Numéro d'ordre : 10/2010-E/MT

[redacted]

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de khemis Miliana
Faculté des Sciences et Technologie
Département de Mathématiques et InformatiqueMémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de Master.

EN : MATHEMATIQUES
par :
GHOUTI NACERA
Sujet

Problème aux valeurs propres pour une équation différentielle fractionnaire

Soutenue publiquement le mai 2016, devant le jury composé de :

Table des matières

1. Résumé

Dans ce travail, nous étudions un problème aux valeurs propres pour une équation différentielle fractionnaire non linéaire de la forme

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\alpha} u(t) &= \lambda f(u(t)) \qquad 0 < t < 1 \\ u(0) = u(1) &= u^{'}(0) = u^{'}(1) = 0 \end{aligned}$$

où $3 < \alpha \leq 4$ un nombre réel, D_{0+}^{α} est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, λ est un paramètre positive et $f : [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$ est un fonction continue.

Par les proprietés de la fonction de Green $(G(t, s) > 0)$ et le théorème de point fixe du Guo-Krasnosel'skii sur les cônes, des intervalles de valeurs propres du problème aux limites d'une équation différentielle fractionnaire non linéaire sont considérés, certaines conditions suffissantes pour l'existence d'au moins une ou deux solutions positives pour un problème aux limites sont établies, aussi des conditions de non existence de valeurs propres sont données.

2. Abstract

In this work, we study eigenvalue problem for a class of nonlinear fractional differential equations

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\alpha} u(t) &= \lambda f(u(t)) \qquad 0 < t < 1 \\ u(0) = u(1) &= u^{'}(0) = u^{'}(1) = 0 \end{aligned}$$

where $3 < \alpha \leq 4$ is a real number, D_{0+}^{α} is the Riemann-Liouville fractional derivative, λ is a positive parameter and $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ is continuous.

By the properties of the Green function and Guo-Krasnosel'skii fixed point theorem on cones, the eigenvalue intervals of the nonlinear fractional differential equation boundary value problem are considered, some sufficient conditions for the nonexistence and existence of at least one or two positive solutions for the boundary value problem are established.

Introduction

La théorie des dérivées fractionnaires remonte au 19$\grave{e}me$ siecle losrque Leibniz dans sa lettre à L'Hôspital (30 septembre 1695) demenda la possibilité de l'éxistence d'une théorie qui prolonge la définition de la dérivée dans l'ordre non entier (dans lequel le sens de la dérivée d'ordre 1/2 est discuté) ce qui a conduit à l'apparition de la théorie des dérivées et intégrales d'ordre arbitraire.

Pendant trois siècles, la théorie des dérivées fractionnaires développés principalement comme un champ purement théorique dans les mathématiques utiles seulement pour les mathématiciens.

Les équations différentielles fractionnaires ont été d'un grand intérêt récemment. Elle est causée à la fois par le dévloppement intensif de la théorie du cacul fractionnaire lui-même et par les applications.

En dehors de divers domaines des mathématiques, les équations différentielles fractionnaires surviennent en rhéologie, les processus dynamiques dans autosimilaires et des structures poreuses, écoulements de fluides, des réseaux électriques, viscoélasticité, la physique chimique, et beaucoup d'autres branches de la science.

La modélisation mathématique basée sur les modèles améliorés rhéologique conduit naturellement aux équations différentielles d'ordre fractionnaire et à la nécessité de la formulation de l'état initial à ces équations.

Ce mémoire se compose d'une introduction, de trois chapitres et d'une conclusion.

Dans le premier chapitre nous rappelons quelques notions de bases ainsi que toutes les notations et défitions qui nous serons utiles. Le théoréme du points fixe de Guo-Krasnosel'skii est aussi présenté dans cette partie comme outil essentiel permettant de preuver l'existence de la solution de notre problème.

Dans le deuxième, nous introduirons le calcul fractionnaires et nous insisterons sur les définitions et les propriétés des dérivées et intégrales fractionnaires.

Le toixième chapitre est consacré à la résolution du problème fractionaire avec condition aux limites dans le cas de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville. Comme application, quelques exemples sont présentés pour illustrer les principaux résultats.

Le mémoire se termine par une brève conclusion.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre, on va introduire quelques outils de base qui nous utilisons dans ce travail. Nous commençons par un rappel sur les espaces topologiques et les ensembles convexes. Nous rappelons ensuite quelques notions essentielles de l'analyse fonctionnelle et nous explicitons des différentes versions du théorème du point fixes.

1.1 Espaces topologiques et ensembles convexes

Définition 1.1 *On dit qu'un espace vectoriel normé est de Banach si toute suite de cauchy d'élément de E converge dans E*

c'est-à-dire E est complet.

Définition 1.2 *Soit E un espace de Banach de norme $\| \, . \, \|$ et $f : E \to E$, on dit que f est **Lipshitzienne** s'il existe une constante $k \geq 0$ telle que*

$$\| f(x) - f(y) \| \leq k \| x - y \|, \; \forall \, x, y \in E. \tag{1.1}$$

Lorsque $0 \leq k < 1$, on dit que f est contractante, et on dit que f est strictement contractante si l'inigalité (1.1) est stricte.

Soit E un espace topologique et $(v_i)_{i \in I}$ une famille d'ouvert de E, et I un ensemble de E.

Définition 1.3 *On dit que l'ensemble I est convexe de E si et seulement si*

$$\forall x, y \in I \text{ et } \forall t \in [0, 1] \text{ alors } tx + (1 - t) y \in I$$

Définition 1.4 *On dit que $(v_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de E si $E = \cup_{i \in I} v_i$, ce qui signifie que $\forall x \in E$, il existe au moins $i_0 \in I$ tel que $x \in v_{i_0}$.*

Définition 1.5 *On dit que E est un espace topologique compact si et seulement si quelque soit le recouvrement ouvert de E, on peut extraire un recouvrement fini.*

Plus présisement, si $(v_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de E , il existe I_0 partie finie de I telle que $E = \cup_{i\in I_0} v_i$.

Définition 1.6 *Soit A une partie de E, On dit que A est relativement compact dans E si $\overline{A}$ est compact.*

Définition 1.7 *Soient E et F deux espaces de Banach, une application linéaire continue $T \in L(E,F)$ est dite compacte si l'image par l'application T de la boule unité fermée B_E de l'espace E $(T(B_E))$ est relativement compact (en norme) dans F.*

On note $k\ (E,F)$ l'ensemble des application compacte de E dans F.

Définition 1.8 *Soient E et F deux espaces de Banach, et f une application définie de E à valeurs dans F .*

On dit que f est complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de E en un ensemble relativement compact dans F.

f est dite compacte si $f(E)$ est relativement compact dans F.

Remarque 1.1 *T est compact $\Rightarrow$ T est complètement continue.*

Soit (E,d) une espace métrique compact et (F,δ) un espace métrique complet

Définition 1.9 *Une famille A de $C\ (E,F)$ est dite équicontinue si*

$$\forall x,y \in E,\ \forall \varepsilon > 0,\ \ \ni \eta > 0, \forall f \in E,\ \text{si}\ \ (d(x,y) \leq \eta\ ) \Rightarrow (\delta(f(x), f(y))) \leq \varepsilon.$$

1.2 Théorème d'Ascoli-Arsela

Définition 1.10 *Le théorème d'Ascoli-Arsela caractérise l'ensembles relativement compacts de fonctions continue.*

On dit que $A \subseteq C\ (E,F)$ est relativement compact si et seulement si

1. A est équicontinue

et

2. Pour tout $x \in E$, l'ensemble $A(x) = \{f(x), f \in A\}$ est relativement compact.

1.3 Fonctions absolument continues

Soit maintenant $[a,b]$ un intervalle fini.

Définition 1.11 *On note par $AC([a,b])$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$ constitué des fonctions f qui sont des primitives de fonctions Lebesgue-intégrale*

$$f \in AC([a,b]) \Leftrightarrow \exists \varphi \in L^1([a,b]) \text{ et } c \in \mathbb{R} \text{ tq } f(t) = c + \int_a^x \varphi(s)\, ds \text{ pour } t \in [a,b]$$

Définition 1.12 *On note par $AC^n([a,b])$,$n \in \mathbb{N}^*$, l'espace des fonctions f définies sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui ont des dérivées continues sur $[a,b]$ jusqu'à l'ordre $(n-1)$ et telles que $f^{(n-1)} \in AC([a,b])$i .e.*

$$AC^n([a,b]) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} : f^{(k)} \in C([a,b]), k = 0, ..., n-1,\ f^{(n-1)} \in AC([a,b]) \right\}.$$

Remarque 1.2 *On a $AC^1([a,b]) = AC([a,b])$*

Une caratérisation des fonctions de cet espace est donnée par le lemme suivant :

Lemme 1.1 *Une fonction $f \in AC^n([a,b])$,$n \in \mathbb{N}^*$, si et seulement si elle est représentée sous la forme*

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

1.4 Quelques théorèmes du point fixe

1.4.1 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom le théorème de l'application contractante) est un théorème simple à prouver, qui garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante, s'applique aux espaces complets et qui possède de nombreuses applications.

Ces applications incluent les théorèmes d'existence de solution pour les équations différentielles ou les équations intégrales et l'étude de la convergence de certaines méthodes numériques.

