Delta|\,T^{\alpha_1+\alpha_2-1}\{\frac{T^2}{2}L_1 + |\lambda|\frac{T^{2-\alpha_1}}{\Gamma(3-\alpha_1)}\|x\| +$$
$$\sum_{j=1}^{m}|a_j|\frac{\eta_j^{2\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2)}L_1 + |\lambda|\sum_{j=1}^{m}\frac{\eta_j^{\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2)}\|x\|\}$$

$$\leq \frac{T^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}L_1 + \frac{T^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}|\lambda|\,r^*$$
$$+|\Delta|\,T^{\alpha_1+\alpha_2-1}\{\frac{T}{2}L_1 + |\lambda|\frac{T^{2-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1+1)}r^*$$
$$+\sum_{j=1}^{m}|a_j|\frac{\eta_j^{2\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2)}L_1 + |\lambda|\sum_{j=1}^{m}\frac{\eta_j^{\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2)}r^*\}$$

$$\|\Phi_1(x,y)\| \leq M_1L_{1+}M_2r^*$$

$$\|\Phi_1(x,y)\| \leq l_1 \qquad (3.12)$$

alors $\Phi_1$est uniformément bornèe.

on a aussi :

$$\|\Phi_2(x,y)\| \leq M_3L_{1+}M_4r^*$$

$$\|\Phi_2(x,y)\| \leq l_2 \qquad (3.13)$$

par conséquent :

$$\|\Phi(x,y)\| \leq l_1 + l_2$$

Alors Φ est uniformément bornèe.

Etape3: On montre que Φ est équicontinue dans $X \times Y$

Φ on voit les parties bornées en parties équicontinues dans $X \times Y$

soient $t_1, t_2 \in [0,T]$ tels que $t_1 < t_2$

$$\begin{aligned}
&|\Phi_1(x,y)(t_2) - \Phi_1(x,y)(t_1)| \leq \\
&\Big| \int_0^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} f_1(s,x(s),y(s))ds - \lambda \int_0^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)} x(s)ds \\
&+\Delta t_2^{\alpha_1+\alpha_2-1} (\int_0^T (T-s) f_1(s)ds - \lambda \int_0^T \frac{(T-s)^{1-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1)} x(s)ds \\
&-\sum_{j=1}^m a_j \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j-s)^{2\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2-1)} f_1(s,x(s),y(s))ds \\
&+\lambda \sum_{j=1}^m \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j-s)^{\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2-1)} x(s)ds) \\
&-\int_0^{t1} \frac{(t_1-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} f_1(s,x(s),y(s))ds + \lambda \int_0^{t1} \frac{(t_1-s)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)} x(s)ds \\
&-\Delta t_1^{\alpha_1+\alpha_2-1} (\int_0^T (T-s) f_1(s,x(s),y(s))ds - \lambda \int_0^T \frac{(T-s)^{1-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1)} x(s)ds \\
&-\sum_{j=1}^m a_j \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j-s)^{2\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2-1)} f_1(s,x_1(s),y_1(s))ds \\
&+\lambda \sum_{j=1}^m \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j-s)^{\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2-1)} x(s)ds) \Big|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \Big| \int_0^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} f_1(s,x_1(s),y_1(s))ds - \lambda \int_0^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)} x(s)ds \\
&-\int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} f_1(s,x_1(s),y_1(s))ds + \lambda \int_0^{t1} \frac{(t_1-s)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)} x(s)ds \\
&+(t_2^{\alpha_1+\alpha_2-1} - t_1^{\alpha_1+\alpha_2-1})\Delta(\int_0^T (T-s) f_1(s,x_1(s),y_1(s))ds - \lambda \int_0^T \frac{(T-s)^{1-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1)} x(s)ds \\
&-\sum_{j=1}^m a_j \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j-s)^{2\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2-1)} f_1(s,x_1(s),y_1(s))ds \\
&+\lambda \sum_{j=1}^m \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j-s)^{\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2-1)} x(s)ds) \Big|
\end{aligned}$$

