République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Djilali BOUNAÂMA Khemis Miliana

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et d'Informatique

Mémoire Présenté

Pour l'obtention de diplôme de

Master en Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées et Traitement du Signal

Titre :

Existence de solutions pour des problèmes associéss a des équations différentielles fractionnaires.

Réalisé par : Benanaya Abdelkader

Soutenu le **02 /06/ 2016,** devant les membres du jury :

Mr. Benniche Omar.	Université de Khemis Miliana.	Président
Mr. Yache Abdelkader Amine.	Université de Khemis Miliana	Encadrant
Mr.Bennbachir Maamar.	Université de Khemis Miliana	Examinateur
Mr.Houas Mohammed.	Université de Khemis Miliana	Examinateur

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mes chers parents.

À tous mes chers enseignant.

A mes adorables sœurs et mes chers frères.

A mes chères amis, Amrouch Hamza, Djebbar Djamale, Zaghzi Hamza, Amar youssefe Ramadhan, Yaakoub Mohammed, Temar Hamza.

A touts mes collègues de la promotion 2015/2016.

Remerciements

Je remercie avant tout mon dieu **Allah** quim'a donné la force et la volenté pour achever ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur de mémoire Monsieur **Abdelkader Amine Yache**. qui s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi que pur l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu nous consacrer pour son soutien, sa confiance et son enseignement toujours judicieux et rigoureux durant toutes les phases de ce mémoire. Qu'ils trouvent ici l'expression de nos sincères gratitudes.

Nous adressons également notre profonde gratitude à tous les professeurs de l'université Djilali Bounaama en particulier ceux du département de Mathématique et Informatique.

Je tiens à remercier tous mes amis et mes collègues et surtout ceux avec qui on a passé une période agréable à l'université de Djilali Bounaama Khemis miliana.

Je voudrais également remercier ma mère, toute ma famille.

Résumé

Le principe du point fixe a beaucoup d'applications. Il intervient dans la résolution de plusieurs équations différentielles non linéaires en particulier, dans l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution.

Dans ce mémoire on donner une application de ce principe ainsi que quelques unes de ses extensions et généralisations qui s'impliquent dans la résolution des équations différentielles fractionnaires. Nous démontrons l'existence et la positivité des solutions de ce problèmes par le théorème de point fixe de Avery,Henderson,O'regan sur cône.

Abstract

The principle of the fixed point has applications. It intervenes in the resolution of many nonlinear diffirential equation in particular, in the study of the existence and the uniqueness of the solution.

In this memory we give an application of this principle and some ones of its extensions and generalizations which are implied in the resolution of the fractional differential equation. We prove the existence and positivity of solutions of this problem by the fixed point theorem of Henderson,Avery,O'reagen on cone .

Table des matières

Notations

D^{α}	:Dérivée d'ordre α.
(i,e)	: Identiquement équevalent.
PP	: Qui veut dire presque pertout.
Ω	: Est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.
$\mathbb{R}^n$	: Espace euclidien de dimension n.
$\langle .,. \rangle$	: Le produit scalaire dans un espace $\mathbb{R}^n$

Introduction

Le calcul fractionnaire a vu une grande expansion durant les trois dernières décennies. Du fait qu'il a plusieurs applications dans beaucoup de domaines aussi bien des mathématiques, de la physique, que des sciences et de la technologie.

Beaucoup de travaux dans ce domaine rentrent dans le cadre de l'existence et de l'unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire avec la dérivée fractionnaire au sens de Reimann-liouville ou de caputo dans cette note utilisens une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire c'est dérivée fractionnaire conformable.

Notre travail est c€omposé de quatre chapitres:

Dans le premier chapitre nous présentons des notions préliminaires nécessaires pour la bonne compréhension de ce manuscrit. Ce chapitre est partagé en trois sections présente les définitions topologiques et la définition de l'opérateur compacts.

Dans le deuxième chapitre s'étend à rappeler quelques résultats fondamentaux sur le principe de l'application contractante ainsi que les théorèmes du point fixe.

L'objet du troisième chapitre est la présentation de la dérivée fractionnaire. Ce chapitre est partagé en quatre sections présente les fonctions spéciales pour la dérivation fractionnaire (La fonction Gamma et La fonction Beta) dans la première section et dans la deuxième et la troisième section nous définissent L'ntégrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et La dérivée fractionnaire de caputo et dans la dernièr section nous présenté une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire qui est appelée la dérivée fractionnaire conformable d'ant sa formule est donnée par:

$$D^{\alpha}f(t) = lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon},$$

ou en [1] tant que

$$D^{\alpha}f(t) = lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(te^{\varepsilon t^{1-\alpha}})-f(t)}{\varepsilon}, \quad D^{\alpha}f(0) = lim_{t\to 0^{+}}D^{\alpha}f(t),$$

à condition que les limites existent, noter que si f est entièrement différentiable en t, puis dans les deux cas nous avoir

$$D^{\alpha}f(t) = t^{1-\alpha}f'(t),$$

où $f'(t) = lim_{\varepsilon\to 0}\left[f(t+\varepsilon)-f(t)\right]/\varepsilon$.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de la recherche de solutions positives pour le problème aux limites non linéaire fractionnaire suivant:

$$\begin{cases} -D^{\alpha}D^{\beta}x(t) = f(t,x(t)), \quad 0\leq t\leq 1 \\ \gamma x(0) - \delta D^{\alpha}x(0) = 0. \\ \eta x(1) + \xi D^{\alpha}x(1) = 0. \end{cases}.$$

Chapitre 1

Préliminiares

1.1 Espaces topologiques

Soit E un espace topologique et $(\vartheta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'ouverts de E et A un ensemble de E.

Définition 1.1.1 *On dit que $(\vartheta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est un recouvrement ouvert de E si $E = \cup_{\lambda\in\Lambda}\vartheta_\lambda$ ce qui signifie que $\forall x \in E$,il existe au moins $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $x \in \vartheta_{\lambda_0}$.*

Définition 1.1.2 *On dit que E est un espace topologique séparé si pour tout $x, y \in E$, il exist deux voisinages U et V de x et y respectivement tels que $U \cap V = \phi$.*

Supposons maintenant que E est un espace topologique séparé.

Définition 1.1.3 *On dit que E est un espace topologique compacte si quel que soit le recouvrement ouvert de E, on peut en extraire un recouvrement fini.*

Plus présisement, si $(\vartheta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est un recouvrement ouvert de E, il existe Λ_0 partie fini de Λ telle que E $= \cup_{\lambda\in\Lambda_0}\vartheta_\lambda$.

Définition 1.1.4 *Soit A une partie de E, on dit que A est relativement compacte dans Esi $\overline{A}$ et compact.*

Définition 1.1.5 *Soit X un espace de Banach muni de norme $\|.\|$,et $f : X \to X$.*

On dit que f est lipshitzienne s'il existe $k \geq 0$ tel que

$$|f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|\,, \quad \forall x, y \in X. \tag{1.1}$$

Soit (E, d) , (F, d') deux espaces métriques.

Noton par $\beta_0\ (E, F)$ l'ensemble des fonctions continues, bornées sur E et à valeurs dans F et H un sous ensemble de $\beta_0\ (E, F)$.

Définition 1.1.6 *Soit $x_0 \in E$,H est équicontinue en x_0 si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x : d(x; x_0) \leq 0 \Longrightarrow d'(f(x), f(x_0)) \leq, \forall f \in H. \tag{1.2}$$

L'équicontinuité en x_0 signifie que α ne dépend pas du choix de f dans H.

Définition 1.1.7 *On dit que H est équicontinue sur E si H est équicontinue en tout point de E.*

1.2 Opérateurs compacts

Définition 1.2.1 ***(Opérateur compact)***

Soit T un opérateur d'un espace norméX dans un espace norméY , on dit que T est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans X à un ensemble relativement compact dans Y .

Définition 1.2.2 ***(opérateur complètement continu)***

L'opérateur T est dit complètement continu, si il est continu et compact.

Définition 1.2.3 *L'opérateur T est compact, si pour toute suite bornée $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$, la suite $\{Tx_n\}_{n\geq 1}$ admet que sous suite convergente dans Y .*

Dans le cas particulier où $X = C([a, b])$, le théorème suivant d'Arzela-Ascoli est généralement utilisé pour prouver la compacité de T.

Théorème 1.2.4 *(**Arzela-Ascoli**)*

Une condition nécessaire et suffisante pour une famille des fonctions continues définies sur l'intervalle compact $[a, b]$, soit compacte dans $C([a, b])$ est que cette famille soit uniformément bornée et équicontinue.

Théorème 1.2.5 *L'opérateur intégral A de $C([a, b])$ dans $C([a, b])$ à noyau continu est un opérateur compact.*

Démonstration

Soit E un ensemble borné de $C([a, b])$ alors, on a

$\|\varphi\| \leq M$, pour tout$\varphi \in E$, de plus

$$|A\varphi(x)| \leq M\,|b-a|\,max_{(x,t)\in[a,b]\times[a,b]}\,|K(x,t)| \quad \forall x \in [a,b] \text{ et } \forall\varphi \in E. \tag{1.3}$$

D'ou l'ensemble $A(E)$ uniformément borné.

D'autre part, le noyau K est uniformément continu sur le compact$[a,b] \times [a,b]$, d'ou pour tout x,t,z de$[a,b]$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \ tel\ que\ \ |x-t| < \delta \Longrightarrow |K(x,z) - K(t,z)| < \frac{\varepsilon}{M\,|b-a|}. \tag{1.4}$$

D'où,

$|A\varphi(x) - A\varphi(t)| < \varepsilon$, pour tout $\varphi \in E$ et $x,t \in [a,b]$ avec $|x-t| < \delta$.

Ceci exprime que l'ensemble $A(E)$ est équicontinu, d'où$A(E)$ est relativement compact par le théorème d'Arzela-Ascoli, alors A est compact.