Théorème 1.1 *(théorème du point fixe de Banach (1922))*

Soit (M,d) un espace métrique complet et soit $T : M \to M$ une application contractante avec la constante de contraction k, alors T a un unique point fixe $x \in M$. De plus on a

$$\begin{gathered} \text{si } x_0 \in M \text{ et } x_n = T(x_{n-1}), \\ \lim_{n \to \infty} x_n = x \text{ et } d(x_n, x) \leq k^n (1-k)^{-1} d(x_1, x_0) \quad n \geq 1 \end{gathered}$$

x étant le point fixe de T.

1.4.2 Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Le théorème du Point fixe de Schauder est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Et nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.2 *Soit K un sous ensemble non vide, compact, convexe dans un espace de Banach E et*

supposons $T : K \to K$ une application continue. Alors T admet un point fixe.

1.4.3 Théorème du point fixe de Guo-krasnosel'skii

Le théorème suivant est un théorème fondamental dans la preuve des resultats.C'est le lemme de Guo-krasnosel'skii pour l'expantion et compréssion du cône de type norme.

Théorème 1.3 *Soit X un espace de Banach, et soit $P \subset X$ un cône dans X .*

Supposons Ω_1, Ω_2 sont des ouverts de X avec $0 \in \Omega_1 \subset \overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$, et soit $S : P \to P$ un opérateur complètement continu tel que, soit

$$(A1) \quad \| Sw \| \leq \| w \|, \ w \in P \cap \partial\Omega_1, \ \ \| Sw \| \geq \| w \|, \ w \in P \cap \partial\Omega_2,$$

ou bien

$$(A2) \quad \| Sw \| \geq \| w \|, \ w \in P \cap \partial\Omega_1, \ \ \| Sw \| \leq \| w \|, \ w \in P \cap \partial\Omega_2.$$

Alors S admet un point fixe dans $P \cap \left(\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1\right)$.

Chapitre 2

Introduction à la dérivation fractionnaire

Dans ce chapitre, nous introduisons des fonctions spéciales qui jouent un role important dans la théorie du calcule fractionnaire, on verra ensuite le concept de dérivation et d'intégration fractionnaire et certaines de leurs principales propriétés.

Les premiers travaux sont dûs à Liouville entre 1832 et 1837. Indépendamment, Riemann propose une approche qui s'est avérée celle de Liouville essentiellement. Depuis, cette théorie porte le nom de théorie de Riemann-Liouville.

Les dérivées de Riemann-Liouville ont certains inconvénients lorsque on essaie de modéliser des phénomènes réels. Ces défaillances ont conduit vers la fin des années soixante, à une définition alternative des dérivées fractionnaires qui satisfait ces demandes, elle a été introduite par Caputo.

2.1 Fonctions spéciales pour la dérivation fractionnaire

2.1.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est une fonction complexe, considérée comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe (exepté en certains points).

Définition 2.1 *La fonction Gamma d'Euler est définit par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma : \alpha \rightarrow \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \text{ , pour } \alpha \in \mathbb{C} \text{ tel que } Re\ \alpha > 0.$$

Propriétés

Une propriété importante de la fonction $\Gamma(\alpha)$ est la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

qu'on peut démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_{0}^{+\infty}e^{-t}t^{\alpha}dt \tag{2.1}$$

l'intégrale (2.1) devient :

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_{0}^{+\infty}e^{-t}t^{\alpha}dt=\left[-e^{-t}t^{\alpha}\right]_{0}^{+\infty}+\alpha\int_{0}^{+\infty}e^{-t}t^{\alpha-1}dt=\alpha\Gamma(\alpha)\ \text{ d'où le résultat.}$$

La fonction Gamma d'Euler généralise le factoriel car

$$\Gamma(n+1)=n!\ \forall n\in\mathbb{N}^{*}$$

On définit le prolongement de $\Gamma(\alpha)$ pour α négatif ($\alpha<0$ ou $Re\ \alpha<0$) comme suit :
Supposons

$$-1<\alpha<0 \text{ alors } 0<\alpha+1<1,$$

et $\Gamma(\alpha+1)$ est bien définie par la formule d'Euler mais pas $\Gamma(\alpha)$ on convient alors de définir $\Gamma(\alpha)$ par la relation

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$$

et on étend le procédé de proche en proche.

Ainsi pour

$$-(n+1)<\alpha<-n \ (n \text{ entier positif ou nul}),$$

on aura

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)},\ 0<\alpha+n+1<1.$$

Pour $\alpha=0$, $\Gamma(\alpha)$ est infinie, il sera de même pour toutes les valeurs entières négatives de α c'est-à-dire

$$\Gamma(-1),\Gamma(-2)\cdots\Gamma(-n)$$

sont infinies.

On a $\Gamma(1)=1,\Gamma(0^{+})=+\infty$, et le point minimum $(\alpha_{\min},\Gamma(\alpha_{\min}))\simeq(1.465,0.8856)$,on remarque que la valeur $\Gamma(\alpha_{\min})$ évidemment proche de

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\simeq 0.8862.$$

De plus, $\Gamma(\alpha)$ est une fonction monotone et strictement croissante pour $\alpha\geq 2$ donc elle est convexe pour $\alpha\in\left]0,+\infty\right[$.

2.1.2 La fonction Bêta

Définition 2.2 *La fonction Bêta (qui est un type d'intégrale d'Euler, au même titre que la fonction Gamma) est une fonction définie par l'intégrale suivante*

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \quad Re\ p > 0,\ Re\ q > 0.$$

La relation entre fonction Bêta d'Euler et Gamma d'Euler est donnée par :

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x,y)}.$$

2.2 Théorie de Riemann-Liouville

Les premiers pas, on considère que la construction d'une fonction se faisait à partir de fonctions élémentaires telles que les monômes, les exponentielles, les sinus et consinus (séries de Fourier)...ect. Considérons la suite des monômes x^n.

On a

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \tag{2.2}$$

par récurrence

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k x^n = n(n-1)\cdots(n-k+1)\,x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}, \tag{2.3}$$

cette formule peut s'écrire de la façon suivante :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k x^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-k)}x^{n-k}, \tag{2.4}$$

où $\Gamma(.)$ est la fonction gamma d'Euler qui, on le sait, prolonge le factoriel aux valeurs non entières. Ainsi on pourrait poser comme définition de la dérivée fractoinnaire pour les monômes :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha x^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)}x^{n-\alpha}, \tag{2.5}$$

et prolonger par linéarité aux fonctions qui sont des sommes de séries entières par exemple.

Si on considère les exponentielles $e^{\lambda x}$, on aurra d'abord

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k e^{\lambda x} = \lambda^k.e^{\lambda x}, \tag{2.6}$$

qui conduit à la définition suivante :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha e^{\lambda x} = \lambda^\alpha.e^{\lambda x}. \tag{2.7}$$

On voit que la définition (2.5) et (2.7) sont incompatibles. En effet, puisque

$$e^{\lambda x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}x^n, \tag{2.8}$$

alors on aurra d'aprés la première définition

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha e^{\lambda x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{\Gamma(n+1-\alpha)}x^{n-\alpha} \neq \lambda^\alpha.e^{\lambda x}. \tag{2.9}$$

Cette incompatibilités signifie que les deux formules font partie des différentes théories, la première de celle de Riemann-Liouville et la seconde de celle de Weyl.

2.2.1 Intégrale de Riemann-Liouville

Nous allons définir d'abord l'intégrale de Riemann-Liouville. On peut commencer par examiner une formule (unique) qui donne des primitives successives d'une fonction continue par exemple.

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$(ou à valeurs vectorielles) une fonction continue, b pouvent être fini ou infini, Une primitive de f est donnée par :

$$\left(I_a^1 f\right)(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Pour une primitive seconde on aura :

$$\left(I_a^2 f\right)(x) = \int_a^x \left(\int_a^s f(t)\, dt\right) ds,$$

le théorème de Fubini nous ramène cette intégrale double à une intégrale simple

$$\left(I_a^2 f\right)(x) = \int_a^x (x-t) f(t)\, dt,$$

puis une itération donne

$$\left(I_a^n f\right)(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\, dt.$$

Définition 2.3 *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle intégrale de Riemann-Liouville de f l'intégrale suivante :*

$$\left(I_a^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \tag{2.10}$$

où α est un réel (ou complexe) convenablement choisi.

On remarque que la formule (2.10) est (de moins formellement) une généralisation de la $n - ième$ primitive avec un ordre "primitivation" non entier. Voyons un exemple :

Exemple 2.1 *Considérons la fonction $f(x) = (x-a)^\beta$. Alors*

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta\, dt,$$

pour évaluer cette intégrale on pose le changement $t = a + (x-a)\tau$, d'où

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^\alpha d\tau = \left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}\right) (x-a)^{\beta+\alpha}, \tag{2.11}$$

après utilisation de l'intégrale eulérienne de première espèce (la fonction bêtad'Euler). On voit bien que c'est une généralisation du cas $\alpha = 1$, où on a

$$I_a^1 (x-a)^\beta = \left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)}\right)(x-a)^{\beta+1} = \frac{1}{\beta+1}(x-a)^{\beta+1},$$

à cause de la relation bien connue

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Proposition 2.1 *Soit $f \in C^n([a,b[)$. Pour x fixé, l'application $\alpha \to (I_a^\alpha f)(x)$ définie pour $Re\ \alpha > 0$ est holomorphe et se prolonge analytiquement au domaine $Re\ \alpha > -n$.*

Preuve: Comme l'application en question est bien définie et holomorphe pour $Re\ \alpha > 0$, on montre l'existence du prolongement analytique.Dans (2.10) procédons par une intégration par partie,

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f(t)\, d\left[\frac{-(x-t)^\alpha}{\alpha}\right] = \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^x (x-t)^\alpha f'(t)\, dt,$$

alors

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f(a) + \left(I_a^{\alpha+1} f'\right)(x), \tag{2.12}$$

donc le membre de droite de l'égalité précédente est holomorphe dans le domaine $Re\ \alpha > -1$.

