REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE KHEMIS-MILIANA

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et informatique

MEMOIRE
Présenté par
Djebbar Djamel

Pour obtenir
LE DIPLOME DE MASTER
Spécialité : Mathématiques

Option : Mathématiques appliquées et Traitement du Signal

Intitulé

Outils Mathématiques pour le Traitement du Signal

Soutenu le juin 2016, devant les membres du jury :

Mr. Abderrazak Said	Univ. de Khemis Miliana	Président
Mr. Mohammed Hachama	Univ. de Khemis Miliana	Examiateur
Mr. Abdesselam Kali	Univ. de Khemis Miliana	Examiateur
Mr. Maamar Benbachir	Univ. de Khemis Miliana	Encadreur
Mr. Omar Benniche	Univ. de Khemis Miliana	Co-Encadreur

Remerciements

Je tiens dans un premier temps à remercier DIEU le tout puissant de m'avoir donné la chance et le privilège d'étudier et de m'avoir permis d'en arriver là.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur de mémoire Monsieur Maamar Benbachir et à Monsieur Omar Benniche mon co-encadreur.

Je remercie infiniment les membres de jury qui ont bien voulu examiner ce modeste travail, qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

J'adressons également ma profonde gratitude à tous les professeurs de l'université Djilali Bounaama en particulier ceux du département de Mathématiques et Informatique.

Dans ce dernier ne pas oublier d'exprimer ma gratitude et ses remerciements à tous mes frères et tous mes amis et tous mes collègues qui ont contribué de près ou de loin dans ce travail

Dédicaces

Je dédie mon travail

A celle qui est toujours à cote de mon cœur, a celle que m'a appris le vrai sens de la vie, a celle qui 'a hésité en aucun moment à m'encourage ma chère mère, (que dieu me garde)

A celui m'a toujours appris comment réfléchir avant d'agir , a celui qui m'a soutenu tout a long de ma vie scolaire ,a celui qui n'a jamais épargner un effort pour mon bien mon chère père ,(que dieu me le garde aussi).

A mes chers frères qui je respecte : Hamid, Belkacem, Tewfik.

A ma chère sœur : Meriem.

A mes chères amis : (Hakim, Moussa, Mohammed, Zitouni, Bilel, Missoum, Abd Allah, Noureddine, Azze ddine, Hamza, Ramdan, Mohammed, Hamza, Karim ,Ahmed, Abd Alkedar, Rabeh)

A mes chères amies : (Cherifa, Somia, Dounia, Nacira, Zahra, Chahira, Djamila, Kamilia)

Atout les membres de la promotion Master Mathématiques appliquées et Traitement du Signal de universite de Djilali Bounaama Khemis Miliana.

Et tous ceux que me connait.

Djebbar Djamel.

Résumé

Le traitement du signal est un domaine très répondu, maitriser les outils mathématiques pour le traitement du signal, c'est maitrisé une bonne partie du traitement de signal. Parmi ses outils on cite: l'analyse de Fourier, l'analyse fonctionnelle, les distributions et l'analyse complexe.

Abstract

Signal processing is a very wide area, understanding mathematical tools is equivalent or almost equivalent to undestanding signal processisng among the main important tools we cite: Fourier analysis, which is the source of Laplace transform and Z transform, functional analysis, distribution and complex analysis.

Table des matières

Notations

Vect(A) : Le sous-espace vectoriel engendré par A.

e.v.n : Espace vectoriel normée.

SEV : Sous-espace vectoriel.

(i,e) : C'est-à-dire.

PP : Qui veut dire presque partout.

$\mathbb{R}^n$: Espace euclidien de dimension n.

Ω : Est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.

$\langle .,. \rangle$: Le produit scalaire dans un espace $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Introduction

Ce travail est une petite contribution sur les méthodes mathématiques utilisées en traitement du signal. Il s'agit d'une initiation aux techniques couramment utilisées: en particulier l'analyse de Fourier, quelques analyse fonctionnelle, les distributions et quelques éléments de fonction de la variable complexe,

Dans le premier chapitre, nous commençons par donner un rappel sur l'analyse fonctionnelle. Nous donnons quelques concepts de base.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons un rappel de la fonction d'une variable complexe, où dans la première partie nous définissons les séries entières et on étudie le rayon de convergence. Dans la deuxième partie on définit les fonctions d'une variable complexe.

Dans le troisième chapitre, nous donnons un rappel sur les notions de base de distribution telle que cette dernier en analyse mathématique est un objet qui généralise la notion de fonction et de mesure. La théorie des distributions étend la notion de dérivée à toutes les fonctions localement intégrables et au-delà, et est utilisée pour formuler des solutions à certaines équations aux dérivées partielles.

Dans le quatrième chapitre nous étudions de façon détaillée l'analyse de Fourier. On définit et étudie les notions de séries de Fourier, transformée de Fourier, transformée de Laplace, transformée en Z et leur utilisation.

Les séries de Fourier se rencontrent principalement dans la décomposition de signaux périodiques, dans l'étude des courants électriques, des ondes cérébrales. Le traitement du signal repose essentiellement sur l'utilisation d'opérateurs linéaires qui modifient les propriétés d'un signal de façon homogène dans le temps. Les transformées de Fourier et de Laplace qui diagonalisent des opérateurs sont les principaux outils d'analyse mathématique.

On étudie un signal de deux points de vue :

– le point de vue temporel (ou spatial): étude du signal dans le temps, tel qu'il est enregistré ou dans l'espace physique (pour une image par exemple) ;

– le point de vue fréquentiel : on extrait du signal des informations cachées mais qui sont caractéristiques de chaque signal. Les outils mathématiques sont essentiellement la transformation de Fourier et la transformation de Laplace (et leurs analogues "discrets", la transformation de Fourier discrète (ou TFD) et la transformation en Z.

Et enfin, dans la dernière partie nous donnons une application sur l'outil mathématique pour le traitement du signal.

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle

Les outils de base pour l'analyse fonctionnelle et le traitement des signaux sont les outils d'analyse Hilbertienne, en dimension finie et infini. On rappelle dans ce chapitre les notions élémentaires (espaces de Hilbert, bases orthonormées,...). Ces notions sont utilisées pour la théorie L^2 des séries de Fourier.

1.1 Rappels sur les espaces vectoriels normés et les espaces de Hilbert

1.1.1 Espace vectoriel normé

Normes sur un espace vectoriel

Définition 1.1.1 *Soit E un espace vectoriel sur corps $\Bbbk$, on dit qu'une application $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ est une norme si*

• $\|x\| \geq 0$ pour tout $x \in E$.

•$\forall x \in E \ \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E$.

• $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| . \|x\|$.

•$\forall (x, y) \in E^2$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Remarque 1.1.2 *On dit que le couple $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé (e.v.n).*

Exemple 1.1.3 *1) $\mathbb{R}^n$ muni d'une des normes suivantes, est un (e.v.n) pour $p \in [1, +\infty[$*

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,N} |x_i|$$

où $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

2) L'espace vectoriel E des applications bornées de X à valeurs dans $\mathbb{k}$ peut être muni de la norme suivante

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|, \forall f \in E.$$

3) L'espace vectoriel E des applications continues de K dans $\mathbb{k}$ où K est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ peut être muni de la norme suivante

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|, \forall f \in E.$$

Définition 1.1.4 *On dit que deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur un espace vectoriel E sont équivalentes s'il existe deux constantes C_1, $C_2 > 0$ telle que*

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1, \ \forall x \in E.$$

Remarque 1.1.5 *Si E est de dimension finie, toute les normes sur E sont équivalentes. Lorsque E est de dimension infinie ce résultat est généralement faux.*

1.1.2 Les espaces normées complets

Définition 1.1.6 *Soit $(E, \|.\|)$ un (e.v.n) sur $\Bbbk$. On dit qu'une suite (x_n) d'éléments dans E est de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \forall p \geq 0, \quad \|x_n - x_{n+p}\| \leq \epsilon.$$

On peut démontrer facilement que toute suite convergente est de Cauchy. La réciproque est générale faux.

Définition 1.1.7 *On dit qu'un espace vectoriel normé E est complet si toute suite de Cauchy d'éléments de E converge. dans ce cas E est un espace de* ***Banach.***

Proposition 1.1.8 *Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et $K \subset E$ non vide. Alors K muni de la norme induite est de Banach, si et seulement si K est fermé.*

Preuve. Supposons K complet. Soit (x_n) une suite d'éléments dans K qui converge vers $x \in E$. D'où (x_n) est une suite de Cauchy. Comme K est complet, (x_n) possède une limite $\overline{x}$ dans K, utilisant le fait que la limite d'une suite est unique, on obtiendra $x = \overline{x} \in K$. Donc K est fermé. Supposons maintenant que K est fermé. Soit (x_n) une suite de Cauchy de K. Alors (x_n) est une suite de Cauchy dans E qui est complet. Donc (x_n) admet une limite $x \in E$. Comme K est fermé et (x_n) est une suite d'éléments de K, la limite x est aussi dans K. Donc (x_n) possède une limite dans K, et K est complet. $\square$

Applications linéaires continues

Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur $\Bbbk$.

Théorème 1.1.9 *Soit $L : E \to F$ une application linéaire. Les assertion suivantes sont équivalentes :*

i) L est continue sur E,

ii) L est continue en 0_E,

iii) Il existe une constante $K > 0$ tel que

$$\|L(x)\|_F \leq K \|x\|_E \quad \forall x \in E.$$

iv) L est Lipchitzienne sur E.

Soit $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. Notons que $\mathcal{L}(E, F)$ est $\Bbbk$-espace vectoriel. On munit l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ par la norme

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Théorème 1.1.10 *Si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est également un espace de Banach.[1, 1]*

Remarque 1.1.11 *Le dual d'un e.v.n est toujours complet : Rappelons que le dual E' d'un e.v.n est l'ensemble des formes linéaires continues sur E*

$$E' = \{T : E \to \Bbbk,\ T \text{ linéaire continue}\}.$$

Preuve. Supposons que (T_n) soit une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$. Montrons d'abord que, pour tout $x \in E$, la suite $(T_n(x))$ est une suite de Cauchy dans F. Si $x = 0_E$, alors $T_n(x) = 0_F$, et le résultat est évident. Supposons maintenant que $x \neq 0$. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme (T_n) est de

Cauchy, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0,\ \forall p \geq 0,\ \ \|T_n - T_{n+p}\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \frac{\varepsilon}{\|x\|_E}.$$

Par conséquent

$$\forall n \geq n_0,\ \forall p \geq 0,\ \ \|T_n(x) - T_{n+p}(x)\|_F \leq \|T_n - T_{n+p}\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E \leq \frac{\varepsilon}{\|x\|_E} \|x\|_E = \epsilon.$$

Donc la suite $(T_n(x))$ est de Cauchy dans l'espace complet E, elle admet une limite notée $T(x)$.

Comme les T_n sont linéaires, donc T l'est aussi. Montrons que T est continue. On note aussi que la suite (T_n) est de Cauchy, la suite de nombres réels $(\|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)})$ l'est aussi, puisque

$$\left| \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} - \|T_{n+p}\|_{\mathcal{L}(E,F)} \right| \leq \|T_n - T_{n+p}\|_{\mathcal{L}(E,F)} \quad \forall n, p \geq 0.$$

Donc, comme $\mathbb{R}$ est complet, la suite $(\|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)})$ converge et, donc elle est bornée par une constante M. On a alors

$$\|T_n(x)\|_F \leq \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E \leq M. \|x\|_E \ \ \forall x \in E,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

On fait tendre n vers $+\infty$, on obtient donc $T_n(x) \to T(x)$ et la norme $\|.\|_E$ est continue,

$$\|T(x)\|_F \leq M. \|x\|_E\,,\ \forall x \in E$$

cela montre que T est continue.

Montrons finalement que T_n tend vers T pour la norme $\|.\|_{\mathcal{L}(E,F)}$: fixons $\varepsilon > 0$ et soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0,\ \forall p \geq 0,\ \ \|T_n - T_{n+p}\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \varepsilon$$

(un tel n_0 existe puisque (T_n) est de Cauchy). On a alors

$$\|T_n(x) - T_{n+p}(x)\|_F \leq \epsilon,\ \forall n \geq n_0, \forall p \geq 0,\ x \in E \text{ avec } \|x\|_E \leq 1.$$

On fait que tendre p vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus : $T_{n+p}(x)$ tend vers $T(x)$, ce qui donne

$$\|T_n(x) - T(x)\|_F \leq \epsilon,\ \forall n \geq n_0,\ x \in E \text{ avec } \|x\|_E \leq 1.$$

Donc

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup\{\|T_n(x) - T(x)\|_F \mid x \in E, \|x\|_E \leq 1\} \leq \epsilon,\ \forall n \geq n_0.$$

En conclusion, la suite de Cauchy (T_n) tend vers T, cela prouve que $\mathcal{L}(E,F)$ est de Banach.

□

1.1.3 Espace de Hilbert

Les espaces de Hilbert sont la généralisation naturelle en dimension infinie des espaces euclidiens (ou hermitiens) $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$).

Produit scalaire

Définition 1.1.12 *Soit E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel, on appelle produit scalaire sur E toute application sesquilinéaire, hermitienne, définie positive, i.e*

i) B est une forme sesquilinéaire sur E :

· *Pour tout $y \in E$, l'application $x \to B(x,y)$ est linéaire.*

· *Pour tout $x \in E$, l'application $y \to B(x,y)$ est anti-linéaire*

$$(B(x, \alpha y + y') = \overline{\alpha} B(x,y) + B(x,y'), \forall x, y, y' \in E, \forall \alpha \in \mathbb{C}).$$

ii) B est hermitienne: $B(x,y)=\overline{B(y,x)} \quad \forall (x,y)\in E\times E$.

iii) B est définie positive: $B(x,y)\geq 0$, $\forall x\in E$ *et* $B(x,x)=0 \Longleftrightarrow x=0_E$.

Remarque 1.1.13 *Si B est hermitienne, alors $B(x,x)$ est réel puisque $B(x,x)=\overline{B(x,x)}$.*

Au lieu de B on note un produit scalaire $\langle .,.\rangle$.

Définition 1.1.14 *Si E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on appelle espace préhilbertien réel le couple (E,B). Si E est de dimension finie l'espace est dit euclidien.*

Si E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, on appelle espace préhilbertien complexe le couple (E,B). Si E de dimension finie, l'espace est dit hermitien.

Proposition 1.1.15 *Soit E un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire $\langle .,.\rangle$ alors si on pose $\|x\|=(\langle x,x\rangle)^{\frac{1}{2}}, \forall x\in E$,on a*

i) $\|x+y\|^2=\|x\|^2+2\Re e(\langle x,y\rangle)+\|y\|^2$, $\forall x,y\in E$.

ii) (Cauchy-Schwarz) $|\langle x,y\rangle|\leq \|x\|.\|y\|$, $\forall x,y\in E$.

iii)(Identité du parallélogramme) $2(\|x\|^2+\|y\|^2)=\|x+y\|+\|x-y\|, \forall x,y\in E$.

iv) $\|.\|$ *définit une norme sur E.*

Preuve. i) Si $x,y\in E$ alors

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= <x+y,x+y>=<x,x+y>+<y,x+y>\\
&= <x,x>+<x,y>+<y,x>+<y,y>\\
&= \|x\|^2+<x,y>+\overline{<x,y>}+\|y\|^2\\
&= \|x\|^2+2\Re e(\langle x,y\rangle)+\|y\|^2 .
\end{aligned}$$

ii) (Cauchy-Schwarz) Soient $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \|x + \lambda y\|^2 =< x + \lambda y, x + \lambda y >=< x, x > +2\lambda < x, y > +\lambda^2 < y, y >$$

$$\Delta \leq 0, |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| . \|y\|$$

iii) (Identité du parallélogramme) Soient $x, y \in E$ on a

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\Re e(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\Re e(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

iv) $\|.\|$ définit une norme sur E .Nous montrons que l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\Re e(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| . \|y\| + \|y\|^2 \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

$\square$

Exemple 1.1.16 *1) Sur $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire usuel est défini par*

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

2) De même sur $\mathbb{C}^n$, le produit scalaire usuel est défini par

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}, \forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Définition 1.1.17 *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet (pour la distance associée à sa norme).*

Exemple 1.1.18 *1) $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire*

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

est un espace préhilbertien complet .

2) L'espace ℓ^2 des suites de carrée sommable est un espace de Hilbert

$$\ell^2 = \left\{ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < +\infty \right\}, < u, v >= \sum_{n=1}^{\infty} u_n \overline{v_n}.$$

1.1.4 Théorème de projection

Dans cette section, nous supposerons que $(E, <, >)$ un est espace préhilbertien complet, c-à-d un espace de Hilbert. Nous noterons généralement par H les espaces de Hilbert. Le théorème de la projection est l'outil-clé pour l'étude des espaces de Hilbert

Définition 1.1.19 *(Ensemble convexe) Soit E un espace vectoriel. On dit qu'un sous-ensemble C de E est convexe si*

$$\forall x, y \in C,\ \forall \lambda \in [0\ 1],\ \lambda x + (1-\lambda) y \in C.$$

Remarque 1.1.20 *Une intersection quelconque de convexe est convexe [1]*

Définition 1.1.21 *(Fonction convexe) Soit E un espace vectoriel et C un sous-ensemble convexe de E, une application $f : C \to \mathbb{R}$ est convexe si*

$$\forall x, y \in C,\ \forall \lambda \in [0\ 1],\ f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Si $f : C \to \mathbb{R}$ est convexe alors pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in E \setminus f(x) \leq c\}$ est convexe .