alors

$$\leq \Bigg| \int_0^{t1} \frac{(t_2-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} f_1(s,x_1(s),y_1(s))ds - \lambda \int_0^{t_1} \frac{(t_2-s)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)} x(s)ds$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} f_1(s,x(s),y(s))ds - \lambda \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)} x(s)ds$$
$$- \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} f_1(s,x(s),y(s))ds + \lambda \int_0^{t1} \frac{(t_1-s)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)} x(s)ds$$
$$+(t_2^{\alpha_1+\alpha_2-1} - t_1^{\alpha_1+\alpha_2-1})\Delta(\int_0^T (T-s) f_1(s,x(s),y(s))ds - \lambda \int_0^T \frac{(T-s)^{1-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1)} x(s)ds$$
$$- \sum_{j=1}^m a_j \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j-s)^{2\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2-1)} f_1(s,x(s),y(s))ds$$
$$+\lambda \sum_{j=1}^m \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j-s)^{\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2-1)} x(s)ds) \Bigg|$$

on obtient

$$\leq \Bigg| \int_0^{t1} (\frac{(t_2-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} - \frac{(t_1-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}) f_1(s,x_1(s),y_1(s))ds$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} f_1(s,x_1(s),y_1(s))ds$$
$$+\lambda \int_0^{t_1} (\frac{(t_2-s)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)} - \frac{(t_1-s)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)}) x(s)ds$$
$$-\lambda \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)} x(s)ds$$
$$+(t_2^{\alpha_1+\alpha_2-1} - t_1^{\alpha_1+\alpha_2-1})\Delta(\int_0^T (T-s) f_1(s,x(s),y(s))ds$$
$$-\lambda \int_0^T \frac{(T-s)^{1-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1)} x(s)ds$$
$$- \sum_{j=1}^m a_j \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j-s)^{2\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2-1)} f_1(s,x(s),y(s))ds$$
$$\lambda \sum_{j=1}^m \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j-s)^{\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2-1)} x(s)ds) \Bigg|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}(-(t_2-t_1)^{\alpha_1+\alpha_2}+t_2^{\alpha_1+\alpha_2}-{t_1}^{\alpha_1+\alpha_2})\int_0^{t1}|f_1(s,x_1(s),y_1(s))|\,ds\\
&+\frac{(t_2-t_1)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}\int_{t_1}^{t_2}|f_1(s,x_1(s),y_1(s))|\,ds\\
&+|\lambda|\frac{1}{\Gamma(\alpha_2+1)}(-(t_2-t_1)^{\alpha_2}+t_2^{\alpha_2}-t_1^{\alpha_2})\int_0^{t_1}|x(s)|\,ds\\
&+|\lambda|\frac{1}{\Gamma(\alpha_2+1)}((t_2-t_1)^{\alpha_2}\int_{t_1}^{t_2}|x(s)|\,ds\\
&+\left|t_2^{\alpha_1+\alpha_2-1}-t_1^{\alpha_1+\alpha_2-1}\right||\Delta|\,(\int_0^T(T-s)\,|f_1(s,x_1(s),y_1(s))|\,ds\\
&+|\lambda|\int_0^T\frac{(T-s)^{1-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1)}|x(s)|\,ds\\
&+\sum_{j=1}^m|a_j|\int_0^{\eta_j}\frac{(\eta_j-s)^{2\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2-1)}|f_1(s,x_1(s),y_1(s))|\,ds\\
&+|\lambda|\sum_{j=1}^m\int_0^{\eta_j}\frac{(\eta_j-s)^{\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2-1)}|x(s)|\,ds)
\end{aligned}
$$