Le résultat final découle d'une simple itération de (2.12) :

$$(I_a^\alpha f)(x) = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+1+j)}f^{(j)}(a) + \left(I_a^{\alpha+n} f^{(n)}\right)(x), \tag{2.13}$$

formule qui constitue l'expression du prolongement analytique.

Proposition 2.2 *Soit $f \in C^0([a,b[)$. Pour α, β complexes tels que :*

1.Pour $Re(\alpha) > 0$ et $Re(\beta) > 0$ on a

$$I_a^\alpha\left(I_a^\beta f\right) = I_a^{\alpha+\beta} f. \tag{2.14}$$

2.Pour $Re(\alpha) > 1$ on a

$$\frac{d}{dx} I_a^\alpha f = I_a^{\alpha-1} f \tag{2.15}$$

3.Pour $Re(\alpha) > 0$ on a

$$\underset{\alpha\to 0^+}{Lim}\,(I_a^\alpha f)(x) = f(x) \tag{2.16}$$

Preuve: La démonstration s'obtient par calcul direct en utilisant la fonction Bêta d'Euler. En effet :

$$\begin{aligned}
\left[I_a^{\alpha}\left(I_a^{\beta}f\right)\right](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}\left(I_a^{\beta}f\right)(s)\,ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x\int_a^s (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}f(t)\,dtds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)\left[\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}\,ds\right]dt.
\end{aligned}$$

On pose le changement de variable $s = t + (x-t)\tau$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}\,ds &= (x-s)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}d\tau \\
&= (x-s)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

La deuxième identité se justifie par les théorèmes classiques de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre et l'utilisation de la propriété fondamentale de la fonction gamma d'Euler $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$. En effet

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}I_a^{\alpha}f &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{d}{dx}(x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (\alpha-1)(x-t)^{\alpha-2}f(t)\,dt \\
&= \frac{(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-2}f(t)\,dt
\end{aligned}$$

D'aprés la propriété de la fonction $\Gamma(.)$, on obtient :

$$\frac{d}{dx}I_a^{\alpha}f = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-2}f(t)\,dt = I_a^{\alpha-1}f.$$

Pour la dèrnière propriété, soit $f \in C^0[a,b]$ alors

$$\left(I_a^\alpha f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt$$

on a

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha 1 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^\alpha \underset{\alpha\to 0}{\to} 1
\end{aligned}$$

d'où

$$\mid \left(I_a^\alpha f\right)(x)-\frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f(x) \mid=\mid \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(x)\, dt \mid$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \mid f(t)-f(x) \mid dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1} \mid f(t)-f(x) \mid dt+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x-\delta}^{x} (x-t)^{\alpha-1} \mid f(t)-f(x) \mid dt.$$

D'une part, on a f continue sur $[a,b]$ donc :

$$\forall x,t\in[a,b],\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\mid t-x \mid<\delta \Rightarrow\mid f(t)-f(x) \mid<\varepsilon$$

ce qui donne

$$\int_{x-\delta}^{x} (x-t)^{\alpha-1} \mid f(t)-f(x) \mid dt \leq \varepsilon\int_{x-\delta}^{x} (x-t)^{\alpha-1}\, dt=\frac{\varepsilon\delta^\alpha}{\alpha}.$$

D'autre part

$$\int_{a}^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1} \mid f(t) - f(x) \mid dt \leq \int_{a}^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1} (\mid f(t) \mid + \mid f(x) \mid) \, dt$$

$$\leq 2 \sup_{\zeta \in [a,x]} \mid f(\zeta) \mid \int_{a}^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1} \, dt, \forall x \in [a,b]$$

$$= 2M \left(\frac{(x-a)^{\alpha}}{\alpha} - \frac{\delta^{\alpha}}{\alpha} \right) \quad \text{avec} \quad M = \sup_{\zeta \in [a,x]} \mid f(\zeta) \mid$$

d'où

$$\mid (I_a^{\alpha} f)(x) - \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f(x) \mid \leq \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \left[\varepsilon \delta^{\alpha} + 2M \left((x-a)^{\alpha} - \delta^{\alpha} \right) \right]$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\varepsilon \delta^{\alpha} + 2M \left((x-a)^{\alpha} - \delta^{\alpha} \right) \right].$$

En faisant tendre α vers 0^{+}, on obtient :

$$\lim_{\alpha \to 0^{+}} \mid (I_a^{\alpha} f)(x) - \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f(x) \mid \leq \varepsilon \Rightarrow \mid \lim_{\alpha \to 0^{+}} (I_a^{\alpha} f)(x) - f(x) \mid \leq \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0.$$

Donc

$$\lim_{\alpha \to 0^{+}} (I_a^{\alpha} f)(x) = f(x),$$

d'où le résultat .

2.2.2 Dérivation au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.4 *Soit $\alpha \in]m-1, m[$ avec $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On appelle dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville la fonction définie par*

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha} f \right)(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^{m} \left[\left(I_a^{m-\alpha} f \right)(x) \right] \tag{2.17}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^{m} \int_{a}^{x} (x-t)^{m-\alpha-1} f(t) \, dt \tag{2.18}$$

Exemple 2.2 *Reprenons l'exemple de la fonction $f(x) = (x-a)^{\beta}$. On aura*

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}(x-a)^{\beta+m-\alpha}\right] \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha},
\end{aligned}
$$

donc

$$
{}^{RL}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}, \tag{2.19}
$$

où nous utilisé la formule

$$
\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x-a)^{\lambda} = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+1)(x-a)^{\lambda-m} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1-m)}(x-a)^{\lambda-m}.
$$

La formule de dérivation (2.19) se déduit pour $\alpha = 1$ à

$$
{}^{RL}D_a^{1}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(x-a)^{\beta-1} = \beta(x-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dx}(x-a)^{\beta}.
$$

Dans l'exemple précédent si on prend $\beta = 0$ on obtient le résultat "troublant" suivant :

$$
{}^{RL}D_a^{\alpha}1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha},
$$

c'est-à-dire que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est plut nulle.

Lemme 2.1 *Soit* $\alpha \in \left]m-1, m\right[$ *,* f *vérifiant* ${}^{RL}D_a^{\alpha}f = 0$ *(appartenant au noyau da l'opérateur* ${}^{RL}D_a^{\alpha}$*). Alors*

$$
f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)}(x-a)^{j+\alpha-m} \tag{2.20}
$$

où les c_j sont les constantes quelconques.

Preuve: Partons de

$$
\left({}^{RL}D_a^{\alpha}f\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[\left(I_a^{m-\alpha}f\right)\right](x) = 0,
$$

alors on a d'abord

$$
\left[\left(I_a^{m-\alpha}f\right)\right](x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (x-a)^j,
$$

et par application de I_a^{α} on obtient

$$
I_a^{\alpha}\left[\left(I_a^{m-\alpha}f\right)\right](x) = \left[\left(I_a^{m}f\right)\right](x) = I_a^{\alpha}\left[\sum_{j=0}^{m-1} c_j (x-a)^j\right] = \sum_{j=0}^{m-1} c_j I_a^{\alpha}(x-a)^j,
$$

en tenant compte de relation (2.14), on aura

$$[(I_a^m f)](x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)} (x-a)^{\alpha+j},$$

en suite par dérivation classique on a le résultat

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)} (x-a)^{j+\alpha-m}.$$

Proposition 2.3 *L'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville* ${}^{RL}D_a^\alpha$ *possède les*

propriétés suivantes :

1.c'est un opérateur linéaire.

2.En général ${}^{RL}D_a^\alpha \circ^{RL} D_a^\beta \neq {}^{RL}D_a^\beta \circ^{RL} D_a^\alpha$ et aussi $\neq {}^{RL}D_a^{\alpha+\beta}$.

3. $\lim\limits_{\substack{\alpha \to m-1 \\ >}} {}^{RL}D_a^\alpha f = f^{(m-1)}$ et $\lim\limits_{\substack{\alpha \to m \\ <}} {}^{RL}D_a^\alpha f = f^{(m)}$.

4.${}^{RL}D_a^\alpha \circ\, I_a^\alpha = id.$

5.$\left[\left(I_a^\alpha \circ\ {}^{RL}D_a^\alpha\right) f\right](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{j-m+\alpha}}{\Gamma(j-m+\alpha+1)} \left\{ \lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ >}} \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^j I_a^{m-\alpha} f \right](x) \right\}.$

Preuve: Pour la linéarité
si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \ \in C[a,b]$, alors

$${}^{RL}D_a^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda^{RL} D_a^\alpha f(t) + \mu^{RL} D_a^\alpha g(t).$$

Pour le deuxième point un contre exemple suffit (considérer $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$ et $f(x) = x$), mais ce qu'il faut retenir c'est que certains "automatismes" de la dérivation d'ordre entier ne sont plus valables.