1.3 Ensembles convexes

Définition 1.3.1 *On dit que l'ensemble A est convexe de E si*

$$\forall x, y \in A\ et\ \forall t \in [0,1]\ alors\ tx + (1-t)y \in A. \tag{1.5}$$

Lemme 1.3.2 *Si $\{C_i\}_{i \in I}$ sont des ensembles convexes de E, alors $\cap_{i \in I} C_i$ est un ensemble convexe de E.*

Définition 1.3.3 *l'enveloppe convexe de E est l'intersection de tous les ensembles convexes contenues dans E,qui est le plus petit ensemble convexe dans E, On le note par conv$E$.*

Chapitre 2

Quelques résultats de la théorie du point fixe

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est l'étude de quelques théorèmes du point fixe. On commencera par le plus simple et le plus connu d'entre eux : le théorème du point fixe de Banach pour les applications contractantes. On verra ensuite le théorème du point fixe de Brouwer (valable en dimension finie) puis le théorème du point fixe de Schauder (qui est la “généralisation” en dimension infinie) Enfin nous abordons le théorème du point fixe de Henderson,Avery,O'reagen.

2.2 Théorème du point fixe du type Banach

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom le théorème de l'application contractante) est un théorème simple à prouver, qui garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante, s'applique aux espaces complets et qui possède de nombreuses applications. Ces applications incluent les théorèmes d'existence de solution pour les équations différentielles ou les équations intégrales et l'étude de la convergence de certaines méthodes numériques.

2.2.1 Théorème de l'application contractante

Définition 2.2.1 *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et l'application* $T : X \to X$*, On dit que* T*est une application Lipschitzienne s'il existe une constante positive* $k \geq 0$ *telle que l'onait, pour tout couple d'éléments* x, y *de* X*, l'inégalité*

$$d(T(x), T(y)) \leq k(d(x, y)). \tag{2.1}$$

Si $k \leq 1$, l'application T est appelée non expansive.

Si $k < 1$, l'application T est appelée contraction.

Théorème 2.2.2 *(Théorème du point fixe de Banach(1922)) [17]*

Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $T : X \to X$ une application contractante avec la constante de contraction k, alors T a un unique point fixe $x \in X$. De plus on a

$$Si\ x_0 \in M\ et\ x_n = T(x_{n-1}), \tag{2.2}$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \text{ et } d(x_n, x) \leq k^n (1-k)^{-1} d(x_1, x_0) \quad n \geq 1,$$

x étant le point fixe de T.

Remarque 2.2.3 *Si T est une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contraction) mais l'une de ces itérées T^p est une contraction, alors T a un seul point fixe.*

En effet, soit x l'unique point fixe deT^p on a $T^p(T(x)) = T(T^p(x)) = T(x)$ ce qui convient à dire que $T(x)$ est aussi un point fixe de T^p et grâce à l'unicité $T(x) = x$

Ce résultat est valable pour tous les types de contraction qui assurent l'unicité du point fixe.

Remarque 2.2.4 *Il se peut que T ne soit pas une contraction sur tout l'espace M mais juste dans le voisinage d'un point donné. Dans ce cas on a le résultat suivant :*

Soit(X, d) un espace métrique complet et $T : B \to X$ telle que

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) \ \forall x, y \in B \ et \ k < 1, \tag{2.3}$$

où

$$B = \{x \in M, d(x, z) < \xi\} \ \ z \in M \ et \ \xi > 0. \tag{2.4}$$

Si $d(z, T(z)) < \xi(1 - k)$, alors T possède un unique point fixe $x \in B$.

2.3 Théorème de point fixe de Brouwer(1910)

Historique : Le mathématicien Luitzen Egbertus Jan Brouwer remarquait, en mélangeant son café au lait, que le point centrale de la surface du liquide,au milieu du tourbillon créé par le mouvement rotatoire de la cuillère, restait immobile. Il examina le problème de cette façon :

A tout moment, il y a un point de la surface qui n'a pas changé de place.

Nous allons examiner le problème en dimension n suivant Brouwer.

Soit

$$\overline{B}_m = \{x \in \mathbb{R}^m tel\ que\ \|x\| \leq 1\}. \tag{2.5}$$

la boule unité fermée de $\mathbb{R}$ muni de la norme euclidienne usuelle, et $S^{m-1} = \partial\overline{B}_m$

la sphère qui est sa frontière.

Lemme 2.3.1 *Soit $T : A \to B$ un opérateur continue et compact dans A, où A est un ensemble fermé de l'espace normé B. Si l'équation*

$$x = Tx \tag{2.6}$$

est résoluble approximativement dans A, alors il existe une solution dans A.

Preuve. Il existe une suite (x_n) dans A avec $x_n - Tx_n \to 0$. La suite $(y_n) = (Tx_n)$ admet une sous suite convergente dans A puisque $T(A)$ est relativement compact.

Si on note encore cette sous suite par (y_n) pour simplifier la notation, alors $y_n = Tx_n \to y \in B$ et que $x_n = y_n + (x_n - Tx_n) \to y$.

Sachant que A est fermé, alors $y \in A$. Ainsi d'après la continuité de T, $Tx_n \to T_y$, pour la quelle on obtient que $y = Ty$. □

Théorème 2.3.2 ***(Théorème de Brouwer)***

Toute application continue f de $\overline{B}_m$ dans $\overline{B}_m$ admet au moins un point fixe.

Preuve. On peut montrer, pour tout $\varepsilon > 0$, qu'il existe un polynôme P avec $\|f - P\| < \varepsilon$

Utilisons la norme maximum sur $\overline{B}_m$ définie par $\|f\| = \max\left\{|f| : x \in \overline{B}_m\right\} \leq 1.$

pour avoir$\|P\| \leq 1+\varepsilon$; alors $Q(x) = \frac{P(x)}{1+\varepsilon}$ est une application régulière de $\overline{B}_m$ dans $\overline{B}_m$. Il est clair que $\|f - P\| \leq 2\varepsilon$

Supposons maintenant que x est un point fixe de Q, alors x est un point fixe d'approximation de f vérifiant $|x - f(x)| = |Q(x) - f(x)| < 2\varepsilon$: Ainsi, lemme 1.5.1 montre que f admet un point fixe si toute application régulière de $\overline{B}_m$dans $\overline{B}_m$ admet un point fixe □

Définition 2.3.3 *On dit qu'un ensemble A d'un espace de Banach a la propriété de point fixe si toute application continue de A dans A admet un point fixe.*

Soit X, Y deux espaces de Banach ou bien, en générale deux espaces topologiques, et A et B sont deux ensembles tel que$A \in X$ et $B \in Y$.

Corollaire 2.3.4 *Si les ensembles A et B sont homéomorphe et A a la propriété de point fixe, alors B aussi a la propriété de point fixe.*

Preuve. voir [18] . □

Corollaire 2.3.5 *Soit $A \in \mathbb{R}_n$ un ensemble compact. Et supposons qu'il existe une application continue $P : \mathbb{R}_n \to A$ avec $P\backslash_A = Id_A$, (i.e) $P(x) = x; \forall x \in A$. Alors l'ensemble A a la propriété de point fixe.*

Preuve. Soit$B \supset A$ une boule fermée et $f : A \to A$ continue, alors $F = f \circ P$ est une application continue de B dans B. Ainsi d'après le théorème de point fixe de Brouwer, F admet un point fixeζ ; et comme $F(B) \subset A$, alors ce point fixe appartient à A, d'où $\zeta = f(\zeta)$. □

2.4 Théorème de point fixe de Schauder

Théorème 2.4.1 (1) *Soit* (X, d)*un espace métrique complet et soit* D *un sous-ensemble convexe fermé de* X*. Si* $T : X \to X$ *est une application et* D *est relativement compact dans* X*, alors l'opérateur* T *admet au moins un point fixe* $x^* \in D$

$$Tx^* = x^*. \tag{2.7}$$

Preuve. D'après le lemme 2.3.1 de point fixe, il suffit de trouver pour tout $\varepsilon > 0$ un point $x \in D$ avec $\|x - Tx\| < \varepsilon$.

Soit donc $\varepsilon > 0$. L'ensemble $B = \overline{T(D)}$ est compact par hypothèse, on peut alors prend un recouvrement fini $\{B_\varepsilon(b_i)\}_{i=1}^p$ à partir de l'ensemble de toutes les boules $B_\varepsilon(b)_{b\in B}$.

Soit F $= \{b_1, ..., b_p\} \subset B$ et$C = convF$ (l'enveloppe convexe de F),remarquons que C est compact et convexe de D

Définissons maintenant l'application continue $\phi : B \to C$ en posant

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(x) b_i \quad avec \quad \lambda i(x) = \frac{\mu_i(x)}{\mu(x)},$$

où

$$\mu_i(x) = (\varepsilon - \|x - bi\|)_+ = \left\{ \begin{array}{ll} \mu_i(x) = 0, & si \quad \|x - bi\| \geq \varepsilon \\ \mu_i(x) = \varepsilon - \|x - bi\| & si \quad \|x - bi\| < \varepsilon \end{array} \right\}$$

et

$$\mu(x) = \sum_{i=1}^{p} \mu_i(x)$$

Sachant que pour tout $x \in B$, il existe unb_k avec $\|x - b_k\| < \varepsilon$, on a $\mu(x) > 0$ pour $x \in B$, donc ϕ est continue.

Il est claire que $\lambda_i(x) \geq 0$ et que$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i(x) = 1$,donc $\phi(B) \subset C$. De plus, on peut ecrire $x = (\sum_{i=1}^{p} \lambda_i(x))x$, alors

$$\begin{aligned} \|\phi(x) - x\| &= \left\| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(x)(b_i - x) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(x) \|b_i - x\| < \varepsilon \quad \text{pour } x \in B. \end{aligned} \tag{2.8}$$

ceci montre que $\|b_i - x\| < \varepsilon$

Sinon si $\|b_i - x\| \geq \varepsilon$ alors $\lambda_i = 0$.Et donc l'application $S = \phi \circ T$ est définit de D dans C, et sa restriction sur C set une application continue de C dans C.

