Remerciements

En préambule à ce mémoire je remercie ALLAH qui m'aide et me donne la patience et le courage durant ces langues années d'études.
Je tiens tout d'abord à remercier grandement Madame Djouamai Leila, pour sa grande disponibilité et ses précieux conseils.

Mes vifs remerciements s'adressent à Mr B.Chaouchi le président et à tous les membres de jury Mr M.Hachama et Mr A.krelifa qui nous ont fait l'honneur d'examiner ce travail.

Je voudrais remercier mes parents, mon frère, mes sœurs, mes chères amies, aussi toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à mes recherches et à l'élaboration de ce mémoire.
Merci à tous et à toutes.

Notations

- $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}^n$: espace euclidien de dimension n.
- $\|.\|$: la norme euclidienne.
- $H =$ Espace de Hilbert.
- Ω : est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- $C^k(\Omega)$: l'espace des fonctions définies sur Ω dans $\mathbb{R}$, k fois continûment dérivables,
- $C^\infty(\Omega)$: on désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
- $C_c^k(\Omega)$:les éléments de $C^k(\Omega)$ à support compact dans Ω.
- $C_c^\infty(\Omega)$:les éléments de $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω.
- $L^1(I, \mathbb{R})$: l'espace des fonctions $x : I \to \mathbb{R}$ Lebesgue intégrables.
- $L^1_{loc}(I, \mathbb{R})$:l'espace des fonctions localement intégrables.
- L^2 : est l'espace des fonctions de carré intégrable.
- L^p : L'espace des fonctions dont la puissance p est intégrable au sens de Lebesgue.
- $D(\Omega)$: L'espace des fonctions indéfiniment dérivable à support compact dans Ω.
- $D'(\Omega)$: L'espace (des distributions) des formes linéaires continues sur $D(\Omega)$.
- $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Table des matières

Résumé

Dans notre travail, on considére le systéme de Timenshenko en thermoélasticité en dimension 1 dans un domaine bornée. On a étudié la stabilité exponentielle de l'énergie associée au systéme (0.0.2) avec différentes conditions aux limites. La methode utilisée pour démontrer ce resultat est basée sur la methode de multiplicateurs .

Introduction

[04] Timoshinko, a donné le système de deux équations hyperboliques couplées suivant:

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} &= \left(K\left(u_x - \varphi\right)\right)_x, && (0,\infty)\times(0,L), \\ I_\rho \varphi_{tt} &= \left(EI\varphi_x\right)_x + K\left(u_x - \varphi\right), && (0,\infty)\times(0,L), \end{aligned} \tag{0.0.1}$$

comme un modèle simple décrivant les vibrations d'un poutre, où t est la variable du temps, x la variable de l'espace au long du poutre de longueur L dans sa configuration d'equilibre, u est le déplacement transverse du poutre, et φ est l'angle de rotation du filement du poutre.

Les cofficients: ρ, I_ρ, E, I et K sont respectivement la masse linéaire (la masse par unité de longueur), le moment polaire d'inertie de la section efficace, le module d'Young de l'élasticité, le moment d'inertie d'une section efficace et le module d'étirement.

Ce système a été étudié par beaucoup de mathématiciens et des resultats concernant l'existence et le comportement asymptotique et la stabilité exponentielle ont été obtenus.

Dans notre travail, on considére le systéme de Timenshenko en thermoélasticité par :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k\left(\varphi_x + \psi\right)_x = 0 & (t,x)\in(0,\infty)\times(0,L), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k\left(\varphi_x + \psi\right) + \gamma\theta_x = 0 & (t,x)\in(0,\infty)\times(0,L), \\ \rho_3 \theta_t - \kappa\theta_{xx} + \gamma\psi_{tx} = 0 & (t,x)\in(0,\infty)\times(0,L), \end{cases} \tag{0.0.2}$$

avec les conditions initiales :

$$\varphi(0,.) = \varphi_0, \quad \varphi_t(0,.) = \varphi_1, \quad \psi(0,.) = \psi_0, \quad \psi_t(0,.) = \psi_1, \quad \theta(0,.) = \theta_0, \quad \text{à} \quad (0,L),$$

et les conditions aux limites :

$$\varphi(t,0) = \varphi(t,L) = \psi(t,0) = \psi(t,L) = \theta_x(t,0) = \theta_x(t,L) = 0, \quad \text{à} \quad (0,\infty),$$

ou

$$\varphi(t,0)=\varphi(t,L)=\psi_x(t,0)=\psi_x(t,L)=\theta(t,0)=\theta(t,L)=0 \quad \text{à} \quad (0,\infty),$$

Avec t désigne la dérivée par rapport à la variable t et l'indice x désigne la dérivée par rapport à la variable spaciale. φ est le déplacement transverse du poutre, et ψ est l'angle de rotation du filement du poutre. θ est la déviations de la température , En plus, ρ_1, ρ_2, ρ_3, k, b, κ et γ désignent des constants positives caractérisent des propriétés physiques de la poutre et du filament. Ce modéle est un modéle linéaire couplant deux équations des ondes et une équation de la chaleur. il décrit les vibrations d'une poutre thermoélastique . On a démontrer la stabilité exponentielle du système (0.0.2) en utilisant la méthode de multiplicateurs avec deux type différents de conditions aux limites et pour la condition $\dfrac{\rho_1}{k}=\dfrac{\rho_2}{b}$

Cette thèse est divisée en trois chapitres. Dans le premier chapitre nous rappellons quelques notations de base, des définitions, des propriétés de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisés dans ce mémoire.

Dans le deuxiéme chapitre, on rappelle le travail de J. E. M. Rivera ; R. Racke [01], nous démontrons une décroissance exponentielle de l'énergie avec les conditions aux limites :

$$\varphi(t,0)=\varphi(t,L)=\psi(t,0)=\psi(t,L)=\theta_x(t,0)=\theta_x(t,L)=0, \quad \text{dans} \quad (0,\infty).$$

Dans le troisième chapitre, nous démontrons une décroissance exponentielle de l'énergie du systéme (0.0.2) avec les conditions aux limites :

$$\varphi(t,0)=\varphi(t,L)=\psi_x(t,0)=\psi_x(t,L)=\theta(t,0)=\theta(t,L)=0 \quad \text{dans} \quad (0,\infty).$$

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Intruduction

Dans ce chapitre consacré aux rappels, nous avons regroupé les notions essentielles d'analyse fonctionnelle nécessaire à la compréhension des énoncés qui forment le thème de ce mémoire.

De même les résultats fondamentaux, qui concernent définition des quelques termes physiques, les espaces $L^p(\Omega)$, les espaces de Sobolev, aussi quelques inégalités utilies pour la démonstartions des lemmes, et sans oublier la stabilité de l'energie qui est le but de ce thème.

1.2 Quelques espaces fonctionnels

Nous rappelons ici quelques définitions concernent les espaces $L^P(\Omega)$ et de Sobolev.

1.2.1 Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.2.1 *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on définit :*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \quad \text{mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty \right\}.$$

On définit sur $L^p(\Omega)$ la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right]^{1/p}.$$

1.2.2 Espaces $L^p(a, b, \Omega)$

Définition 1.2.2 *Soient Ω un espace de Banach et $]a, b[$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $\|.\|_\Omega$ la norme dans Ω.*

On désigne par $L^p(a, b, \Omega)$ l'espace des classes des fonctions mesurables de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\|f\|_{L^p(a,b,\Omega)} = \left[\int\limits_{(a,b)} \|f(t)\|_\Omega^p \, dt \right]^{\frac{1}{p}} < \infty \qquad \text{pour} \quad p < \infty,$$

Définition 1.2.3 *(Dérivée faible)*

Soit $1 \leq i \leq n$, on dit qu'une fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ est dérivable dans la direction i au sens faible s'il existe $D_i f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que :

$$\forall \varphi \in D(\Omega) : \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n D_i f(x) \varphi(x) dx, \tag{1.2.1}$$

si un tel $D_i f$ existe, il est unique.

1.2.3 Espaces de Sobolev

On introduit l'espace $H^m(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions $u \in L^2(\Omega)$, dont toutes les dérivées partielles d'ordre inférieure ou égale à m-prises au sens faibles sont dans $L^2(\Omega)$.

Ces espaces jouent un rôle fondamental dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

Définition 1.2.4 *Pour $m \in \mathbb{N}$, on définit l'espace de Sobolev d'ordre $m \in \mathbb{N}$ par :*

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m \right\}, \tag{1.2.2}$$

où

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), \alpha_j \in \mathbb{N}, |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n, \text{ et } D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} ... \partial_n^{\alpha_n}, \text{ où } \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

On munit $H^m(\Omega)$ du produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle_m = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x).D^\alpha v(x)dx, \tag{1.2.3}$$

et la norme associée à ce produit scalaire :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \|D^\alpha u\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2.4}$$

Notion de trace

Pour une fonction $u \in C^0(\bar{\Omega})$, la trace de u sur $\partial\Omega$ est définie par

$$\begin{cases} \gamma(u) : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad x \longrightarrow u(x). \end{cases}$$

En d'autres termes, $\gamma(u) = u\mid_{\partial\Omega}$ .On introduit alors l'application trace

$$\begin{cases} \gamma : C^0(\bar{\Omega}) \longrightarrow C^0(\partial\Omega) \\ \qquad u \longrightarrow \gamma(u) \end{cases}$$

qui est une application linéaire. A une application définie sur un ouvert Ω, elle associe la restriction de cette application au bord de l'ouvert.

Peut-on étendre la notion de trace à des fonctions moins régulières :

On ne peut pas définir la trace d'une fonction de $L^2(\Omega)$.

Par exemple $u : x \to \sin(1/x)$ définie sur $\Omega =]0,1[$ .L'ensemble $\partial\Omega$ est alors composé des deux points 0 et 1.

Il n'y a pas de façon naturelle de dé nir la trace de u (la valeur de u) en le point 0.

Une fonction qui est dans $H^1(\Omega)$ n'est pas nécessairement continue. On peut cependant définir la trace sur $\partial\Omega$ d'une fonction de $H^1(\Omega)$ Plus précisément, on admet qu'il existe une application linéaire et continue

$$\begin{cases} \gamma : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega) \\ \qquad u \longrightarrow \gamma(u) \end{cases}$$

vérifiant $\forall u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), \gamma(u) = u\mid_{\partial\Omega}$.

Pour $u \in H^1(\Omega)$, la fonction $\gamma(u)$ est définie sur $\partial\Omega$, et elle n'est pas forcément continue, mais seulement $L^2(\partial\Omega)$.

Proposition 1.2.1

$$H_0^1(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega), \gamma(u) = 0\right\}.$$

Autrement dit, $H_0^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'annulent sur le bord de Ω (quand ce bord est défini).

1.3 Certaines inégalités utiles

Nous allons lui donner des inégalités importantes. Ces inégalités jouent un rôle important en mathématiques appliquées et aussi, il est très utile dans nos prochains chapitres.

1.3.1 Lemme de Gronwall

Lemme 1.3.1 *(sous forme intégrale)*

Soient $\phi \in L^\infty(0,T)$, $\phi(t) \geq 0 \quad t \in [0,T]$, et μ une fonction $\in L^1(0,T)$, $\mu(t) \geq 0$ $t \in [0,T]$.

On suppose :

$$\phi(t) \leq \int_0^t \mu(s)\phi(s)ds + C \quad p.p, t \in [0,T], \quad (C = constante\ positif),$$

Alors :

$$\phi(t) \leq C \exp\left(\int_0^t \mu(s)ds\right) \qquad p.p, t \in [0,T].$$

Preuve. On définit les fonctions

$$F(t) = \int_0^t \mu(s)\phi(s)ds + C, \qquad G(t) = C\exp\left(\int_0^t \mu(s)ds\right), \quad pour\ t \in [0,T]. \tag{1.3.1}$$

On veut montrer que si $\phi(t) \leq F(t)$ alors $F(t) \leq G(t)$ pour tout $t \geq 0$. On note que $G(t) > 0$ (par hypothèse $C > 0$ et $\mu, \phi \geq 0$).

On démontrer que :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{F(t)}{G(t)}\right) = \frac{F'(t)G(t) - G'(t)F(t)}{(G(t))^2} \leq 0. \tag{1.3.2}$$

En fait on a (on utilise ici l'hypothèse $\phi(t) \leq F(t)$)

$$F'(t) = \phi(t)\mu(t) \leq F(t)\mu(t), \qquad G'(t) = C\ \mu(s)\exp\left(\int_0^t \mu(s)ds\right) = G(t)\ \mu(t), \tag{1.3.3}$$

d'où on obtient tout de suite :

$$F'(t)G(t) - G'(t)F(t) \leq F(t)\mu(t)G(t) - F(t)\mu(t)G(t) = 0.$$

Donc elle clair que :

$$\begin{aligned} F'(t)G(t) - F(t)\mu(t)G(t) &\leq 0, \\ G(t)\left(F'(t) - F(t)\mu(t)\right) &\leq 0. \end{aligned}$$

On obtient :

$$F'(t) - F(t)\mu(t) \leq 0,$$
$$\frac{F'(t)}{F(t)} \leq \mu(t).$$

En suite :

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{F'(s)}{F(s)}ds &\leq \int_0^t \mu(s)ds, \\ \ln(F(t)) + K &\leq \int_0^t \mu(s)ds. \end{aligned}$$

Cela implique :

$$F(t) \leq C\exp\left(\int_0^t \mu(s)ds\right),$$

d'où la résultat. ∎

1.3.2 l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Lemme 1.3.2 *Soit* $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\forall\ x_1, x_2 \in L^2(\Omega)$,

$$\langle x_1, x_2 \rangle \leq \|x_1\| \, \|x_2\|, \tag{1.3.4}$$

où

$$\left|\int\limits_{\Omega} x_1x_2d\mu\right| \leq \left(\int\limits_{\Omega} |x_1|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\Omega} |x_2|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.3.5}$$

Preuve. La preuve consiste à étudier la fonction suivante :

$$f(\lambda) = \int\limits_{\Omega} (x_1\lambda + x_2)^2 d\mu.$$

La première chose que nous pouvons remarquer est que :

$$(x_1\lambda + x_2)^2 \geq 0 \Longrightarrow \quad f(\lambda) \geq 0, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ensuite, essayons de développer $f(\lambda)$:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \int\limits_{\Omega} \left(x_1^2\lambda^2 + x_2^2 + 2x_1\lambda x_2\right) d\mu = \int\limits_{\Omega} x_1^2\lambda^2 d\mu + \int\limits_{\Omega} x_2^2 d\mu + \int\limits_{\Omega} 2x_1\lambda x_2 d\mu \\ &= \lambda^2 \int\limits_{\Omega} x_1^2 d\mu + \int\limits_{\Omega} x_2^2 d\mu + 2\lambda \int\limits_{\Omega} x_1x_2 d\mu. \end{aligned}$$

La 2ème chose que nous pouvons remarquer est que $f(\lambda)$ est un polynôme du 2ème degré positive. Par conséquent son descriminant $\Delta \leq 0$, alors :

$$\left(2\int\limits_{\Omega} x_1x_2d\mu\right)^2 - 4\int\limits_{\Omega} x_1^2 d\mu \int\limits_{\Omega} x_2^2 d\mu \leq 0 \Longrightarrow 4\left(\int\limits_{\Omega} x_1x_2d\mu\right)^2 \leq 4\int\limits_{\Omega} x_1^2 d\mu \int\limits_{\Omega} x_2^2 d\mu.$$

Il ne nous reste plus qu'à simplifier par 4 et nous obtenons l' inégalité de Cauchy-Schwarz.