par l'hypothèse $(H3)$; on trouve

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}(-(t_2-t_1)^{\alpha_1+\alpha_2}+t_2^{\alpha_1+\alpha_2}-{t_1}^{\alpha_1+\alpha_2}+(t_2-t_1)^{\alpha_1+\alpha_2})L_1\\
&+\frac{|\lambda|}{\Gamma(\alpha_2+1)}(-(t_2-t_1)^{\alpha_2}+t_2^{\alpha_2}-t_1^{\alpha_2}+(t_2-t_1)^{\alpha_2})\,\|x\|\\
&+(t_2^{\alpha_1+\alpha_2-1}-t_1^{\alpha_1+\alpha_2-1})\,|\Delta|\,([\frac{T^2}{2}+\sum_{j=1}^m a_j\frac{\eta_j^{2\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2)}]L_1\\
&+|\lambda|\,[\frac{T^{2-\alpha_1}}{\Gamma(3-\alpha_1)}+\sum_{j=1}^m\frac{\eta_j^{\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2)}]\,\|x\|)
\end{aligned}
$$

ce qui implique

$$
\begin{aligned}
&\|\Phi_1(x,y)(t_2)-\Phi_1(x,y)(t_1)\|\leq\\
&(t_2^{\alpha_1+\alpha_2}-{t_1}^{\alpha_1+\alpha_2})\frac{L_1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}+(t_2^{\alpha_2}-t_1^{\alpha_2})\frac{|\lambda|}{\Gamma(\alpha_2+1)}\,\|x\|\\
&+(t_2^{\alpha_1+\alpha_2-1}-t_1^{\alpha_1+\alpha_2-1})\,|\Delta|\,([\frac{T^2}{2}+\sum_{j=1}^m|a_j|\,\frac{\eta_j^{2\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2)}]L_1\\
&+|\lambda|\,[\frac{T^{2-\alpha_1}}{\Gamma(3-\alpha_1)}+\sum_{j=1}^m\frac{\eta_j^{\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2)}]\,\|x\|)
\end{aligned}
$$

de la même manière, on peut obtenir :

$$\begin{aligned}
&\| \Phi_2(x,y)(t_2) - \Phi_2(x,y)(t_1) \| \leq \\
&\frac{L_2}{\Gamma(\beta_1+\beta_2+1)}(t_2^{\beta_1+\beta_2} - {t_1}^{\beta_1+\beta_2}) + (t_2^{\beta_2} - t_1^{\beta_2})\frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta_2+1)}\|x\| \\
&+ (t_2^{\beta_1+\beta_2-1} - t_1^{\beta_1+\beta_2-1})\,|\Delta|\,([\frac{T^2}{2} + \sum_{j=1}^{m}|a_j|\,\frac{\eta_j^{2\beta_1+2\beta_2-1}}{\Gamma(2\beta_1+2\beta_2)}]L_2 \\
&+ |\lambda|\,[\frac{T^{2-\beta_1}}{\Gamma(3-\beta_1)} + \sum_{j=1}^{m}\frac{\eta_j^{\beta_1+2\beta_2-1}}{\Gamma(\beta_1+2\beta_2)}]\,\|x\|)
\end{aligned}$$

Alors d'après $(Ascoli - Arzèla)$ Φ est compact .

Ceci implique que Φ est complètement continue.

Etape4: La bornitude de l'ensemble ε :