Et comme C est convexe et compact, il existe le corollaire 2.3.4 et 2.3.5 du théorème de Brouwer, un point fixe $x^* = S(x^*) = \phi(Tx^*) \in C$, et d'après la dèrnière estimation dans la relation (2.8), on obtient

$$\|x^* - Tx^*\| = \|\phi(Tx^*) - Tx^*\| < \varepsilon$$

Et donc x^* est le point fixe cherché.

Les conditions nécessaires et suffisantes exigées pour que D soit un ensemble relativement compact dans l'espace des fonctions continues $C[a,b]$sur un intervalle$[a,b]$ de $\mathbb{R}$ fini et fermé sont données par le théorème d'Arzela-Ascoli. □

2.5 Point fixe de Avery,Henderson,O'regan

On donne maintenant un théorème de point fixe qui est utilisé pour montrer l'existence de solution pour un problème fractionnaire qu'on donnera aprés.

Le théorème connu sous le nom de Avery, Henderson,O'regan.se base des démonstration sur l'indice du point fixe,il est dérivée d'un certene théorème de Leggt-Wiliems.

Définition 2.5.1 *Soit E un espace de Banach réel. A ensemble convexe non vide fermé $P \subset E$ est appelé un cône si il satisfait aux deux conditions suivantes:*

(i) $x \in P, \lambda \geq 0$ implique $\lambda x \in P$.

(ii) $x \in P, -x \in P$ implique $x = 0$.

Chaque cône $P \subset E$ induit une commande dans E donnée par

$$x \leq y \text{ si et seulement si } y - x \in P. \tag{2.9}$$

Définition 2.5.2 *Soit ξ une homéomorphisme de P dans $[0, \infty[$ alors l'application contune positive ξ est dite concave si:*

$$\xi : P \to [0, \infty[$$

$$\xi(tx + (1-t)y) \geq t\xi(x) + (1-t)\xi(y) \tag{2.10}$$

pour tout $x, y \in P$ et $t \in [0, 1]$.

De même, nous disons que ϕ homéomorphisme de P dans $[0, \infty[$ alors l'application contune positive ϕ est dite convexe si:

$$\phi : P \to [0, \infty)$$

$$\phi(tx + (1-t)y) \leq t\phi(x) + (1-t)\phi(y) \tag{2.11}$$

pour tout $x, y \in P$ et $t \in [0,1]$. Nous disons que la carte ψ est une sous-fonctionnelle linéaire si $\psi(tx) \leq t\psi(x)$ pour tout $x \in P, t \in [0,1]$.

Définition 2.5.3 *Soit P un cône dans un espace de Banach réel E et Ω un ouvert borné sous-ensemble de E avec $0 \in \Omega$.Ensuite, un fonction continu ϕ: $P \rightarrow [0,+\infty[$ est dit satisfaire la propriété $(A1)$si l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

(i) ϕ est convexe,$\phi(0) = 0$,$\phi(x) \neq 0$ si $x \neq 0$ et $inf_{x\in P\cap\partial\Omega}\phi(x) > 0$,

(ii) ϕ est sous-linéaire,$\phi(0) = 0$,$\phi(x) \neq 0$ si $x \neq 0$ et $inf_{x\in P\cap\partial\Omega}\phi(x) > 0$,

$(iii)$$\phi$ est concave et non bornée.

Définition 2.5.4 *Soit P un cône dans un espace de Banach réel E et Ω un ouvert borné sous-ensemble de E avec $0 \in \Omega$.Ensuite, un fonction continu $\phi : P \rightarrow [0,\infty)$ est dit satisfaire la propriété $(A2)$ si l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

(i) ϕ est convexe, $\phi(0) = 0$,$\phi(x) \neq 0$ si $x \neq 0$,

(ii) ϕ est sous linéaire,$\phi(0) = 0$,$\phi(x) \neq 0$ si $x \neq 0$,

$(iii)$$\phi$ $(x + y) \geq \phi(x) + \phi(y)$ pour tout $x, y \in P$,$\phi(0) = 0, \phi(x) \neq 0$ si $x \neq 0$.

Théorème 2.5.5 *(Avery,Henderson,O'regan) Soit $\Omega_1$et Ω_2 deux ensembles ouverts bornées dans un espace de Banach E tel que $0 \in \Omega_1$ et $\overline{\Omega_1} \subseteq \Omega_2$ et P est un cône dans E. On suppose que $A : P \cap (\overline{\Omega_2} - \Omega_1) \rightarrow p$ est complètement continue, ξ et ψ sont des fonctions continues sur P positifs, et une des deux conditions suivantes:*

$(K1)$ ξ satisfaire la propriété $(A1)$ avec $\xi(Ax) \geq \xi(x)$, pour tout $x \in P \cap \partial\Omega_1$, et ψ satisfairt la propriété $(A2)$ avec $\psi(Ax) \leq \psi(x)$, pour tout $x \in P \cap \partial\Omega_2$,où

$(K2)$ ξ satisfaire la propriété $(A2)$ avec $\xi(Ax) \leq \xi(x)$, pour tout $x \in P \cap \partial\Omega_1$, et ψ satisfaire la propriété $(A1)$ avec $\psi(Ax) \geq \psi(x)$, pour tout $x \in P \cap \partial\Omega_2$,

est satisfait. Alors A a au moins un point fixe dans $P \cap (\overline{\Omega_2} - \Omega_1)$.

Chapitre 3

Dérivées fractionnaires

3.1 Fonctions spéciales pour la dérivation fractionniare:

Dans cette section,nous présentons les fonctions Gamma d'Euler et Beta. Ces fonctions jouent un role tres important dans la théorie du calcule fractionniare.

3.1.1 La fonction Gamma

Dans cette section on présente les définitions et quelques propriétés de la fonction gamma d'Euler et de quelques fonctions spéciales liées à cette fonction.

Définition 3.1.1 *[19]La fonction gamma d'Euler $\Gamma(z)$ est définie par*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt(\Re(z) > 0). \tag{3.1}$$

où

$$t^{z-1} = e^{(z-1)}log(t)$$

cette intégrale est convergente pour tout complexe $z \in \mathbb{C}(\Re(z) > 0)$.

Remarque 3.1.2 *[19]La fonction gamma d'Euler possède la propriété suivante*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\Re(z) > 0).$$

On utilise cette relation pour prolonger la fonction gamma d'Euler sur le demi-plan $\Re(z) \leq 0$, on obtient alors

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n} \ (\Re(z) > -n; n \in \mathbb{N}; z \notin \mathbb{Z}_0^- := \{..., -2, -1, 0\}).$$

Ici $(z)_n$ désigne le symbole de Pochhammer défini pour un complexe z$\in \mathbb{C}$ et un entier non-négatif n$\in \mathbb{N}_0$ par

$$(z)_0 = 1 \ et \ (z)_n = z(z+1)...(z+n-1)(n \in \mathbb{N}_0).$$

alors

$$\Gamma(n+1) = (1)_n = n! \ (n \in \mathbb{N}_0)$$

avec $0! = 1$.

Proposition 3.1.3 *On détermine quelques propriétés de la fonction gamma.*

1.

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sin(\pi z)}(z \neq \mathbb{Z}_0; 0 < \Re(z) < 1).$$

2. la formule de Legendre

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})(z \in \mathbb{C}).$$

3. Le théorème de multiplication de Gauss-Legendre généralisé

$$\Gamma(mz) = \frac{2^{mz-1}}{(2\pi)^{(m-1)/2}}\Pi_{k=0}^{m-1}\Gamma(z+\frac{k}{m})(z \in \mathbb{C}; m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}).$$

4.

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!}{2^n}\sqrt{\pi}, (2n-1)! := 1, 3, ...(2n-1)(n \in \mathbb{N}).$$

5.

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Définition 3.1.4 *La fonction psi d'Euler est définie comme la dérivée du logarithme de la fonction gamma*

$$\psi(z) = \frac{d}{dz}log\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Cette fonction a la propriété suivante

$$\psi(z+m) = \psi(z) + \sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{z+k} \ (z \in \mathbb{C}; m \in \mathbb{N})$$

Pour $m = 1$, on a $\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}(z \in \mathbb{C})$.

3.1.2 La fonction Béta

Définition 3.1.5 *La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour des nombre complexes z et ω par*

$$\beta(z,\omega) = \int_0^1 t^{z-1}(1\text{-}t)^{w\text{-}1}dt, \Re(z) > 0, \Re(\omega) > 0. \tag{3.2}$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$\beta(z,\omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}, \Re(z) > 0, \Re(\omega) > 0. \tag{3.3}$$

Il s'ensuit on a

$$\beta(z,\omega){=}\beta(\omega,z), \Re(z) > 0, \Re(\omega) > 0.$$

3.2 Intégrale et dérivée fractionnaires de Riemann-Liouville

Selon l'approche de Riemann-Liouville sur le calcul fractionnaire, la notion d'intégrale fractionnaire d'ordre α, $(\alpha > 0)$ généralise la célèbre formule d'intégrales répétées n-fois

$$\begin{aligned}(I_a^n f)(t) &= \int_a^t ds_1 \int_a^{s_1} ds_2 ... \int_a^{s_{n-1}} f(s_n)ds_n \\ &= \frac{1}{(n\text{-}1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)ds, \quad n \in \mathbb{N}^*.\end{aligned} \tag{3.4}$$

qui réduit le calcul de la $n^{éme}$ primitive d'une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ à une seule intégrale de type convolution.

Notons par D^n, $n \in \mathbb{N}$, l'opérateur de dérivation d'ordre n, alors on a

$$D^n I_a^n = I, \qquad I_a^n D^n \neq I. \tag{3.5}$$

où I est l'opérateur d'identité.