■

1.3.3 Inégalité de Hölder

Théorème 1.3.1 *Soit* $1 \leq p < \infty$, *on désigne par* q *l'exposant conjugué de* p, *i,e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Soient $u \in L^p(\Omega)$ *et* $v \in L^q(\Omega)$, *Alors* $u.v \in L^1(\Omega)$, *et :*

$$\int\limits_{\Omega} |u.v| \leq \|u\|_p \cdot \|v\|_q. \tag{1.3.6}$$

Preuve. Premier cas : p ou q vaut $+\infty$. Supposons $q = +\infty$, et donc $p = 1$. Alors $v \leq \|v\|_\infty$, donc $|uv| \leq |u| \, \|v\|_\infty$ par conséquent :

$$\|uv\|_1 = \int_\Omega |uv| \, dx \leq= \|v\|_\infty \int_\Omega |u| \, dx = \|v\|_\infty \|u\|_1 .$$

Deuxième cas: p et q sont finis. L'inégalité de Hölder est évidente si $\|u\|_p = 0$ ou $\|v\|_q = 0$. En effet par exemple $\|u\|_p = 0$ alors $|u| = 0$. donc $|uv| = 0$ et par conséquent $\|uv\|_1 = 0$. Nous supposons donc maintenant que $\|u\|_p \neq 0$ et $\|v\|_q \neq 0$.

Rappelons la concavité du logarithme :

$$\forall \alpha \in [0.1] , \forall x, y > 0, \;\; \ln (\alpha x + (1-\alpha) y) \geq \alpha \ln (x) + (1-\alpha) \ln (y) .$$

En posant $\alpha = \dfrac{1}{p}$, et donc $1 - \alpha = \dfrac{1}{q}$, ainsi que $x = |u_1|^p$ et $y = |v_1|^q$, on obtient :

$$\ln \left(\frac{|u_1|^p}{p} + \frac{|v_1|^q}{q} \right) \geq \frac{1}{p} \ln (|u_1|^p) + \frac{1}{q} \ln (|v_1|^q) = \ln (|u_1 v_1|) ,$$

et donc par croissance de l'exponentielle,

$$\frac{|u_1|^p}{p} + \frac{|v_1|^q}{q} \geq |u_1 v_1| .$$

Ainsi avec

$$u_1 = \frac{u}{\|u\|_p}, v_1 = \frac{v}{\|v\|_q},$$

on obtient :

$$\frac{uv}{\|u\|_p \|v\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|u|^p}{\|u\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|v|^p}{\|v\|_p^p}.$$

En intègrant chaque membre, la croissance de l'intégrale implique :

$$\int_\Omega \frac{uv}{\|u\|_p \|v\|_q} dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

ce qui est l'inégalité attendue. ■

1.3.4 Inégalité de Hölder généralisée

Lemme 1.3.3 *Soient $f_1, f_2, f_3, ..., f_k$ des fonctions, telles que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq i \leq k$, avec:*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + ... + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Alors le produit $f = f_1 f_2 f_3 ... f_k$ appartient à $L^p(\Omega)$, et :

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_1} \|f\|_{p_2} \|f\|_{p_3} ... \|f\|_{p_k} . \tag{1.3.7}$$

1.3.5 L'inégalité de Young

Lemme 1.3.4 *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, nous avons :*

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}, \tag{1.3.8}$$

où ε est toute constante positive.

Preuve. Prenant le résultat bien connu

$$(2\varepsilon a - b)^2 \geq 0, \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}^+, \tag{1.3.9}$$

pour tous $\varepsilon > 0$, on a:

$$4\varepsilon^2 a^2 + b^2 - 4\varepsilon ab \geq 0. \tag{1.3.10}$$

Cela implique

$$4\varepsilon ab \leq 4\varepsilon^2 a^2 + b^2, \tag{1.3.11}$$

par conséquent,

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon},$$

Cela achève la démonstration. ■

Lemme 1.3.5 *L'inégalité de Young affirme que pour tous a et b réels positifs ou nuls, et tous p et q réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, (sont conjugués), on a :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{1.3.12}$$

L'égalité a lieu si et seulement si $a^p = b^q$. L'inégalité de Young est un cas particulier de l'inégalité arithmético-géométrique. Son nom vient de William Henry Young.

Preuve. Soit $I = [0, 1]$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable, telle que :

$$f(x) = \begin{cases} p \log a, & 0 \leq x \leq \dfrac{1}{p}, \\ q \log b, & \dfrac{1}{p} \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{1.3.13}$$

pour $a, b \geq 0$, et $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, et soit $\phi(t)=\exp(t)$ une fonction convexe, utilisant l'inégalité de Jensen, on obtient :

$$\phi\left(\frac{1}{\mu(I)}\int_I f(x)dx\right) \leq \frac{1}{\mu(I)}\int_I \phi(f(x))dx, \tag{1.3.14}$$

et par conséquence, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(I)}\int_I \phi(f(x))dx &= \int_0^1 \exp f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{p}} \exp(p\log a)dx + \int_{\frac{1}{p}}^1 \exp(q\log b)dx \\ &= \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},\end{aligned} \tag{1.3.15}$$

telle que μ mesure de Lebesgue

donc $\mu(I)=1$, et

$$\begin{aligned}\phi\left(\frac{1}{\mu(I)}\int_I f(x)dx\right) &= \exp\left(\int_0^1 f(x)dx\right) = \exp\left(\int_0^{\frac{1}{p}} p\log a dx + \int_{\frac{1}{p}}^1 q\log b dx\right) \\ &= ab.\end{aligned} \tag{1.3.16}$$

Utilisation (1.3.14), (1.3.15) et (1.3.16) pour conclure le résultat. ■

1.3.6 L'inégalité de Sobolev-Poincaré

Lemme 1.3.6 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ que l'on suppose borné , Alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que, pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ on a :*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.3.17}$$

Preuve. On a $\Omega = [a.b]$,

On peut écrire, pour $x \in [a.b]$,

$$u(x) = \int_a^x u'(y)dy.$$

Alors,

$$\begin{aligned} u^2(x) &= \left(\int_a^x u'(y)dy \right)^2, \\ &\leq \int_a^x (u'(y))^2 \, dy \int_a^x dy, \end{aligned}$$

donc:

$$\Longrightarrow \int_a^b u^2(x) \leq \int_a^b \left[\int_a^x (u'(y))^2 \, dy \times (x-a) \right] dx \leq \|u'\|^2_{L^2(a.b)} \times \int_a^b (x-a)dx.$$

Cela implique :

$$\Longrightarrow \|u\|^2_{L^2(a.b)} \leq \frac{(b-a)^2}{2} \|u'\|^2_{L^2(a.b)} \Longrightarrow \|u\|_{L^2(a.b)} \leq \frac{(b-a)}{\sqrt{2}} \|u'\|_{L^2(a.b)}.$$

D'où

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

■

1.4 Définition des quelques termes physiques

Thermoélastique

Définition 1.4.1 *La thermoélastique est une relation entre l'élasticité d'un corps et à sa dilatation en fonction de la chaleur.*

Viscoélasticité

Définition 1.4.2 *En rhéologie, le comportement d'un matériau viscoélastique linéaire est intermédiaire entre celui d'un solide élastique idéal symbolisé par un ressort de module E (ou G) et celui d'un liquide visqueux newtonien symbolisé par un amortisseur de viscosité η. L'élasticité d'un matériau traduit sa capacité à conserver et restituer de l'énergie après déformation. La viscosité d'un matériau traduit sa capacité à dissiper de l'énergie. Les polymères, en fait la plupart des matériaux, ont un comportement viscoélastique.*

Énergie

Définition 1.4.3 *L'énergie (du grec : force en action) est ce qui permet d'agir : sans elle, rien ne se passe, pas de mouvement, pas de lumière, pas de vie ! Au sens physique, l'énergie caractérise la capacité à modifier un état, à produire un travail entraînant du mouvement, de la lumière, ou de la chaleur. Toute action ou changement d'état nécessite que de l'énergie soit échangée.*

Stabilité de l'énergie

Il existe plusieurs degrés de stabilité que l'on peut étudier.

Le premier degré consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, i.e :

$$E(t) \to 0. \text{ lorsque } t \to +\infty.$$

C'est ce que l'on appelle la stabilisation forte.

Pour le second, on s'intéresse à la décroissance de l'énergie la plus rapide, c'est-à-dire lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle, i.e :

$$E(t) \leq C \exp(-\alpha t), \ \forall t > 0,$$

ou C et α sont des constantes positives avec C qui dépend des données initiales.

Quant au troisième, il étudie des situations intermédiaires, dans lesquelles la décroissance des solutions n'est pas exponentielle, mais du type polynomial par exemple :

$$E(t) \leq \frac{C}{t^{\beta}}, \ \forall t > 0.$$

ou C et β sont des constantes positives avec C qui dépend des données initiales.

Fonction de Lyapunov

Une fonction de Lyapunov est une fonction qui permet d'estimer la stabilité d'une solution d'une équation différentielle.

Idée de base (assumant $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$) Supposez que l'on puisse définir une mesure de l'énergie dans un système par exemple:

$$L(x,t) = \|x\|^2$$

Tel que

$$L(x_e,t) = 0, \quad \forall t \geq t_0$$
$$L(x,t) > 0, \quad x \neq x_e, \forall t$$

$L(x,t)$ augmente doucement tandis que x augmente (pour un t donné), et L'énergie ne s'accroit pas le long de toute trajectoire, donc:

$$\tfrac{dL}{dt}\left[x(t;x_0,t_0),t\right] \leq 0, \quad \forall t \geq t_0, \forall x_0$$

Intuitivement Il est raisonnable de penser que pour x_0 près de $x_e (= 0)$:

L'énergie initiale $L(x_0,t_0)$ est petite, L'énergie reste toujours petite, puisque:$\frac{dL}{dt} \leq 0$ et $x(t;x_0,t_0)$ reste près de x_e pour toujours, alors x_e est stable.

Hypothèse de base sur $L(x,t)$ $\forall x, \forall t \geq t_0$: toutes les dérivées partielles de L existent et sont continues dans (x,t).

Conséquence:

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt}\left[x(t;x_0,t_0),t\right] &= \frac{dL}{dt}\left[x(t),t\right] = \dot{L}\left[x(t),t\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i}\left[x(t),t\right]\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}\left[x(t),t\right]\end{aligned}$$

Pour un ensemble $G \subset \mathbb{R}^n$ Nous devons être en mesure d'écrire qu'il existe des fonctions $\phi\left(\|x\|\right)$ et $\psi\left(\|x\|\right)$ tel que :

$$\psi\left(\|x\|\right) \leq L(x,t) \leq \phi\left(\|x\|\right), \quad \forall x \in G, \forall t \geq t_0$$

$\phi\left(\|x\|\right)$ et $\psi\left(\|x\|\right)$ sont des fonctions de classe K.

Chapitre 2

Stabilité expenentielle pour $\varphi = \psi = \theta_x = 0$

2.1 Intruduction

Dans ce chapitre nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k\left(\varphi_x + \psi\right)_x = 0 & (0,\infty)\times(0,L), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k\left(\varphi_x + \psi\right) + \gamma\theta_x = 0 & (0,\infty)\times(0,L), \\ \rho_3\theta_t - \kappa\theta_{xx} + \gamma\psi_{tx} = 0 & (0,\infty)\times(0,L), \end{cases} \tag{2.1.1}$$

avec les conditions initiales :

$$\varphi(0,.) = \varphi_0, \quad \varphi_t(0,.) = \varphi_1, \quad \psi(0,.) = \psi_0, \quad \psi_t(0,.) = \psi_1, \quad \theta(0,.) = \theta_0, \quad \text{à} \quad (0,L),$$

et les conditions aux limites :

$$\varphi(t,0) = \varphi(t,L) = \psi(t,0) = \psi(t,L) = \theta_x(t,0) = \theta_x(t,L) = 0, \quad \text{à} \quad (0,\infty).$$

Avec t désigne la dérivée par rapport à la variable t et l'indice x désigne la dérivée par rapport à la variable spaciale. φ est le déplacement transverse du poutre, et ψ est l'angle de rotation du filement du poutre. θ est la déviations de la température , En plus, ρ_1, ρ_2, ρ_3, k, b, κ et γ désignent des constants positives caractérisent des propriétés physiques de la poutre et du filament.

2.2 Calcul d'énergie

L'énergie associée au système (2.1.1) est définie par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L (\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + b|\psi_x|^2 + k|\varphi_x + \psi|^2 + \rho_3 |\theta|^2)(t,x)dx, \\ = E(t,\varphi,\psi,\theta). \tag{2.2.1}$$

Lemme 2.2.1 *Soit* (φ, ψ, θ) *la solution du système* (2.1.1), *pour tout* $t > 0$, *on a l'identité suivants :*

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\kappa \int_0^L |\theta_x|^2 dx. \tag{2.2.2}$$

Preuve. Multiplions la première équation de $(2.1.1)_1$ par φ_t, la deuxième équation de $(2.1.1)_2$ par ψ_t et la troisième équation de $(2.1.1)_3$ par θ, on obtient :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_t\varphi_{tt} - k\varphi_t\varphi_{xx} - k\varphi_t\psi_x = 0, \\ \rho_2\psi_t\psi_{tt} - b\psi_t\psi_{xx} + k\psi_t\varphi_x + k\psi_t\psi + \gamma\psi_t\theta_x = 0, \\ \rho_3\theta\theta_t - \kappa\theta\theta_{xx} + \gamma\theta\psi_{tx} = 0. \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Intégrant les résultats sur $[0, L]$, on obtient :

$$\begin{cases} \int_0^L \rho_1\varphi_t\varphi_{tt}dx - \int_0^L k\varphi_t\varphi_{xx}dx - \int_0^L k\varphi_t\psi_x dx = 0, \\ \int_0^L \rho_2\psi_t\psi_{tt}dx - \int_0^L b\psi_t\psi_{xx}dx + \int_0^L k\psi_t\varphi_x dx + \int_0^L k\psi_t\psi dx + \int_0^L \gamma\psi_t\theta_x dx = 0, \\ \int_0^L \rho_3\theta\theta_t dx - \int_0^L \kappa\theta\theta_{xx}dx + \int_0^L \gamma\theta\psi_{tx}dx = 0. \end{cases} \tag{2.2.4}$$

La somme des trois équations du systeme (2.2.4), donne :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\rho_1\int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2 dx + \rho_3\int_0^L |\theta|^2 dx\right\} - \int_0^L k\varphi_t\varphi_{xx}dx - \int_0^L k\varphi_t\psi_x dx \\ - \int_0^L b\psi_t\psi_{xx}dx + \int_0^L k\psi_t\varphi_x dx + \int_0^L k\psi_t\psi dx + \int_0^L \gamma\psi_t\theta_x dx - \int_0^L \kappa\theta\theta_{xx}dx + \int_0^L \gamma\theta\psi_{tx}dx = 0. \tag{2.2.5}$$