$$\varepsilon = \{(x,y) \in C([0,T]), (x,y) = \rho\Phi(x,y), \rho \in]0,1[\}$$

$$x(t) = \rho\Phi_1(x,y)(t)\ ,\ y(t) = \rho\Phi_2(x,y)(t)$$

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \|\rho\Phi_1(x,y)\| \\
&\leq \sup_{t\in[0,T]}\{\left|\int_0^t \rho\frac{(t-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}f_1(s,x(s),y(s))ds - \rho\lambda\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)}x(s)ds\right. \\
&+\rho\Delta t^{\alpha_1+\alpha_2-1}(\int_0^T(T-s)f_1(s,x(s),y(s))ds - \lambda\int_0^T\frac{(T-s)^{1-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1)}x(s)ds \\
&-\sum_{j=1}^{m}a_j\int_0^{\eta_j}\frac{(\eta_j-s)^{2\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2-1)}f_1(s,x(s),y(s))ds \\
&\left.+\lambda\sum_{j=1}^{m}\int_0^{\eta_j}\frac{(\eta_j-s)^{\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2-1)}x(s)ds)\right|\}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{t^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}\rho\int_0^t |f_1(s,x(s),y(s))|ds + \frac{t^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}\rho\,|\lambda|\int_0^t |x(s)|ds$$
$$+\,\rho\,|\Delta|\,t^{\alpha_1+\alpha_2-1}(\frac{T}{2}\int_0^T |f_1(s,x(s),y(s))|ds + |\lambda|\,\frac{T^{2-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1+1)}\int_0^T |x(s)|ds$$
$$+\sum_{j=1}^{m}|a_j|\,\frac{\eta_j^{2\alpha_1+2\alpha_2-1}}{(2\alpha_1+2\alpha_2-1)\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2-1)}\int_0^{\eta_j}|f_1(s,x(s),y(s))|ds$$
$$+\,|\lambda|\sum_{j=1}^{m}\frac{\eta_j^{\alpha_1+2\alpha_2-1}}{(\alpha_1+2\alpha_2-1)\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2-1)}\int_0^{\eta_j}|x(s)|ds)$$

$$\leq \rho\frac{T^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}L_1 + \rho\frac{T^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}\,|\lambda|\,\|x\|$$
$$+\,\rho\,|\Delta|\,T^{\alpha_1+\alpha_2-1}\{\frac{T^2}{2}L_1 + |\lambda|\,\frac{T^{2-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1+1)}\,\|x\| + \sum_{j=1}^{m}|a_j|\,\frac{\eta_j^{2\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2)}L_1$$
$$+\,|\lambda|\sum_{j=1}^{m}\frac{\eta_j^{\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2)}\,\|x\|\}$$

$$\|x\| \leq \rho M_1 L_1 + |\lambda|\,M_2\,\|x\|$$

de la même manière, on obtient :

$$\|y\| \leq \rho M_3 L_2 + |\lambda|\,M_4\,\|y\|$$

ce qui donne :

$$\|(x,y)\|_{X\times Y} \leq M_1L_1 + |\lambda|\,M_2\,\|x\| + M_3L_2 + |\lambda|\,M_4\,\|y\|$$

Alors l'ensemble ε est borné .

D'après le thèorème de Scheafer l'opèrateur Φ admet un point fixe qui est une solution du système fractionnaire (3.1)

Notre deuxième résultat d'existence est illustré dans le théorème suivant :

Théorème 12 *On suppose que les hypothèses* H_1 *et* H_2 *sont vèrifieès telles que*
$\lambda(\frac{T^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)} + \frac{T^{\beta_1+\beta_2}}{\Gamma(\beta_1+\beta_2+1)})(\frac{T^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}(m_1+m_2) + \frac{T^{\beta_2}}{\Gamma(\beta_2+1)}(n_1+n_2)) \leq 1.$

S'il existe $\delta \in \mathbb{R}$ *; telle que*

$L_1M_1 + L_2M_3 + \lambda(M_2+M_4) \leq \delta.$

Alors le système(3.1) *admet au moins une solution sur*$[0;T]$.

Preuve. On applique le théorème du point fixe de krasnoselskii. On considère l'opérateur : $\Phi : X \times Y \to X \times Y$ dèfinie par :

$$\Phi(x,y)(t) = (\Phi_1(x,y)(t), \Phi_2(x,y)(t)) \quad t \in [0,T]$$

et on considère l'ensemble :

$$B_\delta = \{(x,y) \in X \times Y : \|(x,y)\| \leq \delta\}$$

on définie aussi les opérateurs P et Q sur B_δ comme suite :

$$P(x,y)(t) = (P_1(x,y)(t), P_2(x,y)(t)) \quad t \in [0,T]$$

$$Q(x,y)(t) = (Q_1(x,y)(t), Q_2(x,y)(t)) \quad t \in [0,T]$$

où

$$P_1(x,y)(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} f_1(s,x(s),y(s))ds - \lambda \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)} x(s)ds$$