Définition 3.2.1 *L'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de Riemann-Liouville d'une fonction $f \in L^1[a,b]$ est donnée par*

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds, \quad t > a. \tag{3.6}$$

Définition 3.2.2 *La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction f définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ est donnée par*

$$\begin{aligned}(D_a^\alpha f)(t) &= D^n I_a^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} (\frac{d}{dt})^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)ds, \quad t > a.\end{aligned} \tag{3.7}$$

où $n = [\alpha] + 1$, et $[\alpha]$ est la partie entière de α.

En particulier, si $\alpha = 0$, alors

$$(D_a^0 f)(t) = I_a^0 f(t) = f(t).$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors

$$(D_a^n f)(t) = f^{(n)}(t).$$

Si de plus $0 < \alpha < 1$, alors $n = 1$, d'où

$$(D_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds, \quad t > a.$$

Proposition 3.2.3 *Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, alors*

$$(D_a^\alpha f)(t) = 0 \Longleftrightarrow f(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j (t-a)^{\alpha - j}, \forall c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}.$$

En particulier, si $0 < \alpha < 1$, alors

$$(D_a^\alpha f)(t) = 0 \Longleftrightarrow f(t) = c(t-a)^{\alpha-1}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

Enonçons maintenant quelques propriétés des opérateurs I_a^α et D_a^α.

Lemme 3.2.4 *L'opérateur d'intégration fractionnaire I_a^α, $\alpha > 0$ est linéaire et borné de l'espace$L^p[a,b]$ $(1 \leq \ p \leq 1)$ dans lui même, i.e*

$\exists k > 0$ tel que :

$$\|I_a^\alpha f\|_p \leq k \|f\|_p \, \forall f \in L^p\,[a,b]\,, où\ k = \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha\,|\Gamma(\alpha)|}.$$

Le résultat suivant caractérise les conditions nécéssaires pour l'existence de la dérivée fractionnaire D_a^α.

Lemme 3.2.5 *Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f \in AC^n[a,b]$, alors la dérivée fractionnaire$D_a^\alpha f$ existe presque partout sur$[a,b]$ et elle est representée sous la forme*

$$(D_a^\alpha f)(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(t-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds.$$

Une propriété importante de l'opérateur d'intégration fractionnaire I_a^α, dite propriété du semi-groupe, est donnée par le lemme suivant :

Lemme 3.2.6 *Si $\alpha > 0, \beta > 0$, alors l'équation*

$$(I_a^\alpha I_a^\beta f)(t) = (I_a^{\alpha+\beta} f)(t). \tag{3.8}$$

est satisfaite presque partout sur $[a,b]$, pour toute $f \in L^p[a,b]$,$1 \leq p < \infty$.

Démonstration. Soit $f \in L^p[a,b]$, alors on a grâce au théorème de Fubini

$$\begin{aligned} I_a^\alpha(I_a^\beta f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (I_a^\beta f)(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} dt \int_a^s (s-\xi)^{\beta-1} f(\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\xi)d\xi \int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\xi)^{\beta-1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-\xi)^{\alpha+\beta-1} f(\xi)d\xi \\ &= (I_a^{\alpha+\beta} f)(t). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Une des propriétés importantes lie la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville avec l'intégrale fractionnaire est la suivante :

Lemme 3.2.7 *Pour $\alpha > 0$ et $f \in L^1[a,b]$on a*

$$(D_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) = f(t), \quad p.p \;\; sur[a,b]. \tag{3.9}$$

La propriété (3.9) signifie que l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville du même ordre.

Démonstration. D'après (3.7) et la propriété (3.8), on a pour $n = [\alpha] + 1$

$$(D_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) = D^n I^{n-\alpha} I^\alpha f(t) = D^n I^n f(t) = f(t), \;\; p.p \; sur \, [a,b] \, .$$

ce qui établit le résultat.

3.3 Dérivée fractionnaire de Caputo

Les dérivées de Riemann-Liouville ont certains inconvénients lorsque on essaie de modéliser des phénomènes du monde réel. Les problèmes étudiés exigent une définition des dérivées fractionnaires permettant l'utilisation des conditions initiales physiquement interprétables incluant $y(0)$, $y'(0)$, etc. Ces défaillances ont conduit vers la fin des années soixante, à une définition alternative des dérivées fractionnaires qui satisfait ces demandes ; elle a été introduite par Caputo [4]. En fait, Caputo etMainardi [5] ont utilisé cette définition dans leurs travaux sur la viscoélasticité.

Dans cette section on donne la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo ainsi que quelques propriétés essentielles.

Soit $[a, b]$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$, et soit I_a^α et D_a^α les opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaires donnés par (3.6) et (3.7) dans la section précédente.

Définition 3.3.1 *La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de Caputo d'une fonction f définie sur $[a, b]$ est donnée par*

$$({}^C D_a^\alpha) f(t) = D_a^\alpha (f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k, \tag{3.10}$$

où

$$n = [\alpha] + 1, \;\; si \;\alpha \notin \mathbb{N}, et \; n = \alpha \; si \; \alpha \in \mathbb{N}^*. \tag{3.11}$$

Si $\alpha = 0$, alors

$$({}^C D_a^0) f(t) = f(t).$$

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$, la relation (3.10) prend la forme

$$({}^C D_a^\alpha) f(t) = D_a^0([f(t) - f(a)]).$$

.

Donc, si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et f est une fonction pour laquelle les dérivées fractionnaires de Caputo (3.10), et celle de Riemann-Liouville (3.7) existent, alors elles sont liées l'une à l'autre par la relation

$$({}^C D_a^\alpha) f(t) = (D_a^\alpha f)(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha}, (n = [\alpha] + 1). \tag{3.12}$$

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$, on a

$$({}^C D_a^\alpha) f(t) = (D_a^\alpha f)(t) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}. \tag{3.13}$$

D'après la relation (3.12), si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors la dérivée de Caputo (3.10) coïncide avec la dérivée de Riemann-Liouville (3.7) si la fonction f ainsi que toutes ses dérivées jusqu'a l'ordre $n-1$ $(n = [\alpha]+1)$ s'annulent au point a, i .e.

$$({}^C D_a^\alpha f)(t) = (D_a^\alpha f)(t) \Longleftrightarrow f(a) = f'(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0.$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ et la dérivée usuelle $f^{(n)}(t)$ existe, alors $({}^C D_a^\alpha) f(t)$ coïncide avec $f^{(n)}(t)$ i .e

$$({}^C D_a^\alpha) f(t) = f^{(n)}(t). \tag{3.14}$$

La dérivée fractionnaire de Caputo (3.10) est définie pour les fonctions $f(t)$ pour lesquelles la dérivée de Riemann-Louville (3.7) existe, en particulier, elle est définie pour les fonctions $f(t) \in AC^n[a,b]$. On a le théorème suivant :

Théorème 3.3.2 *Soit $\alpha > 0$ et soit n donné par (3.11). Si $f \in AC^n[a,b]$, alors la dérivée fractionnaire de Caputo $({}^C D_a^\alpha f)(t)$ existe presque partout sur $[a,b]$.*

(i) Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors $({}^C D_a^\alpha f)(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} ({}^C D_a^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \\ &= I_a^{n-\alpha} D^n f(t). \end{aligned} \tag{3.15}$$

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$ et $f \in AC[a,b]$, alors

$$\begin{aligned} ({}^C D_a^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds \\ &= I_a^{1-\alpha} f'(t). \end{aligned} \tag{3.16}$$

(ii) Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors $({}^C D_a^\alpha f)(t) = f^{(n)}(t)$.

Démonstration. D'après la définition, on a

$$\begin{aligned}
({}^C D_a^\alpha f)(t) &= D_a^\alpha \Big(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\Big) \\
&= D^n I_a^{n-\alpha} \Big(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\Big).
\end{aligned}$$

Posons

$$\varphi(t) = I_a^{n-\alpha} \Big(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\Big).$$

D'après (3.6), on a

$$\varphi(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \Big(f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k\Big) ds.$$

Intègrant par parties, on aura

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \int_a^t \frac{(t-s)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \Big(f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k\Big) ds. \\
&= -\frac{(t-s)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \Big(f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k\Big) \Big|_{s=a}^{s=t} \\
&\quad + \frac{(t-s)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha} D\Big(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k\Big) ds. \\
&= I_a^{n-\alpha+1} D\Big(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\Big).
\end{aligned}$$

En répétant ce procédé n fois, on trouve

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= I_a^{n-\alpha+n} D^n (f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k). \\ &= I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n (f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k).\end{aligned}$$

Or,$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k$ est un polynôme de degré $n-1$, par conséquent

$$\varphi(t) = I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n f(t).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}({}^C D_a^\alpha) f(t) &= D^n \varphi(t) \\ &= D^n I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n f(t) \\ &= I_a^{n-\alpha} D^n f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds.\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Théorème 3.3.3 *Soient $\alpha > 0$, n donné par (3.11) et $f \in C^n[a,b]$. Alors la dérivée fractionnaire de Caputo $({}^C D_a^\alpha) f$ est continue sur $[a,b]$.*

(i) Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors $({}^C D_a^\alpha) f$ est donnée par (3.15). En particulier, elle prend la forme (3.16) pour $0 < \alpha < 1$.

(ii) Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors $({}^C D_a^\alpha) f = f^{(n)}(t)$.

La dérivée fractionnaire de Caputo ${}^C \mathrm{D}_a^\alpha$, comme celle de Riemann-Liouville, représente l'opération inverse à gauche de l'intégrale fractionnaire I_a^α.

Lemme 3.3.4 *Soient $\alpha > 0$ et $f \in L^\infty[a,b]$, alors*

$$({}^C D_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) = f(t). \tag{3.17}$$

Lemme 3.3.5 *Soit $\alpha > 0$, et $f \in L^\infty[a,b]$ alors*

$$I^{\alpha C} D^\alpha f(t) {=} f(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n\text{-}1} t^{n\text{-}1},$$

pour certains contsantes $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, ..., n-1$, $m = [\alpha] + 1$.