Utilisation de l'integration par partie, donne :

$$-\kappa \int_0^L \theta\theta_{xx} dx = \kappa \int_0^L |\theta_x|^2 \, dx, \tag{2.2.6}$$

$$\gamma \int_0^L \theta\psi_{tx} dx = -\gamma \int_0^L \psi_t \theta_x dx, \tag{2.2.7}$$

$$-k \int_0^L \varphi_t \varphi_{xx} dx = k \int_0^L \varphi_x \varphi_{tx} dx, \tag{2.2.8}$$

$$-k \int_0^L \psi_x \varphi_t dx = k \int_0^L \psi \varphi_{tx}, \tag{2.2.9}$$

$$-b \int_0^L \psi_t \psi_{xx} dx = b \int_0^L \psi_x \psi_{xt} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ b \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx \right\}. \tag{2.2.10}$$

Remplaçant les équations (2.2.6), (2.2.7), (2.2.8), (2.2.9) et (2.2.10) dans (2.2.5), on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \rho_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 \, dx + \rho_2 \int_0^L |\psi_t|^2 \, dx + \rho_3 \int_0^L |\theta|^2 \, dx + b \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx + k \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \, dx \right\}$$
$$= -\kappa \int_0^L |\theta_x|^2 \, dx,$$

d'où

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\kappa \int_0^L |\theta_x|^2 \, dx.$$

■

2.3 Résultats principaux

Lemme 2.3.1 *Soit* (φ, ψ, θ) *la solution du système* (2.1.1), *pour tout* $t > 0$*, il existe un* $\varepsilon_1 > 0$ *telle que :*

$$\frac{d}{dt} I_1 \leq -\frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx + \varepsilon_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 \, dx + C_{\varepsilon_1} \int_0^L |\psi_t|^2 \, dx + C_{\varepsilon_1} \int_0^L |\theta_x|^2 \, dx, \tag{2.3.1}$$

où

$$I_1 = \int_0^L (\rho_2 \psi_t \psi + \rho_1 \varphi_t \omega) dx, \tag{2.3.2}$$

et ω *la solution de l'équation differentielle :*

$$\begin{cases} -\omega_x = \psi, \\ \omega(0) = \omega(L) = 0. \end{cases} \tag{2.3.3}$$

Preuve. *On a*

$$\frac{d}{dt} I_1 = \frac{d}{dt} \left(\int_0^L (\rho_2 \psi_t \psi + \rho_1 \varphi_t \omega) dx \right).$$

Alors,

$$\frac{d}{dt} I_1 = \int_0^L \rho_2 \psi_{tt} \psi dx + \rho_2 \int_0^L |\psi_t|^2 dx + \int_0^L \rho_1 \varphi_{tt} \omega dx + \rho_1 \int_0^L \varphi_t \omega_t dx, \tag{2.3.4}$$

on peut voir que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_1 \;\; = \;\; & b \int_0^L \psi_{xx} \psi dx - k \int_0^L \varphi_x \psi dx + k \int_0^L \psi_x \omega dx - k \int_0^L |\psi|^2 dx - \gamma \int_0^L \theta_x \psi dx \\ & + \rho_2 \int_0^L |\psi_t|^2 dx + \rho_1 \int_0^L \varphi_t \omega_t dx + k \int_0^L \varphi_{xx} \omega dx. \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Une intégration par partie sur les trois premiers termes de (2.3.5), *donne :*

$$b \int_0^L \psi_{xx} \psi dx = -b \int_0^L |\psi_x|^2 dx, \tag{2.3.6}$$

$$-k \int_0^L \varphi_x \psi dx = k \int_0^L \psi_x \varphi dx, \tag{2.3.7}$$

$$k \int_0^L \psi_x \omega dx = -k \int_0^L \omega_{xx} \omega dx = k \int_0^L |\omega_x|^2 dx, \tag{2.3.8}$$

et pour le dernier terme du (2.3.5) *on a :*

$$k \int_0^L \varphi_{xx} \omega dx = -k \int_0^L \varphi_x \omega_x dx = k \int_0^L \varphi \omega_{xx} dx = -k \int_0^L \varphi \psi_x dx. \tag{2.3.9}$$

Insérant (2.3.6), (2.3.7), (2.3.8) *et* (2.3.9) *dans* (2.3.5), *on obtient :*

$$\frac{d}{dt}I_1 = \rho_2 \int_0^L |\psi_t|^2 \, dx - b \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx - k \int_0^L |\psi|^2 \, dx + k \int_0^L |\omega_x|^2 \, dx + \rho_1 \int_0^L \varphi_t \omega_t dx - \gamma \int_0^L \theta_x \psi dx. \tag{2.3.10}$$

On applique l'inégalité de Poincaré et l'équation (2.3.3) *et , on obtient :*

$$\int_0^L |\omega_x|^2 \, dx \leq \int_0^L |\psi|^2 \, dx \leq c_p \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx, \tag{2.3.11}$$

et l'inégalité de Young, donne :

$$\int_0^L \theta_x \psi dx \leq C_{\varepsilon_1} \int_0^L |\theta_x|^2 \, dx + \varepsilon_1 c_p \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx, \tag{2.3.12}$$

$$\int_0^L \varphi_t \omega_t dx \leq \varepsilon_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 \, dx + C_{\varepsilon_1} \int_0^L |\omega_t|^2 \, dx, \tag{2.3.13}$$

pour $\varepsilon_1 > 0$. *On remplace* (2.3.11), (2.3.12) *et* (2.3.13) *dans* (2.3.10), *on obtient :*

$$\frac{d}{dt}I_1 \leq -\frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx + \varepsilon_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 \, dx + C_{\varepsilon_1} \int_0^L |\psi_t|^2 \, dx + C_{\varepsilon_1} \int_0^L |\theta_x|^2 \, dx,$$

telle que :

$$2kc_p + \gamma \varepsilon_1 c_p = \frac{b}{2}, \quad \varepsilon_1 \rho_1 = \varepsilon_1, \quad \rho_2 + \rho_1 C_{\varepsilon_1} C = C_{\varepsilon_1}, \quad \gamma C_{\varepsilon_1} = C_{\varepsilon_1}.$$

Pour $\varepsilon_1 > 0$, *d'où le résultat.* ■

Lemme 2.3.2 *Soit* (φ, ψ, θ) *la solution du système* (2.1.1), *pour tout* $t > 0$, *il existe un* $\varepsilon_2 > 0$ *telle que :*

$$\frac{d}{dt}I_2 \leq -\frac{\gamma \rho_2}{2} \int_0^L |\psi_t|^2 \, dx + \varepsilon_2 \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx + \varepsilon_2 \int_0^L |\varphi_x|^2 \, dx + c_{\varepsilon_2} \int_0^L |\theta_x|^2 \, dx, \tag{2.3.14}$$

où

$$I_2(t) = \rho_2 \rho_3 \int_0^L \int_0^x \theta(t, y) dy \psi_t(t, x) dx. \tag{2.3.15}$$

Preuve. On a :

$$\frac{d}{dt}I_2 = \int_0^L \int_0^x \rho_2\rho_3\theta_t\psi_t dydx + \int_0^L \int_0^x \rho_2\rho_3\theta\psi_{tt} dydx.$$

D'autre part, on a :

$$\rho_2\psi_{tt} = b\psi_{xx} - k\varphi_x - k\psi - \gamma\theta_x,$$

et

$$\rho_3\theta_t = \kappa\theta_{xx} - \gamma\psi_{tx},$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I_2 &= \int_0^L \int_0^x \rho_2\kappa\theta_{xx}\psi_t dydx - \int_0^L \int_0^x \rho_2\gamma\psi_{tx}\psi_t dydx + \int_0^L \int_0^x b\rho_3\theta\psi_{xx} dydx \\ &\quad - \int_0^L \int_0^x k\rho_3\theta\varphi_x dydx - \int_0^L \int_0^x k\rho_3\theta\psi dydx - \int_0^L \int_0^x \gamma\rho_3\theta\theta_x dydx. \qquad (2.3.16)\end{aligned}$$

On peut voir aussi que :

$$\int_0^x \theta_{xx} dy = \theta_x(t,x) - \theta_x(t,0) = \theta_x(t,x). \qquad (2.3.17)$$

Donc on peut écrire le premier et le deuxième terme de (2.3.16) comme suit :

$$\int_0^L \int_0^x \rho_2\kappa\theta_{xx}\psi_t dydx = \kappa\rho_2 \int_0^L \theta_x\psi_t dx, \qquad (2.3.18)$$

et

$$-\int_0^L \int_0^x \rho_2\gamma\psi_{tx}\psi_t dydx = -\gamma\rho_2 \int_0^L |\psi_t|^2 dx. \qquad (2.3.19)$$

Utilisons l'intégration par partie, on obtient les estimations suivantes :

$$\rho_3 b \int_0^L \int_0^x \theta\psi_{xx} dydx = -\rho_3 b \int_0^L \int_0^x \theta_x\psi_x dydx, \qquad (2.3.20)$$

$$-\rho_3 k \int_0^L \int_0^x \theta\varphi_x dydx = \rho_3 k \int_0^L \int_0^x \theta_x\varphi dydx, \qquad (2.3.21)$$

et

$$-\rho_3\gamma\int_0^L\int_0^x \theta\theta_x dydx = \rho_3\gamma\int_0^L\int_0^x \theta_x\theta dydx, \tag{2.3.22}$$

donc, on peut écrire aussi :

$$-b\rho_3\int_0^L\int_0^x \theta_x\psi_x dydx = -b\rho_3\int_0^L \theta\psi_x dx, \tag{2.3.23}$$

$$k\rho_3\int_0^L\int_0^x \theta_x\varphi dydx = k\rho_3\int_0^L \theta\varphi dx, \tag{2.3.24}$$

et,

$$\gamma\rho_3\int_0^L\int_0^x \theta_x\theta dydx = \gamma\rho_3\int_0^L |\theta|^2 dx. \tag{2.3.25}$$

Regroupent les équations (2.3.18), (2.3.19), (2.3.23), (2.3.24) et (2.3.25) dans (2.3.16), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I_2 \;=\;& \kappa\rho_2\int_0^L \theta_x\psi_t dx - \gamma\rho_2\int_0^L |\psi_t|^2 dx - b\rho_3\int_0^L \theta\psi_x dx \\ & +k\rho_3\int_0^L \theta\varphi dx - \int_0^L\int_0^x k\rho_3\theta\psi dydx + \gamma\rho_3\int_0^L |\theta|^2 dx. \end{aligned}\tag{2.3.26}$$

On applique l'inégalité de Young pour $\varepsilon_2 > 0$, on aura :

$$\int_0^L \theta\psi_x dx \leq \varepsilon_2\int_0^L |\psi_x|^2 dx + C_{\varepsilon_2}\int_0^L |\theta|^2 dx,$$

$$\int_0^L \theta\varphi dx \leq \varepsilon_2\int_0^L |\varphi|^2 dx + C_{\varepsilon_2}\int_0^L |\theta|^2 dx,$$

$$\int_0^L \theta_x\psi_t dx \leq \varepsilon_2\int_0^L |\psi_t|^2 + C_{\varepsilon_2}\int_0^L |\theta_x|^2 dx,$$

et on applique aussi l'inégalité de Poincaré, on obtient :

$$\int_0^L\int_0^x \theta\psi dydx \leq C\int_0^L \theta\psi dx,$$

$$\int_0^L |\varphi|^2 \, dx \leq C \int_0^L |\varphi_x|^2 \, dx,$$

$$\int_0^L |\theta|^2 \, dx \leq C \int_0^L |\theta_x|^2 \, dx,$$

et

$$\int_0^L |\psi|^2 \leq C \int_0^L |\psi_x|^2 ,$$

donc,l'inégalité de Young donne :

$$\int_0^L \theta\psi dx \leq \varepsilon_2 \int_0^L |\psi|^2 + C_{\varepsilon_2} \int_0^L |\theta|^2 \, dx.$$

Finalement :

$$\frac{d}{dt} I_2 \leq -\frac{\gamma\rho_2}{2} \int_0^L |\psi_t|^2 \, dx + \varepsilon_2 \int_0^L |\psi_x|^2 + \varepsilon_2 \int_0^L |\varphi_x|^2 \, dx + C_{\varepsilon_2} \int_0^L |\theta_x|^2 \, dx,$$

Pour une certaine constante positive ε_2 d'où le résultat. ■

Lemme 2.3.3 *Soit* (φ, ψ, θ) *la solution du système* (2.1.1), *pour tout* $t > 0$, *il existe un* $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, *telle que :*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_3 \quad &\leq \quad (C_{\varepsilon_1} + N_2 C_{\varepsilon_2}) \int_0^L |\theta_x|^2 \, dx - \left(\frac{N_2 \gamma \rho_2}{2} - C_{\varepsilon_1} \right) \int_0^L |\psi_t|^2 \, dx \\ &\quad - \left(\frac{b}{2} - N_2 \varepsilon_2 \right) \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx + \varepsilon_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 \, dx + N_2 \varepsilon_2 \int_0^L |\varphi_x|^2 \, dx, \end{aligned} \tag{2.3.27}$$

où

$$I_3 = I_1 + N_2 I_2. \tag{2.3.28}$$

Preuve. On a :

$$\frac{d}{dt} I_3 = \frac{d}{dt} (I_1 + N_2 I_2).$$

D'aprés les lemmes précédent, on a :

$$\frac{d}{dt} I_2 \leq -\frac{\gamma\rho_2}{2} \int_0^L |\psi_t|^2 \, dx + \varepsilon_2 \int_0^L |\psi_x|^2 + \varepsilon_2 \int_0^L |\varphi_x|^2 \, dx + C_{\varepsilon_2} \int_0^L |\theta_x|^2 \, dx, \tag{2.3.29}$$

et

$$\frac{d}{dt}I_1 \leq -\frac{b}{2}\int_0^L |\psi_x|^2\,dx + \varepsilon_1\int_0^L |\varphi_t|^2\,dx + C_{\varepsilon_1}\int_0^L |\psi_t|^2\,dx + C_{\varepsilon_1}\int_0^L |\theta_x|^2\,dx. \tag{2.3.30}$$

Regroupant (2.3.29) et (2.3.30), on obtient (2.3.27), pour $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ assez petite, puis $N_2 > 0$ assez grand. ■

Lemme 2.3.4 *Soit* (φ, ψ, θ) *la solution du système* (2.1.1), *et on suppose la condition que* $\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}$ *pour tout* $t > 0$, *il existe un* $\varepsilon_3 > 0$ *telle que :*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I_4(t) \;\; &\leq \;\; [b\psi_x\varphi_x]_{x=0}^{x=L} - k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx + \varepsilon_3\int_0^L |\varphi_x|^2\,dx \\ &\quad + \varepsilon_3\int_0^L |\psi_x|^2\,dx + \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2\,dx + C_{\varepsilon_3}\int_0^L |\theta_x|^2\,dx,\end{aligned} \tag{2.3.31}$$

telle que :

$$I_4 = \int_0^L \rho_2\psi_t\,(\varphi_x+\psi)\,dx + \int_0^L \rho_2\psi_x\varphi_t dx. \tag{2.3.32}$$