Pour la première égalité de la propriété 3, en effet

$$f(x) = \left[I_a^{m-1} f^{(m-1)}\right](x) + \sum_{j=0}^{m-2} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a),$$

et donc

$$\begin{aligned}\left[I_a^{m-\alpha} f\right](x) &= \left[I_a^{m-\alpha}\left(I_a^{m-1} f^{(m-1)}\right)\right](x) + \sum_{j=0}^{m-2} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} I_a^{m-\alpha} (x-a)^j \\ &= \left[I_a^{2m-\alpha-1} f^{(m-1)}\right](x) + \sum_{j=0}^{m-2} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1+m-\alpha)} (x-a)^{j+m-\alpha},\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[\left(I_a^{m-\alpha} f\right)(x)\right] \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left\{\left[I_a^{2m-\alpha-1} f^{(m-1)}\right](x) + \sum_{j=0}^{m-2} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1+m-\alpha)} (x-a)^{j+m-\alpha}\right\} \\
&= \left[I_a^{m-\alpha-1} f^{(m-1)}\right](x) + \sum_{j=0}^{m-2} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1-\alpha)} (x-a)^{j-\alpha}
\end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{\alpha \to m-1 \\ <}} \left[I_a^{m-\alpha-1} f^{(m-1)}\right](x) = \left[I_a^{0} f^{(m-1)}\right](x) = f^{(m-1)}(x).$$

Montrons la deuxième égalité de la propriété 3. Partons de l'hypothèse que f est de classe C^m, alors on peut écrire :

$$f(x) = \left[I_a^m f^{(m)}\right](x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a),$$

et donc

$$\begin{aligned}
\left[I_a^{m-\alpha} f\right](x) &= \left[I_a^{m-\alpha}\left(I_a^m f^{(m)}\right)\right](x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} I_a^{m-\alpha}(x-a)^j \\
&= \left[I_a^{2m-\alpha} f^{(m)}\right](x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1+m-\alpha)} I_a^{m-\alpha}(x-a)^{j+m-\alpha},
\end{aligned}$$

d'aprés l'identité (2.14) et le résultat de l'exemple (2.1). Il en résulte que :

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[\left(I_a^{m-\alpha} f\right)(x)\right] \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left\{\left[I_a^{2m-\alpha} f^{(m)}\right](x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1+m-\alpha)} (x-a)^{j+m-\alpha}\right\} \\
&= \left[I_a^{m-\alpha} f^{(m)}\right](x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1-\alpha)} (x-a)^{j-\alpha},
\end{aligned}$$

grâce à l'identité (2.15). Alors d'une part

$$\lim_{\substack{\alpha \to m \\ <}} \left[I_a^{m-\alpha} f^{(m)}\right](x) = \left[I_a^{0} f^{(m)}\right](x) = f^{(m)}(x),$$

puisque l'intégrale de Riemann-Liouville est holomorphe en α donc continue, d'autre part la somme est nulle puisque chaque terme $\dfrac{1}{\Gamma(j+1-m)}$ est nul (d'aprés les propriétés de la fonction Γ).

Pour la propriété 4

$$^{RL}D_a^{\alpha} \circ I_a^{\alpha} = \left(\frac{d}{dx}\right)^m \circ I_a^{m-\alpha} \circ I_a^{\alpha} = \left(\frac{d}{dx}\right)^m \circ I_a^m = id$$

où nous avons utilisé l'identité (2.14) et (2.15).

Concernant la dernière propriété, on démarre grâce à la propriété 4 avec

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha} \circ \ I_a^{\alpha} \circ^{RL} D_a^{\alpha}\right) f = \ {}^{RL}D_a^{\alpha} f$$

qui donne

$$^{RL}D_a^{\alpha}\left[\left(I_a^{\alpha} \circ^{RL} D_a^{\alpha}\right) f - f\right] = 0.$$

Maintenant à partir du lemme caractérisant le noyau de $^{RL}D_a^{\alpha}$ on aura

$$\left[\left(I_a^{\alpha} \circ^{RL} D_a^{\alpha}\right) f\right](x) - f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j(f) \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)} (x-a)^{j+\alpha-m}.$$

Cherchons les coefficients $c_j(f)$, par application aux deux membres de $I_a^{m-\alpha}$ on obtient

$$\left[\left(I_a^{m} \circ^{RL} D_a^{\alpha}\right) f\right](x) - \left[I_a^{m-\alpha} f\right](x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j(f)(x-a)^j$$

or si $0 \leq j \leq m-1$ alors

$$\lim_{x \to a^+} \left(\frac{d}{dx}\right)^j \left[I_a^m g\right](x) = \lim_{x \to a^+} \left[I_a^{m-j} g\right](x) = 0,$$

et aussi

$$\lim_{x \to a^+} \left(\frac{d}{dx}\right)^j (x-a)^k = \begin{cases} j! \text{ si k=j} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

d'où

$$j! c_j(f) = -\lim_{x \to a^+} \left(\frac{d}{dx}\right)^j \left[I_a^{m-\alpha} f\right](x)$$

d'où le résultat.

2.3 Théorie de Caputo

2.3.1 Dérivation au sens de Caputo

Définition 2.5 *Soit $\alpha \in \left]m-1, m\right[$, $f \in C^m([a,b])$. On appelle dérivée de f au sens de Caputo la fonction définie par*

$$\left({}^{C}D_{a}^{\alpha}f\right)(x)=\left(I_{a}^{m-\alpha}f^{(m)}\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{m-\alpha-1}f^{(m)}(\tau)\,d\tau \tag{2.21}$$

La dérivée de Caputo permet de rattraper certaines "anomalies" que nous avons rencontré dans le cas de Riemann-Liouville. En voici la première :

$${}^{C}D_{a}^{\alpha}1=0$$

i.e, la dérivée de Caputo d'une constante est nulle.

Exemple 2.3 *On a pour la dérivée d'une puissance*

$${}^{C}D_{a}^{\alpha}(x-a)^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha} \tag{2.22}$$

En effet, d'abord

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{m}(x-a)^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-m)}(x-a)^{\beta-m}, \tag{2.23}$$

et

$$I_{a}^{m-\alpha}(x-a)^{\beta-m}=\frac{\Gamma(\beta+1-m)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}.$$

Le résultat en découle immédiatement. On remarque que les formules (2.19) et (2.22) sont identiques. Mais ceci n'est qu'une apparence car si β est un entier inférieur à m la formule (2.23) donne zéro et par suite (2.22) est nulle à son tour, alors que (2.19) n'est pas nulle.

En fait elles sont identiques pour β non entier.

Nous allons d'abord établir le lien entre la dérivée au sens de Caputo et la dérivée au sens de Riemann-Liouville.

Partons de la formule (2.13) donnant le prolongement analytique de l'intégrale de Riemann-Liouville où on a remplacé n par m et α par $m-\alpha$:

$$\left(I_{a}^{m-\alpha}f\right)(x)=\left(I_{a}^{2m-\alpha}f^{(m)}\right)(x)+\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(x-a)^{m-\alpha+j}}{\Gamma(m-\alpha+1+j)}f^{(j)}(a)$$

Appliquons ensuite $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^{m}$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{m}\left(I_{a}^{m-\alpha}f\right)(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{m}\left(I_{a}^{2m-\alpha}f^{(m)}\right)(x)+\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(x-a)^{-\alpha+j}}{\Gamma(-\alpha+1+j)}f^{(j)}(a)$$

et comme

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{m}I_{a}^{2m-\alpha}=I_{a}^{m-\alpha},$$

par (2.15), on obtient

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m \left(I_a^{m-\alpha} f\right)(x) = \left(I_a^{m-\alpha} f^{(m)}\right)(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{-\alpha+j}}{\Gamma(-\alpha+1+j)} f^{(j)}(a)$$

On reconnait les expressions des dérivées de Caputo et de Riemann-Liouville i.e,

$$\left({}^{RL}D_a^\alpha f\right)(x) = \left({}^{C}D_a^\alpha f\right)(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j+1-\alpha)} f^{(j)}(a). \tag{2.24}$$

Cette dernière relation peut aussi s'écrire

$${}^{C}D_a^\alpha f = {}^{RL}D_a^\alpha \left[f - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) \right].$$

Qui signifie en gros que la dérivation de Caputo est une dérivation fractionnaire du reste dans le développement de Taylor de f.

La relation (2.24) permet d'obtenir aisément les résultats suivants :

Proposition 2.4 *On a*

1.${}^{C}D_a^\alpha \left[I_a^\alpha f\right] = f.$

2.Si ${}^{C}D_a^\alpha f = 0$ alors $f(x) = \sum\limits_{j=0}^{m-1} c_j (x-a)^j$.