$$P_2(x,y)(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta_1+\beta_2-1}}{\Gamma(\beta_1+\beta_2)} f_2(s,x(s),y(s))ds - \lambda \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta_2-1}}{\Gamma(\beta_2)} y(s)ds$$

et

$$\begin{aligned}
Q_1(x,y)(t) = \Delta t^{\alpha_1+\alpha_2-1}\{&\int_0^T (T-s) f_1(s,x(s),y(s))ds - \lambda \int_0^T \frac{(T-s)^{1-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1)} x(s)ds \\
&- \sum_{j=1}^m a_j \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j - s)^{2\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2-1)} f_1(s,x(s),y(s))ds \\
&+ \lambda \sum_{j=1}^m \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j - s)^{\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2-1)} x(s)ds\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_2(x,y)(t) = \Delta t^{\beta_1+\beta_2-1}(&\int_0^T (T-s) f_2(s,x(s),y(s))ds - \lambda \int_0^T \frac{(T-s)^{1-\beta_1}}{\Gamma(2-\beta_1)} y(s)ds \\
&- \sum_{j=1}^m a_j \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j - s)^{2\beta_1+2\beta_2-2}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2-1)} f_2(s,x(s),y(s))ds \\
&+ \lambda \sum_{j=1}^m \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j - s)^{\beta_1+2\beta_2-2}}{\Gamma(\beta_1+2\beta_2-1)} y(s)ds\}
\end{aligned}$$

■

Etape 1 :

On montre que si $(x;y) \in B_\delta$; alors $P(x;y) + Q(x;y) \in B_\delta$. En effet, pour tout $(x;y) \in B_\delta$; et pour tout $t \in [0;T]$; on a :

$$\begin{aligned}
&\left\| P_1(x;y) + Q_1(x;y) \right\| \\
&\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} \left| f_1(s,x(s),y(s)) \right| ds + |\lambda| \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)} |x(s)|\, ds \\
&+ |\Delta| \, (t^{\alpha_1+\alpha_2-1}) \{ \int_0^T (T-s) \left| f_1(s,x(s),y(s)) \right| ds \\
&+ |\lambda| \int_0^T \frac{(T-s)^{1-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1)} |x(s)|\, ds - \sum_{j=1}^m |a_j| \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j - s)^{2\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2-1)} \left| f_1(s,x(s),y(s)) \right| ds \\
&+ |\lambda| \sum_{j=1}^m \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j - s)^{\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2-1)} |x(s)|\, ds \}
\end{aligned}$$

en utilisant $(H3)$

$$\begin{aligned}
&\leq L_1 [\frac{T^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)} + |\Delta| \, T^{\alpha_1+\alpha_2-1} \{ \frac{T^2}{2} + \sum_{j=1}^m |a_j| \, \frac{\eta_j^{2\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2)} \}] \\
&+ |\lambda| \, (\frac{T^{2-\alpha_1}}{\Gamma(3-\alpha_1)} + \frac{T^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)} + \sum_{j=1}^m \frac{{\eta_j}^{\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2)}) \, \|x\|
\end{aligned}$$

$$\left\| P_1(x;y) + Q_1(x;y) \right\| \leq L_1 M_1 + |\lambda| \, M_2 \qquad (3.14)$$

De la même manière, on peut obtenir

$$\left\| P_2(x;y) + Q_2(x;y) \right\| \leq L_2 M_3 + |\lambda| \, M_4 \qquad (3.15)$$

Par (3.14) et(3.15) ; on trouve :

$$\left\| P(x;y) + Q(x;y) \right\| \leq L_1 M_1 + L_2 M_3 + |\lambda| \, (M_2 + M_4) \leq \delta$$

Donc

$$P(x;y) + Q(x;y) \in B_\delta$$

Etape 2 :