Preuve. On a :

$$\frac{d}{dt}I_4 = \frac{d}{dt}\int_0^L \rho_2\psi_t\,(\varphi_x+\psi)\,dx + \frac{d}{dt}\int_0^L \rho_2\psi_x\varphi_t dx, \tag{2.3.33}$$

d'après le système (2.1.1), on a :

$$\rho_2\psi_{tt} = b\psi_{xx} - k(\varphi_x+\psi) - \gamma\theta_x. \tag{2.3.34}$$

Remplaçant (2.3.34) dans le premier terme du (2.3.33), on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I_4 \;\; &= \;\; b\int_0^L \psi_{xx}(\varphi_x+\psi)dx - k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx - \gamma\int_0^L \theta_x(\varphi_x+\psi)dx \\ &\quad + \rho_2\int_0^L \psi_t\,(\varphi_x+\psi)_t\,dx + \frac{d}{dt}\int_0^L \rho_2\psi_x\varphi_t dx,\end{aligned} \tag{2.3.35}$$

une intégration par partie sur le premier terme de (2.3.35), donne :

$$b\int_0^L \psi_{xx}\varphi_x dx = [b\psi_x\varphi_x]_{x=0}^{x=L} - b\int_0^L \psi_x\varphi_{xx}dx,$$

et

$$b\int_0^L \psi_{xx}\psi dx = -b\int_0^L |\psi_x|^2 dx,$$

donc (2.3.35) devient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I_4 &= [b\psi_x\varphi_x]_{x=0}^{x=L} - b\int_0^L \psi_x\varphi_{xx}dx - b\int_0^L |\psi_x|^2 dx - k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2 dx + \frac{d}{dt}\int_0^L \rho_2\psi_x\varphi_t dx \\ &\quad -\gamma\int_0^L \theta_x(\varphi_x+\psi)dx + \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2 dx + \rho_2\int_0^L \psi_t\varphi_{xt}dx. \qquad (2.3.36)\end{aligned}$$

Utilisation de $(2.1.1)_1$ donne :

$$\begin{aligned}-b\int_0^L \psi_x\varphi_{xx}dx - b\int_0^L |\psi_x|^2 dx &= -b\int_0^L \psi_x(\varphi_{xx}+\psi_x)dx \\ &= -b\int_0^L \psi_x(\varphi_x+\psi)_x dx = -\frac{b\rho_1}{k}\int_0^L \psi_x\varphi_{tt}dx. (2.3.37)\end{aligned}$$

Insérant (2.3.37) dans (2.3.36), on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I_4 &= [b\psi_x\varphi_x]_{x=0}^{x=L} - \frac{b\rho_1}{k}\int_0^L \psi_x\varphi_{tt}dx - k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2 dx + \frac{d}{dt}\int_0^L \rho_2\psi_x\varphi_t dx \\ &\quad -\gamma\int_0^L \theta_x(\varphi_x+\psi)dx + \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2 dx + \rho_2\int_0^L \psi_t\varphi_{xt}dx. \qquad (2.3.38)\end{aligned}$$

D'autre part,on a :

$$\rho_2\int_0^L \psi_t\varphi_{xt}dx = \frac{d}{dt}\rho_2\int_0^L \psi\varphi_{tx}dx - \rho_2\int_0^L \psi\varphi_{xtt}dx.$$

L'itegrale par partie donne :

$$\rho_2\int_0^L \psi_t\varphi_{xt}dx = -\frac{d}{dt}\rho_2\int_0^L \psi_x\varphi_t dx + \rho_2\int_0^L \psi_x\varphi_{tt}dx. \qquad (2.3.39)$$

Remplacant (2.3.39) dans (2.3.38), et d'après l'hypothèse $\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}$, on obtient :

$$\frac{d}{dt}I_4 = [b\psi_x\varphi_x]_{x=0}^{x=L} - k\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2\, dx - \gamma\int_0^L \theta_x(\varphi_x+\psi)dx + \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2\, dx,$$

l'inégalité de Young donne :

$$\int_0^L \theta_x\varphi_x dx \leq \varepsilon_3\int_0^L |\varphi_x|^2\, dx + C_{\varepsilon_3}\int_0^L |\theta_x|^2\, dx,$$

et

$$\int_0^L \theta_x\psi dx \leq \varepsilon_3\int_0^L |\psi|^2\, dx + C_{\varepsilon_3}\int_0^L |\theta_x|^2\, dx,$$

et on applique aussi l'inégalité de Poincaré, on obtient :

$$\int_0^L |\psi|^2\, dx \leq C\int_0^L |\psi_x|^2\, dx,$$

pour $\varepsilon_3 > 0$ et $t > 0$, on a :

$$\frac{d}{dt}I_4 \leq [b\psi_x\varphi_x]_{x=0}^{x=L} - k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\, dx + \varepsilon_3\int_0^L |\varphi_x|^2\, dx + \varepsilon_3\int_0^L |\psi_x|^2\, dx + \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2\, dx + C_{\varepsilon_3}\int_0^L |\theta_x|^2\, dx,$$

d'où le résultat. ■

Lemme 2.3.5 *Soit (φ, ψ, θ) la solution du système (2.1.1), pour tout $t > 0$, et soit $q \in C^1([0, L])$, telle que $q(x) = 2 - \frac{4}{L}x$.*

Alors pour tout $\tau > 0$, On a :

$$\frac{d}{dt}I_5 \leq -\frac{k}{2}\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\, dx + C_2\tau\int_0^L |\varphi_t|^2\, dx + C_\tau\int_0^L |\psi_x|^2 + |\psi_t|^2 + |\theta_x|^2\, dx, \qquad (2.3.40)$$

telle que : $C_\tau, \widetilde{N}, \delta$ et C_2 sont des constantes positifs

et,

$$I_5 = I_4 + \widetilde{N}\int_0^L b\rho_2\psi_t q\psi_x dx + \delta\int_0^L \rho_1\varphi_t q\varphi_x dx. \qquad (2.3.41)$$

Preuve. On détermine la dérivée de I_5

$$\frac{d}{dt}I_5=\frac{d}{dt}I_4+\widetilde{N}\frac{d}{dt}\int_0^L b\rho_2\psi_t q\psi_x dx+\delta\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_1\varphi_t q\varphi_x dx,$$

on a

$$\frac{d}{dt}\int_0^L b\rho_2\psi_t q\psi_x dx=b\int_0^L \rho_2\psi_{tt}q\psi_x dx+b\int_0^L \rho_2\psi_t q\psi_{xt}dx, \tag{2.3.42}$$

d'autre part,on a :

$$\rho_2\psi_{tt}=b\psi_{xx}-k\left(\varphi_x+\psi\right)-\gamma\theta_x.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_2\psi_t q\psi_x dx &= b^2\int_0^L \psi_{xx}q\psi_x dx-bk\int_0^L\left(\varphi_x+\psi\right)q\psi_x dx\\&\quad+b\int_0^L \rho_2\psi_t q\psi_{xt}dx-b\gamma\int_0^L\theta_x q\psi_x dx.\end{aligned} \tag{2.3.43}$$

On peut écrire (2.3.43) sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_2\psi_t q\psi_x dx &= b^2\int_0^L \psi_{xx}q\psi_x dx+b\int_0^L \rho_2\psi_t q\psi_{xt}dx-bk\int_0^L\psi q\psi_x dx\\&\quad-bk\int_0^L \varphi_x q\psi_x dx-b\gamma\int_0^L\theta_x q\psi_x dx.\end{aligned} \tag{2.3.44}$$

Une intégration par partie sur les trois premiers termes de (2.3.44) donne :

$$b^2\int_0^L \psi_{xx}q\psi_x dx=\frac{b^2}{2}\left[q\left|\psi_x\right|^2\right]_0^L-\frac{b^2}{2}\int_0^L q_x\psi_x^2 dx, \tag{2.3.45}$$

$$b\int_0^L \rho_2\psi_t q\psi_{xt}dx=-\frac{b}{2}\rho_2\int_0^L q_x\psi_t^2 dx, \tag{2.3.46}$$

et,

$$-bk\int_0^L \psi q\psi_x dx=\frac{bk}{2}\int_0^L q_x\psi^2 dx. \tag{2.3.47}$$

En vertu,(2.3.45), (2.3.46) et (2.3.47) dans (2.3.44), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_2\psi_t q\psi_x dx &= \frac{b^2}{2}\left[q\left|\psi_x\right|^2\right]_0^L - \frac{b^2}{2}\int_0^L q_x\psi_x^2 dx - \frac{bk}{2}\int_0^L \varphi_x q\psi_x dx \\ &\quad -\frac{bk}{2}\int_0^L q_x\psi^2 dx - \frac{b\rho_2}{2}\int_0^L q_x\psi_t^2 dx - b\gamma\int_0^L \theta_x q\psi_x dx. \quad (2.3.48)\end{aligned}$$

On peut voir aussi que :

$$-\frac{b^2}{2}\int_0^L q_x\psi_x^2 dx = \frac{2b^2}{L}\int_0^L \left|\psi_x\right|^2 dx, \quad (2.3.49)$$

$$\frac{bk}{2}\int_0^L q_x\psi^2 dx = -\frac{2bk}{L}\int_0^L \left|\psi\right|^2 dx, \quad (2.3.50)$$

et

$$-\frac{b\rho_2}{2}\int_0^L q_x\psi_t^2 dx = \frac{2b\rho_2}{L}\int_0^L \left|\psi_t\right|^2 dx. \quad (2.3.51)$$

Car :

$$q^{'}(x) = -\frac{4}{L}, \quad (2.3.52)$$

on a

$$|q(x)| \leq 2, \quad \text{pour tout} \quad x \in [0, L]\,,$$

d'apres l'inégalité de Young pour $\varepsilon_4 > 0$, on a :

$$\int_0^L \varphi_x q\psi_x dx \leq \varepsilon\int_0^L \left|\varphi_x\right|^2 dx + C_\varepsilon\int_0^L \left|\psi_x\right|^2 dx, \quad (2.3.53)$$

$$\int_0^L \theta_x q\psi_x dx \leq \varepsilon\int_0^L \left|\psi_x\right|^2 dx + C_\varepsilon\int_0^L \left|\theta_x\right|^2 dx, \quad (2.3.54)$$

et l'inégalité de Poincaré, donne :

$$\int_0^L \left|\psi\right|^2 \leq C\int_0^L \left|\psi_x\right|^2. \quad (2.3.55)$$

Insérant (2.3.49) , (2.3.51) , (2.3.53) , (2.3.54) et (2.3.55) dans (2.3.48) , on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_2\psi_t q\psi_x dx &\leq -\left\{b^2\left|\psi_x(t,L)\right|^2+b^2\left|\psi_x(t,0)\right|^2\right\}+\tilde{\varepsilon}\int_0^L\left|\varphi_x\right|^2dx \\ &+C_5\int_0^L\left|\psi_t\right|^2dx+C_{\tilde{\varepsilon}}\int_0^L\left(\left|\theta_x\right|^2+\left|\psi_x\right|^2\right)dx, \qquad (2.3.56)\end{aligned}$$

pour $\tilde{\varepsilon}>0$.

Maintenant, on calcul la dérivée de terme $\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_1\varphi_t q\varphi_x dx$:

$$\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_1\varphi_t q\varphi_x dx=\int_0^L \rho_1\varphi_{tt} q\varphi_x dx+\int_0^L \rho_1\varphi_t q\varphi_{xt} dx. \qquad (2.3.57)$$

On a

$$\rho_1\varphi_{tt}=k(\varphi_x+\psi)_x.$$

Alors :

$$\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_1\varphi_t q\varphi_x dx=k\int_0^L q\varphi_{xx}\varphi_x dx+\rho_1\int_0^L q\varphi_t\varphi_{xt} dx+k\int_0^L q\psi_x\varphi_x dx. \qquad (2.3.58)$$

Utilisons l'integrale par partie sur les deux premiers termes de (2.3.58) , donne :

$$k\int_0^L q\varphi_{xx}\varphi_x dx=\frac{k}{2}\left[q\varphi_x^2\right]-\frac{k}{2}\int_0^L q_x\varphi_x^2 dx, \qquad (2.3.59)$$

$$\rho_1\int_0^L q\varphi_t\varphi_{xt} dx=-\frac{\rho_1}{2}\int_0^L q_x\varphi_t^2 dx,$$

et d'après (2.3.52) , on a :

$$-\frac{k}{2}\int_0^L q_x\varphi_x^2 dx=\frac{2k}{L}\int_0^L\left|\varphi_x\right|^2dx, \qquad (2.3.60)$$

et

$$-\frac{\rho_1}{2}\int_0^L q_x\varphi_t^2 dx=\frac{2\rho_1}{L}\int_0^L\left|\varphi_t\right|^2dx. \qquad (2.3.61)$$

Regroupant (2.3.59), (2.3.60) et (2.3.61) dans (2.3.58); on obtient :

$$\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_1\varphi_t\varphi_x dx = \frac{k}{2}\left[q\varphi_x^2\right] + \frac{2k}{L}\int_0^L |\varphi_x|^2 dx + \frac{2\rho_1}{L}\int_0^L |\varphi_t|^2 dx + k\int_0^L q\psi_x\varphi_x dx, \tag{2.3.62}$$

d'apres l'inégalité de Young pour $\varepsilon_4 > 0$, on peut écrire (2.3.62) sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_1\varphi_t\varphi_x dx \leq -k\left\{|\varphi_x(t,L)|^2 + |\varphi_x(t,0)|^2\right\} + C_5\int_0^L \left(|\varphi_t|^2 + |\varphi_x|^2 + |\psi_x|^2\right) dx. \tag{2.3.63}$$

Finalement,

$$\frac{d}{dt}I_5 = \frac{d}{dt}I_4 + \tilde{N}\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_2\psi_t q\psi_x dx + \delta\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_1\varphi_t\varphi_x dx, \tag{2.3.64}$$

telle que :

$$\begin{aligned}\tilde{N}\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_2\psi_t q\psi_x dx \quad &\leq \quad -\tilde{N}\left\{b^2|\psi_x(t,L)|^2 + b^2|\psi_x(t,0)|^2\right\} + \tilde{N}\tilde{\varepsilon}\int_0^L |\varphi_x|^2 dx \\ &\quad + \tilde{N}C_5\int_0^L |\psi_t|^2 dx + \tilde{N}C_{\tilde{\varepsilon}}\int_0^L \left(|\theta_x|^2 + |\psi_x|^2\right) dx. \end{aligned}\tag{2.3.65}$$

$$\begin{aligned}\delta\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_1\varphi_t\varphi_x dx \quad &\leq \quad -\delta k\left\{|\varphi_x(t,L)|^2 + |\varphi_x(t,0)|^2\right\} \\ &\quad + \delta C_5\int_0^L \left(|\varphi_t|^2 + |\varphi_x|^2 + |\psi_x|^2\right) dx, \end{aligned}\tag{2.3.66}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I_4(t) \quad &\leq \quad [b\psi_x\varphi_x]_{x=0}^{x=L} - k\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \varepsilon_3\int_0^L |\varphi_x|^2 dx + \varepsilon_3\int_0^L |\psi_x|^2 dx \\ &\quad + \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2 dx + C_{\varepsilon_3}\int_0^L |\theta_x|^2 dx. \end{aligned}\tag{2.3.67}$$

On a :

$$-\frac{k}{2}\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \leq -\frac{k}{4}\int_0^L |\varphi_x|^2 dx + C\int_0^L |\psi_x|^2 dx, \tag{2.3.68}$$

et,

$$\frac{d}{dt}I_5 \leq -k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx + 2\left(\tilde{N}\tilde{\varepsilon}+\delta C_5+\varepsilon_3\right)\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx + \left(\delta C_5+\tilde{N}C_{\tilde{\varepsilon}}+\varepsilon_3+C\right)\int_0^L |\psi_x|^2\,dx$$
$$+\left(\tilde{N}C_5+\rho_2\right)\int_0^L |\psi_t|^2\,dx + \left(\tilde{N}C_{\tilde{\varepsilon}}+C_{\varepsilon_3}\right)\int_0^L |\theta_x|^2\,dx + (\delta C_5)\int_0^L |\varphi_t|^2\,dx.$$

On choisit:

$$\tilde{N}\tilde{\varepsilon}+\delta C_5+\varepsilon_3 \leq \frac{k}{4}, \tag{2.3.69}$$

$$\delta \leq \tau, \tag{2.3.70}$$

et

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \delta C_5+\tilde{N}C_{\tilde{\varepsilon}}+\varepsilon_3+C, \\ \zeta_2 &= \tilde{N}C_5+\rho_2, \\ \zeta_3 &= \tilde{N}C_{\tilde{\varepsilon}}+C_{\varepsilon_3}, \end{aligned} \tag{2.3.71}$$

et ζ_1, ζ_2 et ζ_2 des constantes positives.