On a défini la dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction f sur un intervalle fini $[a,b]$ par (3.10), et on a vu dans le Théorème 3.3.2 qu'elle peut être représentée par (3.14) et (3.15) à condition que $f \in AC^n[a,b]$. En fait, la formule (3.16) peut être utilisée pour définir la dérivée fractionnaire de Caputo sur le demi axe $\mathbb{R}^+$. En effet, la dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction $f \in AC^n[0,\infty)$sur le demi axe $\mathbb{R}^+$ est donnée par

$$({}^C D_{0+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \quad t > 0.$$

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$ et $f \in AC^1[0,\infty)$, alors

$$({}^C D_{0+}^\alpha) f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds, \quad t > 0.$$

3.4 Dérivé fractionnaire conformable

Dans sette section récemment une nouvelle définition sur des limites d'un dérivé conformable a été formulée par

$$D^{\alpha}f(t) = lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon},$$

où en [9] tant que

$$D^{\alpha}f(t) = lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(te^{\varepsilon t^{1-\alpha}}) - f(t)}{\varepsilon}, \quad D^{\alpha}f(0) = lim_{t \to 0^{+}} D^{\alpha}f(t), \tag{3.18}$$

à condition que les limites existent, noter que si f est entièrement différentiable en t, alors

$$D^{\alpha}f(t) = t^{1-\alpha}f'(t), \tag{3.19}$$

où $f'(t) = lim_{\varepsilon \to 0} \left[f(t+\varepsilon) - f(t)\right]/\varepsilon$.

3.5 Opérateur différentiel Conformable

Définition 3.5.1 *Soit $\alpha \in [0,1]$. Un opérateur différentiel D^{α} est conformable si D^{0} est l'opérateur identité et D^{1} est opérateur différentiel classique. Plus précisément D^{α} est conformable si et seulement si pour une fonction différentiables $f = f(t)$,*

$$D^{0}f(t) = f(t) \quad et \quad D^{1}f(t) = \frac{d}{dt}f(t) = f'(t). \tag{3.20}$$

3.6 Propriétes de la dérivée fractionnaire conformable

Toutes les définitions(R.L,Caputo) ont tenté de satisfaire les propriétés habituelles de la dérivées entière. La seule propriété héritée par toutes les définitions de dérivé fractionnaire est la propriété de linéarité. Cependant, les remarques suinantes nous donnet les différences entre les définitions de la dérivée fractionnaire.

Remarques:

(i) Le dérivé de Riemann-Liouville ne satisfait pas $D_a^{\alpha}(1) = 0$, si α est pas un nombre naturel.($D_a^{\alpha}(1) = 0$ pour le dérivée de Caputo)

(ii) Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas la règle du produit connue:

$$D_a^{\alpha}(fg) = fD_a^{\alpha}(g) + gD_a^{\alpha}(f). \tag{3.21}$$

(iii) Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas à la règle du quotient :

$$D_a^{\alpha}(f/g) = \frac{gD_a^{\alpha}(f) - fD_a^{\alpha}(g)}{g^2}. \tag{3.22}$$

(iv) Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas à la règle de la chaîne(composition des dérivées):

$$D_a^{\alpha}(f \circ g)(t) = f^{(\alpha)}(g(t))g^{(\alpha)}(t). \tag{3.23}$$

(v) Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas: $D^{\alpha}D^{\beta}f = D^{\alpha+\beta}f$ en général.

(vi) La définition de Caputo suppose que la fonction f est différentiable.

Nous devrions remarquer que $D^\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$. En outre, cette définition coïncide avec les définitions classiques de R-L et de Caputo sur polynômes.

Théorème 3.6.1 *Soit $\alpha \in]0,1]$, et f, g être α-differentiable à un point t, D^α est l'opérateur différentiel conformable.*

Alors:

(1) $D^\alpha(af+bg) = aD^\alpha(f) + bD^\alpha(g)$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.

(2) $D^\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ pour tout $p \in \mathbb{R}$.

(3)$D^\alpha(fg) = fD^\alpha(g) + gD^\alpha(f)$.

(4) $D^\alpha(\frac{f}{g}) = \frac{gD^\alpha(f) - fD^\alpha(g)}{g^2}$.

(5)$D^\alpha(\lambda) = 0$, pour toutes les fonctions constante $f(t) = \lambda$.

(6) Si en plus f est différentiable, alors $D^\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha}\frac{df}{dt}$.

Plus loin:

1. $D^\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ pour tout $\quad p \in \mathbb{R}$.
2. $D^\alpha(1) = 0$.
3. $D^\alpha(e^{cx}) = cx^{1-\alpha}e^{cx}, \quad c \in \mathbb{R}$.
4. $D^\alpha(sinbx) = bx^{1-\alpha}cosbx, \quad b \in \mathbb{R}$.
5. $D^\alpha(cosbx) = -bx^{1-\alpha}sinbx, \quad b \in \mathbb{R}$.
6. $D^\alpha(\frac{1}{\alpha}t^\alpha) = 1$.

Toutefois, il convient de noter les dérivées fractionnaires suivants de certains fonctions:

(*i*) $D^\alpha(sin\frac{1}{\alpha}t^\alpha) = cos\frac{1}{\alpha}t^\alpha$.

(*ii*) $D^\alpha(cos\frac{1}{\alpha}t^\alpha) = -sin\frac{1}{\alpha}t^\alpha$.

(*iii*) $D^\alpha(\mathrm{e}^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}) = e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$.

Chapitre 4

Problème fractionnaire avec des conditions séparées

4.1 Introduction

La dérivée fractionnaire conformable est utilisé dans ce chapitre pour traiter une problème aux limité avec des conditions séparées.

On montre l'existence de solution, on moyen du théorème de point fixe de henderson , pour cela on définit la fonction de Green associée a notre problème et on verra qui elle est positive, ce qui perment l'utilisation des cônne des fonctions positives pour applique le théorème de henderson. Nous avons ensuite comparer nos résultats à ceux basés sur la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.

4.2 Problème fractionnaire avec conditions de Sturm-Liouville

Nous commençons par examiner deux dérivées fractionnaires itérées du opérateur différentiel, ainsi que deux points conditions aux limites, comme illustré dans le problème aux limites non-linéaire

$$\begin{cases} -D^{\beta}D^{\alpha}x(t) = f(t, x(t)), 0 \leq t \leq 1, \\ \gamma x(0) - \delta D^{\alpha}x(0) = 0 = \eta x(1) + \xi D^{\alpha}x(1) \end{cases} \tag{4.1}$$

où $\beta, \alpha \in]0, 1]$ et les dérivées sont des dérivées fractionnaires conformables (3.18),avec $\gamma, \delta, \eta, \xi \geq 0$ et $d := \delta\eta + \gamma\xi + \gamma\eta/\alpha > 0$. Notez que si x est α -differentiable et $t^{1-\alpha}$ est β -differentiable, puis en utilisant (3.19) nous pourrions récrire (4.1)

$$-t^{1-\beta}(t^{1-\alpha}x'(t))' = f(t, x(t)), \qquad 0 \leq t \leq 1,$$

où le premier indique le dérivé d/dt .

Nous définissons d'abord l'intégrale β-fractional.

Définition 4.2.1 *Soit $\beta \in]0, 1]$ et $0 \leq a < b$ Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est β-fractional intégrable sur$[a, b]$ si l'intégrale*

$$\int_a^b f(s)d_{\beta}s := \int_a^b f(s)s^{\beta-1}ds$$

existe et est finie.

4.3 Fonctions de Green

Définition de fonction de Green

Soit une équation différentielle linéaire nonhomogène

$$\sum_{n=0}^{N} a_n(t) f^{(n)}(t) = \phi(t) \Leftrightarrow L(t)f(t) = \phi(t), \qquad L(t) = \sum_{n=0}^{N} a_n(t) \frac{d^n}{dt^n}. \tag{4.2}$$

La fonction de Green de cette équation sont les fonctions satisfaisant l'équation où la source ϕ a été remplacée par $\delta(x - x')$. Si on note $G(x, x')$ la fonction de Green, alors par définition de G :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n(t) \frac{\partial^n}{\partial x^n} G(t, s) = \delta(t - s) \Leftrightarrow L(t)G(t, s) = \delta(t - s). \tag{4.3}$$

Ceci étant, une solution de (4.2) s'exprime alors comme:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, s)\phi(s) ds. \tag{4.4}$$

En effet, faisant passer $L(t)$ sous l'intégrale en x'(commutant intération et dérivations), on a selon (4.3):

$$L(t)f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(t)G(t, s)\phi(s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - s)\phi(s) ds = \phi(t). \tag{4.5}$$

qui reconstitue bien l'équation satisfaite par la fonction f. La fonction ainsi construite est donc une solution (particulière) de l'équation (4.2), dont la solution générale s'écrit:

$$f(t) = f_h(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, s)\phi(s) ds, \tag{4.6}$$

où $f_h(s)$ désigne la solution générale de l'équation homogène associée $Lf = 0$.

4.4 La fonction de Green pour le problème fractionnaire

Pour trouve la fonction de Green de problème fractionnaire

$$\begin{cases} -D^{\beta}D^{\alpha}x(t) = f(t, x(t)), 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma x(0) - \delta D^{\alpha}x(0) = 0 \\ \eta x(1) + \xi D^{\alpha}x(1) = 0 \end{cases}$$

nous traite l'équation $-D^{\beta}D^{\alpha}x(t) = 0$.