Théorème 1.1.22 ***(de projection cas réel)*** *Si H est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $< .,. >$ et F est un sous-ensemble convexe complet non vide de H, pour tout $x \in H$ il* *existe un unique point $\Pi_F(x) \in F$ (appelé projeté de x sur F) tel que*

$$\|x - \Pi_F(x)\| = \min_{y \in F} \|y - x\| .$$

De plus $\Pi_F(x)$ est caractérisé par l'inégalité suivante

$$< x - \Pi_F(x), y - \Pi_F(x) >\leq 0 \forall y \in F.$$

Théorème 1.1.23 *(**Projection sur un SEV**) On suppose que H est un espace de Hilbert et que F est un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors l'application $x \to \Pi_F(x)$ vérifie*

i) Elle est linéaire continue, de norme 1 si F n'est pas réduit à $\{0_H\}$.

ii) $\Pi_F(x) \circ \Pi_F(x) = \Pi_F(x)$

iii) $< x - \Pi_F(x), y > = 0$, $\forall y \in F$. Dans ce cas $\Pi_F(x)$ est appellée la projection orthogonale de x sur F.

1.1.5 Orthogonalité

Définition 1.1.24 *Soit H un espace de Hilbert. On dit que deux vecteurs x et y de H sont orthogonaux si*

$$< x, y >= 0.$$

On note alors $x \perp y$.

Remarque 1.1.25 *Si x est orthogonal à tous vecteur de H alors $x = 0$.*

Définition 1.1.26 *(**Orthogonal d'une partie**) Soit A un sous-ensemble non vide de H, L'orthogonal de A est le sous-ensemble de H que l'on note par $A^\perp$ telle que*

$$A^\perp = \{x \in H \ \ \backslash < x, y >= 0, \ \forall y \in A\} .$$

Proposition 1.1.27 *Soit A un sous-ensemble non vide de H.*

i) $A^{\perp}$ est toujours un sous-espace vectoriel fermé de H.

ii) $H^{\perp} = \{0_H\}$ et $\{0_H\}^{\perp} = H$.

iii) Si $A \subset B$, alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.

iv) $(\overline{Vect(A)})^{\perp} = A^{\perp}$ (où $\overline{Vect(A)}$ la fermeture de $Vect(A)$).[1]

1.1.6 Forme linéaire

Si a est un vecteur d'un espace de Hilbert, alors l'application $\varphi : H \to \mathbb{C}$ est linéaire continue telle que $\varphi(u) = \langle u, a\rangle$. La réciproque est vraie dans un espace de Hilbert, au sens où toute forme $\varphi : H \to \mathbb{C}$ est représentée de cette manière.

Théorème 1.1.28 ***(Ficher-Riesz)*** *Soit H un espace de Hilbert. Pour toute forme linéaire continue φ sur H, il existe un unique vecteur a de H tel que*

$$\varphi(x) = \langle a, x\rangle, \forall x \in H$$

Alors φ est une forme linéaire continue sur H, et $\|\varphi\|_{\mathcal{L}(H,\mathbb{R})} = \|a\|_H$.

Preuve. Pour la continuité, on a

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &= |\langle a, x\rangle| \leq \|x\| . \|a\| \\ &\Rightarrow \|\varphi\| \leq \|a\| \quad \text{(donc } \varphi \text{ est continue).} \end{aligned}$$

D'autre part: pour $u = \frac{a}{\|a\|}$, $a \neq 0$ on a

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \varphi(\frac{a}{\|a\|}) = \langle a, \frac{a}{\|a\|}\rangle = \|a\| \\ &\Rightarrow \|\varphi\| \geq \|a\| . \end{aligned}$$

□

Remarque 1.1.29 *Toute forme linéaire sur H est de type φ, pour un a unique de H.*

1.1.7 Systèmes orthonormés

Définition 1.1.30 *Un système $\{x_i\}_{i\in I}$ de vecteurs d'un espace préhilbertien est un système orthogonal si pour tout $i \neq j$ on a $< x_i, x_j >= 0$.*

Définition 1.1.31 *Un système orthogonal $\{x_i\}_{i\in I}$ de vecteurs d'un espace préhilbertien E est un système orthonormé si $\|x_i\| = 1$ pour tout $i \in I$.*

Exemple 1.1.32 *Dans $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) muni du produit scalaire le système $\{e_1, ..., e_n\}$, où*

$$e_k = (\delta_{k,n})_{k\in\{1,\dots,n\}} \text{ et } \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

est un système orthonormé.

Théorème 1.1.33 ***(Pythagore)*** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, une famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ orthogonale finie de vecteur de E vérifier la relation de Pythagore*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 .$$

Preuve. On a

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 =< \sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} x_i >= \sum_{j\neq i} < x_i, x_j > + \sum_{i=1}^{n} < x_i, x_i >= 0 + \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 .$$

□

Proposition 1.1.34 *Soit* $\{e_i\}_{i\in I}$ *est un système orthonormé d'un espace préhilbertien* E *où* I *est un ensemble fini.*

On pose $F = Vect\{e_i\}_{i\in I}$ *Alors pour tout* $x, y \in E$ *on a :*

1) $\Pi_F(x) = \sum_{i\in I} < x, e_i > e_i$.

2) $\|\Pi_F(x)\|^2 = \sum_{i\in I} |< x, e_i >|^2$.

3) $< \Pi_F(x), y >= \sum_{i\in I} < x, e_i > \overline{< y, e_i >}$.

Preuve. Pour tout $x \in E$, on pose $\Pi x = \sum_{i\in I} < x, e_i > e_i$. Alors pour tout $y \in E$ on a

$$\begin{aligned} < \quad \Pi x, y > &=< \sum_{i\in I} < x, e_i > e_i, y > \\ &= \sum_{i\in I} < x, e_i > \overline{< y, e_i >} \end{aligned}$$

en particulier, pour tout $j \in I$, $< \Pi x, e_j >=< x, e_j >$ d'où $< x - \Pi x, e_j >= 0$ par suit $< x - \Pi x, y >= 0$ pour tout $y \in F$, d'après le théorème de projection $\Pi = \Pi x$. D'ou $\|\Pi_F(x)\|^2 =< \Pi_F(x), \Pi_F(x) >= \sum_{i\in I} < \Pi_F(x), e_i >< e_i, \Pi_F(x) >= \sum_{i\in I} < x, e_i > \overline{< x, e_i >} = \sum_{i\in I} |< x, e_i >|^2$. □

Proposition 1.1.35 *(**L'inégalité de Bessel**) Soit* $\{e_i\}_{i\in I}$ *un système orthonormé d'un préhilbertien* E*. Alors*

a) pour tout $x \in E$ *et tout sous-ensemble fini* $J \subset I$ *on a :*

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in J} |< x, e_i > e_i|^2 + \left\| x - \sum_{i\in J} < x, e_i > e_i \right\|^2.$$

b) pour tout $x \in E$*, la famille* $(|< x, e_i >|)^2_{i\in I}$ *est sommable dans* $\mathbb{R}$ *est on a l'inégalité de **Bessel***

$$\sum_{i\in I} |< x, e_i >|^2 \leq \|x\|^2.$$

Preuve. a) On écrit $y = \sum_{i \in J} < x, e_i > e_i$ et $z = x - y$. Alors $y \perp z$ et comme $x = y + z$ on aura

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 .$$

b) D'après a), pour tout sous-ensemble $J \subset I$ on a

$$\sum_{i \in J} |< x, e_i >|^2 = \left\| \sum_{i \in J} < x, e_i > e_i \right\|^2 \leq \|x\|^2 ,$$

d'où la famille $(|< x, e_i >|)^2_{i \in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$ et $\sum_{i \in I} |< x, e_i >|^2 \leq \|x\|^2 .$ $\square$

Corollaire 1.1.36 *Soit H un espace de Hilbert et $\{e_i\}_{i \in I}$ un système orthonormé. Alors pour tout $x \in H$, la famille orthonormé $(|< x, e_i > e_i|)_{i \in I}$ est sommable est $\left\| \sum_{i \in I} < x, e_i > e_i \right\|^2 \leq \|x\|^2 .$*

Bas hilbertienne

Dans les espaces de Hilbert de dimension infinie, il n'existe pas de base orthonormée. Cette notion sera remplacée avantageusement par celle d'une base hilbertienne.

Définition 1.1.37 *Soit E un espace préhilbertien, une famille $\{e_i\}_{i \in I}$ de E est une base hilbertienne de E si elle est orthonormée et totale.*

Remarque 1.1.38 *Si H est un espace de Hilbert alors le système orthonormée $\{e_i\}_{i \in I}$ est une base hilbertienne si et seulement si*

$$\begin{cases} < x, e_i >= 0 \\ pour \ \ tout \ i \in I \end{cases} \Rightarrow x = 0.$$

En effet si $< x, e_i >= 0$ *pour tout* $i \in I$, *alors* $x \in (Vect\{e_i\}_{i\in I}\ )^{\perp} = H^{\perp} = \{0\}$

Réciproquement, la condition entraîne que

$$(Vect\{e_i\}_{i\in I})^{\perp} = \overline{(Vect\{e_i\}_{i\in I})}^{\perp} = \{0\}\ .comme\ H = (Vect\{e_i\}_{i\in I})^{\perp} \oplus \overline{(Vect\{e_i\}_{i\in I})}^{\perp},$$

on aura nécessairement $H = \overline{(Vect\{e_i\}_{i\in I})}$.

Corollaire 1.1.39 *Tout espace euclidien ou hermitien admet une base orthonormée.*

Définition 1.1.40 *Soit* H *un espace de Hilbert on dit qu'une famille* A *de* H *est* ***totale*** *si l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par* A *est égale à* H *tout entier* $\overline{Vect(A)} = H$ *ou* A *est totale si et seulement si* $A^{\perp} = \{0_H\}$.

Théorème 1.1.41 *(Caractérisation des Bases de hilbertiennes) Soit* H *un espace de Hilbert et* $\{e_i\}_{i\in I}$ *une famille orthonormée les conditions suivantes sont équivalentes:*

1) $\{e_i\}_{i\in I}$ *est une base hilbertienne.*

2) Pour tout $x \in H$, $x = \sum_{i\in I} < x, e_i > e_i$.

3) pour tout $x, y \in H$, $< x, y >= \sum_{i\in I} < x, e_i >< e_i, y >= \sum_{i\in I} < x, e_i > \overline{< y, e_i >}$.

4) Tout $x \in H$, *satisfait l'identité de Parceval*

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |< x, e_i >|^2 .$$

Preuve. 1) $\Rightarrow$ 2) Soient $x \in H$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe $y_\varepsilon \in Vect\{e_i\}_{i\in I}$ tel que $\|x - y_\varepsilon\| < \varepsilon$. Il existe donc $J_\varepsilon \subset I$, J_ε fini et $\lambda_i \in \mathbb{k}, i \in J_\varepsilon$ tel que $y_\varepsilon = \sum_{i\in J_\varepsilon} \lambda_i e_i$. On pose $F_\varepsilon = Vect\{e_i\}_{i\in J_\varepsilon}$, alors $\dim F_\varepsilon < +\infty$ et $\Pi_{F_\varepsilon}(x) = \sum_{i \in J_\varepsilon} < x, e_i > e_i$, alors $\left\| x - \sum_{i \in J_\varepsilon} < x, e_i > e_i \right\| \leq \|x - y_\varepsilon\| \leq \varepsilon$. D'où la famille $\sum_{i \in I} < x, e_i > e_i$ est sommable et $\sum_{i \in I} < x, e_i > e_i = x$.

2) $\Rightarrow$ 3) Soient $x \in H, \varepsilon > 0$. Soit $y \in H - \{0\}$ alors il existe $J_\varepsilon \subset I$, J_ε finie, tel que

$$\left\| x - \sum_{i \in J_\varepsilon} < x, e_i > e_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{\|y\|}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \left| < x, y > - \sum_{i \in J_\varepsilon} < x, e_i > \overline{< y, e_i >} \right| &= \left| < x, y > - < \sum_{i \in J_\varepsilon} < x, e_i > e_i, y > \right| \\ &\leq \left\| x - \sum_{i \in J_\varepsilon} < x, e_i > e_i \right\| . \|y\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

3) $\Rightarrow$ 4) Il suffit de prendre $y = x$.

4) $\Rightarrow$ 1) si $x \in \overline{(Vect\,\{e_i\}_{i \in I})}^{\perp}$, d'aprés 4), $\|x\| = 0$, i.e $x = 0$, ceci entraîne que $\overline{(Vect\,\{e_i\}_{i \in I})}^{\perp} = \{0\}$ et donc

$$\overline{(Vect\,\{e_i\}_{i \in I})}^{\perp} = \{0\}^{\perp}.$$

$\square$

Base de Riesz

Définition 1.1.42 *une base $\{f_n,\, n \in \Lambda\}$ de l'espace de Hilbert séparable H est une base de Riesz si il existe un opérateur linéaire borné $T : H \to H$, inversible et à inverse borné, et une base orthonormée $\{e_n,\, n \in \Lambda\}$, tels que*

$$f_n = Te_n \qquad \forall n \in \Lambda.$$

Remarquons immédiatement que si $\{f_n,\, n \in \Lambda\}$ est une base de Riesz de H, alors on a

$$\|f_n\| = \|Te_n\| \leq \|T\|.$$

De même on déduit de $1 = \|e_n\| = \|T^{-1}f_n\| \leq \|T^{-1}\| . \|f_n\|$ que

$$\frac{1}{\|T^{-1}\|} \leq \|f_n\| \leq \|T\| .$$

Les résultat suivant donne une caractérisation des bases de Riesz.

Théorème 1.1.43 *Soit H un espace de Hilbert séparable. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) $\{f_n, n \in \Lambda\}$ est une base de Riesz de H.

2) Il existe dans un H un autre produit scalaire, noté $< .,. >_1$, équivalent à $< .,. >$, (au sens où les normes correspondantes), et tel que la famille $\{f_n,\ n \in \Lambda\}$ soit une base orthonormée par rapport à ce produit scalaire.

3) Il existe deux constantes réelles $0 < A < B < \infty$ telles que pour tout famille $\{c_1, c_2, c_3, ..., c_N\} \in \mathbb{C}^N$, on ait

$$A \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n f_n \right\|^2 \leq B \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \qquad (1)$$

la famille $\{f_n\}$ est complète dans H.

Preuve. $1 \Rightarrow 2)$ Supposons que $\{f_n, n \in \Lambda\}$ soit une base de Riesz de H, il existe S, borné tel que pour tout n, $e_n = Sf_n$. Soit $< .,. >$ définie par

$$< x, y >_1 = < Sx, Sy >, \quad x, y \in H.$$

On vérifie immédiatement que la famille $\{f_n\}$ est orthonormée par rapport à ce produit scalaire. De plus, on a $\|x\|_1 = \|Sx\| \leq \|S\| . \|x\|$, et $\|x\| = \|S^{-1}x\|_1 \leq \|S^{-1}\| \|x\|$. Donc les produits scalaires sont équivalents.

$2 \Rightarrow 3$) Soit $< .,. >_1$le produit scalaire équivalent, soit $f \in H$ telle que $< f, f_n >= 0$ pour tout n. Alors on a $< f, f_n >_1= 0$ pour tout n, ce qui implique $f = 0$ donc la famille $\{f_n\}$ est complète. Soit maintenant $x \in H$. On sait que $m \|x\|_1 \leq \|x\| \leq M \|x\|_1$, où m, M sont deux constantes indépendantes de x. Si on prend un x de la forme $x = \sum_{n=1}^N c_n f_n$, alors $\|x\|_1^2 = \sum_{n=1}^N |c_n|^2$ et on à immédiatement la propriété annoncée.

$3 \Rightarrow 1$) Soit $\{e_n\}$ une base orthonormée de H. Alors il existe deux opérateurs linéaires T, S bornés grâce a (1) tels que pour tout $n, e_n = Sf_n$ et $f_n = Te_n$. Donc ST est l'opérateur identité sur H. Mais la famille $\{f_n\}$ étant complète, TS est aussi identité sur H. Donc T est inversible, ce qui conclut la preuve. $\square$

Remarque 1.1.44 *Une base de Riesz possède automatiquement une base biorthogonal (ou base dual) $\left\{\widetilde{f_n}\right\}$, tel que*

$$< f_n, \widetilde{f_m} >= \delta_{m,n},$$

qui est également une base de Riesz du même espace. En effet, avec les notations plut haut, considérons l'adjoint S^* de $S = T^{-1}$, et posons

$$\widetilde{f_n} = S^* e_n.$$

Alors on a immédiatement $< f_n, \widetilde{f_m} >=< STe_n, e_m >= \delta_{m,n}$. De plus, pour tous $f \in H$, on peut écrire

$$f = \sum_n < f, \widetilde{f_n} > f_n = \sum_n < f, f_n > \widetilde{f_n}.$$

Par exemple, en écrivant $T^*f = \sum_n < T^*f, e_n > e_n = \sum_n < f, f_n > e_n$, *on obtient directement la seconde égalité.*

1.1.8 Espaces L^p

En mathématiques, un espace L^p est un espace vectoriel de classes des fonctions dont la puissance d'exposant p est intégrable au sens de Lebesgue, où p est un nombre réel strictement positif. Le passage à la limite de l'exposant aboutit à la construction des espaces L^∞ de fonctions bornées. Les espaces L^p sont appelés espaces de Lebesgue.