Finalement, on a:

$$\frac{d}{dt}I_5 \leq -\frac{k}{2}\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx + C_5\tau\int_0^L |\varphi_t|^2\,dx + C_{\tau_1}\int_0^L |\psi_x|^2+|\psi_t|^2+|\theta_x|^2\,dx,$$

telle que $C_{\tau_1} = \max\{\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3\}$ ■

Lemme 2.3.6 *Soit* (φ,ψ,θ) *la solution du système* (2.1.1), *pour tout* $t>0$, *il existe un* $\varepsilon_5>0$ *telle que:*

$$\frac{d}{dt}I_6 \leq -\rho_1\int_0^L |\varphi_t|^2\,dx - \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2\,dx + k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx + C_6\int_0^L |\psi_x|^2+|\theta_x|^2\,dx, \tag{2.3.72}$$

où

$$I_6 = -\int_0^L \rho_1\varphi_t\varphi dx - \int_0^L \rho_2\psi_t\psi dx. \tag{2.3.73}$$

Preuve. On a :

$$\frac{d}{dt}I_6 = -\rho_1 \int_0^L \varphi_{tt}\varphi dx - \rho_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx - \rho_2 \int_0^L \psi_{tt}\psi dx - \rho_2 \int_0^L |\psi_t|^2 dx. \tag{2.3.74}$$

D'autre part, on a :

$$\rho_2\psi_{tt} = b\psi_{xx} - k\varphi_x - k\psi - \gamma\theta_x,$$

et

$$\rho_1\varphi_{tt} = k(\varphi_x + \psi)_x.$$

On peut voir aussi que :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I_6 \quad &= \quad -\int_0^L k(\varphi_x+\psi)_x\varphi dx - b\int_0^L \psi_{xx}\psi dx - \rho_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx \\ &\quad + \int_0^L k(\varphi_x+\psi)\psi dx + \gamma \int_0^L \theta_x\psi dx - \rho_2 \int_0^L |\psi_t|^2 dx,\end{aligned} \tag{2.3.75}$$

une intégration par partie sur les deux premiers termes de (2.3.75) :

$$-\int_0^L k(\varphi_x+\psi)_x\varphi dx = \int_0^L k(\varphi_x+\psi)\varphi_x dx, \tag{2.3.76}$$

et,

$$-b\int_0^L \psi_{xx}\psi dx = b\int_0^L |\psi_x|^2 dx. \tag{2.3.77}$$

On regroupe les equations (2.3.76) et (2.3.77) dans (2.3.75),On obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I_6 \quad &= \quad -\rho_1\int_0^L |\varphi_t|^2 dx - \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2 dx + k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2 dx \\ &\quad + b\int_0^L |\psi_x|^2 dx + \gamma\int_0^L \theta_x\psi dx.\end{aligned} \tag{2.3.78}$$

L'inégalité de Young pour $\varepsilon_5 > 0$, donne :

$$\int_0^L \theta_x\psi dx \leq \varepsilon_5 \int_0^L |\theta_x|^2 dx + C_{\varepsilon_5}\int_0^L |\psi|^2 dx,$$

on applique aussi l'inégalité de Poincaré, on obtient :

$$\int_0^L |\psi|^2 \, dx \leq C \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx.$$

Finalement,

$$\frac{d}{dt} I_6 \leq -\rho_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 \, dx - \rho_2 \int_0^L |\psi_t|^2 \, dx + k \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \, dx + C_6 \int_0^L |\psi_x|^2 + |\theta_x|^2 \, dx,$$

pour une constante $C_6 > 0$. ■

Théorème 2.3.1 *Laissez les données initiales satisfont*

$$\varphi_0, \psi_0, \theta_{0,x} \in H_0^1\left((0, L)\right), \quad \varphi_1, \psi_1 \in L^2\left((0, L)\right),$$

et supposant $\dfrac{\rho_1}{k} = \dfrac{\rho_2}{b}$, *il existe deux constantes positives* C *et* ξ *telles que l'énergie de la solution de système* (2.1.1) *satisfait*

$$E(t) \leq CE(0) \exp(-\xi t), \qquad \forall t > 0,$$

la preuve de notre résultat sera mis en place à travers plusieurs lemmes

Preuve. On définit la fonction de Lyaponov:

$$L = NE + I_3 + \mu \left(I_5 + \frac{2C_5 \tau}{\rho_1} I_6 \right) \tag{2.3.79}$$

pour μ, ρ_1, τ et C_5 sont des constantes positifs et N suffisamment grand.

On a

$$\frac{d}{dt} L = N \frac{d}{dt} E + \frac{d}{dt} I_3 + \mu \frac{d}{dt} \left(I_5 + \frac{2C_5 \tau}{\rho_1} I_6 \right) \tag{2.3.80}$$

On commence par montrer le dernier terme de l'inégalité (2.3.80), on a :

d'aprés le lemme (2.2.6) et le lemme (2.2.7), on a :

$$\frac{d}{dt} I_5 \leq -\frac{k}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \, dx + C_5 \tau \int_0^L |\varphi_t|^2 \, dx + C_{\tau_1} \int_0^L \left(|\psi_x|^2 + |\psi_t|^2 + |\theta_x|^2 \right) dx$$

et

$$\begin{aligned}\frac{2C_5\tau}{\rho_1}\frac{d}{dt}I_6 &\leq -2C_5\tau\int_0^L |\varphi_t|^2\,dx - \rho_2\frac{2C_5\tau}{\rho_1}\int_0^L |\psi_t|^2\,dx + k\frac{2C_5\tau}{\rho_1}\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx\\ &\quad + C_6\frac{2C_5\tau}{\rho_1}\int_0^L \left(|\psi_x|^2+|\theta_x|^2\right)dx.\end{aligned}$$

Alors on a,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{I_5+\frac{2C_5\tau}{\rho_1}I_6\right\} &\leq \left(-\frac{k}{2}+k\frac{2C_5\tau}{\rho_1}\right)\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx + \left(-\rho_2\frac{2C_5\tau}{\rho_1}+C_{\tau_1}\right)\int_0^L |\psi_t|^2\,dx\\ &\quad + \left(C_6\frac{2C_5\tau}{\rho_1}+C_{\tau_1}\right)\int_0^L \left(|\psi_x|^2+|\theta_x|^2\right)dx\\ &\quad + \left(C_5\tau-2C_5\tau\right)\int_0^L |\varphi_t|^2\,dx, \qquad (2.3.81)\end{aligned}$$

on choisi $C_5,\varepsilon,\rho_1>0$, telle que :

$$\frac{2C_5\tau}{\rho_1}\leq\frac{1}{4},$$

et

$$\begin{aligned}\chi_1 &= -\rho_2\frac{2C_5\tau}{\rho_1}+C_{\tau_1}\leq C_\tau,\\ \chi_2 &= C_6\frac{2C_5\tau}{\rho_1}+C_{\tau_1}\leq C_\tau,\end{aligned}$$

telle que χ_1, χ_2 et C_τ sont des constantes positives, on a

$$\mu\frac{d}{dt}\left\{I_5+\frac{2C_5\tau}{\rho_1}I_6\right\}\leq -\mu\frac{k}{4}\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx - \mu C_5\int_0^L |\varphi_t|^2\,dx + \mu C_\tau\int_0^L |\psi_t|^2+|\psi_x|^2+|\theta_x|^2\,dx. \qquad (2.3.82)$$

D'après le lemme (2.2.1) et (2.2.2) , on a:

$$
\begin{aligned}
N\frac{d}{dt}E+\frac{d}{dt}I_3 \quad \leq \quad & -(N\kappa-(C_{\varepsilon_1}+N_2C_{\varepsilon_2}))\int_0^L |\theta_x|^2\,dx-\left(\frac{N_2\gamma\rho_2}{2}-C_{\varepsilon_1}\right)\int_0^L |\psi_t|^2\,dx \\
& -\left(\frac{b}{2}-N_2\varepsilon_2\right)\int_0^L |\psi_x|^2\,dx+\varepsilon_1\int_0^L |\varphi_t|^2\,dx \\
& +N_2\varepsilon_2\int_0^L |\varphi_x|^2\,dx, \qquad (2.3.83)
\end{aligned}
$$

d'autre part, on peut voir que:

$$
\int_0^L |\varphi_x|^2\,dx \leq 2\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx+\frac{4C}{k}\int_0^L |\psi_x|^2\,dx.
$$

Regroupant les inégalités (2.3.82) et (2.3.83) dans (2.3.80) , on obtient:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}L(t) \quad \leq \quad & \left(-\frac{\mu}{2}+\frac{4N_2\varepsilon_2}{k}\right)\frac{k}{2}\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx+\left(\frac{8C}{kb}+\frac{2\mu C_\tau}{b}-\left(1-\frac{2N_2\varepsilon_2}{b}\right)\right)\frac{b}{2}\int_0^L |\psi_x|^2\,dx \\
& +\left(\frac{2\mu C_\tau}{\rho_2}-\left(N_2\gamma-\frac{2C_{\varepsilon_1}}{\rho_2}\right)\right)\frac{\rho_2}{2}\int_0^L |\psi_t|^2\,dx+\left(\frac{2\varepsilon_1-2\mu C_5}{\rho_1}\right)\frac{\rho_1}{2}\int_0^L |\varphi_t|^2\,dx \\
& +\frac{2}{\rho_3}\left(\mu C_\tau-(N\kappa-(C_{\varepsilon_1}+N_2C_{\varepsilon_2}))\right)\frac{\rho_3}{2}\int_0^L |\theta_x|^2\,dx,
\end{aligned}
$$

telle que $\mu, k, N_2, \varepsilon_2, \varepsilon_1, C_5, C_\tau, C_{\varepsilon_1}, C_{\varepsilon_2}, C, N, \gamma, \rho_1, \rho_2, \rho_3, b$ et κ sont des constantes positives,

on peut choisir:

$$
\begin{aligned}
\varpi_1 &= \left(-\frac{\mu}{2}+\frac{2N_2\varepsilon_2}{k}\right) \leq 0, \\
\varpi_2 &= \left(\frac{2\varepsilon_1-2\mu C_5}{\rho_1}\right) \leq 0, \\
\varpi_3 &= \left(\frac{2\mu C_\tau}{\rho_2}-\left(N_2\gamma-\frac{2C_{\varepsilon_1}}{\rho_2}\right)\right) \leq 0, \\
\varpi_4 &= \frac{2}{\rho_3}\left(\mu C_\tau-(N\kappa-(C_{\varepsilon_1}+N_2C_{\varepsilon_2}))\right) \leq 0, \\
\varpi_5 &= \left(\frac{8C}{kb}+\frac{2\mu C_\tau}{b}-\left(1-\frac{2N_2\varepsilon_2}{b}\right)\right) \leq 0,
\end{aligned}
$$

et $\beta_0 \geq 0$ de telle sorte :

$$\varpi_1 \leq -\beta_0 \qquad \text{et} \qquad \varpi_2 \leq -\beta_0,$$

$$\varpi_3 \leq -\beta_0 \qquad \text{et} \qquad \varpi_4 \leq -\beta_0,$$

et

$$\varpi_5 \leq -\beta_0.$$

On obtient :

d'après la définition de $E(t)$, on obtient :

$$\frac{d}{dt}L(t) \leq -\beta_0 E(t) \tag{2.3.84}$$

D'où le résultat.