On montre que P est une contraction. En effet, pour tout $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in X \times Y$ et $t \in [0;T]$ on a :

$$\begin{aligned}
&\|P_1(x_2;y_2)-P_1(x_1;y_1)\| \\
&\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\,|f_1(s,x_2(s),y_2(s))|\,ds \\
&+|\lambda| \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)}\,|x_2(s)|\,ds \\
&+\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\,|f_1(s,x_2(s),y_2(s))|\,ds \\
&+|\lambda| \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)}\,|x_1(s)|\,ds
\end{aligned}$$

pour tout $t \in [0;T]$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{T^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)} \int_0^t |f_1(s,x_2(s),y_2(s))-f_1(s,x_1(s),y_1(s))|ds \\
&+|\lambda|\,\frac{T^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)} \int_0^t |x_2(s)-x_1(s)|\,ds
\end{aligned}$$

En appliquant l'hypothèses $(H2)$, on trouve :

$$\leq (\frac{T^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)})(m_1\,\|x_2-x_1\|+\|\ +m_2\,\|y_2-y_1\|)+|\lambda|\,\frac{T^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}\,\|x_2-x_1\|$$

$$\begin{aligned}
&\|P_1(x_2;y_2)-P_1(x_1;y_1)\| \\
\leq&\frac{T^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}([m_1+|\lambda|\,\frac{T^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}]\,\|x_2-x_1\|+m_2\,\|y_2-y_1\|) \quad (3.16)\,.
\end{aligned}$$

par une technique sémilaire, on peut obtenir l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
&\|P_2(x_1;y_1)-P_2(x_2;y_2)\| \\
\leq&\frac{T^{\beta_1+\beta_2}}{\Gamma(\beta_1+\beta_2+1)}([n_1+|\lambda|\,\frac{T^{\beta_2}}{\Gamma(\beta_2+1)}]\,\|x_2-x_1\|+n_2\,\|y_2-y_1\|) \qquad (3.17)\,.
\end{aligned}$$

maintenant en combinant (3.16) et(3.17) ; on arrive à

$$\begin{aligned}
&\|P(x_2;y_2)-P(x_1;y_1)\| \\
\leq&(\frac{T^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}+\frac{T^{\beta_1+\beta_2}}{\Gamma(\beta_1+\beta_2+1)})\,|\lambda|\,\frac{T^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)} \\
&((m_1+m_2)+|\lambda|\,\frac{T^{\beta_2}}{\Gamma(\beta_2+1)}(n_1+n_2))\times(\|x_2-x_1\|+\|y_2-y_1\|).
\end{aligned}$$

Etape 3 :

On montre que Q est continue et compact. Il est clair que Q est continu puisque f_1 et f_2 sont continus.

*On montre que Q (B_δ) est uniformément bornè. En effet, soit $(x;y) \in B_\delta$; et pour tout $t \in [0;T]$; on a :

$$\begin{aligned}
&\|Q_1(x,y)\| \leq \\
&|\Delta|\, t^{\alpha_1+\alpha_2-1}\{\int_0^T (T-s)\,|f_1(s,x(s),y(s))|\,ds + |\lambda| \int_0^T \frac{(T-s)^{1-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1)}\,|x(s)|\,ds \\
&+\sum_{j=1}^m |a_j| \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j-s)^{2\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2-1)}\,|f_1(s,x(s),y(s))|\,ds \\
&+|\lambda| \sum_{j=1}^m \int_0^{\eta_j} \frac{(\eta_j-s)^{\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2-1)}\,|x(s)|\,ds\}
\end{aligned}$$