Préliminaires

Définition 1.1.45 *(**mesure**) Soit* (E, T) *un espace mesurable tel que* E *un ensemble quelconque et* T *est une tribu .*

On appelle mesure sur (E, T) *tout application* $\mu : B \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *telle que :*

i) $\mu(\phi) = 0$.

ii) Pour tout $A_n \in T$, *deux à deux disjoints:* $\mu(A_n) = \sum_n \mu(A_n)$.

Définition 1.1.46 *(**Fonction mesurable**) Soit* $(X, A), (Y, B)$ *deux espaces munis de tribus. Une fonction* $f : X \to Y$ *est dite* (A, B)*-mesurable si et seulement si*

$$\forall b \in B, f^{-1}(b) \in A.$$

Définition 1.1.47 *(**Fonction intégrable**) On dit qu'une fonction mesurable* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *est intégrable au sens de Lebesgue si*

$$\int_\Omega |f| < \infty.$$

Définition 1.1.48 *(**L'espace** $C_c(\Omega)$) Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est à support compact s'il existe un compact $k \subseteq \Omega$ tel que f vaut zéro sur $\Omega \backslash k$. Nous définissons l'ensemble des fonctions continues à support compact sur Ω*

$$C_c(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ est continue et à support compact}\}.$$

Nous appelons le support de f dans Ω l'ensemble

$$supp_\Omega(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}} \subseteq \Omega.$$

Espace $\mathcal{L}^p(\Omega)$ Soit Ω un ouverete de $\mathbb{R}^n$ et p un réel de $[1, +\infty[$.

Définition 1.1.49 $\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{f \text{ mesurable sur } \Omega \ , \int_\Omega |f|^p < +\infty\right\}.$

Fonction égale presque partout

Définition 1.1.50 *Soient f et g deux fonctions mesurables. On dit que f et g sont égales presque partout si*

$$\{x \in \Omega, \backslash \ f(x) \neq g(x)\},$$

est un ensemble négligeable.

Deux théorèmes importants

Théorème 1.1.51 *Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^1(\Omega)$ égale presque partout. Alors*

$$\int_\Omega f = \int_\Omega g.$$

Théorème 1.1.52 *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ telle que $\int_\Omega |f| = 0$. Alors f est nulle presque partout sur Ω.*

Espaces $L^p(\Omega)$ et $L^p_{loc}(\Omega)$

On généralise ici les espaces précédemment présentés.

Soit p un réel, $p \geq 1$.

Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.1.53 *L'espace vectoriel $L^p(\Omega)$ est le quotient de $\mathcal{L}^p(\Omega)$ par la relation d'équivalence égalité presque par tout dans Ω.*

Autrement dit

$$L^p(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} f,\ \textit{définie sur } \Omega \textit{ à un ensemble négligeable} \\ \textit{près, telles que} \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty \end{array} \right\}.$$

Théorème 1.1.54 *Muni de la norme définie par*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

l'espace vectoriel $L^P(\Omega)$ est un espace de Banach

Théorème 1.1.55 ***(inégalité de Hölder)*** *Soit $p \in \mathbb{R}, 1 < p < +\infty$, soit $q \in]1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $f \in L^P(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$. Alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et $\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^P(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$.*

Remarque 1.1.56 *Pour $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

On suppose Ω borné. Soit $q > p \geq 1$. Alors $L^q(\Omega) \subset L^P(\Omega)$.

Espace $L^p_{loc}(\Omega)$

Définition 1.1.57 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On dit que f est localement intégrable sur Ω si, pour tout compact k inclus dans Ω, la fonction f est intégrable sur k. On note*

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ f;\ f \in L^1_{loc}(\Omega) \textit{ pour tout compact } k \subset \Omega \right\},$$

l'espace vectoriel des fonctions localement intégrables. De même

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{f;\ f \in L^p_{loc}(\Omega) \text{ pour tout compact } k \subset \Omega\}.$$

Remarque 1.1.58 *On a bien sur* $L^P(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$

Proposition 1.1.59 *Soit* $q > p \geq 1$*. Alors* $L^q_{loc}(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$.

Soit $p \geq 1$*. Alors* $L^P\left(\mathbb{R}^d\right) \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^d) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 1.1.60 *(Convergence dans* $L^p_{loc}(\Omega)$*). Soit* f_n *une suite de* $L^p_{loc}(\Omega)$ *et* f *de* $L^p_{loc}(\Omega)$ *si pour tout compact* $k \subset \Omega$*, la suite* $f_{n\backslash k}$ *converge vers* $f_{\backslash k}$ *dans* $L^p_{loc}(k)$.

Espace $L^\infty(\Omega)$

Définition 1.1.61 *On dit qu'une fonction* f *est essentiellement bornée sur* Ω *si il existe une réel positif* M *tel que*

$$\mu(\{x \in \Omega;\ |f(x)| \geq M\}) = 0.$$

Remarque 1.1.62 *En dehors d'un ensemble de mesure nulle, on a* $|f(x)| < M$.

Théorème 1.1.63 *Pour* $f \in L^\infty(\Omega)$*, on a*

$$\text{pour presque tout } x \in \Omega,\ \ |f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)},$$

et $\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ *est le plus petite réel satisfaisant cette propriété.*

Théorème 1.1.64 *Si* $f \in L^1(\Omega)$ *et* $g \in L^\infty(\Omega)$*, alors le produit* $f.g$ *est dans* $L^1(\Omega)$ *et*

$$\|f.g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Convolution dans $L^1(\Omega)$

Définition 1.1.65 *Soient f et g dans $L^1(\Omega)$. La fonction notée $f \star g$ définie presque partout sur Ω par*

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy,$$

est appelée la convolution de f et g (ou le produit de convolution). La fonction $f \star g$ est dans $L^1(\Omega)$ et on a

$$\|f \star g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^1(\Omega)} \,.$$

Densité

Théorème 1.1.66 *Pour tout $1 \leq p < \infty$, l'espace $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$; c'est à dire que pour tout fonction $f \in L^p(\Omega)$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $f_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que*

$$\|f - f_\varepsilon\|_{L^p} < \varepsilon.$$

Remarque 1.1.67 *Le théorème ci-dessus n'est pas vrai si $p = \infty$.*

En effet, si $f_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ converge vers une fonction f dans $L^\infty(\Omega)$, alors f est continue. En effet

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^\infty} < \varepsilon,$$

et donc f_ε converge uniformément vers f, ce qui nous assure la continuité de f.

Ainsi une fonction dans L^∞ discontinue sur un ensemble de mesure non nulle, ne possède aucune suite $f_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ converge vers f dans L^∞.

Chapitre 2

Fonction d'une variable complexe

2.1 Série entière

2.1.1 Généralités

Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ on pose

$$\begin{aligned} D(z_0, r) &= \{z \in \mathbb{C},\ \ |z - z_0| < r\}\,,\ D'(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C},\ \ |z - z_0| \leq r\}\,, \\ C(z_0, r) &= \{z \in \mathbb{C},\ \ |z - z_0| = r\}\,. \end{aligned}$$

On dit que $D(z_0, r)$ (respectivement $D'(z_0, r)$, $C(z_0, r)$) est le disque ouvert (respectivement disque fermé, cercle) de centre

z_0 et de rayon r.

Définition 2.1.1 *On appelle série entière (de variable complexe* z *)toute série de fonction de la* *forme* $\sum f_n(n)$ *où*

$$\begin{aligned} f_n &: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z &\rightarrow a_n z^n. \end{aligned}$$

où $a_n \in \mathbb{C}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *On dit que* a_n *est le coefficient d'indice* n *de la série, et que* a_0 *en est le terme constant.*

2.1.2 Rayon de convergence

Définition 2.1.2 *On appelle rayon de convergence* R *de la série entière* $\sum a_n z^n$

$$R = \sup\left\{ r \geq 0 : \sum_n |a_n|\, r^n < +\infty \right\}$$

Le rayon de convergence est bien défini il peut valoir 0 *ou* $+\infty$ *.Le rayon de convergence peut aussi être obtenue comme suit.*

Lemme 2.1.3 *(**Abel**)Le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$ *est*

$$R = \sup\left\{ r \geq 0 : \sup_n |a_n|\, r^n < +\infty \right\}.$$

Preuve. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ et

$$R_0 = \sup\left\{ r \geq 0 : \sup_n |a_n|\, r^n < +\infty \right\},$$

soit $r_0 < R_0$ alors il existe M tel que $|a_n|\, r_0^n \leq M$ et donc si $r < r_0$ on a $|a_n|\, r^n = |a_n|\, r_0^n (\frac{r}{r_0})^n \leq M(\frac{r}{r_0})^n$ et donc $\sum_n |a_n|\, r^n < +\infty$ puisque son terme générale est majoré par celui d'un série géométrique convergente on a donc $R \geq r_0$ et donc en passant a la limite $r_0 \rightarrow R_0^-$ il vient bien que $R \geq R_0$. Si $r < R$ par définition $\sum_n |a_n|\, r^n < +\infty$ est bornée si bien que $R \leq R_0$. $\square$

Proposition 2.1.4 *Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, on a alors*

1) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ est absolument convergente sur le disque fermé $|z| \leq r$.

2) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ est divergente.

Preuve. 1) Soit $r < R$ et $r_0 \in]r\ R[$ il existe M tel que $|a_n|\, r_0^n \leq M$ pour tout n .

Ainsi

$$\sup_{n \in \overline{D}(o,r)} |a_n z^n| \leq |a_n|\, r^n \leq M(\frac{r}{r_0})^n,$$

ce qui montre la convergence absolument sur $D'(o,r)$.

2) Si $|z| > R$, $|a_n z^n|$ n'est pas bornée et donc en particulier le terme générale de la série $\sum a_n z^n$ ne tend pas vers 0, la série diverge. $\square$

Proposition 2.1.5 *(**Hadamard**)– Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est donnée par*

$$\frac{1}{R} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$$

1) En un point z tel que $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée.

2) Si $|z| = R$, on ne peut rien dire a priori de la série $\sum a_n z^n$.

3) Les séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum n a_n z^{n-1}$, $\sum |a_n|\, z^n$, $\sum \lambda a_n z^n$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ont même rayon de convergence.

4) Dans le cas d'une série entière de la variable réelle, on parle de l'intervalle de convergence $]-R, R[$ ou lieu de disque de convergence.

2.2 Fonction analytique

Une fonction analytique est une fonction qui se développe en série entière au voisinage de chaque point

Définition 2.2.1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ et $z_0 \in U$. On dit que*

1) f est analytique en z_0 s'il existe $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset U$ et une série entière $\sum_n a_n z^n$ de rayon de convergence au mois égale à r telle que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \ \forall z \in D(z_0, r).$$

2) f est analytique sur U si f est analytique en chaque point de U.

Exemples 2.2.2 *1) Tout polynôme est localement somme de son développement de Taylor*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{p^{(n)}}{n!} (z - z_0),$$

est analytique en tout point de $\mathbb{C}$.

2) Soit $f(z) = \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C} \backslash \{0\}$ car pour $z \neq 0$, $Z = z - z_0$, on a pour $\left| \frac{Z}{z_0} \right| < 1$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{Z + z_0} = \frac{1}{z_0 (\frac{Z}{z_0} + 1)} \\ &= \frac{1}{z_0} \sum_{n \geq 0} (\frac{-Z}{z_0})^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

avec rayon de convergence $R = |z_0|$.

Théorème 2.2.3 *La somme d'une série entière $f(z) = \sum a_n z^n$ de rayon de convergente $R > 0$ et analytique dans le disque $D : |z| < R$. Elle est dérivable en tout point de D et son développement* *au voisinage de* 0 *est donné par sa série de Taylor*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(z)}{n!} z^n,$$

où

$$f^n(z) = \sum_{n \geq p} n(n-1)...(n-p+1) a_n z^{n-p}$$

désigne la série "dérivée terme à terme" de la série f *possédant le même rayon de convergence, et représentant la dérivée d'ordre* p *au sens complexe.*

2.3 Fonctions holomorphes

Dérivée d'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction et $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que la fonction f admet une dérivée au point z_0 si le nombre complexe $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ tend vers une limite finie lorsque z tend vers z_0.

Autrement dit, cela veut dire qu'il existe un nombre complexe, noté $f'(z_0)$, et appelé la dérivée de f en z_0 tel que

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| \text{ tend vers } 0, \text{ si } |z - z_0| \text{ tend vers } 0.$$

Condition de Cauchy-Rieman

On va chercher dans quelles conditions une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ admet une dérivée en un point $z_0 \in \mathbb{C}$.

Posons $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\begin{aligned} f(z) &= P(x, y) + iQ(x, y), f(z_0) = P_0 + iQ_0, \\ z - z_0 &= \Delta x + i\Delta y. \end{aligned}$$

Dire que f admet en $z_0$une dérivée $f'(z_0) = A + iB$, c'est dire que

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, |\Delta x + \Delta y| < \eta \Longrightarrow \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon.$$

On a alors

$$|(P + iQ) - (P_0 + iQ_0) - (\Delta x + i\Delta y)(A + iB)| < \eta\varepsilon,$$

$$|(P - P_0 - A\Delta x + B\Delta y) + i(Q - Q_0 - B\Delta x - A\Delta y)| < \eta\varepsilon.$$

Donc en séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient les conditions :

$$\begin{aligned} P - P_0 - A\Delta x + B\Delta y &< \eta\varepsilon, \\ Q - Q_0 - B\Delta x - A\Delta y &< \eta\varepsilon. \end{aligned}$$

qui signifient que P et Q sont dérivables en (x_0, y_0) et que leurs dérivées partielles vérifient

$(\frac{\partial P}{\partial x})_{x=x_0,y=y_0} = A$ $(\frac{\partial P}{\partial Y})_{x=x_0,y=y_0} = -B$

$(\frac{\partial Q}{\partial x})_{x=x_0,y=y_0} = B$ $(\frac{\partial Q}{\partial Y})_{x=x_0,y=y_0} = A$

On alors

$$(\frac{\partial P}{\partial x})_{z_0} = (\frac{\partial Q}{\partial y})_{z_0} \quad et \quad (\frac{\partial P}{\partial y})_{z_0} = -(\frac{\partial Q}{\partial x})_{z_0}.$$

ce sont conditions de **Cauchy.**

La dérivée de f en z_0 est alors donnée par :

$$f'(z_0) = (\frac{\partial P}{\partial x})_{z_0} + i(\frac{\partial Q}{\partial x})_{z_0} = (\frac{\partial P}{\partial x})_{z_0} - i(\frac{\partial P}{\partial y})_{z_0} = (\frac{\partial Q}{\partial y})_{z_0} + i(\frac{\partial Q}{\partial x})_{z_0} = (\frac{\partial Q}{\partial y})_{z_0} + i(\frac{\partial P}{\partial y})_{z_0}.$$

Réciproquement, si ces conditions sont réalisées, alors les quantités

$$\left|\frac{P-P_0-A\Delta x+B\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right| \text{ et } \left|\frac{Q-Q_0-B\Delta x-A\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|,$$

sont aussi petites que l'on veut dès que $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ est aussi petite, donc $\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)\right|$ tend vers 0, si $|z-z_0|$ tend vers 0, ce qui signifie que f admet en z_0 une dérivée $f'(z_0)=A+iB$.

Les conditions de Cauchy sont donc des conditions nécessaires et suffisantes pour que $f(z)$ admet en z_0 une dérivée.

Exemple 2.3.1 *Soit* $f(z)=z^2$.

$f(z)=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+2ixy$ *d'ou*

$$\begin{cases} P(x,y)=x^2-y^2 \\ Q(x,y)=2xy \end{cases}.$$

On a

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y)=2x=\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \text{ et aussi } \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=-2y=-\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Donc f *est dérivable et* $f'(z)=2x+2iy=2(x+iy)=2z$.

En coordonnées polaires, les conditions de Cauchy s'écrivent

$$\frac{\partial P}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \theta} \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}.$$

Fonction monogène en un point $z_0\in\mathbb{C}$

Une fonction $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f=P+iQ$ qui vérifie les conditions de Cauchy en un point $z_0\in\mathbb{C}$ et dite monogène en z_0.

Remarque 2.3.2 *une fonction monogène en un point* z_0 *est nécessairement continue en ce point car,* $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ *tend vers une limite finie lorsque* $|z-z_0|$ *tend vers* 0.

Fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe dans un ouvert

Une fonction monogène en tout point d'un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ est dite holomorphe dans cet ouvert.