L'équation $-D^{\beta}D^{\alpha}x(t) = 0$, devient une équation ordineire du $2^{éme}$ ordre contenant des termes non linéare donc pour le devloppment de la fonction de Green on utilise daux solutions fondamentales φ et ψ vérifiant des conditions iniliales appropriées.

on a

$$\begin{aligned} D^{\beta}D^{\alpha}x(t) &= 0 \Longrightarrow t^{1-\beta}(t^{1-\alpha}x'(t))' = 0 \\ &\Longrightarrow t^{1-\alpha}x'(t) = c_1 t^{\beta-1} \\ &\Longrightarrow x'(t) = t^{\alpha-1}c_1 t^{\beta-1} \\ &\Longrightarrow x(t) = \int_0^1 c_1 t^{\alpha-1} d_{\beta}t \\ &\Longrightarrow x(t) = c_1 \frac{t^{\alpha}}{\alpha} + c_2. \end{aligned}$$

on prend deux solution $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ vérifiant les conditions

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= \zeta + \frac{\eta}{\alpha}, \qquad D^\alpha\varphi(0) = -\eta.\\ \psi(0) &= \delta, \qquad\qquad D^\alpha\psi(0) = \gamma.\end{aligned}$$

pour la première solution $\varphi(t)$ on a $c_1 = -\eta$ et $c_2 = \zeta + \frac{\eta}{\alpha}$

donc

$$\varphi(t) = \xi + \frac{\eta}{\alpha}(1 - t^\alpha).$$

pour la deuxième solution $\psi(t)$ on a $c_1 = \gamma$ et $c_2 = \delta$

donc

$$\psi(t) = \delta + \frac{\gamma}{\alpha}t^\alpha.$$

donc la solution générale $x(t)$ est sons la forme suivant

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{W}\int_0^t \varphi(t)\psi(s)h(s)ds + \int_t^1 \varphi(s)\psi(t)h(s)ds\\ &= \frac{1}{W}\int_0^t \left[\xi + \frac{\eta}{\alpha}(1 - t^\alpha)\right]\left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha}s^\alpha\right]h(s)ds\\ &\quad + \int_t^1 \left[\xi + \frac{\eta}{\alpha}(1 - s^\alpha)\right]\left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha}t^\alpha\right]h(s)ds.\end{aligned}$$

et comme

$$W = \begin{vmatrix} \varphi(0) & D^\alpha\varphi(0) \\ \psi(0) & D^\alpha\psi(0) \end{vmatrix} = \delta\eta + \gamma\xi + \gamma\eta/\alpha = d$$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{d}\int_0^t \left[\xi + \frac{\eta}{\alpha}(1-t^\alpha)\right]\left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha}s^\alpha\right] h(s)ds \\
&\quad + \int_t^1 \left[\xi + \frac{\eta}{\alpha}(1-s^\alpha)\right]\left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha}t^\alpha\right] h(s)ds \\
&= \int_0^t \frac{1}{d}\left[\xi + \frac{\eta}{\alpha}(1-t^\alpha)\right]\left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha}s^\alpha\right] h(s)ds \\
&\quad + \int_t^1 \frac{1}{d}\left[\xi + \frac{\eta}{\alpha}(1-s^\alpha)\right]\left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha}t^\alpha\right] h(s)ds
\end{aligned}
$$

donc la fonction de Green $G(t,s)$ est donée par

$$
G(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{d}\left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha}s^\alpha\right]\left[\xi + \frac{\eta}{\alpha}(1-t^\alpha)\right] & : s \leq t \\ \frac{1}{d}\left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha}t^\alpha\right]\left[\xi + \frac{\eta}{\alpha}(1-s^\alpha)\right] & : t \leq s \end{cases}
$$

Théorème 4.4.1 *Soit $\alpha, \beta \in]0,1]$. La fonction de Green correspondante pour le problème homogène*

$$
-D^\beta D^\alpha x(t) = 0
$$

satisfaisant les conditions aux limites de PLF(4.1) est donnée par

$$
G(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{d}\left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha}s^\alpha\right]\left[\xi + \frac{\eta}{\alpha}(1-t^\alpha)\right] & : s \leq t \\ \frac{1}{d}\left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha}t^\alpha\right]\left[\xi + \frac{\eta}{\alpha}(1-s^\alpha)\right] & : t \leq s \end{cases} \tag{4.7}
$$

où nous supposons que les paramètres $\gamma, \delta, \eta, \xi \geq 0$ et $d := \delta\eta + \gamma\xi + \gamma\eta/\alpha > 0$ satisfont.

Preuve. . Nous allons vérifien que

$$
x(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)d_\beta s,
$$

G étant donné par (4.7), est une solution au problème linéaire de la valeur limite

$$-D^{\beta}D^{\alpha}x(t) = h(t)$$

avec des conditions aux limites de PLF(4.1).

Pour tout $t \in [0,1]$, en utilisant les branches de (4.7) que nous avons

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{1}{d}\left[\xi + \frac{\eta}{\alpha}(1-t^{\alpha})\right]\int_0^t \left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha}s^{\alpha}\right]h(s)d_{\beta}s \\ + \frac{1}{d}\left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha}t^{\alpha}\right]\int_0^t \left[\xi + \frac{\eta}{\alpha}(1-s^{\alpha})\right]h(s)d_{\beta}s. \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} D^{\alpha}x(t) &= D^{\alpha}\left[\frac{1}{d}\left[\xi + \frac{\eta}{\alpha}(1-t^{\alpha})\right]\int_0^t \left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha}s^{\alpha}\right]h(s)d_{\beta}s + \frac{1}{d}\left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha}t^{\alpha}\right]\int_0^t \left[\xi + \frac{\eta}{\alpha}(1-s^{\alpha})\right]h(s)d_{\beta}s\right] \\ &= t^{1-\alpha}x'(t) \end{aligned}$$

on a

$$x'(t) = -\frac{\eta}{d}t^{\alpha-1}\int_0^t \left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha}s^{\alpha}\right]h(s)d_{\beta}s + \frac{\eta}{\alpha}t^{\alpha-1}\int_0^t \left[\xi + \frac{\eta}{\alpha}(1-s^{\alpha})\right]h(s)d_{\beta}s.$$

donc

$$\begin{aligned} D^{\alpha}x(t) &= t^{1-\alpha}\left[-\frac{\eta}{d}t^{\alpha-1}\int_0^t \left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha}s^{\alpha}\right]h(s)d_{\beta}s + \frac{\eta}{\alpha}t^{\alpha-1}\int_0^t \left[\xi + \frac{\eta}{\alpha}(1-s^{\alpha})\right]h(s)d_{\beta}s\right] \\ &= t^{1-\alpha} - \frac{\eta}{d}t^{\alpha-1}\int_0^t \left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha}s^{\alpha}\right]h(s)d_{\beta}s + t^{1-\alpha}\frac{\eta}{\alpha}t^{\alpha-1}\int_0^t \left[\xi + \frac{\eta}{\alpha}(1-s^{\alpha})\right]h(s)d_{\beta}s \\ &= -\frac{\eta}{d}\int_0^t \left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha}s^{\alpha}\right]h(s)d_{\beta}s + \frac{\gamma}{d}\int_0^t \left[\xi + \frac{\eta}{\alpha}(1-s^{\alpha})\right]h(s)d_{\beta}s. \end{aligned}$$

Vérification de la première condition limite, nous obtenons

$$\gamma x(0) - \delta D^{\alpha}x(0) = 0.$$

En outre, pour le contrôle de la deuxième condition aux limites, on trouve

$$\eta x(1) + \xi D^{\alpha} x(1) = 0$$

En prenant la dérivée β-fractional

$$D^{\beta} D^{\alpha} x(t) = t^{1-\beta} (D^{\alpha} x(t))'$$

on a

$$\begin{aligned}
(D^{\alpha} x(t))' &= \left[-\frac{\eta}{d} \int_0^t \left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha} t^{\alpha} \right] h(s) d_{\beta} t + \frac{\gamma}{d} \int_0^t \left[\xi + \frac{\eta}{\alpha} (1 - t^{\alpha}) \right] h(s) d_{\beta} t \right]' \\
&= \left(-\frac{\eta}{d} \int_0^t \left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha} t^{\alpha} \right] h(s) d_{\beta} t \right)' + \left(\frac{\gamma}{d} \int_0^t \left[\xi + \frac{\eta}{\alpha} (1 - t^{\alpha}) \right] h(s) d_{\beta} t \right)' \\
&= \left(-\frac{\eta}{d} \int_0^t \left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha} t^{\alpha} \right] h(s) t^{\beta-1} dt \right)' + \left(\frac{\gamma}{d} \int_0^t \left[\xi + \frac{\eta}{\alpha} (1 - t^{\alpha}) \right] h(s) t^{\beta-1} dt \right)' \\
&= -\frac{\eta}{d} \left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha} t^{\alpha} \right] h(s) t^{\beta-1} - \frac{\gamma}{d} \left[\xi + \frac{\eta}{\alpha} (1 - t^{\alpha}) \right] h(s) t^{\beta-1}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
D^{\beta} D^{\alpha} x(t) &= t^{1-\beta} \left[-\frac{\eta}{d} \left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha} t^{\alpha} \right] h(s) t^{\beta-1} - \frac{\gamma}{d} \left[\xi + \frac{\eta}{\alpha} (1 - t^{\alpha}) \right] h(s) t^{\beta-1} \right]. \\
&= -\frac{\eta}{d} \left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha} t^{\alpha} \right] h(s) t^{\beta-1} t^{1-\beta} - \frac{\gamma}{d} \left[\xi + \frac{\eta}{\alpha} (1 - t^{\alpha}) \right] h(s) t^{\beta-1} t^{1-\beta} \\
&= -\frac{\eta}{d} \left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha} t^{\alpha} \right] h(s) - \frac{\gamma}{d} \left[\xi + \frac{\eta}{\alpha} (1 - t^{\alpha}) \right] h(s) \\
&= -\frac{1}{d} h(t) \left[\eta\delta + \gamma\xi + \frac{\gamma\eta}{\alpha} \right] = -h(t),
\end{aligned}$$

d'ou le resultat . $\square$

Corollaire 4.4.2 *Soit* $\alpha, \beta \in]0, 1]$.*La fonction de Green correspondante pour le problème homogène*

$$-D^{\beta}D^{\alpha}x(t) = 0$$

satisfaisant les conditions aux limites $x(0) = x(1) = 0$ est donné par

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}S^{\alpha}(1-t^{\alpha}) : S \leq t \\ \frac{1}{\alpha}t^{\alpha}(1-s^{\alpha}) : t \leq s \end{cases} \tag{4.8}$$

et la fonction de Green correspondant au problème homogène

$$-D^{\beta}D^{\alpha}x(t) = 0$$

satisfaisant à des conditions aux limites $x(0) = D^{\alpha}x(1) = 0$ est donnée par