D'autre part, on a :

$$L = NE + I_3 + \mu\left(I_5 + \frac{2C_5\tau}{\rho_1}I_6\right).$$

Alors :

$$|L - NE| = \left|I_3 + \mu\left(I_5 + \frac{2C_5\tau}{\rho_1}I_6\right)\right|,$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned}
|L - NE| \quad = \quad & \left|\rho_2\left(1 + \mu - \mu\frac{2C_5\tau}{\rho_1}\right)\int_0^L \psi_t\psi dx + \rho_1\int_0^L \varphi_t\omega dx + N_2\rho_2\rho_3\int_0^L\int_0^x \theta(t,y)dy\psi_t(t,x)dx\right. \\
& +\mu\delta\rho_1\int_0^L \varphi_t q\varphi_x dx + \mu\rho_2\int_0^L \psi_t\varphi_x dx + \mu\rho_2\int_0^L \psi_x\varphi_t dx \\
& \left.+\mu\widetilde{N}b\rho_2\int_0^L \psi_t q\psi_x dx + -2\mu C_5\tau\int_0^L \varphi_t\varphi dx\right|.
\end{aligned} \tag{2.3.85}$$

L'inégalité de Young pour $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ et ε_3 sont des constantes positives, donne :

$$\int_0^L \psi_t q\psi_x dx \leq \varepsilon\int_0^L |\psi_t|^2 dx + C_\varepsilon\int_0^L |\psi_x|^2 dx, \tag{2.3.86}$$

$$\int_0^L \varphi_t q\varphi_x dx \leq \varepsilon_1\int_0^L |\varphi_t|^2 dx + C_{\varepsilon_1}\int_0^L |\varphi_x|^2 dx, \tag{2.3.87}$$

et

$$\int_0^L \psi_t \psi dx \leq \varepsilon_2 \int_0^L |\psi|^2 dx + C_{\varepsilon_2} \int_0^L |\psi_t|^2 dx, \tag{2.3.88}$$

$$\int_0^L \varphi_t \omega dx \leq C_{\varepsilon_3} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^L |\omega|^2 dx, \tag{2.3.89}$$

pour $q \in C^1([0,L])$ et $|q(x)| \leq 2$,

L'inégalité de Poincaré donne:

$$\varepsilon_2 \int_0^L |\psi|^2 dx \leq \tilde{C}_2 \int_0^L |\psi_x|^2 dx, \tag{2.3.90}$$

$$\varepsilon_3 \int_0^L |\omega|^2 dx \leq C \int_0^L |\omega_x|^2 dx \leq -\tilde{C}_3 \int_0^L |\psi_x|^2 dx, \tag{2.3.91}$$

$$\int_0^L |\varphi|^2 dx \leq \tilde{C}_6 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx, \tag{2.3.92}$$

et

$$\int_0^L \int_0^x \theta(t,y) dy \psi_t(t,x) dx \leq \int_0^L \theta \psi_t dx \tag{2.3.93}$$

Insérant $(2.3.86)$, $(2.3.87)$, $(2.3.88)$, $(2.3.89)$, $(2.3.90)$, $(2.3.91)$, $(2.3.92)$ et $(2.3.93)$ dans $(2.3.85)$, on trouve:

$$\begin{aligned}
|L - NE| \;\leq\; & \Bigg| \left(C_{\varepsilon_2}\rho_2 \left(1 + \mu - \mu \frac{2C_5\tau}{\rho_1} \right) + \varepsilon\mu\widetilde{N} b\rho_2 + \varepsilon_4 \mu\rho_2 + \varepsilon_7 N_2 \rho_2 \rho_3 \right) \int_0^L |\psi_t|^2 dx \\
& + \left(\tilde{C}_2 \rho_2 \left(1 + \mu - \mu \frac{2C_5\tau}{\rho_1} \right) - \rho_1 \tilde{C}_3 + \varepsilon_5 \mu\rho_2 + C_\varepsilon \mu \widetilde{N} b\rho_2 \right) \int_0^L |\psi_x|^2 dx \\
& + \left(\rho_1 C_{\varepsilon_3} + C_{\varepsilon_5}\mu\rho_2 + \varepsilon_1 \mu\delta\rho_1 - 2C_{\varepsilon_6}\mu C_5 \tau - 2\tilde{C}_6 \mu C_5 \tau \right) \int_0^L |\varphi_t|^2 dx \\
& + \tilde{C}_\varepsilon N_2 \rho_2 \rho_3 \int_0^L |\theta|^2 dx + \left(C_{\varepsilon_1}\mu\delta\rho_1 + C_{\varepsilon_4}\mu\rho_2 \right) \int_0^L |\varphi_x|^2 dx \Bigg| .
\end{aligned}$$

Et comme on a:

$$\int_0^L |\varphi_x|^2 \, dx \leq 2 \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \, dx + \frac{4C}{k} \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx.$$

Alors on peut écrire:

$$|L - NE| \leq \left| \frac{1}{2}\tilde{\delta}_1 \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 \, dx + \tilde{\delta}_2 \int_0^L \rho_2 |\psi_t|^2 \, dx + \tilde{\delta}_3 \int_0^L b |\psi_x|^2 \, dx + \tilde{\delta}_4 \int_0^L k |\varphi_x + \psi|^2 \, dx + \tilde{\delta}_5 \int_0^L \rho_3 |\theta|^2 \, dx \right|,$$

où:

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta}_1 &= 2\left(\rho_1 C_{\varepsilon_3} + C_{\varepsilon_4}\mu\rho_2 + C_{\varepsilon_5}\mu\rho_2 + \varepsilon_1\mu\delta\rho_1 - 2C_{\varepsilon_6}\mu C_5\tau - 2\tilde{C}_6\mu C_5\tau\right)/\rho_1, \\
\tilde{\delta}_2 &= 2\left(C_{\varepsilon_2}\rho_2\left(1 + \mu - \mu\frac{2C_5\tau}{\rho_1}\right) + \varepsilon\mu\widetilde{N}b\rho_2 + \varepsilon_4\mu\rho_2 + \varepsilon_7 N_2\rho_2\rho_3\right)/\rho_2, \\
\tilde{\delta}_3 &= 2\left(\tilde{C}_2\rho_2\left(1 + \mu - \mu\frac{2C_5\tau}{\rho_1}\right) - \rho_1\tilde{C}_3 + \varepsilon_5\mu\rho_2 + C_\varepsilon\mu\widetilde{N}b\rho_2 + \frac{4C_{\varepsilon_1}\mu\delta\rho_1 C}{k} + \frac{4C_{\varepsilon_4}\mu\rho_2 C}{k}\right)/b, \\
\tilde{\delta}_4 &= \left(\frac{4C_{\varepsilon_1}\mu\delta\rho_1}{k} + \frac{4C_{\varepsilon_4}\mu\rho_2 C}{k}\right), \\
\tilde{\delta}_5 &= \frac{2\tilde{C}_\varepsilon N_2\rho_2\rho_3}{\rho_3}.
\end{aligned}$$

Donc, on a :

$$|L - NE| \leq \lambda E(t) \Longrightarrow -\lambda E(t) \leq L - NE \leq \lambda E(t)$$

Pour $\lambda > 0$,

d'où

$$\beta_1 E(t) \leq L(t) \leq \beta_2 E(t). \tag{2.3.94}$$

A partir de (2.3.84) , et (2.3.94) , on trouve

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq -\xi E(t). \tag{2.3.95}$$

Intègrant (2.3.95) par rapport à t, on obtient:

$$E(t) \leq C E(0) \exp(-\xi t).$$

Ceci termine la preuve de théorème. ■

Chapitre 3

Stabilité expenentielle pour $\varphi = \psi_x = \theta = 0$

3.1 Intruduction

Dans ce chapitre nous considérons le problème suivant:

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k\left(\varphi_x + \psi\right)_x = 0 & \text{à} \quad (0,\infty)\times(0,L), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k\left(\varphi_x + \psi\right) + \gamma\theta_x = 0 & \text{à} \quad (0,\infty)\times(0,L), \\ \rho_3\theta_t - \kappa\theta_{xx} + \gamma\psi_{tx} = 0 & \text{à} \quad (0,\infty)\times(0,L), \end{cases} \tag{3.1.1}$$

avec les conditions initiales :

$$\varphi(0,.) = \varphi_0, \quad \varphi_t(0,.) = \varphi_1, \quad \psi(0,.) = \psi_0, \quad \psi_t(0,.) = \psi_1, \quad \theta(0,.) = \theta_0, \quad \text{à} \quad (0,L),$$

et les conditions aux limites :

$$\varphi(t,0) = \varphi(t,L) = \psi_x(t,0) = \psi_x(t,L) = \theta(t,0) = \theta(t,L) = 0 \quad \text{à} \quad (0,\infty).$$

Avec t désigne la dérivée par rapport à la variable t et l'indice x désigne la dérivée par rapport à la variable spaciale. φ est le déplacement transverse du poutre, et ψ est l'angle de rotation du filement du poutre. θ est la déviations de la température , En plus, ρ_1, ρ_2, ρ_3, k, b, κ et γ désignent des constants positives caractérisent des propriétés physiques de la poutre et du filament.

3.2 Calcul d'énergie

L'énergie associée au système (3.1.1) est définie par :

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\int_0^L (\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + b\psi_x^2 + k\left|\varphi_x + \psi\right|^2 + \rho_3\theta^2)(t,x)dx, \\ &= E(t,\varphi,\psi,\theta). \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Lemme 3.2.1 *Soit* (φ,ψ,θ) *la solution du système* (3.1.1), *pour tout* $t>0$, *on a l'identité suivants:*

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\kappa\int_0^L \left|\theta_x\right|^2 dx. \tag{3.2.2}$$

Preuve. Multiplions la première équation de $(3.1.1)_1$ par φ_t, la deuxième équation de $(3.1.1)_2$ par ψ_t et la troisième équation de $(3.1.1)_3$ par θ, en suit en intégrant les résultats sur $[0,L]$, on obtient :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\rho_1\int_0^L \left|\varphi_t\right|^2 dx + \rho_2\int_0^L \left|\psi_t\right|^2 dx + \rho_3\int_0^L \left|\theta\right|^2 dx\right\} - \int_0^L k\varphi_t\varphi_{xx}dx - \int_0^L k\varphi_t\psi_x dx \\ &- \int_0^L b\psi_t\psi_{xx}dx + \int_0^L k\psi_t\varphi_x dx + \int_0^L k\psi_t\psi dx + \int_0^L \gamma\psi_t\theta_x dx - \int_0^L \kappa\theta\theta_{xx}dx + \int_0^L \gamma\theta\psi_{tx}dx = 0, \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

utilisant une integration par partie, on trouve

$$-\kappa\int_0^L \theta\theta_{xx}dx = \kappa\int_0^L \left|\theta_x\right|^2 dx. \tag{3.2.4}$$

$$\gamma\int_0^L \theta\psi_{tx}dx = -\gamma\int_0^L \psi_t\theta_x dx. \tag{3.2.5}$$

$$-k\int_0^L \varphi_t\varphi_{xx}dx = k\int_0^L \varphi_x\varphi_{tx}dx. \tag{3.2.6}$$

$$-k\int_0^L \psi_x\varphi_t dx = k\int_0^L \psi\varphi_{tx}, \tag{3.2.7}$$

$$-b\int_0^L \psi_t\psi_{xx} dx = b\int_0^L \psi_x\psi_{xt} dx. \tag{3.2.8}$$

Donc:

$$b\int_0^L \psi_x\psi_{xt} dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{ b\int_0^L |\psi_x|^2 \, dx \right\}. \tag{3.2.9}$$

On remplaçant les équations (3.2.4), (3.2.5), (3.2.6), (3.2.7) et (3.2.9) dans (3.2.3) on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{ \rho_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 \, dx + \rho_2 \int_0^L |\psi_t|^2 \, dx + \rho_3 \int_0^L |\theta|^2 \, dx + b\int_0^L |\psi_x|^2 \, dx + k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2 \, dx \right\}$$
$$= -\kappa \int_0^L |\theta_x|^2 \, dx, \tag{3.2.10}$$

d'où

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\kappa \int_0^L |\theta_x|^2 \, dx.$$

■

3.3 Résultats principaux

Lemme 3.3.1 *Soit* (φ,ψ,θ) *la solution du système* (3.1.1), *pour tout* $t>0$, *il existe un* $\varepsilon_1>0$ *telle que:*

$$\frac{d}{dt}I_1 \le -\frac{b}{2}\int_0^L |\psi_x|^2 \, dx + \varepsilon_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 \, dx + C_{\varepsilon_1}\int_0^L |\psi_t|^2 \, dx + C_{\varepsilon_1}\int_0^L |\theta_x|^2 \, dx, \tag{3.3.1}$$

où

$$I_1 = \int_0^L (\rho_2\psi_t\psi + \rho_1\varphi_t\omega) dx, \tag{3.3.2}$$

et ω *la solution de l'équation differentielle:*

$$\begin{cases} -\omega_x = \psi. \\ \omega(0) = \omega(L) = 0. \end{cases} \tag{3.3.3}$$

Preuve. *On a*

$$\frac{d}{dt}I_1 = \frac{d}{dt}\left(\int_0^L (\rho_2\psi_t\psi + \rho_1\varphi_t\omega)dx\right).$$

Alors,

$$\frac{d}{dt}I_1 = \int_0^L \rho_2\psi_{tt}\psi dx + \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2\, dx + \int_0^L \rho_1\varphi_{tt}\omega dx + \rho_1\int_0^L \varphi_t\omega_t dx, \tag{3.3.4}$$

on peut voir que :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I_1 \;&=\; b\int_0^L \psi_{xx}\psi dx - k\int_0^L \varphi_x\psi dx + k\int_0^L \psi_x\omega dx - k\int_0^L |\psi|^2\, dx - \gamma\int_0^L \theta_x\psi dx\\ &+\rho_2\int_0^L |\psi_t|^2\, dx + \rho_1\int_0^L \varphi_t\omega_t dx + k\int_0^L \varphi_{xx}\omega dx.\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Une intégration sur les trois premiers termes de (3.3.5)*, donne:*

$$b\int_0^L \psi_{xx}\psi dx = -b\int_0^L |\psi_x|^2\, dx, \tag{3.3.6}$$

$$-k\int_0^L \varphi_x\psi dx = k\int_0^L \psi_x\varphi dx, \tag{3.3.7}$$

$$k\int_0^L \psi_x\omega dx = -k\int_0^L \omega_{xx}\omega dx = k\int_0^L |\omega_x|^2\, dx, \tag{3.3.8}$$

et pour le derniere terme du (3.3.5)*, on a:*

$$k\int_0^L \varphi_{xx}\omega dx = -k\int_0^L \varphi_x\omega_x dx = k\int_0^L \varphi\omega_{xx} dx = -k\int_0^L \varphi\psi_x dx. \tag{3.3.9}$$

Insérant (3.3.6), (3.3.7), (3.3.8) *et* (3.3.9) *dans* (3.3.5)*, on obtient :*

$$\frac{d}{dt}I_1 = \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2\, dx - b\int_0^L |\psi_x|^2\, dx - k\int_0^L |\psi|^2\, dx + k\int_0^L |\omega_x|^2\, dx + \rho_1\int_0^L \varphi_t\omega_t dx - \gamma\int_0^L \theta_x\psi dx. \tag{3.3.10}$$

On applique d'après l'équation (3.3.3) *et l'inégalité de Poincaré, on a :*

$$\int_0^L |\omega_x|^2 \, dx \le \int_0^L |\psi|^2 \, dx \le c_p \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx, \tag{3.3.11}$$

et l'inégalité de Young, donne :

$$\int_0^L \theta_x \psi dx \le C_{\varepsilon_1} \int_0^L |\theta_x|^2 \, dx + \varepsilon_1 c_p \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx, \tag{3.3.12}$$

$$\int_0^L \varphi_t \omega_t dx \le \varepsilon_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 \, dx + C_{\varepsilon_1} \int_0^L |\omega_t| \, dx, \tag{3.3.13}$$

pour $\varepsilon_1 > 0$.