3.$I_a^\alpha \left[{}^{C}D_a^\alpha f\right](x) = f(x) - \sum\limits_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a).$

Preuve: Pour la première, en effet

$${}^{C}D_a^\alpha \left[I_a^\alpha f\right] = \left[I_a^{m-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dx}\right)^m \circ I_a^\alpha \right] f = I_a^{m-\alpha}\left(I_a^{\alpha-m} f\right) = I_a^0 f = f$$

d'où le résultat

Concernant la deuxième, on a

$${}^{C}D_a^\alpha f = 0 \Rightarrow I_a^{m-\alpha} \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^m f \right](x) = 0$$

on prend

$$\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^m f \right](x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (x-a)^{j-m} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-m+1)}$$

par application de I_a^α on obtient

$$I_a^\alpha \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^m f \right](x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-m+1)} I_a^\alpha (x-a)^{j-m}$$

par suite

$$\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-\alpha} f\right](x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-m+1+\alpha)} (x-a)^{j-m+\alpha}$$
$$I_a^{m-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-\alpha} f\right](x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-m+1+\alpha)} I_a^{m-\alpha} (x-a)^{j-m+\alpha}$$
$$f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (x-a)^j .$$

d'où le résultat.

Corollaire 2.1 *Si* $0 < \alpha < 1$ *et* f *de classe* C^1 *alors*

$$\left(I_a^{\alpha} \circ \ {}^{RL}D_a^{\alpha}\right) f = f \qquad \text{et} \quad \left({}^{C}D_a^{\alpha} \circ \ I_a^{\alpha}\right) f \ = f$$

C'est-à-dire que les dérivations au sens de Riemann-Liouville et de Caputo respectivement constituent l'inverse à droite et à gauche de l'opérateur de Riemann-Liouville (au moins sur les fonctions de classe C^1).

Corollaire 2.2 *Si* $0 \leq \alpha,\ \beta \leq 1$ *avec* $\alpha + \beta \leq 1$ *et* f *de classe* C^1 *alors*

$$\left({}^{C}D_a^{\alpha} \circ \ {}^{C}D_a^{\beta}\right) f = \ {}^{C}D_a^{\alpha+\beta} f = \left({}^{C}D_a^{\beta} \circ \ {}^{C}D_a^{\alpha}\right) f.$$

Preuve: Par la définition de la dérivée au sens de Caputo, on a

$$\begin{aligned}
\left({}^{C}D_a^{\alpha} \circ \ {}^{C}D_a^{\beta}\right) f &= \left(I_a^{1-\alpha} \circ \frac{d}{dx} \circ I_a^{1-\beta} \circ \frac{d}{dx}\right) f \\
&= \left(I_a^{1-\alpha-\beta} \circ I_a^{\beta} \circ \frac{d}{dx} \circ I_a^{1-\beta} \circ \frac{d}{dx}\right) f \\
&= \left(I_a^{1-\alpha-\beta} \circ \ {}^{C}D_a^{1-\beta} \circ I_a^{1-\beta} \circ \frac{d}{dx}\right) f \\
&= \left(I_a^{1-\alpha-\beta} \circ \frac{d}{dx}\right) f \\
&= \ {}^{C}D_a^{\alpha+\beta} f.
\end{aligned}$$

2.4 Equation différentielle fractionnaire

2.4.1 Existence et l'unicité de solution

Nous allons travailler avec la dérivée au sens de Riemann-Liouville avec $a = 0$ et $0 < \alpha < 1$.

Notre point de départ sera la propriété 5 de la proposition (2.3)

$$[(I^{\alpha} \circ D^{\alpha}) f](x) = f(x) - \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{x \to 0^+} \left(I^{1-\alpha} f\right)(x). \tag{2.25}$$

Nous introduisons l'espace suivant :

$$C_{\alpha}([0,b]) = \left\{ f :]0,b] \to \mathbb{R}, \text{ continue et } \lim_{x \to 0^+} x^{1-\alpha} f(x) \text{ existe} \right\}$$

et posons

$$\| f \|_{\alpha} = \sup_{[0,b]} | x^{1-\alpha} f(x) |$$

$\| \,.\, \|_{\alpha}$est une norme et que $(C_{\alpha}([0,b]), \| \,.\, \|_{\alpha})$ est un espace de Banach.
Le problème de Cauchy est défini par :

$$(P) \qquad \begin{cases} (D^{\alpha} u)(x) = f(x, u(x)) & \text{dans }]0,b] \\ \lim_{x \to 0^+} x^{1-\alpha} u(x) = u_0 \end{cases}$$

On peut transformer ce problème en une équation intégrale :

$$I^{\alpha}[(D^{\alpha} u)](x) = I^{\alpha}[f(.,u(.))](x)$$

D'aprés (2.25), on a

$$u(x) - \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{x \to 0^+} \left(I^{1-\alpha} u\right)(x) = I^{\alpha}[f(.,u(.))](x)$$

C'est-à-dire

$$u(x) = x^{\alpha-1} u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, u(t)) \, dt$$

Nons supposons maintenant des hypothèses sur la fonction f

1. $f(x,y)$ est définie dans $]0,b] \times]u_0 - \delta, u_0 + \delta[\quad (\delta > 0)$.

2. $\forall y$ l'application $f(.,y) \in C_{\alpha}([0,b])$.

3. f est uniformément lipschitzienne par rapport à y i.e

$$\exists \omega > 0 \text{ telle que } \quad | f(x,y_1) - f(x,y_2) | \leq \omega \, | y_1 - y_2 | .$$

Théorème 2.1 *Sous les hypothèses sur f données, il existe une solution unique au problème de Cauchy (P) dans l'espace $C_\alpha([0,b])$.*

2.4.2 Problème aux limites fractionnaire

Rappel : Fonction de Green

On appelle fonction de Green, une solution élémentaire ou fondamentale d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, ou d'une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants.

Ces « fonctions » de Green, qui se trouvent être le plus souvent des distributions, ont été introduites par George Green en 1828 pour les besoins de l'électromagnétisme. Le mémoire de Green restera confidentiel jusqu'à sa republication en trois parties, à partir de 1850.

Les fonctions de Green, qui seront dénommées ainsi par Riemann en 1869, seront alors abondamment utilisées, notamment par Neumann en 1877 pour sa théorie du potentiel Newtonien dans un espace à deux dimensions, puis en 1882 par Kirchhoff pour l'équation de propagation des ondes dans un espace à trois dimensions, et enfin par Helmholtz en acoustique.

Elles sont devenues un outil essentiel en théorie quantique des champs après que Feynman les a popularisées en 1948 sous le nom de propagateur dans sa formulation en intégrale de chemin de l'électrodynamique quantique.

Définition de la fonction de Green pour les EDO :

Soit une équation différentielle linéaire non homogène

$$\sum_{n=0}^{N} a_n(t)\, u^{(n)}(t) = h(t) \Leftrightarrow L(t)\, u(t) = h(t)$$

$$tq : L(t) = \sum_{n=0}^{N} a_n(t) \frac{d^n}{dt^n}$$

La (les) fonction (s) de Green de cette équation sont les fonctions satisfaisant l'équation où la source h a été remplacée par $\delta(t-s)$, si on note $G(t-s)$ la fonction de Green, alors par définition de G

$$\sum_{n=0}^{N} a_n(t) \frac{d^n}{dt^n} G(t,s) = \delta(t-s) \Leftrightarrow L(t)\, G(t,s) = \delta(t-s) \tag{2.26}$$

Alors la solution de cette dernièrev égalité s'exprime comme

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)\, h(s)\, ds$$

En effet, faisant passer $L(t)$ sous l'intégrale en s (commutant intégration et dérivations), on a

$$L(t)\,u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(t)\,G(t,s)\,h(s)\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-s)\,h(s)\,ds = h(t)$$

qui reconstitue bien l'équation satisfaite par la fonction u.

La fonction ainsi construite est donc une solution particulière de l'équation (2.26)

Donc la solution générale est

$$u(t) = u_h(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)\,h(s)\,ds$$

où $u_h(t)$ désigne la solution générale de l'équation homogène $L(x)\,u(x) = 0$.

Comme le lecture peut le voir, on a donné deux définitions seulements celles de Riemann-Liouville et de Caputo. Mais ils existe d'autres définitions fractionnaires.

Pour résoudre les équations faisant intervenir différent types d'opérateurs d'ordre non entier peuvent être trouvées dans la littérature. Une liste de mathématiciens qui ont fourni des contributions importantes au calcul fractionnaire, inclut : P.S.Laplace, J.B.J.Fourier, N.H.Abel, A.K.Grunwald, A.V.Letnikov et Weyl...ect.

Parmi eux,il y qui ont essayé de construire leurs propres théories (qu'on a pas définit dans ce mémoire) comme Letnikov et Weyl et autres.

Chapitre 3

Problème aux valeurs propres

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier un problème aux valeurs propres pour une équation différentielle fractionnaire non linéaire, nous intéressons aux valeurs propres de problème aux limites présenté et étudié par Xu et al [8]

$$D_{0+}^{\alpha} u\,(t) = \lambda f\,(u\,(t)) \qquad 0 < t < 1$$

$$u\,(0) = u\,(1) = u^{'}\,(0) = u^{'}\,(1) = 0$$

Récemment, il y a des articles traitant l'existence de solutions (ou des solutions positives) de l'équations différentielles fractionnaires non linéaire initiale (ou limite) fractionnaires (ou système) par l'utilisation de techniques d'analyse non linéaire (théorème de poits fixe, la théorie de Lary-Shauder, Méthodede de décomposition d'Adomian,...ect).