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}s^{\alpha} : s \leq t \\ \frac{1}{\alpha}t^{\alpha} : t \leq s \end{cases} \tag{4.9}$$

4.5 Propriétés de la fonction de Green

Théorème 4.5.1 *(propriétés de la fonction de Green). pour $G(t,s)$donné par(4.8), nous avons les resultat suivants*

(i)

$$g_1(t)G(s,s) < G(t,s) \leq G(s,s) \text{ pour } t,s \in [0,1] \tag{4.10}$$

où

$$g_1(t) = min\left\{\frac{\alpha\delta + \gamma t^\alpha}{\alpha\delta + \gamma}, \frac{\alpha\xi + \eta(1 - t^\alpha)}{\alpha\xi + \eta}\right\} \tag{4.11}$$

(ii)

$$min_{\frac{1}{n} \leq t \leq 1 - \frac{1}{n}} G(t, s) \geq g_2(s) G(s, s) \tag{4.12}$$

pour les entiers $n \geq 3$.

pour g_2 donnée par

$$g_2(s) := \begin{cases} \frac{\alpha\xi + \eta(1-(1-1/n)^\alpha}{\alpha\xi + \eta(1-s^\alpha)} & : s \in [0, r] \\ \frac{\alpha\delta + \gamma(1/n)^\alpha}{\alpha\delta + \gamma s^\alpha} & : s \in [r, 1] \end{cases} \tag{4.13}$$

pour la constante

$$r = (\frac{\alpha\gamma\xi + \gamma\eta + \alpha\delta\eta(n-1)^\alpha}{(\alpha\delta\eta + \alpha\gamma\xi + \gamma\eta)n^\alpha - \gamma\eta(n-1)^\alpha + \gamma\eta})^{1/\alpha} \in]\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] \tag{4.14}$$

où $r = 1 - 1/n$ si $\gamma = 0$. Enfin, nous avons également

(iii)

$$min_{\frac{1}{n} \leq t \leq 1 - \frac{1}{n}} G(t, s) \geq g_3 G(s, s) \tag{4.15}$$

pour la constante g_3 donnée par

$$g_3 \equiv min\left\{\frac{\alpha\xi + \eta(1 - (1 - 1/n)^\alpha)}{\alpha\xi + \eta}, \frac{\alpha\delta + \gamma(1/n)^\alpha}{\alpha\delta + \gamma}\right\} \tag{4.16}$$

pour tous $\alpha \in [0, 1]$.

Preuve. on a

$$\frac{G(t,s)}{G(s,s)} = \begin{cases} \frac{\xi+\frac{\eta}{\alpha}(1-t)^{\alpha}}{\xi+\frac{\eta}{\alpha}(1-s)^{\alpha}} : s \leq t \\ \\ \frac{\delta+\frac{\gamma}{\alpha}t^{\alpha}}{\delta+\frac{\gamma}{\alpha}s^{\alpha}} \quad\quad : t \leq s \end{cases} \tag{4.17}$$

cette expression donne les inégalités dans (4.10) pour g_1 comme dans (4.11).Ensuite, soit

$$u(t,s) = \frac{1}{d}\left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha}t^{\alpha}\right]\left[\xi + \frac{\eta}{\alpha}(1-s^{\alpha})\right],$$

pour que

$$G(t,s) = \begin{cases} u(s,t) : s \leq t, \\ \\ u(t,s) : t \leq s. \end{cases}$$

Soit r donné par (4.14). Ensuite nous avons

$$min_{\frac{1}{n}\leq t\leq 1-\frac{1}{n}} G(t,s) = \begin{cases} u(s,1-1/n) & : s \in [0,1/n], \\ \\ min\{u(s,1-1/n), u(1/n,s)\} & : s \in [1/n, 1-1/n], \\ \\ u(1/n,s) & : s \in [1-1/n, 1], \end{cases}$$

$$= \begin{cases} u(s,1-1/n) : s \in [0,r], \\ \\ u(1/n,s) \quad\quad : s \in [r,1], \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{d}\left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha}s^{\alpha}\right]\left[\xi + \frac{\eta}{\alpha}(1-(1-/n)^{\alpha})\right] : s \in [0,r] \\ \\ \frac{1}{d}\left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha}(1/n)^{\alpha}\right]\left[\xi + \frac{\eta}{\alpha}(1-s^{\alpha})\right] \quad\quad : s \in [r,1] \end{cases}$$

où r est donné en (4.14). Par la monoton de $G(t,s)$, nous avons

$$max_{0\leq t\leq 1} G(t,s) = G(s,s) = \frac{1}{d}\left[\delta + \frac{\gamma}{\alpha}s^{\alpha}\right]\left[\xi + \frac{\eta}{\alpha}(1-s^{\alpha})\right],$$

Par conséquent, si l'on prend g_2 comme dans g_2 (4.14), $G(t,s)$ satisfait (4.13). maintenant, puisque

$$\frac{\alpha\xi + \eta(1-(1-1/n)^{\alpha})}{\alpha\xi + \eta(1-s^{\alpha})} \geq \frac{\alpha\xi + \eta(1-(1-1/n)^{\alpha})}{\alpha\xi + \eta}, s \in [0,r]$$

et

$$\frac{\alpha\delta+\gamma(1/n)^{\alpha}}{\alpha\delta+\gamma s^{\alpha}} \geq \frac{\alpha\delta+\gamma(1/n)}{\alpha\delta+\gamma}, s \in [r,1],$$

en (4.14) utiliser la g_3 constante donnée en (4.16) au lieu de (4.13). Cette constante est bien défini et strictement positive, étant donné que $d > 0$ dans (4.7) implique δ et α et η et ξ peut simultanément être zéro. □

Remarque 4.5.2 *Pour les conditions aux limites,* $\gamma = \eta = 0$ *et* $\delta = \xi = 1$ *si* $\alpha = 1$*et* $n = 4$, $g_3 \equiv \frac{1}{4}$ *est la constante utilisée dans l'article [16, (3.4)] au la dérivée de Riemann-liouville est utilisé pour traiter le problème* $D^{\alpha} = f$.

Pour les conditions aux limites ; $\gamma = \xi = 1$ *et* $\delta = \eta = 0$, *la constante est* $g_3 \equiv (1/n)^{\alpha}$ *pour tous* $\alpha \in [0,1]$ *et tout entier* $n \geq 3$. *cette constante est nouvelle pour les dérivées fractionnaires, que le dérivé fractionnaire Riemann-Liouville ne permet pas de la calculer.voir [3 bai and lu].*

Le corollaire suivant est nécessaire à la section suivant pour le théorème d'existence principal

Corollaire 4.5.3 *soit* $\alpha, \beta \in [0,1]$. *Pour tout* $s \in [0,1]$, *nous avons*

$$max_{t\in[0,1]}G(t,s) \leq \left(\frac{1}{1-(\frac{3}{4})^{\alpha}}\right) \min_{t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]} G(t,s)$$

où $G(t,s)$ est la fonction de Green pour le problème homogène

$$-D^{\beta}D^{\alpha}x(t) = 0$$

satisfaisant les conditions aux limites du conjugué $x(0) = x(1) = 0$.

Preuve. par (4.8)

$$max_{t\in[0,1]}G(t,s) = G(s,s).$$

alors

$$\min_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]}\frac{G(t,s)}{G(s,s)} = \begin{cases} \frac{1-t^{\alpha}}{1-s^{\alpha}} & : 0 \leq s \leq t \leq 3/4 \\ \frac{t^{\alpha}}{s^{\alpha}} & : 1/4 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$\geq \begin{cases} \frac{1-(3/4)^{\alpha}}{1-(0)^{\alpha}} : 0 \leq s \leq 3/4 \\ \frac{(1/4)^{\alpha}}{(1)^{\alpha}} : 1/4 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= 1-(3/4)^{\alpha}.$$

depuis $(1/4)^{\alpha} \geq 1-(3/4)^{\alpha}$ pour tous $\alpha \in [0,1]$. On pourrait également utiliser (4.15) et (4.15).

□

4.6 Existence d'une solution positive

Soit l'espace de Banach

$$E = C[0,1]$$

être muni de la norme maximum,

$$\|x\| = max_{0\leq t\leq 1}|x(t)|,$$

et on définir le cône $P \subset E$ par

$$P = \left\{ x \in E,\ x(t) > 0 \text{ et } \|x\| \leq (\frac{1}{1-(\frac{3}{4})^{\alpha}}) \min_{t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]} x(t). \right\}.$$

Que les fonctions continus positifs ϕ et ψ définir sur le cône P par

$$\psi(x) = min_{[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]}x(t) \ . \tag{4.18}$$

et

$$\phi(x) = \max_{t\in[0,1]} x(t) = \|x\| \, . \tag{4.19}$$

Le théorème suivant est notre résultat principal.

Théorème 4.6.1 *Soit* $\alpha, \beta \in]0,1]$ *et supposons qu'il existe des nombres positifs* r *et* R *tel que* $0 < (\frac{1}{1-(\frac{3}{4})^{\alpha}})r < R$, *supposons que* f *bornée et satisfait les conditions suivantes:*

$(i) f(s,x) \leq R(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)$ Pour tout $s \in [0,1]$*et tout* $x \in [0,R]$,

$(ii) f(s,x) \geq r\ N$ *pour tout* $s \in [1/4, 3/4]$*et pour tout* $x \in \left[r, \frac{r}{1-(\frac{3}{4})^{\alpha}}\right]$

où

$$N = ((1-(\frac{3}{4})^{\alpha})\int_{1/4}^{3/4} G(s,s)d_{\beta}s)^{-1}$$

et

$$(1-(\frac{3}{4})^{\alpha})\int_{1/4}^{3/4} G(s,s)d_{\beta}s = (1-(\frac{3}{4})^{\alpha})\left\{(\frac{3}{4})^{\alpha+\beta}\left[\frac{1}{\alpha+\beta} - \frac{(3/4)^{\alpha}}{2\alpha+\beta}\right] - (\frac{1}{4})^{\alpha+\beta}\left[\frac{1}{\alpha+\beta} - \frac{(1/4)^{\alpha}}{2\alpha+\beta}\right]\right\}$$

alors, le problème fractionnaire a au moins un Solution positive x^* telle que

$$r \leq min_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]}x^*(t) \ \text{ et } \max_{t\in[0,1]} x^*(t) \leq R$$

Preuve. Définir l'opérateur complètement continue A par

$$Ax(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))d_\beta s$$

alors si nous pouvons montrer que A a un point fixe dans P alors nous avons vérifié l'existence de une solution positive.