pour tout $t \in [0;T]$

$$\begin{aligned}
&\leq |\Delta|\, T^{\alpha_1+\alpha_2-1}\{\frac{T^2}{2}L_1 + |\lambda| \frac{T^{2-\alpha_1}}{\Gamma(3-\alpha_1)}\,\|x\|\,ds \\
&+\sum_{j=1}^m |a_j| \frac{\eta_j^{2\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2)} L_1 \\
&+|\lambda| \sum_{j=1}^m \frac{\eta_j^{\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2)}\,\|x\|\}
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
&\leq |\Delta|\, t^{\alpha_1+\alpha_2-1}\{\frac{T^2}{2}L_1 + |\lambda| \frac{T^{2-\alpha_1}}{\Gamma(3-\alpha_1)}\delta \\
&+\sum_{j=1}^m |a_j| \frac{\eta_j^{2\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2)} L_1 + |\lambda| \sum_{j=1}^m \frac{\eta_j^{\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2)}\delta \\
&= \theta_1 L_1 + \Delta_1 \delta
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\|Q_1(x,y)\| \leq L_1\theta_1 + \delta\Delta \quad (3.18)$$

De la même manière on peut obtenir l'estimation suivante :

$$\|Q_2(x,y)\| \leq L_2\theta_2 + \delta\Delta_2 \quad (3.19)$$

en combinant(3.18)et (3.19); on obtient

$$\|Q(x,y)\| \leq L_1\theta_1 + L_2\theta_2 + \delta(\Delta_1 + \Delta_2)$$

par la suite $Q(B_\delta)$ est uniformément borné.

**On montre que$Q(B_\delta)$ est equicontinue. En effet, soit $t_{1,}t_2 \in [0;T], t_1 < t_2$ pour tout $(x;y) \in B_r$ alors on a :

$$\begin{aligned}
&\|Q_1(x,y)(t_2) - Q_1(x,y)(t_1)\| \leq \\
&\Big|\Delta t_2^{\alpha_1+\alpha_2-1}\{\int_0^T (T-s)f_1(s,x(s),y(s))ds + \lambda\int_0^T \frac{(T-s)^{1-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1)}x(s)ds \\
&+\sum_{j=1}^m a_j\int_0^{\eta_j}\frac{(\eta_j-s)^{2\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2-1)}f_1(s,x(s),y(s))ds \\
&+\lambda\sum_{j=1}^m\int_0^{\eta_j}\frac{(\eta_j-s)^{\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2-1)}x(s)ds\} \\
&-\Delta t_1^{\alpha_1+\alpha_2-1}\{\int_0^T (T-s)f_1(s,x(s),y(s))ds \\
&+\lambda\int_0^T \frac{(T-s)^{1-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1)}x(s)ds \\
&+\sum_{j=1}^m a_j\int_0^{\eta_j}\frac{(\eta_j-s)^{2\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2-1)}f_1(s,x(s),y(s))ds \\
&+\lambda\sum_{j=1}^m\int_0^{\eta_j}\frac{(\eta_j-s)^{\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2-1)}x(s)ds\}\Big|
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\leq &(t_2^{\alpha_1+\alpha_2-1} - t_1^{\alpha_1+\alpha_2-1})\Delta\{\int_0^T (T-s)\left|f_1(s,x(s),y(s))\right|ds + \lambda\int_0^T \frac{(T-s)^{1-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1)}\left|x(s)\right|ds \\
&+\sum_{j=1}^m a_j\int_0^{\eta_j}\frac{(\eta_j-s)^{2\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2-1)}\left|f_1(s,x(s),y(s))\right|ds \\
&+\lambda\sum_{j=1}^m\int_0^{\eta_j}\frac{(\eta_j-s)^{\alpha_1+2\alpha_2-2}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2-1)}\left|x(s)\right|ds\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (t_2^{\alpha_1+\alpha_2-1} - t_1^{\alpha_1+\alpha_2-1})\Delta\{\frac{T^2}{2}L_1 + \lambda\frac{(T-s)^{2-\alpha_1}}{\Gamma(3-\alpha_1)}\|x\| \\
&-\sum_{j=1}^m a_j\frac{\eta_j^{\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2)}L_1 + \lambda\sum_{j=1}^m\frac{\eta_j^{2\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2)}\|x\|\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\|Q_1(x,y)(t_2) - Q_1(x,y)(t_1)\| \\
&\leq (t_2^{\alpha_1+\alpha_2-1} - t_1^{\alpha_1+\alpha_2-1})\Delta\{(\frac{T^2}{2} + \sum_{j=1}^{m} a_j \frac{\eta_j^{\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2)})L_1 \\
&+ \lambda(\frac{(T-s)^{2-\alpha_1}}{\Gamma(3-\alpha_1)} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\eta_j^{2\alpha_1+2\alpha_2-1}}{\Gamma(2\alpha_1+2\alpha_2)})\,\|x\|\}
\end{aligned}
$$