Xu et al [8] étudient l'existence de la solution positive de problème

$$\begin{gathered} D_{0+}^{\alpha} u\,(t) = f\,(t, u\,(t)) \qquad 0 < t < 1 \\ u\,(0) = u\,(1) = u^{'}\,(0) = u^{'}\,(1) = 0. \end{gathered}$$

On a aussi un exemple en équations différentieeles ordinaires du quatrième ordre, Yao [9, 10] a étudié le problème

$$\begin{gathered} u^{''''}\,(t) = \lambda f\,(t, u\,(t)) \qquad 0 < t < 1 \\ u\,(0) = u\,(1) = u^{'}\,(0) = u^{'}\,(1) = 0. \end{gathered}$$

L'auteur a combiné les résultats de ces deux articles pour avoir un nouveau résltat dans le cas fractionnaire.

3.2 Présentation du problème

Considérons le problème aux limites suivants

$$D_{0+}^{\alpha} u(t) = \lambda f(u(t)) \qquad 0 < t < 1 \tag{3.1}$$

$$u(0) = u(1) = u^{'}(0) = u^{'}(1) = 0 \tag{3.2}$$

où $3 < \alpha \leq 4$ un nombre réel, D_{0+}^{α} est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, λ est un paramètre positive et $f : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ est un fonction continue.

Par la proprietés de la fonction de Green et le théorème de point fixe du Guo-Krasnosel'skii sur les cônes, les intervalles de valeurs propres du problème aux limites (de la valeur limite) d'équation différentielle fractionnaire non linéaire sont considérés.

Définition 3.1 *Le nombre λ est appelé une valeur propre du problème* (3.1) *et* (3.2) *s'il existe une fonction à valeur complexe $y \in C[0,1] \cap C^4[0,1]$, non identiquement nulle, pour laquelle les relations du problème* (3.1) *et* (3.2) *sont vérifiées.*

Remarque 3.1 *L'existence des valeurs propres pour une équatoin différentielle fractionnaire revient à la recherche d'une solution positive du même problème aux limites mais avec un paramètre λ.*

A partir de la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, nous pouvons obtenir des statement suivantes

Lemme 3.1 *Soit $\alpha > 0$. Si nous supposons $u \in C[0,1] \cap L[0,1]$, alors l'équation différentielle fractionnaire*

$$D_{0+}^{\alpha} u(t) = 0$$

posède

$$u(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \cdots + c_n t^{\alpha-n}, c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$$

comme solution unique, où $\alpha \geq n$.

Lemme 3.2 *Supposons que $u \in C[0,1] \cap L[0,1]$ avec la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ est dans $C[0,1] \cap L[0,1]$.*

Alors

$$I_{0+}^{\alpha} D_{0+}^{\alpha} u(t) = u(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \cdots + c_n t^{\alpha-n},$$

pour certains $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, où $\alpha \geq n$.

Dans ce qui suit, nous présentons la fonction de Green de problème fractionnaire de la valeur limite d'équation différentielle.

Lemme 3.3 *Soit $h \in C[0,1]$ et $3 < \alpha \leq 4$. La solutoin unique du problème*

$$D_{0^+}^{\alpha} u(t) = h(t), \qquad 0 < t < 1 \tag{3.3}$$

$$u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0 \tag{3.4}$$

est

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\, h(s)\, ds,$$

où

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-1} + (1-s)^{\alpha-2} t^{\alpha-2}[(s-t)+(\alpha-2)(1-t)s]}{\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{t^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-2}[(s-t)+(\alpha-2)(1-t)s]}{\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq t \leq s \leq 1, \end{cases} \tag{3.5}$$

telle que $G(t,s)$ est appellé la fonction de Green du problème aux limite (3.3) et (3.4).

Preuve: Par le lemme (3.2) on peut transformer l'équation (3.3) à une équation intégrale équivalente

$$\begin{aligned} D_{0^+}^{\alpha} u(t) &= h(t) \\ D_{0^+}^{\alpha} u(t) - h(t) &= 0 \\ D_{0^+}^{\alpha} \left[u(t) - I_{0^+}^{\alpha} h(t)\right] &= 0 \end{aligned}$$

D'aprés le lemme caractérisant le noyau on a

$$u(t) - I_{0^+}^{\alpha} h(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + c_3 t^{\alpha-3} + c_4 t^{\alpha-4}$$

donc

$$u(t) = I_{0^+}^{\alpha} h(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + c_3 t^{\alpha-3} + c_4 t^{\alpha-4}$$

pour quelques constantes $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$, la solution générale de (3.3) est

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + c_3 t^{\alpha-3} + c_4 t^{\alpha-4}.$$

Par (3.4) on obtient

$$c_3 = c_4 = 0$$

et

$$c_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} (2s - \alpha s - 1) h(s)\, ds$$

$$c_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (\alpha-1)(1-s)^{\alpha-2} s h(s)\, ds$$

par conséquant, la solution unique du problème (3.3) et (3.4) est :

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} (2s-\alpha s-1) t^{\alpha-1} h(s)\, ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (\alpha-1)(1-s)^{\alpha-2} s t^{\alpha-2} h(s)\, ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left[(t-s)^{\alpha-1} + (1-s)^{\alpha-2} (2s-\alpha s-1) t^{\alpha-1} + (\alpha-1)(1-s)^{\alpha-2} s t^{\alpha-2} \right] h(s)\, ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 \left[(1-s)^{\alpha-2} (2s-\alpha s-1) t^{\alpha-1} + (\alpha-1)(1-s)^{\alpha-2} s t^{\alpha-2} \right] h(s)\, ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left\{ (t-s)^{\alpha-1} + (1-s)^{\alpha-2} t^{\alpha-2} \left[(s-t) + (\alpha-2)(1-t) s \right] \right\} h(s)\, ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 t^{\alpha-2} (1-s)^{\alpha-2} \left[(s-t) + (\alpha-2)(1-t) s \right] h(s)\, ds \\
&= \int_0^1 G(t,s) h(s)\, ds,
\end{aligned}$$

∎

la preuve est terminée.

Les propriétés suivantes de la fonctin de Green jouent un rôle trés important dans la suite.

Lemme 3.4 *La fonctoin de Green $G(t,s)$ définit dans (3.5) satisfaisant les conditions*

suivantes :

1-$G(t,s) = G(1-s, 1-t)$, pour $t, s \in [0,1]$.

2-$(\alpha-2) t^{\alpha-2} (1-t)^2 s^2 (1-s)^{\alpha-2} \leq \Gamma(\alpha) G(t,s) \leq M_0 s^2 (1-s)^{\alpha-2}$, pour $t, s \in [0,1]$.

3-$G(t,s)>0$, pour $t,s\in[0,1]$.

4-$(\alpha-2)\,s^2(1-s)^{\alpha-2}\,t^{\alpha-2}(1-t)^2\leq\Gamma(\alpha)\,G(t,s)\leq M_0t^{\alpha-2}(1-t)^2$, pour $t,s\in[0,1]$; et $M_0=\max\left\{\alpha-1,(\alpha-2)^2\right\}$

Pour faciliter les choses, nous fixons

$$q(t)=t^{\alpha-2}(1-t)^2\qquad\text{et}\qquad k(s)=s^2(1-s)^{\alpha-2}$$

donc

$$(\alpha-2)\,q(t)\,k(s)\leq\Gamma(\alpha)\,G(t,s)\leq M_0k(s).$$

Preuve: Par observation, on a

$$G(t,s)=G(1-s,1-t),$$

Dans la suite, on cosidère $\Gamma(\alpha)\,G(t,s)$, si $s\leq t$, on a

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\,G(t,s)&=(t-s)^{\alpha-1}+(1-s)^{\alpha-2}t^{\alpha-2}\left[(s-t)+(\alpha-2)(1-t)\,s\right]\\&=(t-s)\left[(t-s)^{\alpha-2}-(t-ts)^{\alpha-2}\right]+(\alpha-2)(1-t)\,s\ \ (t-ts)^{\alpha-2}\\&=-(t-s)(\alpha-2)\int_{t-s}^{t-ts}u^{\alpha-3}du+(\alpha-2)(1-t)\,s\ \ (t-ts)^{\alpha-2}\\&\geq-(t-s)(\alpha-2)(t-ts)^{\alpha-3}s\ \ (1-t)+(\alpha-2)(1-t)\,s\ \ (t-ts)^{\alpha-2}\\&=(\alpha-2)\,t^{\alpha-3}(1-s)^{\alpha-3}s^2\ \ (1-t)^2\end{aligned}$$

donc

$$\Gamma(\alpha)\,G(t,s)\geq(\alpha-2)\,t^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-2}s^2\ \ (1-t)^2. \tag{3.6}$$