Rappel: On appelle domaine dans $\mathbb{C}$ un ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$.

Définition 2.3.3 *Une fonction complexe f est une application d'un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Soit $z_0 \in D$ si la limite*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

existe dans $\mathbb{C}$, on dit que la fonction f est holomorphe en z_0, c'est à dire dérivable au sens complexe en z_0. Une fonction complexe f peut aussi se voir comme une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ via l'écriture $z = x + iy$ avec x, y réels. On écrit en général

$$f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

P est la partie réelle de f, Q sa partie imaginaire. Ce sont des fonctions réelles de deux variables réelles. Si f est holomorphe alors P, Q vérifient les conditions de Cauchy-Riemann.

$$f \text{ est holomorphe} \Longleftrightarrow f \text{ est } \mathbb{R}^2 \text{ différentiable et } \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{z_0} = \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_{z_0} \quad et \quad \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{z_0} = -\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{z_0}.$$

- On dit que f est holomorphe sur l'ouvert D si elle est holomorphe en tout point z_0 de D.

Remarque 2.3.4 *Tout fonction analytique est holomorphe. On verra plus tard que la réciproque est vraie.*

Propriétés des fonctions holomorphes dans un domaine

Soient f et g des fonctions holomorphes dans un domaine D alors :

1) $f + g$ est holomorphe dans D.

2) $f.g$ est holomorphe dans D.

3) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, λf est holomorphe dans D.

4) Si g ne s'annule en aucun point de D. alors $\frac{f}{g}$est holomorphe dans D.

Détermination des fonctions holomorphes

Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe dans un domaine D et si $f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$ on a

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Si P et Q admettent des dérivées secondes continues, on a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} &= 0. \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned}$$

Composée de deux fonctions holomorphes Si $f : D \to D'$ est holomorphe dans un domaine D et si $g : D' \to D''$ est holomorphe dans D', alors $g \circ f : D \to D''$ est holomorphe dans D et l'on a

$$\frac{d(g \circ f)}{dz} = \frac{dg(f(z))}{df(z)}.\frac{df}{dz}.$$

Singularités isolées d'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe presque partout dans un domaine D

Soit D un domaine complexe, f une fonction holomorphe dans D sauf en un point $a \in D$, f est alors holomorphe dans tout domaine contenu dans D et extérieur à un cercle de centre a et de rayon $\varepsilon > 0$ aussi petit qu'on veut. C'est ce qui se passe quand on est dans l'un des cas suivant :

1) f n'est pas continue en a.

2) f' n'est pas continue en a.

3) Les conditions de Cauchy ne sont pas vérifiées en a.

On dit alors que a est un point singulier isolé de $f(z)$.

Analycité des fonctions holomorphe

Théorème 2.3.5 *Une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est analytique dans un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ si et seulement si elle est holomorphe dans D.*

Toute fonction analytique dans D est holomorphe. Nous allons maintenant étudier la réciproque.

Théorème 2.3.6 *Soit f une fonction holomorphe dans un disque ouvert $D(z_0, R)$. Alors f admet dans ce disque un développement en série absolument convergente*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

f est donc analytique dans ce disque.

Théorème 2.3.7 *Soit f une fonction dans un ouvert D de $\mathbb{C}$ et a un point de D. Alors f est* *analytique dans D, la série de Taylor de f en a converge et représente f dans le plus grand disque ouvert de centre a continu dans D.*

Preuve. En effet soit $D(a, R)$ le plus grand disque de centre a contenu dans U ;par composition, la fonction g définie par

$$z \mapsto a + z \mapsto f(a + z),$$

est holomorphe dans $D(a, R)$ et s'écrit donc

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

série absolument convergente dans le disque $D(0, R)$. D'où on posant $u = a + z$

$$f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (u - a)^n,$$

série absolument convergente dans le disque $D(a, R)$. Or au voisinage de a. $\square$

Chapitre 3

Distribution

La théorie des distributions a été introduite pour élargir la notion de fonction et pour étendre la notion de dérivation dans le cas de fonctions discontinues. Elle permet d'unfier l'étude des phénomènes discrets et des phénomènes continus, entre autre en mécanique, en électronique.

3.1 Définition et propriétés

Une fonction test φ est une fonction indéfiniment dérivable, nulle hors d'un intervalle borné (on dit aussi que φ est de classe C^∞ et à support borné). L'ensemble des fonctions test est noté D.

Définition 3.1.1 *Les formes linéaires continues sur $D(\Omega)$ sont appelées distributions sur l'ouvert Ω. L'espace vectoriel de toutes les distributions sur Ω sera noté $D'(\Omega)$. On a*

$$T \in D'(\Omega),\ \varphi \in D(\Omega),\quad < T, \varphi >_{D' * D} = < T, \varphi > = T(\varphi).$$

L'espace $D'(\Omega)$ est le dual topologique de l'espace fonctionnel $C_c^\infty(\Omega)$.

Exemples 3.1.2 *1) On définit la distribution de Dirac en a par :* $< T, \varphi > = \varphi(a)$ *et on note alors* $T = \delta_a$.

2) La distribution échelon U est définie par

$$< T_U, \varphi >= \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt.$$

3) La distribution port triangulaire Π *est définie par*

$$< T_\Pi, \varphi >= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi(t)dt.$$

4) La distribution sinus est définie par

$$< T_{\sin us}, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)\varphi(t)dt.$$

Proposition 3.1.3 *1)* ***Linéarité :*** *La linéarité de l'application* $\varphi \longmapsto < T, \varphi >$*, en effet* $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ *on a*

$$< T, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 >= \lambda_1 < T, \varphi_1 > +\lambda_2 < T, \varphi_2 > .$$

2) ***Continuité :*** *Si* $\varphi_j \to 0$ *dans* $D(\Omega) \iff \begin{cases} \exists\ k \ \subset \Omega \text{ (compact) telle que supp } \varphi_j \subset k,\ \forall j \\ \partial^\alpha \varphi_j \to 0. \end{cases}$

pour vérifier la continuité on a

$$Si\ \varphi_j \to 0 \text{ dans } D(\Omega) \Longrightarrow < T, \varphi_j >= T(\varphi_j) \longrightarrow_{j\to\infty} 0.$$

3) ***Egalité*** *: Deux distributions T et S sont égales ssi*

$$\forall \varphi \in D(\Omega), < T, \varphi >=< S, \varphi > .$$

Proposition 3.1.4 *Une forme linéaire T est une distribution si, et seulement si, pour chaque compact* $k \subset \Omega$*, il existe une constante* $C > 0$ *et un entier* $m \geq 0$ *tels que*

$$|< T, \varphi >| \leq C. \sup_{x\in\Omega,\ |\alpha|\leq m} |\partial^\alpha \varphi(x)|\,,\ \forall \varphi \in D_k(\Omega).$$

Théorème 3.1.5 *On a $T \in D'(\Omega)$ si, et seulement si, pour toute suite (φ_i) convergente vers 0 dans $D(\Omega)$, la suite numérique $|< T, \varphi_i >|$ converge vers 0 dans $\Bbbk = \mathbb{R}$.*

Définition 3.1.6 *Une distribution T est dite **régulière** si il existe une fonction f, sommable sur tout intervalle borné ($f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$) telle que*

$$\forall \varphi \in D(\Omega), < T, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt.$$

pour montrer le lien entre la distribution régulière T et la fonction associée f, mais sans confondre la distribution et la fonction, on note alors $T = T_f$ ou $T = [f]$.

Toute distribution qui n'est pas régulière est dite **singulière**.

Exemple 3.1.7 *La distribution de Dirac T définie par $\forall \varphi \in D(\Omega), < T, \varphi >= \varphi(a)$ est singulière car il n'existe pas de fonction f telle que pour toute fonction φ on ait $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt = \varphi(a)$.*

3.2 Dérivées partielles au sens des distributions

Considérons une fonction f de classe C^1dans $\mathbb{R}^n$ et analysons l'action de ses dérivées partielles sur les fonctions tests. Si $\varphi \in D(\Omega)$ alors

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_k}, \varphi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\varphi(x)dx = [f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x)f(x)dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x)f(x)dx = -\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle. \end{aligned}$$

Cette dernière formule a-t-elle un sens si on remplace f par une distribution? plus précisément, on a :

Proposition 3.2.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $T \in D'(\Omega)$. pour tout $1 \leq k \leq n$, la forme linéaire définie par*

$$\varphi \longmapsto -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle, \varphi \in D(\Omega)$$

est une distribution.

Définition 3.2.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $T \in D'(\Omega)$. La dérivée partielle de T par rapport à la variable x_k, $1 \leq k \leq n$, est la distribution $\partial T / \partial x_k$ définie par la formule*

$$< \frac{\partial T}{\partial x_k}, \varphi >= - < T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} >, \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Soient $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice et $T \in D'(\Omega)$. Par récurrence on, définit la dérivée partielle de T d'ordre α par

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle, \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Si T_f est une distribution régulière définie par une fonction f localement intégrable sur Ω, une dérivation par partie montre que la dérivée partielle d'ordre $|\alpha|$ de T_f coïncide avec la dérivée partielle d'ordre $|\alpha|$ de f au sens des fonctions. En particulier, si T_f est une distribution régulière associée à $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ où $\Omega \subset \mathbb{R}$, on a

$$T_f' = T_{f'}.$$

La dérivation des distributions vérifie les propriétés suivantes :

· La dérivation, au sens des distributions, définie partout sur $D'(\Omega)$.

· Chaque distribution sur $\mathbb{R}^n$ admet des dérivées partielles de tout ordre.

· Si $T \in D'(\Omega)$, alors

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_i}, 1 \leq i, k \leq n.$$

C'est une conséquence du lemme de Schwarz pour $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, on a

$$T''_f = T_{f''}.$$

Exemple 3.2.3 *Supposons que $\Omega = \mathbb{R}$ et considérons la fonction de Heaviside sur $\mathbb{R}$*

$$H(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}.$$

Sa dérivée au sens des distributions est

$$\langle H'(x), \varphi \rangle = -\langle H(x), \varphi'(x) \rangle \quad = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Donc

$$H' = \delta.$$

Exemple 3.2.4 *Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf au point x_0 où elle présente une discontinuité de première espèce. Soit $h_0 = f(x_0^+) - f(x_0^-)$ le saut de f au point x_0. Alors par intégration par parties et en tenant compte du fait que φ est nulle à l'infinie, on obtient*

$$\begin{aligned} \langle T'_f, \varphi \rangle &= -\langle T_f, \varphi' \rangle \\ &= -\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)dx - \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\ &= \varphi(x_0)(f(x_0^+) - f(x_0^-)) + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx \\ &= \varphi(x_0)h_0 + \langle T_{f'}, \varphi \rangle \\ &= \langle h_0\delta_{x_0}, \varphi \rangle + \langle T_{f'}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, on a a_i

$$T'_f = T_{f'} + h_0\delta_{x_0}.$$

Plus généralement, nous allons maintenant étendre ce résultat à une classe de distribution régulière associées a des fonctions de classe C^1 par morceaux définies sur un intervalle ouvert $]a, b[$.

Définition 3.2.5 *On dit que f définie dans un intervalle $]a, b[$ est de classe C^1 par morceaux s'il existe un nombre finie de points $-\infty \leq a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b < +\infty$ tels que, dans chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$, la dérivée f' existe et continue et se prolonge par continuité dans les intervalles $]a_0, a_1[\,, ...,]a_i, a_{i+1}[\,, ...,]a_{n-1}, a_n[$.*

Posons $h_i = f(a_i^+) - f(a_i^-)$ le saut de f au point a_i.

Théorème 3.2.6 *Avec les notations précédentes, on a*

$$T_f' = T_{f'} + \sum_{i=1}^{n-1} h_i \delta_{a_i}.$$

3.3 Multiplication d'une distribution par une fonction de classe C^∞

On ne pourra pas en général définir pas le produit de deux distributions, mais on peut définir le produit d'une distribution par une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ (on dit de classe C^∞ ou que g appartient à $C^\infty(\mathbb{R})$). Encore une fois, on s'inspire du cas des distributions régulières on veut que $gT_f = T_{gf}$ donc que

$$\begin{aligned} \forall\varphi \in D, \langle gT_f, \varphi\rangle &= \langle T_{gf}, \varphi\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (g(t)f(t))\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(g(t)\varphi(t))dt. \end{aligned}$$

La fonction $g(t)\varphi(t)$ est de classe C^∞ car $g(t)$ et $\varphi(t)$ le sont et qu'un produit de 2 fonctions de classe C^∞ est de classe C^∞.

La fonction $g(t)\varphi(t)$ s'annule hors d'un intervalle borné grâce à $\varphi(t)$. Donc $g(t)\varphi(t)$ est une fonction test.

On a donc une formule que l'on va étendre aux distributions non régulières

$$\forall \varphi \in D, \langle gT_f, \varphi \rangle = \langle T_f, g\varphi \rangle .$$

Définition 3.3.1 *Si T une distribution et si g est une fonction de $C^\infty(\mathbb{R})$, le produit de g par T, noté gT, est définie par*

$$\forall \varphi \in D, \ \ \langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle .$$

Proposition 3.3.2 *Soit $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ alors*

$$g(t)\delta_a = g(a)\delta_a.$$

En particulier, si la fonction g s'annule en a alors $g(t)\delta_a = 0$.

Preuve. $\forall \varphi \in D$, $\langle g\delta_a, \varphi \rangle = \langle \delta_a, g\varphi \rangle = g(a)\varphi(a) = \langle g(a)\delta_a, \varphi \rangle$

donc

$$g(t)\delta_a = g(a)\delta_a.$$

□

Théorème 3.3.3 *Si T est une distribution et si g est une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ alors*

$$(gT)' = g'T + gT'.$$

3.4 Translation, changement d'échelle et parité des distributions

Pour une fonction localement sommable f on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\varphi(u+a)du.$$

On introduit donc la définition suivante :

Définition 3.4.1 *La translatée de a d'une distribution $T = T(t)$ est noté $\tau_a(T)$ ou $T(t-a)$ et est définie par*

$$\forall \varphi \in D,\ \langle T(t-a), \varphi(t)\rangle = \langle T(t), \varphi(t+a)\rangle .$$

Exemple 3.4.2 *La distribution de Dirac en 0 est notée indifféremment δ ou δ_0 ou $\delta(t)$ et donc δ_a est aussi notée $\delta(t-a)$ ou $\tau_a(\delta)$.*

Définition 3.4.3 *Une distribution est périodique de période a ssi $\tau_a(T) = T$.*

Pour une fonction localement sommable f on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(kt)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\varphi(\frac{t}{u})\frac{du}{|k|}.$$

On introduit donc la définition suivante :

Définition 3.4.4 *Le changement d'échelle pour une distribution est définie par*

$$\forall \varphi \in D,\ \langle T(kt), \varphi(t)\rangle =< \frac{1}{|k|}T(t), \varphi(\frac{t}{k}) > .$$

Définition 3.4.5 *Une distribution T est pair si $T(-t) = T(t)$ c'est à dire si*

$$\forall \varphi \in D,\ \langle T(-t), \varphi(t)\rangle = \langle T(t), \varphi(-t)\rangle .$$

Impaire si $T(-t) = -T(t)$, c'est à dire si

$$\forall \varphi \in D,\ \langle T(-t), \varphi(t)\rangle = -\langle T(t), \varphi(-t)\rangle .$$

Comme pour les fonctions on peut montrer que si T est paire alors T' impaire et T'' est paire, etc...

3.5 Convergence d'une suite de distribution

Définition 3.5.1 *On dit qu'une suite de distribution $\{T_n\}$ converge vers une distribution T si et seulement si*

$$\forall \varphi \in D,\ \langle T_n(t), \varphi(t)\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle T(t), \varphi(t)\rangle .$$

On écrit alors

$$T_n \underset{\longrightarrow}{D'}_{n\to+\infty} T.$$

Exemple 3.5.2 *Vérifions que la suite $\left\{n 1_{[0,\frac{1}{n}]}\right\}$ tend vers δ_0*

$$\begin{aligned} \forall \varphi \ \in\ & D, \langle T_n(t), \varphi(t)\rangle = \left\langle n 1_{[0,\frac{1}{n}]}(t), \varphi(t)\right\rangle = \int_0^{\frac{1}{n}} n\varphi(t)dt \\ =\ & n(\Phi(\frac{1}{n}) - \Phi(0)), \end{aligned}$$

où Φ est une primitive de φ.