On remplace (3.3.11), (3.3.12) *et* (3.3.13) *dans* (3.3.10), *on obtient :*

$$\frac{d}{dt} I_1 \le -\frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx + \varepsilon_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 \, dx + C_{\varepsilon_1} \int_0^L |\psi_t|^2 \, dx + C_{\varepsilon_1} \int_0^L |\theta_x|^2 \, dx.$$

Pour $\varepsilon_1 > 0$,*d'où le résultat.* ■

Lemme 3.3.2 *Soit* (φ, ψ, θ) *la solution du système* (3.1.1), *pour tout* $t > 0$, *il existe un* $\varepsilon_2 > 0$ *telle que:*

$$\frac{d}{dt} \tilde{I}_2 \le -\frac{\gamma \rho_2}{2} \int_0^L |\psi_t|^2 \, dx + \varepsilon_2 \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx + \varepsilon_2 \int_0^L |\varphi_x|^2 \, dx + c_{\varepsilon_2} \int_0^L |\theta_x|^2 \, dx, \tag{3.3.14}$$

où

$$\tilde{I}_2(t) = -\rho_2 \rho_3 \int_0^L \int_0^x \theta(t, y) dy \psi_t(t, x) dx. \tag{3.3.15}$$

Preuve. On a :

$$\frac{d}{dt} \tilde{I}_2 = -\int_0^L \int_0^x \rho_2 \rho_3 \theta_t \psi_t dy dx - \int_0^L \int_0^x \rho_2 \rho_3 \theta \psi_{tt} dy dx. \tag{3.3.16}$$

D'après les équations du système (3.1.1) , on a

$$\rho_2 \psi_{tt} = b \psi_{xx} - k \varphi_x - k \psi - \gamma \theta_x, \tag{3.3.17}$$

et

$$\rho_3\theta_t = \kappa\theta_{xx} - \gamma\psi_{tx}, \tag{3.3.18}$$

insérant (3.3.17) , (3.3.18) dans (3.3.16) , on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\tilde{I}_2 &= -\rho_2\int_0^L\int_0^x(\kappa\theta_x-\gamma\psi_t)_x\psi_t dydx - \int_0^L\int_0^x b\rho_3\theta\psi_{xx}dydx + \int_0^L k\rho_3\theta\psi dydx \\ &\quad +\int_0^L\int_0^x k\rho_3\theta\varphi_x dydx + \int_0^L\int_0^x \gamma\rho_3\theta\theta_x dydx. \end{aligned}\tag{3.3.19}$$

On utilise une integration par partie sur le premier terme de l'inégalité (3.3.19), on obtient:

$$-\rho_2\int_0^L\int_0^x(\kappa\theta_x-\gamma\psi_t)_x\psi_t dydx = \rho_2\int_0^L\int_0^x(\kappa\theta_x-\gamma\psi_t)\psi_{tx}dydx. \tag{3.3.20}$$

On peut voir aussi que :

$$\int_0^x \psi_{tx}dy = \psi_t(t,x) - \psi_t(t,0) = \psi_t(t,x), \tag{3.3.21}$$

donc on peut écrire aussi:

$$\rho_2\int_0^L\int_0^x(\kappa\theta_{xx}-\gamma\psi_t)\psi_{tx}dydx = \rho_2\int_0^L(\kappa\theta_x-\gamma\psi_t)\psi_t dx, \tag{3.3.22}$$

$$-\int_0^L\int_0^x b\rho_3\theta\psi_{xx}dydx = -\rho_3 b\int_0^L\theta\psi_x dydx, \tag{3.3.23}$$

$$\int_0^L\int_0^x k\rho_3\theta\varphi_x dydx = \rho_3 k\int_0^L\theta\varphi dx, \tag{3.3.24}$$

et

$$\int_0^L\int_0^x \gamma\rho_3\theta\theta_x dydx = \gamma\rho_3\int_0^L|\theta|^2 dx. \tag{3.3.25}$$

Regroupent les equations (3.3.22), (3.3.23), (3.3.24) et (3.3.25) dans (3.3.19), on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\tilde{I}_2 &= \kappa\rho_2\int_0^L\theta_x\psi_t dx - \gamma\rho_2\int_0^L|\psi_t|^2 dx - b\rho_3\int_0^L\theta\psi_x dx + \gamma\rho_3\int_0^L|\theta|^2 dx \\ &\quad +k\rho_3\int_0^L\theta\varphi dx + \int_0^L\int_0^x k\rho_3\theta\psi dydx. \end{aligned}\tag{3.3.26}$$

L'inégalité de Poincaré et l'inégalité de Young pour $\varepsilon_2 > 0$, on obtient:

$$\int_0^L \theta\psi_x dx \leq \varepsilon_2 \int_0^L |\psi_x|^2 dx + C_{\varepsilon_2} \int_0^L |\theta|^2 dx,$$

$$\int_0^L \theta\varphi dx \leq \varepsilon_2 \int_0^L |\varphi|^2 dx + C_{\varepsilon_2} \int_0^L |\theta|^2 dx,$$

$$\int_0^L \theta_x\psi_t dx \leq \varepsilon_2 \int_0^L |\psi_t|^2 + C_{\varepsilon_2} \int_0^L |\theta_x|^2 dx,$$

$$\int_0^L \int_0^x \theta\psi dy dx \leq C \int_0^L \theta\psi dx,$$

$$\int_0^L |\varphi|^2 dx \leq C \int_0^L |\varphi_x|^2 dx,$$

$$\int_0^L |\theta|^2 dx \leq C \int_0^L |\theta_x|^2 dx,$$

$$\int_0^L |\psi|^2 \leq C \int_0^L |\psi_x|^2,$$

et

$$\int_0^L \theta\psi dx \leq \varepsilon_2 \int_0^L |\psi|^2 + C_{\varepsilon_2} \int_0^L |\theta|^2 dx.$$

D'où finalement :

$$\frac{d}{dt}\tilde{I}_2 \leq -\frac{\gamma\rho_2}{2} \int_0^L |\psi_t|^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^L |\psi_x|^2 + \varepsilon_2 \int_0^L |\varphi_x|^2 dx + C_{\varepsilon_2} \int_0^L |\theta_x|^2 dx,$$

Pour $\varepsilon_2 > 0$, d'où le résultat. ■

Lemme 3.3.3 *Soit* (φ, ψ, θ) *la solution du système* (3.1.1), *pour tout* $t > 0$, *il existe un* $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ *telle que:*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\tilde{I}_3 \quad \leq \quad & (C_{\varepsilon_1} + N_2 C_{\varepsilon_2}) \int_0^L |\theta_x|^2 dx - \left(\frac{N_2\gamma\rho_2}{2} - C_{\varepsilon_1}\right) \int_0^L |\psi_t|^2 dx + N_2\varepsilon_2 \int_0^L |\varphi_x|^2 dx \\ & - \left(\frac{b}{2} - N_2\varepsilon_2\right) \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx,\end{aligned} \tag{3.3.27}$$

où

$$\tilde{I}_3 = I_1 + N_2\tilde{I}_2. \tag{3.3.28}$$

Preuve. D'après le lemme précédent, on a :

$$\frac{d}{dt}\tilde{I}_3 = \frac{d}{dt}(I_1 + N_2\tilde{I}_2),$$

on a:

$$N_2\frac{d}{dt}\tilde{I}_2 \leq -\frac{N_2\gamma\rho_2}{2}\int_0^L |\psi_t|^2\,dx + N_2\varepsilon_2\int_0^L |\psi_x|^2 + N_2\varepsilon_2\int_0^L |\varphi_x|^2\,dx + N_2C_{\varepsilon_2}\int_0^L |\theta_x|^2\,dx, \tag{3.3.29}$$

et

$$\frac{d}{dt}I_1 \leq -\frac{b}{2}\int_0^L |\psi_x|^2\,dx + \varepsilon_1\int_0^L |\varphi_t|^2\,dx + C_{\varepsilon_1}\int_0^L |\psi_t|^2\,dx + C_{\varepsilon_1}\int_0^L |\theta_x|^2\,dx. \tag{3.3.30}$$

Regroupant (3.3.29) et (3.3.30), on obtient (3.3.27), pour $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ assez petite, et $N_2 > 0$ assez grand. ■

Lemme 3.3.4 *Soit* (φ, ψ, θ) *la solution du système* (3.1.1), *et on suppose la condition* $\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}$, *pour tout* $t > 0$, *il existe un* $\varepsilon_3 > 0$ *telle que :*

$$\frac{d}{dt}I_4 \leq -\frac{k}{2}\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2\,dx + \tilde{C}_1\int_0^L \left(|\psi_x|^2 + |\psi_t|^2 + |\theta_x|^2\right)dx, \tag{3.3.31}$$

telle que:

$$I_4 = \int_0^L \rho_2\psi_t\left(\varphi_x + \psi\right)dx + \int_0^L \rho_2\psi_x\varphi_t dx. \tag{3.3.32}$$

Preuve. On a:

$$\frac{d}{dt}I_4 = \frac{d}{dt}\int_0^L \rho_2\psi_t\left(\varphi_x + \psi\right)dx + \frac{d}{dt}\int_0^L \rho_2\psi_x\varphi_t dx, \tag{3.3.33}$$

d'après le système (3.1.1), on a:

$$\rho_2\psi_{tt} = b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) - \gamma\theta_x. \tag{3.3.34}$$

Remplaçant (3.3.34) dans le premier terme du (3.3.33), on trouve:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I_4 &= b\int_0^L \psi_{xx}(\varphi_x+\psi)dx - k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx - \gamma\int_0^L \theta_x(\varphi_x+\psi)dx \qquad (3.3.35)\\ &\quad +\rho_2\int_0^L \psi_t\,(\varphi_x+\psi)_t\,dx + \frac{d}{dt}\int_0^L \rho_2\psi_x\varphi_t dx,\end{aligned}$$

une intégration par partie sur le premier terme de (3.3.35), donne:

$$b\int_0^L \psi_{xx}\varphi_x dx = -b\int_0^L \psi_x\varphi_{xx}dx,$$

et

$$b\int_0^L \psi_{xx}\psi dx = -b\int_0^L |\psi_x|^2\,dx.$$

Donc (3.3.35) devient:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I_4 &= -b\int_0^L \psi_x\varphi_{xx}dx - b\int_0^L |\psi_x|^2\,dx - k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx + \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2\,dx + \rho_2\int_0^L \psi_t\varphi_{xt}dx\\ &\quad -\gamma\int_0^L \theta_x(\varphi_x+\psi)dx + \frac{d}{dt}\int_0^L \rho_2\psi_x\varphi_t dx. \qquad (3.3.36)\end{aligned}$$

Utilisation de $(3.1.1)_1$ donne:

$$-b\int_0^L \psi_x\varphi_{xx}dx - b\int_0^L |\psi_x|^2\,dx = -b\int_0^L \psi_x(\varphi_x+\psi)_x dx = -\frac{b\rho_1}{k}\int_0^L \psi_x\varphi_{tt}dx. \qquad (3.3.37)$$

Insérant (3.3.37) dans (3.3.36) , on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I_4 &= -\frac{b\rho_1}{k}\int_0^L \psi_x\varphi_{tt}dx - k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx + \rho_2\int_0^L \psi_t\varphi_{xt}dx + \frac{d}{dt}\int_0^L \rho_2\psi_x\varphi_t dx\\ &\quad -\gamma\int_0^L \theta_x(\varphi_x+\psi)dx + \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2\,dx. \qquad (3.3.38)\end{aligned}$$

D'autre part, on a:

$$\rho_2\int_0^L \psi_t\varphi_{xt}dx = \frac{d}{dt}\rho_2\int_0^L \psi\varphi_{tx}dx - \rho_2\int_0^L \psi\varphi_{xtt}dx.$$

On peut écrire aussi:

$$\rho_2 \int_0^L \psi_t \varphi_{xt} dx = -\frac{d}{dt} \rho_2 \int_0^L \psi_x \varphi_t dx + \rho_2 \int_0^L \psi_x \varphi_{tt} dx. \tag{3.3.39}$$

Remplacant (3.3.39) dans (3.3.38) , d'après l'hypothèse $\dfrac{\rho_1}{k} = \dfrac{\rho_2}{b}$, on trouve:

$$\frac{d}{dt} I_4 = -k \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \, dx - \gamma \int_0^L \theta_x (\varphi_x + \psi) dx + \rho_2 \int_0^L |\psi_t|^2 \, dx. \tag{3.3.40}$$

L'inégalité de Poincaré et l'inégalité de Young Pour $\varepsilon_3 > 0$, donne :

$$\int_0^L \theta_x \varphi_x dx \leq \varepsilon_3 \int_0^L |\varphi_x|^2 \, dx + C_{\varepsilon_3} \int_0^L |\theta_x|^2 \, dx,$$

$$\int_0^L \theta_x \psi dx \leq \varepsilon_3 \int_0^L |\psi|^2 \, dx + C_{\varepsilon_3} \int_0^L |\theta_x|^2 \, dx,$$

$$\int_0^L |\psi|^2 \, dx \leq C \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx.$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_4 \leq & -k \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \, dx + \varepsilon_3 \int_0^L |\varphi_x|^2 \, dx + \varepsilon_3 \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx \\ & + \rho_2 \int_0^L |\psi_t|^2 \, dx + C_{\varepsilon_3} \int_0^L |\theta_x|^2 \, dx, \end{aligned} \tag{3.3.41}$$

d'où le résultat.

On suite, en observant

$$-\frac{k}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \, dx \leq -\frac{k}{4} \int_0^L |\varphi_x|^2 \, dx + C \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx,$$

donc

$$\frac{d}{dt} I_4 \leq -\frac{k}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \, dx + (\varepsilon_3 + C) \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx + \rho_2 \int_0^L |\psi_t|^2 \, dx + C_{\varepsilon_3} \int_0^L |\theta_x|^2 \, dx,$$

il existe des constantes positives $\varepsilon_3, C_{\varepsilon_3}, \rho_2$ et $\tilde{C}_1$ telle que:

$$\varepsilon_3 \leq \frac{k}{4},$$

$$\varepsilon_3 + C \leq \tilde{C}_1,$$

$$C_{\varepsilon_3} \leq \tilde{C}_1,$$

et

$$\rho_2 \leq \tilde{C}_1.$$

Donc, elle est clair que,

$$\frac{d}{dt} I_4 \leq -\frac{k}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \, dx + \tilde{C}_1 \int_0^L \left(|\psi_x|^2 + |\psi_t|^2 + |\theta_x|^2 \right) dx.$$

Ce qui termine la preuve. ■

Lemme 3.3.5 *Soit* (φ, ψ, θ) *la solution du système* (3.1.1), *pour tout* $t > 0$, *il existe un* $\varepsilon_5 > 0$ *telle que:*

$$\frac{d}{dt} I_6 \leq -\rho_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 \, dx - \rho_2 \int_0^L |\psi_t|^2 \, dx + k \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \, dx + C_6 \int_0^L |\psi_x|^2 + |\theta_x|^2 \, dx, \quad (3.3.42)$$

où

$$I_6 = -\int_0^L \rho_1 \varphi_t \varphi dx - \int_0^L \rho_2 \psi_t \psi dx. \quad (3.3.43)$$

Preuve. On a :

$$\frac{d}{dt} I_6 = -\rho_1 \int_0^L \varphi_{tt} \varphi dx - \rho_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 \, dx - \rho_2 \int_0^L \psi_{tt} \psi dx - \rho_2 \int_0^L |\psi_t|^2 \, dx. \quad (3.3.44)$$

D'autre part, on a :

$$\rho_2 \psi_{tt} = b\psi_{xx} - k\varphi_x - k\psi - \gamma\theta_x,$$

et

$$\rho_1 \varphi_{tt} = k(\varphi_x + \psi)_x.$$

On peut voir aussi que :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I_6 &= -\int_0^L k(\varphi_x+\psi)_x\varphi dx - b\int_0^L \psi_{xx}\psi dx - \rho_1\int_0^L |\varphi_t|^2\,dx \\ &+\int_0^L k(\varphi_x+\psi)\psi dx + \gamma\int_0^L \theta_x\psi dx - \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2\,dx. \qquad (3.3.45)\end{aligned}$$

Une intégration par partie sur les deux premier terme de (3.3.45) , donne:

$$-\int_0^L k(\varphi_x+\psi)_x\varphi dx = \int_0^L k(\varphi_x+\psi)\varphi_x dx, \qquad (3.3.46)$$

et,

$$-b\int_0^L \psi_{xx}\psi dx = b\int_0^L |\psi_x|^2\,dx. \qquad (3.3.47)$$

On regroupe les equations (3.3.46) et (3.3.47) dans (3.3.45),On obtient:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I_6 &= -\rho_1\int_0^L |\varphi_t|^2\,dx - \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2\,dx + k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx \\ &+b\int_0^L |\psi_x|^2\,dx + \gamma\int_0^L \theta_x\psi dx. \qquad (3.3.48)\end{aligned}$$

L'inégalité de Young pour $\varepsilon_5 > 0$, donne :

$$\int_0^L \theta_x\psi dx \le \varepsilon_5\int_0^L |\theta_x|^2\,dx + C_{\varepsilon_5}\int_0^L |\psi|^2\,dx,$$

on applique aussi l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\int_0^L |\psi|^2\,dx \le C\int_0^L |\psi_x|^2\,dx.$$

Finalement,

$$\frac{d}{dt}I_6 \le -\rho_1\int_0^L |\varphi_t|^2\,dx - \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2\,dx + k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx + \tilde{C}_6\int_0^L |\psi_x|^2 + |\theta_x|^2\,dx,$$

pour une constante $\tilde{C}_6 > 0$. ■

Théorème 3.3.1 *Laissez les données initiales satisfont*

$$\varphi_0, \psi_0, \theta_{0,x} \in H_0^1\left((0,L)\right), \quad \varphi_1, \psi_1 \in L^2\left((0,L)\right),$$

et supposant $\dfrac{\rho_1}{k} = \dfrac{\rho_2}{b}$, *il existe deux constantes positives* C *et* ξ *telles que l'énergie de la solution de système* (3.1.1) *satisfait*

$$E(t) \leq CE(0)\exp(-\xi t), \qquad \forall t > 0,$$

la preuve de notre résultat sera mis en place à travers plusieurs lemmes

Preuve. On définit la fonction de Lyaponov:

$$\tilde{L} = NE + \tilde{I}_3 + \mu\left(I_4 + \eta I_6\right)$$

pour $\mu, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ et η sont des constantes positives, et N_2, N deux constantes positives suffisamment grand.