D'autre part, pour $\alpha>3$ et $(1-t)\leq1-s$, on a

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\,G(t,s)&=(t-s)^{\alpha-1}+(1-s)^{\alpha-2}t^{\alpha-2}\left[(s-t)+(\alpha-2)(1-t)\,s\right]\\&=(t-s)\left[(t-s)^{\alpha-2}-(t-ts)^{\alpha-2}\right]+(\alpha-2)(1-t)\,s\ \ (t-ts)^{\alpha-2}\\&=-(t-s)(\alpha-2)\int_{t-s}^{t-ts}u^{\alpha-3}du+(\alpha-2)(1-t)\,s\ \ (t-ts)^{\alpha-2}\\&\leq-(t-s)(\alpha-2)(t-s)^{\alpha-3}s\ \ (1-t)+(\alpha-2)(1-t)\,s\ \ (t-ts)^{\alpha-2}\\&=(\alpha-2)\,s\ \ (1-t)\left[(t-ts)^{\alpha-2}-(t-s)^{\alpha-2}\right]\\&=(\alpha-2)\,s\ \ (1-t)(\alpha-2)\int_{t-s}^{t-ts}u^{\alpha-3}du\\&\leq(\alpha-2)^2s^2\ \ (1-t)^2t^{\alpha-3}(1-s)^{\alpha-3}\\&\leq(\alpha-2)^2s^2(1-s)^{\alpha-2}.\end{aligned}$$

Alors

$$\Gamma(\alpha) G(t,s) \leq M_0 s^2 \ (1-s)^{\alpha-2}. \tag{3.7}$$

Si $s \geq t$, on a

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha) G(t,s) &= (1-s)^{\alpha-2} t^{\alpha-2} [(s-t) + (\alpha-2)(1-t)s] \\ &\geq (\alpha-2) t^{\alpha-2} (1-s)^{\alpha-2} s \ (1-t)\end{aligned}$$

Comme $s, t \in [0,1]$, alors

$$\Gamma(\alpha) G(t,s) \geq (\alpha-2) t^{\alpha-2} (1-s)^{\alpha-2} s^2 \ (1-t)^2 \tag{3.8}$$

D'autre part, pour $\alpha > 3$, on a

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha) G(t,s) &= (1-s)^{\alpha-2} t^{\alpha-2} [(s-t) + (\alpha-2)(1-t)s] \\ &\leq s^{\alpha-2} (1-s)^{\alpha-2} [s + (\alpha-2)s] \\ &\leq s^{\alpha-2} (1-s)^{\alpha-2} (\alpha-1)\end{aligned}$$

donc

$$\Gamma(\alpha) G(t,s) \leq M_0 s^2 (1-s)^{\alpha-2} \tag{3.9}$$

Apartir (3.6) et (3.9), on a (2), par conséquent,$G(t,s) > 0$ pour t,$s \in [0,1]$, grâce (1) et (2) la quatrième (4) est vérifiée.

3.3 Résultat d'existence de la solution positive

Dans cette section, nous établissons l'existence de solution positive pour le problème aux limites (3.1) et (3.2) .

Soit l'espace de Banach $E = C[0,1]$ muni de la norme $\| u \| = \sup_{0\leq t \leq 1} | u(t) |$.

On définit le cône $P \subset E$ par

$$P = \left\{ u \in E : u(t) \geq \frac{\alpha - 2}{M_0} q(t) \| u \|, t \in [0,1] \right\}.$$

Supposons que u est une solution positive du problème aux limites (3.1) et (3.2), alors

$$u(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s) f(u(s)) ds, \quad t \in [0,1].$$

Nous définissons un opérateur $A_\lambda : P \to E$ comme suit

$$(A_\lambda u)(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s) f(u(s)) ds, \quad t \in [0,1].$$

Par le lemme (3.4), nous avons

D'une part

$$\| (A_\lambda u)(t) \| = \| \lambda \int_0^1 G(t,s) f(u(s)) ds \| \leq \frac{\lambda M_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 k(s) f(u(s)) ds. \tag{3.10}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
(A_\lambda u)(t) &= \lambda \int_0^1 G(t,s) f(u(s)) ds \\
&\geq \frac{\lambda(\alpha - 2)}{M_0 \Gamma(\alpha)} M_0 q(t) \int_0^1 k(s) f(u(s)) ds,
\end{aligned}$$

d'aprés (3.10) on a

$$(A_\lambda u)(t) \geq \frac{(\alpha - 2)}{M_0} q(t) \| (A_\lambda u)(t) \|$$

alors $A_\lambda(P) \subset P$.

On a en cours le lemme suivant.

Lemme 3.5 $A_\lambda : P \to P$ *est complètement continu*

Preuve: Pour montrer que l'opérateur A_λ est complètement continu, on montre qu'il est continu et compact

$A_\lambda : P \to P$ est continu en vue de la continuité de $G(t,s)$ et $f(u)$.

Pou la compacité,en effet

Soit E un ensemble borné de $C([0,1])$ alors, on a

$$\|u\| \leq M, \text{pour tout } u \in E,$$

de plus

$$|A_\lambda u(x)| \leq M \max_{(x,t)\in[a,b]} |G(t,s)| \qquad \forall x \in [0,1] \text{ et } \forall u \in E. \tag{3.11}$$

D'ou l'ensemble $A_\lambda(E)$ uniformément borné.

D'autre part, le noyau G est uniformément continu sur le compact $[0,1]\times[0,1]$, d'ou pour tout x, t, z de$[0,1]$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } |t-s| < \delta \Longrightarrow |G(t,z) - G(s,z)| < \frac{\varepsilon}{M}, \tag{3.12}$$

D'où,

$$|A_\lambda u(t) - A_\lambda u(s)| < \varepsilon,$$

pour tout

$$u \in E \text{ et } (t,s) \in [0,1] \text{ avec } |t-s| < \delta.$$

Ceci exprime que l'ensemble $A_\lambda(E)$ est équicontinu, d'où $A_\lambda(E)$ est relativement compact par le théorème d'Ascoli-Arsela, alors A est compact.

Pour commodité, on note :

$$\begin{aligned}
F_0 &= \lim_{u\to 0^+} \sup \frac{f(u)}{u}, & F_\infty &= \lim_{u\to +\infty} \sup \frac{f(u)}{u}, \\
f_0 &= \lim_{u\to 0^+} \inf \frac{f(u)}{u}, & f_\infty &= \lim_{u\to \infty} \inf \frac{f(u)}{u}, \\
C_1 &= \frac{M_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 k(s)\,ds, & C_2 &= \frac{(\alpha-2)^2}{\Gamma(\alpha) M_0} \int_0^1 q(t)\,k(s)\,ds, \\
C_3 &= \frac{\alpha-2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 k(s)\,ds,
\end{aligned}$$

Les théorèmes suivants nous donne des résultats d'existence des valeurs propres pour une fonction f continue positive qui vérifiant des conditions assymptotique en 0^+ et $+\infty$, ce problème admet des valeurs propres pour λ dans certains intervalles (ouverts).

Le théorème est une application directe du lemme de Guo-Krasnosel'skii,on doit vérifier les conditions requises, ainsi on a des résultats d'éxistence de solution et de multiplicités.

Théorème 3.1 *S'il existe $l \in [0,1]$ tel que $q(l) f_\infty C_2 > F_0 C_1$, alors pour tout λ tq :*

$$\lambda \in \left] (q(l) f_\infty C_2)^{-1}, (F_0 C_1)^{-1} \right[, \tag{3.13}$$

le problème aux limite (3.1) et (3.2) a au moins une solution positive.
posons :

$$(q(l) f_\infty C_2)^{-1} = 0 \text{ si } f_\infty = +\infty$$
$$\text{et} \quad (F_0 C_1)^{-1} = +\infty \text{ si } F_0 = 0.$$

Preuve: Soit λ réel qui vérifie (3.13) et soit $\varepsilon > 0$ tels que

$$(q(l)(f_\infty - \varepsilon) C_2)^{-1} \leq \lambda \leq ((F_0 + \varepsilon) C_1)^{-1}. \tag{3.14}$$

Par la définition de F_0, on voit qu'il existe $r_1 > 0$ de telle sort que

$$f(u) \leq (F_0 + \varepsilon) u, \quad \text{pour } 0 < u \leq r_1. \tag{3.15}$$

Donc si $u \in P$ avec $\| u \| = r_1$, nous avons
d'aprés le lemme (3.4)

$$\| A_\lambda u \| = \| \lambda \int_0^1 G(t,s) f(u(s)) ds \| \leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 M_0 k(s) f(u(s)) ds$$

Grâce à l'inégalité (3.15)

$$\| A_\lambda u \| \leq \frac{\lambda M_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 k(s)(F_0 + \varepsilon) r_1 ds$$

Par la définition de C_1 et (3.14), on obtient

$$\frac{\lambda M_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 k(s)(F_0 + \varepsilon) r_1 ds = \lambda (F_0 + \varepsilon) r_1 C_1$$
$$\leq ((F_0 + \varepsilon) C_1)^{-1} (F_0 + \varepsilon) C_1 r_1$$
$$\| A_\lambda u \| \leq r_1 = \| u \|.$$

Par conséquent, si nous choisissons $\Omega_1 = \{u \in E : \| u \| < r_1\}$, alors

$$\| A_\lambda u \| \leq \| u \|, \quad \text{pour } u \in P \cap \partial\Omega_1. \tag{3.16}$$

Soit $r_3 > 0$ tel que

$$f(u) \geq (f_\infty - \varepsilon) u, \quad \text{pour } u \geq r_3. \tag{3.17}$$

Si $u \in P$ avec $\| u \| = r_2 = \max\{2r_1, r_3\}$, et par (3.14) et (3.17), nous avons

$$
\begin{aligned}
&\| A_\lambda u \| \geq A_\lambda u(l) \\
&= \lambda \int_0^1 G(l,s) f(u(s))\, ds \\
&\geq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (\alpha-2) q(l) k(s) f(u(s))\, ds \\
&\geq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (\alpha-2) q(l) k(s) (f_\infty - \varepsilon) u(s)\, ds \\
&\geq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{(\alpha-2)^2 q(l)}{M_0} q(s) k(s) (f_\infty - \varepsilon) \| u \| \, ds \\
&= \lambda q(l) C_2 (f_\infty - \varepsilon) \| u \| \\
&\geq (q(l)(f_\infty - \varepsilon) C_2)^{-1} q(l) C_2 (f_\infty - \varepsilon) \| u \| \\
&\geq \| u \|
\end{aligned}
$$

Ainsi, si nous fixons $\Omega_2 = \{u \in E : \| u \| < r_2\}$, alors

$$
\| A_\lambda u \| \geq \| u \|, \ \text{ pour } u \in P \cap \partial\Omega_2. \tag{3.18}
$$

Maintenant, d'aprés (3.16), (3.18) et le théorème (1.3), nous garantissons que A_λ a un point fixe $u \in P \cap \left(\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1\right)$ avec $r_1 \leq \| u \| \leq r_2$ allors u est une solution positive de (3.1) et (3.2), d'où l'éxistence de valeurs propres pour
$\lambda \in \left](q(l) f_\infty C_2)^{-1}, (F_0 C_1)^{-1}\right[$.