Lorsque n tend vers $+\infty$, $\Phi(\frac{1}{n})$ tend vers $\Phi(0)$ est donc $\Phi(\frac{1}{n}) - \Phi(0) \to 0$. Or en multipliant par n qui tend vers $+\infty$, on obtient une indétermination. Pour enlever celle-ci on fait un développement limité en 0 de la fonction Φ. D'après la formule bien connue de Taylor on a

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi(0) + x\Phi'(0) + x\varepsilon(x) \\ \Phi(\frac{1}{n}) &= \Phi(0) + \frac{1}{n}\Phi'(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}\varepsilon(\frac{1}{n}) \end{aligned}$$

d'où

$$n(\Phi(\frac{1}{n}) - \Phi(0)) = n(\frac{1}{n}\Phi'(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}\varepsilon(\frac{1}{n})).$$

Or si Φ est une primitive de φ alors $\Phi' = \varphi$ et donc

$$\forall\varphi \in D, \langle T_n(t), \varphi(t)\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle .$$

Théorème 3.5.3 *Si la suite $\{T_n\}$ converge vers une distribution T alors la suite des distributions dérivées converge vers la distribution T'*

$$T_n \ \underset{n\to+\infty}{\overset{D'}{\longrightarrow}} T \Longrightarrow T'_n \ \underset{n\to+\infty}{\overset{D'}{\longrightarrow}} T'.$$

Preuve. En utilisant la définition de la dérivation et de convergence on a

$$\forall\varphi \in D, \langle T'_n, \varphi\rangle = -\langle T_n, \varphi'\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\langle T, \varphi'\rangle = \langle T', \varphi\rangle .$$

□

3.6 Convolution des distributions

Etudiant l'expression de la distribution T_{f*g} lorsque f et g sont localement sommables ainsi que leur produit de convolution on a

$$\langle T_{f*g}, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-y)g(y)dy)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-y)\varphi(t)dt)dy.$$

En faisant le changement de variable $x = t - y$ dans l'intégrale en dt on obtient en utilisant $dx = dt$

$$\langle T_{f*g}, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x+y)dx)dy.$$

Si la fonction de y définie par $(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x+y)dx)$ est de classe C^∞ et à support borné, on peut écrire

$$\langle T_{f*g}, \varphi\rangle = \langle T_g(y), \langle T_f(x), \varphi(x+y)\rangle\rangle \,.$$

En utilisant la commutativité du produit de convolution, on a de même façon

$$\langle T_{f*g}, \varphi\rangle = \langle T_f(x), \langle T_g(y), \varphi(x+y)\rangle\rangle \,.$$

Comme précédemment, ceci amène à la définition du produit de convolution de deux distributions dans le cas général

Définition 3.6.1 *Le produit de convolution de deux distributions T et S est définie par*

$$\langle T * S, \varphi\rangle = \langle T(x), \langle S(y), \varphi(x+y)\rangle\rangle \,,$$

ou par

$$\langle T * S, \varphi\rangle = \langle S(y), \langle T(x), \varphi(x+y)\rangle\rangle \,.$$

Proposition 3.6.2 *On a $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$*

Pour toute fonction test φ on a

$$\begin{aligned}\langle \delta_a * \delta_b, \varphi\rangle &= \langle \delta_a(x), \langle \delta_b(y), \varphi(x+y)\rangle\rangle \\ &= \langle \delta_a(x), \varphi(x+b)\rangle = \varphi(a+b) = \langle \delta_{a+b}, \varphi\rangle\end{aligned}$$

d'où $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.

Théorème 3.6.3 *Sous réserve que les produits de convolution intervenant soient définie et en notant $\tau_a(T)$ la distribution translatée en a, on a les propriétés suivantes*

$$\begin{aligned} \tau_a(T) &= T * \delta_a. \\ \tau_a(T * S) &= T * \tau_a(S) = \tau_a(T) * S. \\ T * \delta' &= T'. \\ (T * S)' &= T' * S = T * S'. \end{aligned}$$

Pour toute fonction φ on a en utilisant la définition de la translation et de la convolution

$$\begin{aligned} \langle (T * S)(t-a), \varphi(t) \rangle &= \langle (T * S)(t), \varphi(t+a) \rangle \\ &= \langle T(x), \langle S(y), \varphi(x+y+a) \rangle \rangle . \end{aligned}$$

Ce qui donne en utilisant de nouveau la translation

$$\begin{aligned} \langle (T * S)(t-a), \varphi(t) \rangle &= \langle T(x), \langle S(y-a), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle T(t) * S(t-a), \varphi(t) \rangle . \end{aligned}$$

Corollaire 3.6.4 *Plus généralement on a*

$$\begin{aligned} T * \delta^{(n)} &= T^{(n)}, \\ (T * S)^{(n)} &= T^{(n)} * S = T * S^{(n)}. \end{aligned}$$

Chapitre 4

Analyse de Fourier

Le traitement du signal classique s'appuie fortement sur l'analyse harmonique, et en particulier l'analyse de Fourier. On donne ici les éléments essentiels de la théorie des séries de Fourier.

4.1 Série de Fourier

Les séries de Fourier sont un outil fondamental dans l'étude des fonctions périodiques. L'étude d'une fonction périodique par la série de Fourier comprend deux volets

· L'analyse, qui consiste en la détermination de la suite de ses coefficients de Fourier .

· La synthèse, qui permet de retrouver, en un certaine sens, la fonction à l'aide de la suite de ses coefficients.

4.1.1 Préliminaire

Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et T un réel strictement positif. On dit que f est T-périodique si

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x).$$

S'il existe un plus petit tel T, il est appelé la période de f (et son inverse appelé la fréquence de f).

Par exemple , si T un réel strictement positif, les fonctions **sinusoïdales**

$$x \longmapsto \cos(2\pi \frac{n}{T} x) \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto \sin(2\pi \frac{n}{T} x),$$

sont périodique, de période $\frac{T}{n}$.

Polynômes trigonométriques

Une combinaison linéaire de ces fonctions sinusoïdales élémentaires port le nom de polynôme trigonométrique et constitue aussi une fonction T-périodique. Elle peut se récrire comme combinaison linéaire de fonctions

$$x \longmapsto e^{i2\pi \frac{n}{T} x}.$$

L'emploi des nombres complexes et de la fonction exponentielle permettant de simplifier les notations, grâce à la formule d'Euler

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Un polynôme trigonométrique p s'écrit donc sous la forme

$$p(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(p).e^{i2\pi \frac{n}{T} x}.$$

Où les coefficients $C_n(p)$ sont presque tous nuls, et peuvent être obtenus par la formule

$$\frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} p(t)e^{i2\pi\frac{n}{T}t}dt = C_n(p).$$

4.1.2 Principe des séries de Fourier

On ne peut pas obtenir toutes les fonctions T-périodiques comme une telle combinaison, ne serait-ce que parce qu'un polynôme trigonométrique est nécessairement indéfiniment dérivable.

L'idée sous-jacente à l'introduction des séries de Fourier est de pouvoir obtenir une fonction T-périodique par exemple comme somme de fonction sinusoïdale

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(f).e^{i2\pi\frac{n}{T}x}.$$

avec les coefficients $C_n(f)$, appelés coefficients de Fourier de f, définis par

$$C_n(f) = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{i2\pi\frac{n}{T}t}dt.$$

Il s'agit cette fois-ci d'une véritable somme infinie, c'est-à-dire une limite de somme finie, ce qui correspond au concept de somme de série.

4.1.3 Coefficients de Fourier

La définition de coefficient de Fourier porte sur les fonctions périodiques intégrables au sens de Lebesgue sur une période. Pour une fonction périodique, être de classe L^p implique intégrabilité. Ceci comprend en particulier les fonctions continues, ou continue par morceaux, périodique.

Coefficient complexe

Les coefficients de Fourier (complexe) de f (pour $n \in \mathbb{Z}$) sont donnés par

$$C_n(f) = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-i\frac{2\pi n}{T}t}dt.$$

Par périodicité de l'intégrante, ces coefficients peuvent également être calculés considérant l'intégrale sur n'importe quel segment de longueur T. Le coefficient $C_n(f)$ est la valeur moyenne de $f(t)e^{-i\frac{2\pi n}{T}t}dt$. En particulier le coefficient $C_0(f)$ n'est autre que la valeur moyenne de f.

Si $n > 0$, on appelle harmonique de rang n et note $H_n(f)$ la fonction sinusoïdale de fréquence $nF = \frac{n}{T}$ obtenue en tenant compte des coefficients de Fourier d'indice n et $-n$, donnée par

$$H_n : x \longmapsto C_n(f).e^{i\frac{2\pi n}{T}x} + C_{-n}(f).e^{i\frac{2\pi n}{T}x}.$$

La série de Fourier, $S_n(f)$, et la série de fonction obtenue en sommant les harmoniques successifs jusqu'au rang n, soit

$$S_n(f) = C_0(f) + \sum_{k=1}^{n} H_k(f) = \sum_{k=-n}^{n} C_k(f)e^{i\frac{2\pi k}{T}x}.$$

Une des questions à laquelle répond la théorie de Fourier est de déterminer le mode de convergence de cette série (convergence ponctuelle, convergence uniforme, convergence quadratique ....).

Coefficients réels

Si la fonction f est à valeurs réelles, il peut être intéressant de manipuler des coefficients réels, notamment dans le cas de fonctions paires ou impaires. On définie ainsi les coefficients de Fourier réels de f

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = C_0(f). \\ b_0(f) &= 0. \end{aligned}$$

Pour $n > 0$

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(nt\frac{2\pi}{T})dt. \\ b_n(f) &= \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(nt\frac{2\pi}{T})dt. \end{aligned}$$

La périodicité autorise à changer l'intervalle d'intégration.

L'harmonique de rang n se réécrit alors comme la fonction

$$H_n : x \longmapsto a_n(f)\cos(nx\frac{2\pi}{T}) + b_n(f)\sin(nx\frac{2\pi}{T}) = \chi_n \cos(nx\frac{2\pi}{T} + \Phi_n).$$

où $\chi_n^2 = a_n(f)^2 + b_n(f)^2$ et si χ_n est non nul

$$\cos(\Phi_n) = \frac{a_n}{\chi_n} \quad \text{et} \quad \sin(\Phi_n) = \frac{b_n}{\chi_n}.$$

La convention suivante peut aussi être choisie pour a_0

$$a_0(f) = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = 2C_0(f),$$

ce qui ne s'interprète plus alors comme une valeur moyenne, mais en est le double. Cette dernière convention harmonise les définitions des coefficients qui commencent alors tout par $\frac{2}{T}$.

Les systèmes de coefficients (a_n, b_n), pour n positif, et C_n pour n entier relatif sont liés linéairement par les relations suivantes pour $n > 0$

$$\left\{\begin{array}{c} a_n(f) = C_n(f) + C_{-n}(f) \\ \\ b_n(f) = i\left(C_n(f) - C_{-n}(f)\right) \end{array}\right. , \left\{\begin{array}{c} C_n(f) = \frac{1}{2}\left(a_n(f) - i.b_n(f)\right) \\ \\ C_{-n}(f) = \frac{1}{2}\left(a_n(f) + i.b_n(f)\right) \end{array}\right. .$$

Ces identités restent vraies pour $n = 0$ sous la convention du coefficient en $\frac{2}{T}$.

La parité d'une fonction se traduit sur les coefficients de Fourier :

• Si f est une fonction paire alors $C_{-n}(f) = C_n(f)$ pour tout n. Dans le cas d'une fonction f réelle, cette propriété devient $b_n(f) = 0$ pour tout n.

• Si f est une fonction impaire, alors $C_{-n}(f) = -C_n(f)$ pour tout n. Dans le cas réel cela donne $a_n(f) = 0$ pour tout n.

La série de Fourier $S_n(f)$ est alors la série de fonction

$$S_n(f) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos(kx\frac{2\pi}{T}) + b_k(f)\sin(kx\frac{2\pi}{T}).$$

Exemple 4.1.1 *Donnée la série de Fourier du signal périodique de période $T_0 = 2\pi$ suivant*

$$f(t) = \begin{cases} 0 \;\; si & -\pi \leq t \leq 0 \\ 1 \;\; si & 0 \leq t \leq \pi \end{cases}.$$

On a

$$\begin{aligned} S(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\cos(nt\frac{2\pi}{T_0}) + b_n(t)\sin(nt\frac{2\pi}{T_0}); \qquad \frac{2\pi}{T_0} = 1 \\ & a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\cos(nt) + b_n(t)\sin(nt). \end{aligned}$$

on a donc

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} dt = \frac{1}{2}. \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nt)dt = 0. \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt)dt = \frac{-1}{n\pi}(\cos(n\pi) - 1), \\ &= \frac{1}{n\pi}(1 - (-1)^n). \end{aligned}$$

d'où

$$S(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)}{n\pi} \sin(nt).$$

Egalité de Parseval

Pour une fonction T-périodique continue par morceaux ou plus généralement de carré intégrable sur une période, l'égalité de Parseval affirme la convergence de la série suivante et l'identité

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n(f)|^2 = \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 \, dt = \|f\|^2 .$$

Ce résultat est équivalent à une convergence en moyenne quadratique des séries de Fourier correspondantes (voir ci-dessous).

L'égalité de parseval implique en particulier que les coefficients de Fourier de f tend vers 0 en l'infinie.

Remarque 4.1.2 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n(f)|^2 = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right).$

Effet de la dérivation sur les coefficients

Pour une fonction continue et C^1 par morceaux, on établit par intégration par parties

$$C_n(f') = \frac{2i\pi n}{T} C_n(f).$$

Plus généralement pour une fonction de classe C^k et C^{k+1} par morceaux on établit

$$C_n(f^{(k+1)}) = (\frac{2i\pi n}{T})^{(k+1)} C_n(f).$$

4.1.4 Divers modes de convergence

Convergence normale

Théorème 4.1.3 *Soit* $\sum_{n\geq 0} U_n$ *une série trigonométrique définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$U_0 : t \longmapsto C_0 \ \ et\ \forall n \in \mathbb{N}^*, U_n : t \longmapsto C_n e^{int} + C_{-n} e^{-int}.$$

On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suite définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = C_n + C_{-n},\ \ b_n = i(C_n - C_{-n}).$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\sum_{n\geq 0} U_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$;

ii) $\sum_{n\geq 0} C_n$ et $\sum_{n\geq 0} C_{-n}$ sont absolument convergentes;

iii) $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ sont absolument convergentes.

Preuve. Supposons que $\sum_{n\geq 0} U_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a

$$|C_n| = |< e_n, U_n >| \leq \|U_n\|_2 .$$

Or

$$\|U_n\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |U_n(t)|^2\, dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sup_{t\in[0,2\pi]} |U_n(t)|\right)^2 dt.$$

Sachant que U_n est 2π-périodique,

$$\sup_{t\in[0,2\pi]} |U_n(t)| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |U_n(t)| = \|U_n\|_\infty .$$

Par conséquent, $\|U_n\|_2^2 \leq \|U_n\|_\infty^2$ donc $\|U_n\|_2 \leq \|U_n\|_\infty$ et donc $|C_n| \leq \|U_n\|_\infty$, $\sum_{n\geq 0}$ $\|U_n\|_\infty$ converge par hypothèse et $\sum_{n\geq 0} |C_n|$ et $\sum_{n\geq 0} \|U_n\|_\infty$ sont des séries à termes positifs donc $\sum_{n\geq 0} |C_n|$ converge, c-à-d $\sum_{n\geq 0} C_n$ converge absolument. De même $\sum_{n\geq 0} C_{-n}$ converge absolument.

Supposons maintenant que $\sum_{n\geq 0} C_n$ et $\sum_{n\geq 0} C_{-n}$ sont converge absolument. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$|a_n| = |C_n + C_{-n}| \leq |C_n| + |C_{-n}| \,.$$

$\sum_{n\geq 0} |a_n|$ et $\sum_{n\geq 0}(|C_n| + |C_{-n}|)$ sont deux séries à termes positifs et $\sum_{n\geq 0}(|C_n| + |C_{-n}|)$ converge (somme de deux séries convergentes) donc $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ converge, c'est-à-dire $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge absolument. De même, $\sum_{n\geq 0} b_n$ converge absolument car pour tout $n \in \mathbb{N}, |b_n| \leq |C_n| + |C_{-n}|$.

Supposons maintenant que $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ sont converge absolument. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ U_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt),$$

donc

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ |U_n(t)| \leq |a_n| + |b_n| \,,$$

c'est-à-dire

$$\|U_n\|_\infty \leq |a_n| + |b_n| \,.$$

$\sum_{n\geq 0} |a_n|$ et $\sum_{n\geq 0} |b_n|$ convergent donc $\sum_{n\geq 0}(|a_n|+|b_n|)$ converge. $\sum_{n\geq 0} \|U_n\|_\infty$ et $\sum_{n\geq 0}(|a_n|+|b_n|)$ étant deux séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\geq 0} \|U_n\|_\infty$ converge, c'est-à-dire $\sum_{n\geq 0} U_n$ converge normalement. $\square$

Théorème de convergence ponctuelle de Dirichlet

C'est le résultat suivant qui assure la convergence ponctuelle de la série de Fourier vers la fonction f, sauf aux points de discontinuité

Théorème 4.1.4 *(de Dirichlet) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, une fonction périodique de période T, de classe C^1 par morceaux. Alors pour toute $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier $S_n(f)$ converge vers $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$*

$$S_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2},$$

où $f(x^+)$ et $f(x^-)$ désignent respectivement la limite à droite et la limite à gauche de f en x.