de la même manière, on peut obtenir l'estimation suivante :

$$
\begin{aligned}
&\|Q_2(x,y)(t_2) - Q_2(x,y)(t_1)\| \\
&\leq (t_2^{\alpha_1+\alpha_2-1} - t_1^{\alpha_1+\alpha_2-1})\,|\Delta|\,\{(\frac{T^2}{2} + \sum_{j=1}^{m} |a_j| \frac{\eta_j^{\beta_1+2\beta_2-1}}{\Gamma(\beta_1+2\beta_2)})L_2 \\
&+ |\lambda|\,(\frac{(T-s)^{2-\beta_1}}{\Gamma(3-\beta_1)} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\eta_j^{2\beta_1+2\beta_2-1}}{\Gamma(2\beta_1+2\beta_2)})\,\|y\|\}
\end{aligned}
$$

Par conséquent $Q(B_\delta)$ est équicontinu.Par une application du théorème ($d\prime Arzela - Ascoli$) on déduit que Q est un opérateur complètement continu.

En conséquence du théorème de point fixe de Krasnoselskii, on peut, conclure que a un point fixe qui est une solution du système fractionnaire (3.1) Ce qui achève le démonstration.

Bibliographie

[1] W.Sudsutad, S K Ntouyas and J Tariboon. Systems of fractional Langevin equations of Riemann-Liouville and Hadamard types (2015).

[2] Z.Dahmani, M.A.Abdellaoui, M.Houas. Coupled Systems of Fractional Integro-Differential Equations Involving Several Functions.Theory and Applications of Mathematics & Computer Science 5 (1) (2015) 53–61.

[3] A. BOUZAROURA . Etude d'une équation différentielle fractionnaire impulsive dans un espace de Banach.(2014).

[4] B. Ahmad and J J. Nieto. Solvability of Nonlinear Langevin Equation Involving Two Fractional Orders with Dirichle Boundary Conditions.Hindawi Publishing Corporation International Journal of Differential Equation Volume 2010, Article ID 649486, 10 pages.

[5] M. Benchohra, S. Hamani, S.K. Ntouyas, Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal conditions, Volume 71, Issues 7–8, 1–15 October 2009.

[6] N Nyamoradi, T Bashiri,S. Mvaezpour, D Baleanu. Uniqueness and existence of positive solutions for singular fractional differential equations Electronic Journal of Di erential Equations, Vol. 2014 (2014), No. 130, pp. 1-13. ISSN: 1072-6691.

Résumé

Dans ce mémoire,en premier lieu, il sera question de définir les notions de base du calcul fractionnaire. Définition ulile pour la bonne compréhension de la thématique abordée. En second lieu, lors du deuxième et du troisième chapitres, il sera question de prouver l'existence et l'unicité de la solution de deux systèmes d'équation différentielle d'ordre fractionnaire distincts (2.1) *et* (3.1) au sens de Riemann–Liouville. Les résultats obtenus dans ce travail.sont basés sur les théorèmes du point fixe suivants Banach, Scheafer, Arzéla-Ascoli et Krasnoselskii

Abstract

In this research, first, it will be a question of defining the basic notions of fractional calculus; a useful definition for the understanding of the topic. Secondly, in the second and third chapters, we will argue to prove the existence and uniqueness of the solution of two distinct fractional order differential equation systems (2.1)and(3.1)following Riemann–Liouville results

obtained in this work are based on the fixed-point theorems following Banach, Scheafer, Arzéla-Ascoli and Krasnoselskii.