Soit $x \in P$, puis à partir des propriétés de $G(t,s)$ que nous avons $Ax(t) \geq 0$ et

$$\begin{aligned}
\phi(Ax) &= max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))d_\beta s \\
&\leq (\frac{1}{(1-(\frac{3}{4})^\alpha)}) min_{t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]} \int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))d_\beta s \\
&= (\frac{1}{(1-(\frac{3}{4})^\alpha)})\psi(Ax)
\end{aligned}$$

ainsi, $Ax \in P$ et nous avons vérifié que $A : P \to P$ donc A laisse invariant le cône de fonction positive P.

Pour tout $x \in P$ on a

$$\psi(x) \leq \phi(x).$$

donc

$$\Omega_1 = \{x : \psi(x) < r\} \;\; et \;\; \Omega_2 = \{x : \phi(x) < R\}$$

donc

$$0 \in \Omega_1 \;\; et \;\; \overline{\Omega_1} \subseteq \Omega_2$$

étant donné que si $x \in \overline{\Omega_1}$puis

$$\min_{t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]} x(t) \leq r$$

par conséquent, puisque $x \in P$, nous avons

$$\max_{t\in[0,1]} x(t) \leq (\frac{1}{1-(\frac{3}{4})^\alpha}) \min_{t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]} x(t) \leq (\frac{1}{1-(\frac{3}{4})^\alpha})r < R.$$

donc $\Omega_1$et Ω_2 étant parties ouvertes limitée de P.

Si $x \in P \cap \partial\Omega_2$, alors $\phi(Ax) \leq \phi(x)$. Soit $x \in \partial\Omega_2$ donc $\phi(x) = R$ donc par condition (i) nous avons

$$\begin{aligned}
\phi(Ax) &= \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)f(s,x(t))d_\beta s \\
&\leq R(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)\int_0^1 G(s,s)d_\beta s \\
&= R = \phi(x).
\end{aligned}$$

Si $x \in P\cap\ \partial\Omega_1$, alors $\psi(Ax) \geq \psi(x)$. Soit $x \in \partial\Omega_1$, donc $\psi(x) = r$ et $\|x\| \leq \frac{r}{1-(\frac{3}{4})^\alpha}$, , Donc par la condition(ii) nous avons

$$\begin{aligned}
\psi(Ax) &= \min_{t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]} \int_0^1 G(t,s)f(s,x(t))d_\beta s \\
&\geq rN(1-(\frac{3}{4})^\alpha)\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(s,s)d_\beta s \\
&= r = \psi(x).
\end{aligned}$$

De toute évidence ϕ satisfait la propriété $(A1)(i)$ et ψ satisfait la propriété $(A2)(iii)$donc l'hypothèse$(K1)$ du théorème de henderson 2.5.5 est satisfaite, et donc A a un point fixe dans $\overline{\Omega_2} - \Omega_1$. □

Considérons le problème

$$D^{\frac{3}{2}}x(t) + x^2 + \frac{1}{4}\sin s + 1 = 0. \tag{4.20}$$

$$x(0) = x(1) = 0. \tag{4.21}$$

nous prenons $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}, r = \frac{11}{1000}, R = \frac{9}{25}$,et $f(s,x) = 1 + \frac{1}{4}\sin s + x^2$.

dans le théorème 4.6.1 si $0 < (\frac{1}{1-(\frac{3}{4})^\alpha})r < R$, et f satisfait les conditions suivantes

$(i) f(s,x) \leq R(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)$ Pour tout $s \in [0,1] et\ tout\ x \in [0,R]$,

$(ii) f(s,x) \geq r\ N$ pour tout $s \in [1/4, 3/4] et\ pour\ tout\ x \in \left[r, \frac{r}{1-(\frac{3}{4})^{\alpha}}\right]$

le problème a au moins un Solution positif x^*

on a

$(\frac{1}{1-(\frac{3}{4})^{\alpha}})r = (\frac{1}{1-(\frac{3}{4})^{1}})\frac{11}{1000} = \frac{44}{1000} \Rightarrow 0 < 4r < R.$

$(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta) = \frac{15}{4}.$

$(i) f(t,s) \leq \frac{15}{4}R = \frac{27}{20}$ pour tout $s \in [0,1]$ et pour tout $x \in \left[0, \frac{9}{25}\right]$,

$$\begin{aligned} N &= (1-(\frac{3}{4})^{\alpha})\left\{(\frac{3}{4})^{\alpha+\beta}\left[\frac{1}{\alpha+\beta} - \frac{(3/4)^{\alpha}}{2\alpha+\beta}\right] - (\frac{1}{4})^{\alpha+\beta}\left[\frac{1}{\alpha+\beta} - \frac{(1/4)^{\alpha}}{2\alpha+\beta}\right]\right\} \\ &= (1-(\frac{3}{4})^{1})\left\{(\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{\frac{3}{2}} - \frac{(3/4)^{1}}{2(\frac{3}{2})}\right] - (\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{\frac{3}{2}} - \frac{(1/4)^{1}}{2(\frac{3}{2})}\right]\right\} \\ &= \frac{960}{33\sqrt{3}-17}. \end{aligned}$$

$(ii) f(s,x) \geq \frac{960r}{33\sqrt{3}-17} = \frac{246}{25(33\sqrt{3}-17)}$ pour tout $s \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ et pour tout $x \in \left[\frac{11}{1000}, \frac{44}{1000}\right]$

Ainsi par le théorème 4.6.1le problème de valeur limite

$$-D^{0.5}x'(t) = 1 + \frac{1}{4}\sin t + x(t)^2$$

$$x(0) = x(1) = 0$$

admé au moins une solution positif x^* de telle sorte que

$$\min_{t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]} x^*(t) \geq \frac{11}{1000},$$

et

$$\max_{t\in[0,1]} x^*(t) \leq \frac{9}{25}.$$

dans[3,Exemple 3.1], il en résulte l'existence d'une solution positive x^* de telle sorte que

$$\frac{1}{14} \leq \max_{t\in[0,1]} x^*(t) \leq 1.$$

et aucune information sur la valeur minimale de la solution.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a traité un problème aux limites fractionnaire, on a utilisé la définition de la dérivée fractionnaire conformable. Le problème été ramené a une équation de Sturm-Liouville avec des conditions séparables, et des conditions pour l'existence de solution a été donné on moyen de théorème de point fixe de Henderson, Avery, O'reggen. Comparé avec la dérivée fractionnaire de Rimann-Liouville. On a un que l'utilisation de la dérivée fractionnaire conformable est plus riche, et nous donné une meilleure estimation (Majoration) pour la résolution de notre problème, aussi pour la fonction de Green.

REFERENCES

1 R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, and M. Sababheh, A new definition of fractional derivative,J. Computational Appl. Math., 264 (2014) 65–70.

2 J. Henderson and H. B. Thompson, Multiple symmetric positive solutions for a second order boundary value problem, Proc. Amer. Math. Soc., 128 Number 8 (2000) 2373–2379.

3 Zhanbing Bai and Haishen Lu, Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl. 311 Issue 2 (2005) 495–505.

4 M. Caputo, Linear models of dissipation whoseQis almost frequency independent, Part II, Geophys. J. R. Astr. Soc., 13 (1967), 529-539.

5 M. Caputo and F.Mainardi, Linear models of dissipation in an elastic solids, Riv.Nuovo Cimento (Ser. II), 1 (1971), 161-198..

6 MEDJEKAL Hamza,Université Badji Mokhtar Annaba,Existence et l'inicité de solution d'équation différentialle fractionnaire,2015.

7 Lalmi Abdellatif,Université Wales,Existence et l'inicité de solution d'équation différentialle fractionnaire,2010.

8 UDITA NTUGA MPOLA,journal of amerikan mathimaticel socity a new fractionel derivative with claccicale properties,2014.

9 DOUGLAS R. ANDERSON AND RICHARD I ,Journal of american mathimaticel socity avery ,Fractional-Order boundary value problem,2014.

10 Samko G. Kilbas A. A., Marichev, Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon, 1993.

11 I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press: San Diego CA, (1999).

12 Douglas R. Anderson,Department of Mathematics Concordia College,Newly Defined Conformable Derivatives,2015.

13 BelakroumKheireddine,UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR Annaba,Existence et positivité de la solution d'un problème

aux limites fractionnaire,2013.

14 C. C. Tseng, Design of fractional order digital FIR differentiators, IEEE Signal Processing Letters, 2001, 3, (8), pp 77-79.

15 Wolfgang Walter, Ordinary Dierential Equations, Springer-Verlag, New York, 1998.

16 College of Arts and Sciences, Dakota State University, Madison, SD 57042, USA E-mail address: rich.avery@dsu.edu.

17 D.R. Smart, Fixed point theory, Combridge Uni. Press, Combridge 1974.

18 M. Frigon, On continuation methods for contractive and non expansive mappings, Recent advance in metric fixed point theory, Sevilla 1995 (T. Dominiguez Benarrides ed), Universidad de Sevilla 1996, 19-30.

19 Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., and Tricomi, F., Hi- gher Transcendental Functions, vol. I-III, Krieger Pub., Melbourne, Florida, 1981.