Remarque 4.1.5 *Si f est continue en x, on a $f(x^+) = f(x^-) = f(x)$ donc $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = f(x)$.*

Lemme 4.1.6 (***Riemann-Lebesgue***) *Soit f une fonction intégrable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. Alors*

$$\int_I f(t)e^{-int}dt \to 0 \quad \textit{quand } n \to +\infty,$$

où

$$\lim_{t\to+\infty} \int_I f(t)\cos(nt)dt = 0, \;\; \textit{ou} \;\; \lim_{t\to+\infty} \int_I f(t)\sin(nt)dt = 0.$$

Preuve. La démonstration du théorème se base sur le fait que la série de Fourier se calcule par produit de convolution avec un polynôme trigonométrique aux propriétés remarquables : le noyau de Dirichlet.

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})x\right]}{\sin(\frac{x}{2})}, \\ S_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt. \end{aligned}$$

On utilise la seconde écriture du noyau de Dirichlet

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\left[(n+\frac{1}{2})t\right]\frac{f(x-t)}{\sin(\frac{t}{2})}dt.$$

Cette écriture est proche de l'application du théorème de Riemann-Lebesgue, mais la fonction $t \to \frac{f(x-t)}{\sin(\frac{t}{2})}$ n'est pas intégrable a priori au voisinage de 0. On forme donc (en utilisant le changement de variable $t' = -t$ pour replier la moitié de l'intégrale sur $[0, \blacksquare]$).

$$S_n(f)(x) - \widehat{f} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left[(n + \frac{1}{2})t\right] \frac{f(x+t) - f(x-t)}{\sin(\frac{t}{2})} dt - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

Puis en utilisant la valeur moyenne du noyau de Dirichlet D_n on rentre les constantes dans l'intégrale :

$$S_n(f)(x) - \widehat{f} = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \sin\left[(n + \frac{1}{2})t\right] \frac{f(x+t) - f(x-t) - f(x^+) - f(x^-)}{\sin(\frac{t}{2})} dt.$$

Cette fois le théorème s'applique. Donc l'expression a bien une limite nulle.

$$S(f)(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

□

Théorème de convergence uniforme de Dirichlet

La Théorème de convergence uniforme de Dirichlet est une version globale du Théorème de convergence ponctuelle. Pour une fonction T-périodique et continument dérivable au voisinage de tout point d'un segment I, la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur I (La convergence est uniforme sur tout segment $[a, b]$ ne contenant pas de point de discontinuité.).

Preuve. Soit $S_n(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, On sait que $S_n(f)$ converge simplement vers $f(x)$ donc il suffit de montrer que $S_n(f)$ converge uniformément. on montre que

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 |a_n| = 0, \lim_{n \to +\infty} n^2 |b_n| = 0.$$

D'où $\exists\ N$ telle que $\forall n \geq N$, on a $|a_n| \leq \frac{1}{n^2}$ et $|b_n| \leq \frac{1}{n^2}$.

Ce qui implique que $S_n(f)$ converge normalement, donc uniformément.

Montrons que $\exists\ N$ telle que $\forall n \geq N$, on a $|a_n| \leq \frac{1}{n^2}$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left(\left[f(x)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)dx\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\left[f'(x)\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(nx)dx\right)\\
&\Rightarrow\ n^2 a_n = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(nx)dx.
\end{aligned}$$

donc $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(nx)dx\right) = 0$ par le lemme de Riemann-Lebesgue $\exists\ N$ telle que $\forall n \geq N$

$$\left|n^2 a_n\right| = \left|-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(nx)dx\right| \leq 1 \Rightarrow \forall n \geq N,\ \ |a_n| \leq \frac{1}{n^2}.$$

De même pour $\exists N'$, on a $|b_n| \leq \frac{1}{n^2}$.

Ainsi, il existe $N'' = \max\{N, N'\}$ tel que

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq N''} |a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)| &\leq \sum_{n\geq N''} (|a_n| + |b_n|)\\
&\leq \sum_{n\geq N''} \frac{2}{n^2}.
\end{aligned}$$

Alors $S_n(f)$ converge normalement, donc uniformément vers f. $\square$

Convergence en moyenne quadratique

La convergence en moyenne quadratique concerne la convergence pour la norme hermitienne

$$\|f\|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2\,dt.$$

Cette norme est définie par exemple sur l'espace E des fonctions T-périodiques et continues, ou sur l'espace F des fonctions T-périodiques mesurables de carré intégrable identifiées modulo égalité sur un ensemble négligeable ; c'est d'ailleurs la périodicité qui permet de donner l'égalité des deux normes.

Proposition 4.1.7 *L'espace $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions continues 2π-périodique à valeur complexe, définie sur $\mathbb{R}$ peut être muni du produit scalaire $<,>$ définie par*

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

alors la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ où e_k est la fonction $t \to e^{kit}$ est une famille orthonormée de $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et

$$\forall f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}),\ C_k(f) =< e_k, f > .$$

Proposition 4.1.8 *La projection orthogonale d'un élément $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sur le sous espace*

$$P_p = Vect((e_k)_{|k|\leq p},$$

est la somme partielle $S_n(f)$.

Les théorèmes de convergence en moyenne quadratique

Théorème 4.1.9 *(Weierstrass) Toute fonction appartenant à $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est uniformément approchable par des polynômes trigonométriques complexes (un polynômes trigonométriques complexes est un élément d'un espace P_p)*

Théorème 4.1.10 *Pour tout élément f de $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, la suite $(S_n(f))$ des sommes partielles de la série de Fourier* ***converge en moyenne quadratique*** *vers f, à savoir*

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n(f) - f\|_2 = 0.$$

4.2 Transformation de Fourier

En la transformation de Fourier est une extension pour les fonctions non périodiques et associe à une fonction intégrable, définie sur l'ensemble des nombres réels ou celui des nombres complexe, une fonction appelée transformée de Fourier dont la variable indépendant peut s'interpréter en physique comme la fréquence ou la pulsation.

Définition 4.2.1 *La transformation de Fourier F est une opération qui transformée une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, sa transformée de Fourier $F(f) = \widehat{f}$ définie par la formule*

$$F(f) : \xi \longmapsto \widehat{f}\ (\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

on note $F(f) = F[f]$ et $F(\nu) = F[f](\nu)$.

4.2.1 Conventions alternatives

Il est possible de choisir une définition alternative pour la transformée de Fourier. Ce choix est une affaire de convention dont les conséquences ne se manifestent que par des facteurs multiplicatifs constants par exemple, certains scientifiques utilisent ainsi

$$F(f) : \nu \longmapsto \widehat{f}\ (\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt.$$

avec t en secondes et ν la fréquence en (Hz).

Certains électroniciens ou physiciens utilisent la transformation suivant

$$F(f) : w \longmapsto \widehat{f}\ (w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iwt} dt$$

avec t en secondes et w la pulsation (en rad.s^{-1}).

L'ensemble de départ est l'ensemble des fonctions intégrables f d'un variable x. L'ensemble d'arrivée réelles ξ concrètement lorsque cette transformation est utilisée en traitement du signal, on notera volontiers t à la place de x et w ou $2\pi\nu$ à la place de ξ qui seront les variables respectives de temps et de pulsation ou de fréquence, on dira alors que f est dans le domaine temporel, et que $\widehat{f}$ est dans le domaine fréquentiel.

Exemple 4.2.2 *Soit* $f(t) = \begin{cases} t \text{ si } |t| \leq 1 \\ 0 \text{ ailleur} \end{cases}$

La transformée de Fourier de $f(t)$ *est*

$$\begin{aligned}
\widehat{f}\,(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\nu t}dt = \int_{-1}^{+1} te^{-i2\pi\nu t}dt \\
&= \left[\frac{-t}{i2\pi\nu}e^{-i2\pi\nu t}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{i2\pi\nu}\int_{-1}^{+1} e^{-i2\pi\nu t}dt \\
&= \frac{-1}{i2\pi\nu}\left(e^{-i2\pi\nu} + e^{i2\pi\nu}\right) + \frac{1}{4\pi^2\nu^2}\left(e^{-i2\pi\nu} - e^{i2\pi\nu}\right) \\
& \frac{-1}{i\pi\nu}\cos(2\pi\nu) - \frac{i}{2\pi^2\nu^2}\sin(2\pi\nu).
\end{aligned}$$

Existence

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, c'est -à-dire si $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty$ alors la transformée de Fourier existe.

Si f a un support borné $(\exists a, b \in \mathbb{R}, \forall x \notin [a, b]\,,\ f(x) = 0)$ et continue par morceaux alors la transformée de Fourier existe.

Théorème 4.2.3 *(de Parceval) Si* $F(f)$ *la transformée de Fourier de* f *alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{f}\,(\nu)\right|^2 d\nu.$$

Exemple 4.2.4 *Calculons la transformée de Fourier d'une fonction* $f(t) = \exp(-|t|)$

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}\,(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-iwt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{t} e^{-iwt} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t} e^{-iwt} dt \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{(1-iw)t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(1+iw)t} dt \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-iw} + \frac{1}{1+iw} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+w^2}.
\end{aligned}
$$

Exemple 4.2.5 *Transformée de Fourier de la fonction porte*

$$
rect(\frac{t}{T}) = \begin{cases} 1 \text{ pour } \left|\frac{t}{T}\right| < \frac{1}{2} \\ \\ 0 \text{ pour } \left|\frac{t}{T}\right| > \frac{1}{2} \end{cases} .
$$

La transformée de Fourier donne

$$
\begin{aligned}
\text{TF}\left[rect(\frac{t}{T})\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} rect(\frac{t}{T}) e^{-i2\pi\nu t} dt = \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i2\pi\nu t} dt \\
&= \left[\frac{1}{-i2\pi\nu} e^{-i2\pi\nu t} \right]_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{i2\pi\nu} \left(e^{i\pi\nu T} - e^{-i\pi\nu T} \right) \\
&= \frac{1}{\pi\nu} \left[\frac{e^{i\pi\nu T} - e^{-i\pi\nu T}}{2i} \right] = \frac{1}{\pi\nu} \sin(\pi\nu T).
\end{aligned}
$$

Comme $sinc(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

$$
\text{TF}\left[rect(\frac{t}{T})\right] = T.\text{sinc}(\text{T}\nu).
$$

4.2.2 Propriétés de la transformée de Fourier

Parité

Si f est réelle et paire alors F est paire et

$$
F(\nu) = 2 \int_{0}^{+\infty} \cos(2\pi\nu x) f(x) dx.
$$

Si f est réelle et impaire alors F est imaginaire pure et impaire et

$$F(\nu) = -2i \int_{0}^{+\infty} \sin(2\pi\nu x) f(x) dx.$$

Linéarité

L'intégration étant une opération linéaire, le transformation de Fourier l'est aussi, c'est-à-dire que, α et β étant des scalaires, on a

$$F\left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right] = \alpha F(\nu) + \beta G(\nu).$$

En d'autres termes, la transformation de Fourier commute avec l'addition et la multiplication par un scalaire

Translation

Cherchons la transformée de Fourier de $f(x-a)$ (a réel). En posant $u = x - a$, on obtient

$$F\left[f(x-a)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a) e^{-i2\pi\nu x} dx = e^{-i2\pi\nu a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i2\pi\nu u} du.$$

Donc

$$F\left[f(x-a)\right] = e^{-i2\pi\nu a} F(\nu).$$

La translation de $f(x)$ correspond un déphasage de $F(\nu)$ proportionnel à ν (la transformée de Fourier de $f(x-a)$ s'obtient en multipliant $F(\nu)$ par le facteur de phase $e^{-i2\pi\nu a}$)

Modulation

Inversement, la transformée de Fourier de $e^{i2\pi\nu_0 x} f(x)$ (ν_0 réel) est donnée par

$$F\left[e^{i2\pi\nu_0 x} f(x)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi(\nu-\nu_0)x} dx.$$

Donc

$$F\left[e^{i2\pi\nu_0 x}f(x)\right] = F(\nu-\nu_0).$$

à la modalisation de $f(x)$ correspond une translation de $F(\nu)$.

Changement d'échelle

Changer l'unité pour la variable x revient à multiplier celle-ci par une constante réelle $a \neq 0$. En posant $u = ax$, on obtient

$$F\left[f(ax)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)e^{-i2\pi\nu x}dx = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i2\pi\frac{\nu}{a}u}du.$$

Donc

$$F\left[f(ax)\right] = \frac{1}{|a|}F(\frac{\nu}{a}).$$

Une compression de l'échelle des x entraîne une dilatation de l'échelle des ν.

Conjugaison complexe

On a

$$F\left[f^*(x)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)e^{-i2\pi\nu x}dx = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i2\pi\nu x}dx\right]^*.$$

Donc

$$F\left[f^*(x)\right] = F^*(-\nu).$$

Transformée de Fourier de $f'(x)$

Supposons $f(x)$ intégrable, dérivable et à dérivée intégrable. Sa dérivée f' possède alors une transformée de Fourier, donnée par :

$$F\left[f'(x)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-i2\pi\nu x}dx.$$

Intégrons par parties l'intégrale au second membre donc

$$F\left[f^{'}(x)\right] = \left[f(x)e^{-i2\pi\nu x}\right]_{-\infty}^{+\infty} + i\nu\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi\nu x}dx.$$

Donc

$$F\left[f^{'}(x)\right] = i\nu F(\nu).$$

La dérivation de $f(x)$ par rapport à x correspond donc la multiplication de $F(\nu)$ par $i\nu$. Plus généralement, pour la dérivée d'ordre m, on a

$$F\left[f^{(m)}(x)\right] = (i\nu)^{(m)} F(\nu).$$

Cette résultat conduit à une majoration importante. De la formule

$$(i\nu)^{(m)} F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(m)}(x)e^{-i2\pi\nu x}dx.$$

on déduit l'inégalité

$$|\nu|^m |F(\nu)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f^{(m)}(x)\right| dx.$$

Plus $f(x)$ est dérivable, à dérivées intégrables, plus sa transformée de Fourier $F(\nu)$ décroit rapidement à l'infini.

Dérivation de $F(\nu)$ par rapport à ν

On a

$$\frac{d}{d\nu}F(\nu) = \frac{d}{d\nu}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi\nu x}dx.$$

Soit, en dérivant sous le signe somme

$$\frac{d}{d\nu}F(\nu) = -i2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-i2\pi\nu x}dx = F\left[-i2\pi xf(x)\right].$$

Plus généralement, on a

$$F\left[(-i2\pi x)^m f(x)\right] = F^{(m)}(\nu).$$

Convolution et transformée de Fourier

On définit le produit de convolution de deux fonctions f et g appartenant à $\mathcal{L}^1$ par la formule

$$\left[f * g\right](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)du.$$

On peut alors calculer la transformée de Fourier de $f * g$

$$F\left[f * g\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)e^{-i2\pi\nu x}dxdu.$$

Effectuons le changement de variables $x - u = \vartheta$, $dx = d\vartheta$ on obtient

$$F\left[f * g\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(\vartheta)e^{-i2\pi\nu(\vartheta+u)}dud\vartheta.$$

L'intégral double est le produit de deux intégrales simples

$$F\left[f * g\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i2\pi\nu u}du \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vartheta)e^{-i2\pi\nu\vartheta}d\vartheta.$$

On obtient ainsi le relation

$$F\left[f * g\right] = F\left[f\right].F\left[g\right].$$

La transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions est égale ao produit ordinaire des transformée de Fourier de ces deux fonctions.

Et on a

$$F\left[f.g\right](\nu) = \frac{1}{2\pi}(F(\nu) * G(\nu)).$$

4.2.3 Transformée de Fourier inverse

Si la transformée de Fourier de f notée F, la transformée de Fourier inverse notée F^{-1} permet de retrouve f à partir des données fréquentielles

$$f(x) = F^{-1}(\widehat{f})(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)e^{+i\xi x}d\xi \iff \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx.$$

Dans le cas des définitions alternatives la transformée de Fourier inverse devient :

Définition en fréquence

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\nu)e^{+i2\pi\nu t}d\nu \iff \widehat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\nu t}dt.$$

Définition en pulsation

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(w)e^{+iwt}dw \iff \widehat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iwt}dt.$$

Exemple 4.2.6 *Soit* $\widehat{f}(w) = \begin{cases} 2\cos(w) & si\ |w| \leq \pi \\ 0 & si\ |w| > \pi \end{cases}.$

La transformée inverse de $\widehat{f}(w)$ *est*

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(w)e^{+iwt}dw = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{+\pi} 2\cos(w)e^{+iwt}dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{+\pi} \left(e^{iw} + e^{-iw}\right)e^{+iwt}dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(1+t)w} + e^{-i(1-t)w}dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{i(1+t)}\left(e^{i(1+t)\pi} - e^{-i(1+t)\pi}\right) + \frac{1}{i(1-t)}\left(e^{i(1-t)\pi} - e^{-i(1-t)\pi}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{2\pi sinc(1+t) + 2\pi sinc(1-t)\right\} \\ &= \sqrt{2\pi}\left(sinc(1+t) + sinc(1-t)\right). \end{aligned}$$

4.2.4 Transformée de Fourier d'une fonction de plusieurs variables

On considère un point $r = x_1, x_2, ..., x_n$ de l'espace à n dimension $\mathbb{R}^n$ un point $k = k_1, k_2, ..., k_n$ de $\mathbb{R}^n$. On considère une fonction $f(r)$ appartenant à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(r)|\, dr < +\infty.$$

Sa transformée de Fourier est une fonction $F(k)$ définie par

$$F(k) = \int_{\mathbb{R}^n} f(r) e^{-ikr} dr.$$

De façon générale, les propriétés de la transformée de Fourier d'une fonction de plusieurs variables sont du même type que celles qui correspondent au cas d'une seule variable.