On a

$$\tilde{L} = NE + \tilde{I}_3 + \mu\left(I_4 + \eta I_6\right)$$

En différentiant la fonctionnelle $\tilde{L}(t)$ par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt}\tilde{L} = N\frac{d}{dt}E + \frac{d}{dt}\tilde{I}_3 + \mu\frac{d}{dt}\left(I_4 + \eta I_6\right).$$

La combinaison de $(3.2.2), (3.3.27), (3.3.31), (3.3.42)$, et l'utilisation de

$$\int_0^L \left|\varphi_x\right|^2 dx \leq 2\int_0^L \left|\varphi_x + \psi\right|^2 dx + \frac{4C}{k}\int_0^L \left|\psi_x\right|^2 dx$$

donne:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\tilde{L} \quad \leq \quad & -(N\kappa - C_{\varepsilon_1} - N_2 C_{\varepsilon_2} - \mu\tilde{C}_1 - \mu\eta C_6)\int_0^L \left|\theta_x\right|^2 dx - \left(\frac{N_2\gamma\rho_2}{2} - C_{\varepsilon_1} - \mu\tilde{C}_1 + \mu\eta\rho_2\right)\int_0^L \left|\psi_t\right|^2 dx \\
& -\left(\frac{b}{2} - N_2\varepsilon_2 - \mu\tilde{C}_1 - \mu\eta C_6 - N_2\varepsilon_2\frac{4C}{k}\right)\int_0^L \left|\psi_x\right|^2 dx - \left(\mu\eta\rho_1 - \varepsilon_1\right)\int_0^L \left|\varphi_t\right|^2 dx \\
& -\left(\mu\frac{k}{2} - \mu\eta k - 2N_2\varepsilon_2\right)\int_0^L \left|\varphi_x + \psi\right|^2 dx
\end{aligned}$$

Donc il existe $\eta, \mu, k, , \varepsilon_2, \varepsilon_1, \tilde{C}_1, C_6, C_{\varepsilon_1}, C_{\varepsilon_2}, C, N, N_2, \gamma, \rho_1, \rho_2, \rho_3, b, \kappa > 0$ de telle sorte que:

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= -2(N\kappa - C_{\varepsilon_1} - N_2 C_{\varepsilon_2} - \mu\tilde{C}_1 - \mu\eta C_6)/\rho_3 < 0, \\
\chi_2 &= -2\left(\frac{N_2\gamma\rho_2}{2} - C_{\varepsilon_1} - \mu\tilde{C}_1 + \mu\eta\rho_2\right)/\rho_2 < 0, \\
\chi_3 &= -2\left(\frac{b}{2} - N_2\varepsilon_2 - \mu\tilde{C}_1 - \mu\eta C_6 - N_2\varepsilon_2\frac{4C}{k}\right)/b < 0, \\
\chi_4 &= -2\left(\mu\eta\rho_1 - \varepsilon_1\right)/\rho_1 < 0, \\
\chi_5 &= -2\left(\frac{\mu}{2} - \mu\eta - \frac{2N_2\varepsilon_2}{k}\right) < 0.
\end{aligned}$$

Il est clair que on peut choisir $\beta_0 > 0$ de telle sorte que :

$$\chi_1 \leq -\beta_0 \qquad \text{et} \qquad \chi_2 \leq -\beta_0,$$

$$\chi_3 \leq -\beta_0 \qquad \text{et} \qquad \chi_4 \leq -\beta_0,$$

et

$$\chi_5 \leq -\beta_0.$$

On a aussi:

$$-\beta_0 \int_0^L |\theta_x|^2\, dx \leq -\beta_0 \int_0^L |\theta|^2\, dx,$$

on obtient :

$$\frac{d}{dt}\tilde{L}(t) \leq -\beta_0 E(t). \tag{3.3.49}$$

D'où le résultat.

D'autre part, on a :

$$\tilde{L} = NE + \tilde{I}_3 + \mu\left(I_4 + \eta I_6\right) \tag{3.3.50}$$

telle que,

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{L} - NE\right| &= \left|\int_0^L \rho_2\psi_t\psi dx + \int_0^L \rho_1\varphi_t\omega dx - N_2\rho_2\rho_3\int_0^L\int_0^x \theta(t,y)dy\psi_t(t,x)dx + \mu\int_0^L \rho_2\psi_t\left(\varphi_x + \psi\right)dx\right. \\
&\quad \left. +\mu\int_0^L \rho_2\psi_x\varphi_t dx - \mu\eta\int_0^L \rho_1\varphi_t\varphi dx - \mu\eta\int_0^L \rho_2\psi_t\psi dx\right|.
\end{aligned} \tag{3.3.51}$$

L'inégalité de Young et de Poincaré, donne:

$$\int_0^L \rho_2\psi_t\psi dx \leq \rho_2\varepsilon_1 \int_0^L |\psi|^2 dx + \rho_2 C_{\varepsilon_1} \int_0^L |\psi_t|^2 dx, \tag{3.3.52}$$

$$\int_0^L \rho_1\varphi_t\omega dx \leq \rho_1\varepsilon_2 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \rho_1 C_{\varepsilon_2} \int_0^L |\omega|^2 dx, \tag{3.3.53}$$

$$\mu \int_0^L \rho_2\psi_t\varphi_x dx \leq \mu\rho_2\varepsilon_3 \int_0^L |\psi_t|^2 dx + \mu\rho_2 C_{\varepsilon_3} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx, \tag{3.3.54}$$

et,

$$\int_0^L |\psi|^2 dx \leq C_1 \int_0^L |\psi_x|^2 dx, \tag{3.3.55}$$

$$\int_0^L |\omega|^2 dx \leq C_2 \int_0^L |\omega_x|^2 dx \leq \tilde{C}_2 \int_0^L |\omega_{xx}|^2 dx, \tag{3.3.56}$$

$$-\mu\eta\rho_1 C_{\varepsilon_7} \int_0^L |\varphi|^2 dx \leq C_7\mu\eta\rho_1 C_{\varepsilon_7} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx \tag{3.3.57}$$

$$-N_2\rho_2\rho_3 \int_0^L \int_0^x \theta(t,y)dy\psi_t(t,x)dx \leq N_2\rho_2\rho_3 \int_0^L \theta\psi_t dx. \tag{3.3.58}$$

et,

$$\int_0^L \theta\psi_t dx \leq \varepsilon_6 \int_0^L |\psi_t|^2 dx + C_{\varepsilon_6} \int_0^L |\theta|^2 dx. \tag{3.3.59}$$

On a:

$$\mu\rho_2 C_{\varepsilon_3} \int_0^L |\varphi_x|^2 dx \leq 2\mu\rho_2 C_{\varepsilon_3} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + (\mu\rho_2 C_{\varepsilon_3}) \frac{4C}{k} \int_0^L |\psi_x|^2 dx.$$

Donc il est clair que :

$$\begin{aligned}\left|\tilde{L}-NE\right| &\leq \Bigg|(C_6N_2\rho_2\rho_3\varepsilon_6+\mu\eta\rho_2C_{\varepsilon_8}+\rho_2\varepsilon_1C_1+\rho_2C_{\varepsilon_1}+\mu\rho_2\varepsilon_2+\mu\rho_2\varepsilon_4+\mu\rho_2C_{\varepsilon_4}C_4)\int_0^L|\psi_t|^2\,dx \\ &+\left(\rho_1\varepsilon_2\tilde{C}_2+\mu\rho_2\varepsilon_5+\mu\eta\rho_2\varepsilon_8C_8+(\mu\rho_2C_{\varepsilon_3})\frac{4C}{k}\right)\int_0^L|\psi_x|^2\,dx \\ &+(2\mu\rho_2C_{\varepsilon_3})\int_0^L|\varphi_x+\psi|^2\,dx+(N_2\rho_2\rho_3C_{\varepsilon_6}C_6)\int_0^L|\theta|^2\,dx \\ &+(\rho_1\varepsilon_2+\mu\rho_2C_{\varepsilon_5}+\mu\eta\rho_1\varepsilon_7+\mu\eta\rho_1C_{\varepsilon_7}C_7)\int_0^L|\varphi_t|^2\,dx\Bigg|.\end{aligned}$$

Donc on peut écrire:

$$\left|\tilde{L}-NE\right|\leq\frac{1}{2}\left|\delta_1\int_0^L\rho_1|\varphi_t|^2\,dx+\delta_2\int_0^L\rho_2|\psi_t|^2\,dx+\delta_3\int_0^L b|\psi_x|^2\,dx+\delta_4\int_0^L k|\varphi_x+\psi|^2\,dx+\delta_5\int_0^L\rho_3|\theta|^2\,dx\right|. \tag{3.3.60}$$

Où

$$\begin{aligned}\delta_1 &= 2(\rho_1\varepsilon_2+\mu\rho_2C_{\varepsilon_5}+\mu\eta\rho_1\varepsilon_7+\mu\eta\rho_1C_{\varepsilon_7}C_7)/\rho_1,\\ \delta_2 &= 2(C_6N_2\rho_2\rho_3\varepsilon_6+\mu\eta\rho_2C_{\varepsilon_8}+\rho_2\varepsilon_1C_1+\rho_2C_{\varepsilon_1}+\mu\rho_2\varepsilon_2+\mu\rho_2\varepsilon_4+\mu\rho_2C_{\varepsilon_4}C_4)/\rho_2,\\ \delta_3 &= 2(\rho_1\varepsilon_2\tilde{C}_2+\mu\rho_2\varepsilon_5+\mu\eta\rho_2\varepsilon_8C_8+(\mu\rho_2C_{\varepsilon_3})\frac{4C}{k})/b,\\ \delta_4 &= 2(2\mu\rho_2C_{\varepsilon_3})/k,\\ \delta_5 &= 2(N_2\rho_2\rho_3C_{\varepsilon_6}C_6)/\rho_3.\end{aligned}$$

L'inégalité (3.3.60) prend la forme:

$$\left|\tilde{L}-NE\right|\leq\lambda E(t)\Longrightarrow-\lambda E(t)\leq\tilde{L}-NE\leq\lambda E(t)\quad\lambda>0$$

d'où

$$\beta_1E(t)\leq\tilde{L}(t)\leq\beta_2E(t) \tag{3.3.61}$$

A partir de (3.3.49) , et (3.3.61) , on trouve

$$\frac{d}{dt}E(t)\leq-\xi E(t). \tag{3.3.62}$$

Intègrant (3.3.62) par rapport à t, on obtient:

$$E(t) \leq CE(0) \exp(-\xi t).$$

Ceci termine la preuve de théorème. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié la stabilité exponentielle associe au système de Timoshenko en dimension 1 au thermoélasticité, avec deux type différents de conditions aux limites.

On a rappelé le travail de Mr Muñoz Rivera et Mr Reinhard Racke qui concerne la démonstration de la décroissance exponentielle de l'énergie pour un système de Timoshenko en thermoélasticité donnée par :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k\left(\varphi_x + \psi\right)_x = 0 & (0,\infty)\times(0,L), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k\left(\varphi_x + \psi\right) + \gamma\theta_x = 0 & (0,\infty)\times(0,L), \\ \rho_3\theta_t - \kappa\theta_{xx} + \gamma\psi_{tx} = 0 & (0,\infty)\times(0,L), \end{cases} \tag{3.3.63}$$

avec les conditions initiales :

$$\varphi(0,.) = \varphi_0, \quad \varphi_t(0,.) = \varphi_1, \quad \psi(0,.) = \psi_0, \quad \psi_t(0,.) = \psi_1, \quad \theta(0,.) = \theta_0, \quad \text{à} \quad (0,L),$$

et les conditions aux limites :

$$\varphi(t,0) = \varphi(t,L) = \psi(t,0) = \psi(t,L) = \theta_x(t,0) = \theta_x(t,L) = 0, \quad \text{à} \quad (0,\infty).$$

Avec t désigne la dérivée par rapport à la variable t et l'indice x désigne la dérivée par rapport à la variable spaciale. φ est le déplacement transverse du poutre, et ψ est l'angle de rotation du filement du poutre. θ est la déviations de la température , En plus, ρ_1, ρ_2, ρ_3, k, b, κ et γ désignent des constants positives caractérisent des propriétés physiques de la poutre et du filament.

En suit on a étudié le même système avec les conditions aux limites différents donnée par :

$$\varphi(t,0)=\varphi(t,L)=\psi_x(t,0)=\psi_x(t,L)=\theta(t,0)=\theta(t,L)=0 \quad \text{à} \quad (0,\infty).$$

On a montré la décroissance exponentielle de l'énergie associer à notre système.

Bibliographie

[1] J. E. Muæoz Rivera ; R. Racke, Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems-global existence and exponential stability. J. Math. Anal. Appl. 276 (2002), no.1, 248-278.

[2] H. Brézis, "Analyse Fonctionnelle- Theorie et applications," Dunod, Paris (1999).

[3] A. Guesmia, Inégalité intégrale et appliquations à la stabilisation des systèmes distribués non dissipatifs, thèse d'HDR, METZ, 2006.

[4] S. Timoshenko, On the correction for shear differential equation for vibrations of prismaticbars, Philos . Mag., 41 (1921), 744-746.