4.3 Transformée de Laplace

Définition 4.3.1 *Tout fonction réelle du temps $f(t)$ nulle pour $t < 0$ (fonction causale) on associée une fonction $F(p)$ de variable complexe $p = x + iy$ par*

$$f(t) \overset{\mathcal{L}}{\to} F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

telle que $F(p)$ désigne la transformée de Laplace.

Exemple 4.3.2 *La transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac et de l'échelon unité est donné par*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\delta(t)] &= \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = e^{-p(0)} = 1 \\
\mathcal{L}[u(t)] &= \int_0^{+\infty} u(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

4.3.1 Propriété de la transformée de Laplace

Linéarité

Soit $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ deux fonctions admettant des transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ et $\mathcal{L}(g)$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors

$$\mathcal{L}\left[\alpha f + \beta g\right] = \alpha \mathcal{L}\left[f\right] + \beta \mathcal{L}\left[g\right].$$

Translation

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction causale, on considère la fonction f_α définie par $f_a(t) = f(t-a)$, $(a > 0)$ la transformée de la Laplace de f_α est

$$\mathcal{L}\left[f(t-a)\right] = e^{-ap}F(p).$$

L'homothétie

Soit $k > 0$, f_k la fonction définie par $f_k(t) = f(kt)$, la transformée de la Laplace de f_k est

$$\mathcal{L}\left[f(kt)\right] = \frac{1}{k}F(\frac{p}{k}).$$

Dérivée

Soit f' la dérivée de f, la transformation de Laplace correspond, à une constante additive près, à une multiplication par p de la transformée

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[f'\right] &= \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = \left[f(t)e^{-pt}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-p) f(t) e^{-pt} dt \\
&= pF(p) - f(0).
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right] = p^n F(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{k-1} f^{(n-k)}(0).$$

Transformée de Laplace d'une primitive

Soit $F(t) = \int_0^t f(x)dx$ une primitive de f on a alors

$$\mathcal{L}\left[F\right] = \frac{F(p)}{p}.$$

Transformée dans le plan complexe

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[e^{-at}f(t)\right] &= \int_0^{+\infty} e^{-at}f(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(p+a)t}dt \\ &= F(p+a).\end{aligned}$$

Convolution

$$\mathcal{L}\left[f * g\right] = F(p).G(p).$$

Théorème de valeur initiale

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{p\to+\infty} pF(p).$$

Théorème de valeur initiale

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p).$$

Exemple 4.3.3 *La transformée de Laplace de* $f(t) = \sin(wt)$ *est*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\sin(wt)\right] &= \int_0^{+\infty} \sin(wt)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iwt} - e^{-iwt}}{2i} e^{-pt}dt \\
&= \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} \left(e^{(iw-p)t} - e^{-(iw+p)t}\right) dt \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{-1}{iw-p} + \frac{-1}{iw+p}\right) \\
\mathcal{L}\left[\sin(wt)\right] &= \frac{w}{w^2+p^2}.
\end{aligned}$$

Exemple 4.3.4 *La transformée de Laplace de* $f(t) = (1-at)e^{-at}$ *est*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[(1-at)e^{-at}\right] &= \int_0^{+\infty} (1-at)e^{-at}e^{-pt}dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-(a+p)t}dt - \int_0^{+\infty} ate^{-(a+p)t}dt \\
&= \frac{1}{p+a} + \frac{-a}{(p+a)^2} \\
&= \frac{p}{(p+a)^2}.
\end{aligned}$$

Exemple 4.3.5 *La transformée de Laplace de* $f(t) = e^{-at}\cos(wt)$ *est*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[e^{-at}\cos(wt)\right] &= \int_0^{+\infty} e^{-at}\cos(wt)e^{-pt}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-at}\left(e^{iwt} + e^{-iwt}\right)e^{-pt}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(e^{-(a-iw+p)t} + e^{-(a+iw+p)t}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-iw+p} + \frac{1}{a+iw+p}\right) \\
&= \frac{p+a}{(p+a)^2 + w^2}.
\end{aligned}$$

4.3.2 Transformée de Laplace inverse

Soit $x(n)$ un signal causal et $X(z)$ sa transformée de Laplace alors la transformée inverse est

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(p)\exp(pt)dp$$

cette relation théorique est rarement utilisée.

La méthode plus utilisée pour calculer $\mathcal{L}^{-1}$ est la décomposition en éléments simples.

Exemple 4.3.6 *Soit* $X(p) = \frac{3p}{p^2+4p+2}$

On sait que $X(p)$ *peut se décomposer en éléments simples*

$$X(p) = \frac{3p}{(p+2)^2} = \frac{-6}{(p+2)^2} + \frac{3}{p+1},$$

donc

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-6}{(p+2)^2} + \frac{3}{p+1}\right] = -6\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+2)^2}\right] + 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right] \\ &= \left(-6te^{-2t} + 3e^{-2t}\right)U(t). \end{aligned}$$

Exemple 4.3.7 *Soit* $X(p) = \frac{p^3+3p^2+4p+3}{p^2+2p+1}$

On sait que $X(p)$ *peut se décomposer en éléments simples*

$$X(p) = p + 1 + \frac{p+2}{(p+1)^2} = p + 1 + \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p+1}$$

donc

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[p + 1 + \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p+1}\right] \\ &= \delta'(t) + \delta(t) + (te^{-t} + e^{-t})U(t). \end{aligned}$$

4.4 Transformée de Fourier à temps discret (TFTD)

Définition 4.4.1 *(**Signal discret**) Soit un signal $x(t)$ échantillonné a une période T_e. Le signal échantillonné s'écrit*

$$x_e(t) = \sum_n x(nT_e)\delta(t - nT_e).$$

En considérant période d'échantillonnage normalisée $T_e = 1$ on a

$$x_e(t) = \sum_n x(n)\delta(t - n),$$

on obtient la suite de valeur $\{x(n)\}$ appelée signal discret.

Question: comment faire l'analyse fréquentiel de signaux discrets?

Soit $x_e(t)$ un signal issu de l'échantillonnage de $x(t)$. La transformée de Fourier du signal échantillonnage est

$$\begin{aligned} X_e(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\sum_n x(nT_e)\delta(t - nT_e))e^{-i2\pi ft}dt \\ &= \sum_n x(nT_e) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)e^{-i2\pi ft}dt. \end{aligned}$$

En utilisent la définition de la distribution de Dirac, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT_e)e^{-i2\pi ft}dt = e^{-i2\pi nfT_e}$. Par conséquent

$$X_e(f) = \sum_n x(nT_e)e^{-i2\pi nfT_e}.$$

Définition 4.4.2 *(TFTD) Soit $x(n)$ un signal discret, la TFTD de signal est donnée par*

$$X_e(f) = \sum_n x(nT_e)e^{-i2\pi nfT_e}.$$

4.5 Transformée de Fourier discrète

La transformée de Fourier discrète est un outil mathématique de traitement du signal numérique, qui est l'équivalent discret de la transformation de Fourier continue qui est utilisée pour le traitement du signal analogique. Par définition on appelle signal numérique une suite $\{x_n\}$ de nombre réels, finie ou infinie. Le cadre mathématique le plus couramment utilisé est le cadre des signaux numériques d'énergie finie $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Remarque 4.5.1 *On dit qu'une suite $f = \{f_n, n \in \mathbb{Z}\}$ appartient à $\ell^p(\mathbb{Z})$ si*

$$\|f\|_p = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Définition 4.5.2 *Un signal discret $x = \{x_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ est défini par une d'échantillons espacés entre eux d'une période T_e. La transformée de Fourier appliquée à un signal discret $x[n]$ devient donc*

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \, e^{-i2\pi \frac{nf}{N}}.$$

Si cette série converge, la transformée de Fourier inverse est défini par

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{f=0}^{N-1} X(f) e^{i2\pi \frac{nf}{N}}.$$

Exemple 4.5.3 *Calculer la TFD de la signal discret suivant*

$$x[n] = [2, 3, -1, 1] \qquad 0 \leq n \leq 3.$$

$$X(f) = \sum_{n=0}^{3} x[n] \, e^{-i2\pi \frac{nf}{4}} = \sum_{n=0}^{3} x[n] \, e^{-i\pi \frac{nf}{2}}.$$

Pour $f = 0$ on a $X(0) = \sum_{n=0}^{3} x[n] = 5$.

Pour $f = 1$ on a $X(1) = \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-i\pi\frac{n}{2}} = 3 - 2i$.

Pour $f = 2$ on a $X(2) = \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-i\pi n} = -3$.

Pour $f = 3$ on a $X(3) = \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-i\pi\frac{3n}{2}} = 3 + 2i$.

donc

$$X(f) = [5, 3 - 2i, -3, 3 + 2i], 0 \leq f \leq 3.$$

Exemple 4.5.4 *Calculer la TFD^{-1} de $X(f) = [5, 3 - 2i, -3, 3 + 2i] \quad 0 \leq f \leq 3$,*

$$x[n] = \frac{1}{4} \sum_{f=0}^{3} X(f) e^{i\pi\frac{nf}{2}}.$$

Pour $n = 0$ on a $x[0] = \frac{1}{4} \sum_{f=0}^{3} X(f) = 2$.

Pour $n = 1$ on a $x[1] = \frac{1}{4} \sum_{f=0}^{3} X(f) e^{-i\pi\frac{f}{2}} = 3$.

Pour $n = 2$ on a $x[2] = \frac{1}{4} \sum_{f=0}^{3} X(f) e^{-i\pi f} = -1$.

Pour $n = 3$ on a $x[3] = \frac{1}{4} \sum_{f=0}^{3} X(f) e^{-i\pi\frac{3f}{2}} = 1$.

donc

$$x[n] = [2, 3, -1, 1], 0 \leq n \leq 3.$$

4.5.1 Propriétés

Linéarité

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \xrightarrow{TFD} \alpha X(f) + \beta Y(f).$$

Translation

$$x\left[n-k\right]\xrightarrow{TFD}e^{i2\pi\frac{nk}{N}}X(f).$$

$$e^{i2\pi\frac{nf_0}{N}}x\left[n\right]\xrightarrow{TFD}X(f-f_0).$$

Convolution

$$x\left[n\right]*y\left[n\right]\xrightarrow{TFD}X(f).Y(f).$$

$$x\left[n\right].y\left[n\right]\xrightarrow{TFD}\frac{1}{N}X(f)*Y(f).$$

Théorème de Perceval

$$\sum_{n=0}^{N-1}\left|x\left[n\right]\right|^2=\frac{1}{N}\sum_{f=0}^{N-1}\left|X(f)\right|^2.$$

4.5.2 Formulation matricielle

On peut exprimée la TFD sous forme matricielle. Soit $W_N=e^{\frac{-i2\pi}{N}}$

$$X(f)=\sum_{f=0}^{N-1}x\left[n\right]W_N^{nf}\qquad f=0,1,2,...,N-1.$$

ce qui donne

$$X=W_N.x$$

où

$$W_N=\begin{pmatrix} W_N^0\ W_N^0\ W_N^0................W_N^0 \\ W_N^0\ W_N^1\ W_N^2..............W_N^{N-1} \\ W_N^0\ W_N^2\ W_N^4............W_N^{2(N-1)} \\ .... \\ W_N^0\ W_N^{N-1}\ W_N^{2(N-1)}...W_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}.$$

4.6 Transformée en Z

La transformée en Z est un outil mathématique du traitement du signal, qui est l'équivalent discrèt de la transformée de Laplace.

Définition 4.6.1 *La transformée en Z est une application qui transforme une suite s en une fonction S d'une variable complexe z, telle que*

$$S(z) = Z\left\{s(n)\right\}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n)z^{-n}, \quad z \in \left\{ z \in \mathbb{C} / \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n)z^{-n} \;\; \textit{converge} \right\}.$$

Si $\forall n < 0$, $s(n) = 0$, on parle de signal causal. Inversement, si $\forall n > 0$, $s(n) = 0$, on parle de signal anti-causal.

Pour les signaux causaux, on peut aussi utiliser la transformée en Z monolatérale

$$Z\left\{s(n)\right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} s(n)z^{-n}.$$

Exemple 4.6.2 *1) Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier n, $U_n = 1$,on a*

$$\textit{pour } z \textit{ tel que } |z| > 1,\ Z\left\{1\right\}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}.$$

2) De même on note la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier n, $S_n = n$, on a

$$\textit{pour } z \textit{ tel que } |z| > 1,\ Z\left\{n\right\}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n.z^{-n} = \frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

3) Soit a un nombre réel non nul, on considère la suite $U_n = a^n$

$$Z\left\{a^n\right\}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n.z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a.z^{-1}\right)^n.$$

donc

$$\textit{pour } z \textit{ avec } |z| > |a|,\ Z\left\{a^n\right\}(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}.$$

4) Soit un signal x défini par $x(t) = e^{-at}U(t)$. Avec la période d'échantillonnage T, l'échantillonné est défini par

$$e^{-aTn} = \left(e^{-aT}\right)^n.$$

donc

$$Z\left\{\left(e^{-aT}\right)^n\right\}(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}.$$

4.6.1 Propriétés de la transformée en Z

Linéarité

La transformée en Z d'une combinaison linéaire de deux signaux est la combinaison linéaire des transformées en Z de chaque signal

$$Z\left\{\alpha x(n) + \beta y(n)\right\} = \alpha Z\left\{x(n)\right\} + \beta Z\left\{y(n)\right\}.$$

Décalage temporel

Le décalage temporel d'un signal de k échantillons se traduit par la multiplication de la transformée en Z du signal par z^{-k}

$$Z\left\{x(n-k)\right\} = z^{-k}.Z\left\{x(n)\right\}.$$

Convolution

La transformée en Z d'un produit de convolution est le produit des transformées en Z

$$Z\left\{x(n) * y(n)\right\} = Z\left\{x(n)\right\}.Z\left\{y(n)\right\}.$$

où

$$x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k)y(k).$$

En effet

$$\begin{aligned}
Z\{x * y\}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{x * y\}(n) z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k)y(k) z^{-(n-k)} z^{-k} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(m)y(k) z^{-(m)} z^{-k} \\
&= \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(k) z^{-k}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) z^{-(m)}\right) = Z\{x\}.Z\{y\}.
\end{aligned}$$

Changement d'échelle

$$Z\{a^n x(n)\} = X(\frac{z}{a}), \text{ avec } X(z) \text{ transformée en } Z \text{ de la suite } x(n).$$

Théorème de la valeur initiale

Soit $x(n)$ un signal causal et $X(z)$ sa transformée en Z alors

$$x(0) = \lim_{n \to 0} x(n) = \lim_{z \to \infty} X(z).$$

Théorème de la valeur finale

Soit $x(n)$ un signal causal et $X(z)$ sa transformée en Z. Alors lorsque la limite de gauche existe, on peut écrire

$$\lim_{n \to +\infty} x(n) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) X(z) = \lim_{z \to 1} (\frac{z-1}{z}) X(z).$$

Exemple 4.6.3 *Soit* (x_n) *une suite géométrique, avec* $X_n = a^n$ *et* $|a| < 1$, X *a un pôle* (a) *à l'intérieur du cercle "unité", on a*

$$\lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z) = \lim_{z\to 1}(\frac{z-1}{z})(\frac{z}{z-a}) = 0 = \lim_{n\to+\infty} x_n.$$

4.7 Application :

4.7.1 Série de Fourier

Exercice 4.7.1 *Soit* f *une fonction continue* 2π*-périodique. On suppose que la série de Fourier de* f *converge uniformément.*

Montrer que cette convergence est vers la fonction f*.*

Solution

Par hypothèse, il y a convergence uniforme de (S_p) vers sa limite que nous avons notée S et donc il y a aussi convergence en moyenne quadratique

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S_p(t) - S(t)|^2 \, dt \to 0.$$

Par unicité de la limite pour la convergence en moyenne quadratique, on peut affirmer $f = S$.

Exercice 4.7.2 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *l'application* 2π*- périodique, paire, telle que*

$$\forall x \in [0, \pi] \, , \; f(x) = x.$$

a) calculer la série de Fourier de f*.*

b) Étudier la convergence simple ou uniforme de la série de Fourier de f*.*

c)Déterminer

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \ \ et \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

Solution

pour $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\cos(nt)dt.$$

pour $n = 0$, $a_0 = \pi$

pour $n > 0$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{t}{n}\sin(nt)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt)dt = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi}.$$

Aussi

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tdt = \frac{\pi}{2},$$

et pour $n \in \mathbb{Z}^*$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)dt = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}.$$

Par suite

$$S(f)(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nt) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}.$$

b) f est continue et C^1 par morceaux, la convergence est donc normale a fortiori simple et uniforme

c) $S(f)(t) = f(t)$. Pour $t = 0$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Par la formule de Parceval

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt &= \frac{1}{4}a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}^2 \\ &= \frac{\pi^2}{4}+\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{3}.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.$$

4.7.2 Transformée de Fourier

1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f(x)=e^{-|x|}$ et déduire $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2\pi xy)}{1+4\pi^2y^2}dy$

La fonction $f(x)$ et continue pour tout x réel. Comme elle est paire, sa transformée de Fourier $\widehat{f}(y)$ peut être calculée à l'aide la formule des cosinus de Fourier

$$\widehat{f}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x|}e^{-i2\pi xy}dx=2\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos(2\pi xy)dx=2\Re e\left(\int_0^{+\infty}e^{-x}e^{2\pi ixy}dx\right)$$

Or

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty}e^{-x}e^{2\pi ixy}dx &= \left[\frac{e^{-x}e^{2\pi ixy}}{2\pi iy-1}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{1-2i\pi y} \\ &= \frac{1+2i\pi y}{1+4\pi^2y^2}. \end{aligned}$$

On trouve

$$\widehat{f}(y)=2\Re e\left(\frac{1+2i\pi y}{1+4\pi^2y^2}\right)=\frac{1}{1+4\pi^2y^2}.$$

On peut appliquer la formule de réciprocité de Fourier, ce qui donne

$$F^{-1}(\widehat{f})=f.$$

L'égalité précédent se traduit par $f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(y)e^{+i2\pi xy}dy$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, puisque $\widehat{f}(y)$ est une fonction paire, on peut calculer l'intégral précédente en appliquant

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(y)e^{+i2\pi xy}dy=2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(^{2\pi xy})}{1+4\pi^2y^2}dy.$$

On pose $t=2\pi y\Rightarrow dt=2\pi dy$ donc

$$2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(^{2\pi xy})}{1+4\pi^2y^2}dy=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt,$$

on déduit

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt=\pi e^{|x|}\text{ pour tout }x\in\mathbb{R}.$$

2) La fonction $g(x)=\begin{cases}1-|x| & \text{si } |x|\le 1,\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ est définie et continue pour tout x réel, et elle est nulle en dehors de l'intervalle $[-1;+1]$. Comme elle est paire, sa transformée de Fourier $\widehat{g}(y)$ peut être calculée à l'aide de la formule des cosinus de Fouriedonc on a

$$\widehat{g}(y)=\int_{-1}^{1}g(y)e^{-i2\pi xy}dx=2\int_{0}^{1}(1-x)\cos(2\pi xy).$$

d'où pour $y\neq 0$

$$\begin{aligned}\widehat{g}(y) &= \frac{2}{2\pi y}\left[(1-x)\sin(2\pi xy)-\frac{1}{2\pi y}\cos(2\pi xy)\right]_0^1\\ &= \frac{1}{\pi y}(-\frac{1}{2\pi y}\cos(2\pi y)+\frac{1}{2\pi y})=\frac{1}{2(\pi y)^2}(1-\cos(2\pi y))=(\frac{\sin(\pi y)}{\pi y})^2 \quad ,y\neq 0.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\widehat{g}(0)=2\int_0^1(1-x)dx=1.$$

La fonction $(\frac{\sin(\pi y)}{\pi y})^2$ est continue pour tout $y\neq 0$, de plus, en utilisant $\sin(u)\underset{u\to 0}{\sim}u$ on obtient

$$\widehat{g}(y)=(\frac{\sin(\pi y)}{\pi y})^2\underset{y\to 0}{\sim}(\frac{\pi y}{\pi y})^2=1=\widehat{g}(0).$$

Ce qui montre que $\widehat{g}(y)$ est continue pour $y \neq 0$

$$\widehat{g}(y) = \begin{cases} (\frac{\sin(\pi y)}{\pi y})^2 & \text{si } y \neq 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}.$$

On applique la transformée de Fourier inverse de $\widehat{g}(y)$, ce qui donne $F^{-1}(\ \widehat{g}) = g$ on a trouvé

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(y) e^{+i2\pi xy} dy.$$

d'où on particulier $\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(y)dy = g(0) = 1$, en remplaçant $\widehat{g}(y)$ par sa valeur, puis en posant $t = \pi y$, cette égalité devient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\sin(\pi y)}{\pi y})^2 dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\sin(t)}{t})^2 dt.$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\sin(t)}{t})^2 dt = 1.$$

3) Soit $f(x) = 1_{[-a,a]}(x)$. La transformée de Fourier $h_a(y) = \widehat{1}_{[-a,a]}(y)$ avec $(a > 0)$ est

$$h_a(y) = \int_{-a}^{a} e^{-i2\pi xy} dx = 2 \int_0^a \cos(2\pi xy),$$

d'où pour $y \neq 0$

$$h_a(y) = 2 \left[\frac{\sin(2\pi xy)}{2\pi y} \right]_0^a = \frac{\sin(2\pi a y)}{\pi y} \quad (y \neq 0).$$

D'autre parte

$$h_a(0) = 2 \int_0^a dx = 2a.$$

Pour $a = \frac{1}{2}$ on a

$$\begin{cases} \widehat{f}(y) = \frac{\sin(\pi y)}{\pi y} \quad \text{pour } y \neq 0 \\ \widehat{f}(0) = 1 \end{cases}.$$

Puisque $F(f*f)=F(f).F(f)=(F(f))^2=(\widehat{f})^2=\widehat{g}$ donc $g=f*f$.

On déduit que $F^{-1}(F(f*f))=F^{-1}(\widehat{g})=g$.

On peut lui appliquer la formule de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|^2\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{g}(y)|^2\,dy.$$

Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|^2\,dx=2\int_0^a(1-x)^2dx=\frac{2}{3},$$

et d'autre parte

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{g}(y)|^2\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{\sin(\pi y)}{\pi y})^4dy=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{\sin(t)}{t})^4dt,$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{\sin(t)}{t})^4dt=\frac{2\pi}{3}.$$

4.7.3 Application de la Transformée de Laplace aux équations différentielles

Soit donnée une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=f(t)\quad ......\qquad(*).$$

On demande de trouve la solution de cette équation $y=y(t)$ pour $t\geq 0$ et vérifiant les conditions initiales

$$y(0)=y_0,\ y\prime(0)=y_0',...,y^{(n-1)}(0)=y_0^{n-1}.$$

Ce genre de problème est déjà résolu de la manière suivante :

nous cherchons d'abord une solution générale de $(*)$ contenant n constantes arbitraires, puis nous déterminons les constantes de manière que les conditions initiales soient vérifiées.

Nous exposerons maintenant une méthode plus simple de résolution en introduisant la transformée de Laplace.

On cherche la transformée de Laplace des deux membres de l'équation $(*)$

$$\mathcal{L}\left[a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y\right](p) = \mathcal{L}\left[f(t)\right](p) \; .... \quad (**).$$

En utilisant les propriétés de linéarité, l'équation $(**)$ devient

$$a_0\mathcal{L}\left[y^{(n)}\right](p) + a_1\mathcal{L}\left[y^{(n-1)}\right](p) + ... + a_{n-1}\mathcal{L}\left[y^{'}\right](p) + a_n\mathcal{L}\left[y\right](p) = \mathcal{L}\left[f(t)\right](p).$$

Sachant que $\mathcal{L}\left[y^{(k)}\right](p) = p^k\mathcal{L}\left[y\right](p) - \sum_{i=1}^{k} p^{i-1}y^{(k-i)}$, $\;k = 1, 2, 3, ..., n.$ on remplace ces expressions dans l'équation $(**)$ pour aboutir à une équation algébrique du type $\mathcal{L}\left[y\right](p)(\varphi_n(p)) = \mathcal{L}\left[f(t)\right](p) + \Psi_{n-1}(p)$, avec φ_n un polynôme de degré n et Ψ_{n-1}un polynôme de degré $n-1$. L'équation algébrique est

$$\mathcal{L}\left[y\right](p) = \frac{\Psi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)} + \frac{\mathcal{L}\left[f(t)\right](p)}{\varphi_n(p)}.$$

Pour finir, on utilise la transformée inverse de Laplace pour déterminer la solution $y(t)$.

Exemple 4.7.3 *1) Soit l'équation $y\prime + y = 1$ avec la condition initiale $y(0) = 0$. Par application de la transformée de Laplace, on obtient*

$$\mathcal{L}\left[y'\right](p) + \mathcal{L}\left[y\right](p) = \frac{1}{p} \quad \textit{ou encore } p\mathcal{L}\left[y\right](p) + \mathcal{L}\left[y\right](p) = \frac{1}{p},$$

d'où

$$\mathcal{L}\left[y\right](p)\,(p+1) = \frac{1}{p} \quad \textit{et par suite } \mathcal{L}\left[y\right](p) = \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

On conclut alors que

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[y](p) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \\ &= 1 - e^{-t}. \end{aligned}$$

2) Résoudre, en utilisant la transformée de Laplace, l'équation différentielle $y'' + 2y' + 5y = sin(t)$ avec les conditions initiales $y(0) = 1; y\prime(0) = 2$.

On applique la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation. On aura

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'' + 2y' + 5y](p) &= \mathcal{L}[y''](p) + 2\mathcal{L}[y'](p) + 5\mathcal{L}[y](p) \\ &= p^2\mathcal{L}[y](p) - py(0) - y'(0) + 2\left(p\mathcal{L}[y](p) - y(0)\right) + 5\mathcal{L}[y](p) \\ &= \mathcal{L}[y](p)\left[p^2 + 2p + 5\right] - p - 4. \end{aligned}$$

L'équation devient

$$\mathcal{L}[y](p)\left[p^2 + 2p + 5\right] - p - 4 = \mathcal{L}[sin(t)](p) = \frac{1}{p^2+1}.$$

et donc

$$\mathcal{L}[y](p) = \frac{p+4}{p^2+2p+5} + \frac{1}{(p^2+1)(p^2+2p+5)}.$$

On décompose la fraction en éléments simples et on aboutit à l'équation algébrique

$$\mathcal{L}[y](p) = \frac{11}{10}\frac{p+1}{(p^2+1)+2^2} + \frac{29}{20}\frac{2}{(p^2+1)+2^2} - \frac{1}{10}\frac{p}{(p^2+1)} + \frac{1}{5}\frac{1}{(p^2+1)}.$$

L'originale est alors

$$y(t) = \frac{11}{10}e^{-t}\cos(2t) + \frac{29}{20}e^{-t}\sin(2t) - \frac{1}{10}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t).$$

4.7.4 Transformée en Z

Exercice 4.7.4 *Resoudre, en utilisant la transformée en Z l'équation récurrente* $x_{n+1} = x_n + 2$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, avec la condition initiale* $x_0 = 3$.

Solution

ce qui est équivalent à

$$Z(x) = \frac{3z}{z-1} + \frac{2z}{(z-1)^2},$$

bien sur $\frac{3z}{z-1}$ est la transformée en Z de 3 et $\frac{2z}{(z-1)^2}$ la transformée en Z de $2n$

Ainsi

$$x_n = 2n + 3.$$

Exercice 4.7.5 *Déterminer la suite* x *de la transformée en Z est* $f(z) = \frac{4z}{3z^2-2z-1}$.

Solution

Ainsi $4 = a(3z+1) + b(z-1)$, cela conduit $a = 1, b = -3$ donc

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)} - \frac{3}{(3z+1)} \Rightarrow f(z) = \frac{z}{(z-1)} - \frac{3z}{(3z+1)} = \frac{z}{(z-1)} - \frac{z}{(z+\frac{1}{3})}.$$

Il en résulte donc que

$$x(n) = Z^{-1}(\frac{z}{(z-1)}) - Z^{-1}(\frac{z}{(z+\frac{1}{3})}) = 1 - (-\frac{1}{3})^n.$$

Exercice 4.7.6 *Calculer la transformée en Z de* $x_n = \cos(wnT)$*,* w *et* T *fixés.*

Solution

Or $Z((e^{an})_n) = \frac{z}{z-e^a}$ donc

$$\begin{aligned} Z(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{jwT}} + \frac{z}{z-e^{-jwT}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2z^2 - z(e^{jwT}+e^{-jwT})}{z^2 - 2z(e^{jwT}+e^{-jwT})+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2z^2 - z\cos(wT)}{z^2 - 2z\cos(wT)+1}\right). \end{aligned}$$

Exercice 4.7.7 *Résoudre, en utilisant la transformée en Z l'équation récurrente d'ordre 2:* $x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = \delta_0(n)$ *pour tout entier naturel* n*, avec, bien sur* $x_{-1} = x_{-2} = 0$.

Solution

$$Z(x) - 3z^{-1}Z(x) + 2z^{-2}Z(x) = 1.$$

On trouve donc

$$Z(x) = -\frac{z}{z-1} + \frac{2z}{z-2},$$

d'où

$$x_n = 2^{n+1} - 1.$$

Conclusion

les outils mathématiques utilisées en traitement du signal. Il s'agit d'une part de fournir une introduction à la problématique du traitement du signal, et d'approfondir certains domaines des mathématiques couramment utilisés: en particulier l'analyse de Fourier, quelques éléments de fonction de la variable complexe, analyse fonctionnelle, distribution ... etc.

Les séries de Fourier visent à décomposer une signal périodique en une « somme infinie de fonctions trigonométriques » de fréquences dont chacune est un multiple d'une fréquence fondamentale. Dans un premier temps, on procède à l'analyse du « contenu en fréquences », appelé spectre de la fonction. Puis, selon les hypothèses caractérisant la fonction et le cadre d'analyse choisi, divers théorèmes permettent de la recomposer. Les espaces de Hilbert sont un bon cadre d'étude pour les séries de Fourier qui fournit un lien entre analyse harmonique et analyse fonctionnelle. La transformation de Fourier généralise la théorie des séries de Fourier aux fonctions non périodiques et permet également de leur associer un spectre en fréquences. Ce dernier concerne alors toutes les fréquences. Ainsi, la sommation des composantes périodiques se présentera sous forme d'intégrale La transformée de Fourier classique sur $\mathbb{R}^n$ reste actuellement un domaine de recherche active, en particulier la transformation de Fourier sur des objets plus généraux comme les distributions tempérées. Par exemple, en imposant des contraintes à une distribution, elles peuvent se traduire directement sur sa transformée de Fourier

La transformation de Laplace généralise la transformation de Fourier qui est également utilisée pour résoudre les équations différentielles, les fonctions admettant une transformée de Fourier admettent toutes une transformée de Laplace, mais la réciproque n'est pas vraie. La transformée en Z est un outil mathématique de l'automatique et du traitement du signal, qui est l'équivalent discret de la transformée de Laplace. Elle est utilisée entre autres pour le calcul de filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie et en automatique pour modéliser des systèmes dynamiques de manière discrète.

Il a aussi quelques domaine qui n'ont pas été mentionnés, par exemple, utilisé les probabilités pour les signaux aléatoires.

REFERENCES

1 H. Brezis, Masson, Analyse fonctionnelle, Université de Paris-Dauphine DUMI2E (2012-2013).

2 F. Riesz et B. Nagy (1955) : Le cons d'Analyse Fonctionnelle, Gauthier-Villars.

3 A. Hitta, Espaces vectoriels topologiques, Distributions et EDP, Cours Master, Univ. 8 Mai 1945 Guelma, 12 Janvier 2009.

4 N. Point, Mathématiques du signal déterministe, Conservatoire National des Arts et Métiers. MAA107, 11 octobre 2011.

5 G. Valiron. Théorie des fonctions, Masson, 1942.

6 J. Bass. Cours de Mathématiques, Masson, 1956.

7 H. Cartan. Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes. Hermann, 1961.

8 S. Saks, A. Zygmund. Fonctions analytiques. Masson, 1970.

9 M. Pinsky, Introduction to Fourier Analysis and Wavelets, Brooks/Cole, 2002.

10 J. M. Bony, Cours d'analyse. Théorie des distributions et analyse de Fourier.

11 J.P. Kahane et P.G. Lemarié-Rieusset, Séries de Fourier et ondelettes.

12 G. Lejeune-Dirichlet, Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données, Journal de Crelle 4 (1829).

13 T.Dumartin, Rappels Traitement du Signal, Licence Professionnel Optronique 2004-2005.

14 S,Duchet, Série de Fourier. Divers modes de convergence, www. epsilon2000.fr.st.

15 G. 0B. Stan, Convergence d'une série de Fourier.

16 W. Rudin, Analyse réelle et complexe.

17 G. Gasquet, P. Witomski. Analyse de Fourier et applications, Dunod, (Paris), 2000.

18 Cours de Traitement Du Signal - Transformée en Z, guillaume.hiet@rennes.supelec.fr, ESTACA, 27 novembre 2007.

19 J. L. Crowley, Traitement du Signal, La Transformée de Fourier Discrète, 20 mar 2009.

20 J. Kellendonk (Version 1, 2007), ANALYSE R´EELLE, Universit´e Claude Bernard Lyon I, kellendonk@math.univ-lyon1.fr.

21 I. Ben Yaacov (Version 1.9.1088, 4th May 2010), ANALYSE R´EELLE, Universit´e Claude Bernard Lyon I, http://math.univ-lyon1.fr/~begnac/