Théorème 3.2 *S'il existe $l \in [0,1]$ tel que $q(l) C_2 f_0 > F_\infty C_1$, alors pour tout λ tq :*

$$
\lambda \in \left](q(l) f_0 C_2)^{-1}, (F_\infty C_1)^{-1}\right[, \tag{3.19}
$$

le problème aux limite (3.1) et (3.2) a au moins une solution positive.
Ici nous imposons

$$
\begin{aligned}
&(q(l) f_0 C_2)^{-1} = 0 \text{ si } f_0 = +\infty \\
&\text{et } \ (F_\infty C_1)^{-1} = +\infty \text{ si } F_\infty = 0.
\end{aligned}
$$

Preuve: Soit λ réel qui vérifie (3.19) et soit $\varepsilon > 0$ tel que

$$
(q(l)(f_0 - \varepsilon) C_2)^{-1} \leq \lambda \leq ((F_\infty + \varepsilon) C_1)^{-1}. \tag{3.20}
$$

Par la définition de f_0, on voit qu'il existe $r_1 > 0$ de telle sort que

$$
f(u) \geq (f_0 - \varepsilon) u, \quad \text{pour } \ 0 < u \leq r_1.
$$

Si

$$u \in P \text{ avec } \parallel u \parallel = r_1,$$

on suit les même étapes de la deuxième partie de théorème (3.1), nous pouvons obtenir que $\parallel A_\lambda u \parallel \geq \parallel u \parallel$. Ainsi, si nous choisissons

$$\Omega_1 = \{u \in E : \parallel u \parallel < r_1\},$$

alors

$$\parallel A_\lambda u \parallel \geq \parallel u \parallel, \text{ pour } u \in P \cap \partial\Omega_1. \tag{3.21}$$

En suite, nous pouvons choisir $R_1 > 0$ de telle sort que

$$f(u) \leq (F_\infty + \varepsilon) u, \text{ pour } u \geq R_1. \tag{3.22}$$

Nous considérons deux cas :

Cas1 : Supposons que f est bornée.Alors il existe $M > 0$, tel que

$$f(u) \leq M, \text{ pour } u \in \left]0, +\infty\right[.$$

Nous définissons $r_3 = \max\{2r_1, \lambda M C_1\}$, et $u \in P$ avec $\parallel u \parallel = r_3$, alors

$$\begin{aligned}
\parallel A_\lambda u \parallel &\leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 M_0 k(s) f(u(s)) \, ds \\
&\leq \frac{\lambda M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 M_0 k(s) \, ds \\
&\leq \lambda M C_1 \\
&\leq r_3 \leq \parallel u \parallel .
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\parallel A_\lambda u \parallel \leq \parallel u \parallel, \text{ pour } u \in P_{r_3} = \{u \in P : \parallel u \parallel \leq r_3\} \tag{3.23}$$

Cas2 : Supposons que f est n'est pas bornée. Alors il existe $r_4 > \max\{2r_1, R_1\}$, tel que

$$f(u) \leq f(r_4), \text{ pour } 0 < u \leq r_4.$$

Soit $u \in P$ avec $\parallel u \parallel = r_4$, par (3.18) et (3.20), nous avons

$$\begin{aligned}
\| A_\lambda u \| &\leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 M_0 k(s) f(u(s))\, ds \\
&\leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 M_0 k(s) (F_\infty + \varepsilon) \| u \| \, ds \\
&\leq \lambda C_1 (F_\infty + \varepsilon) \| u \| \\
&\leq \| u \| .
\end{aligned}$$

Ainsi, (3.23) est encore juste.

Dans les deux cas, si nous fixons

$$\Omega_2 = \{u \in E : \| u \| < r_2 = \max\{r_3, r_4\}\},$$

alors

$$\| A_\lambda u \| \leq \| u \| \text{ , pour } u \in P \cap \partial\Omega_2 \text{ .} \tag{3.24}$$

Maintenant que nous obtenons (3.21) et (3.24), il resulte de théorème (1.3) que A_λ a un point fixe $u \in P \cap \left(\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1\right)$ avec $r_1 \leq \| u \| \leq r_2$. par conséquent u est la solution de (3.1) et (3.2).

Théorème 3.3 *Supposons qu'il existe* $l \in [0,1]$ $r_2 > r_1 > 0$ *tels que* $q(l) > \dfrac{M_0 r_1}{(\alpha - 2) r_2}$, *et* f *vérifie les inégalités suivantes*

$$\min_{\frac{\alpha-2}{M_0} q(l) r_1 \leq u \leq r_1} f(u) \geq \frac{r_1}{\lambda q(l) C_3}, \quad \max_{0 \leq u \leq r_2} f(u) \leq \frac{r_2}{\lambda C_1}.$$

Alors le problème aux limite (3.1) et (3.2) a une solution positive $u \in P$ avec $r_1 \leq \| u \| \leq r_2$.

Preuve: On va Choisir

$$\Omega_1 = \{u \in E : \| u \| < r_1\},$$

alors pour

$$u \in P \cap \partial\Omega_1,$$

nous avons

$$
\begin{aligned}
&\| A_\lambda u \| \geq A_\lambda u\,(l) \\
&= \lambda \int_0^1 G\,(l,s)\, f\,(u\,(s))\, ds \\
&\geq \frac{\lambda}{\Gamma\,(\alpha)} \int_0^1 (\alpha-2)\, q\,(l)\, k\,(s)\, f\,(u\,(s))\, ds \\
&\geq \frac{\lambda}{\Gamma\,(\alpha)} \int_0^1 (\alpha-2)\, q\,(l)\, k\,(s) \min_{\frac{\alpha-2}{M_0} q(l) r_1 \leq u \leq r_1} f\,(u)\, ds \\
&\geq \lambda q\,(l)\, C_3 \frac{r_1}{\lambda q\,(l)\, C_3} \\
&= r_1 = \| u \| .
\end{aligned}
$$

D'autre part, on va choisir

$$\Omega_2 = \{ u \in E : \| u \| < r_2 \} ,$$

alors pour

$$u \in P \cap \partial \Omega_2,$$

nous avons

$$
\begin{aligned}
\| A_\lambda u \| &\leq \frac{\lambda}{\Gamma\,(\alpha)} \int_0^1 k\,(s)\, f\,(u\,(s))\, ds \\
&\leq \frac{\lambda}{\Gamma\,(\alpha)} \int_0^1 k\,(s) \max_{0 \leq u \leq r_2} f\,(u\,(s))\, ds \\
&\leq \lambda C_1 \frac{r_2}{\lambda C_1} \\
&= r_2 = \| u \| .
\end{aligned}
$$

Ainsi, par le théorème (1.3), le problème aux limite (3.1) et (3.2) et a une solution positive $u \in P$ avec $r_1 \leq \| u \| \leq r_2$. ■

Pour la suite, on a besoin de la condition suivante.

$$(H) \qquad \left(\frac{\min\limits_{u \in \left[\frac{\alpha-2}{M_0} q(l) r, r \right]} f\,(u)}{r} \right) > 0, \text{ où } \ l \in [0,1]$$

Notons

$$\lambda_1 = \sup_{r>0} \frac{r}{C_1 \max\limits_{0 \leq u \leq r} f\,(u)}, \tag{3.25}$$

$$\lambda_2 = \inf_{r>0} \frac{r}{C_3 \min\limits_{\frac{\alpha-2}{M_0} q(l) r \leq u \leq r} f(u)} \tag{3.26}$$

En vue de la continuité de f et H, nous avons

$$0 < \lambda_1 \leq +\infty \text{ et } 0 < \lambda_2 \leq +\infty.$$

On va supposer dans ce qui suit que la la condition (H) est vérifiée.

Théorème 3.4 *Si $f_0 = +\infty$ et $f_\infty = +\infty$, alors le problème aux limite* (3.1) *et* (3.2) *a au moins deux solutions positives pour chaque $\lambda \in \left]0, \lambda_1\right[$.*

Preuve: On définit

$$a(r) = \frac{r}{C_1 \max\limits_{0 \leq u \leq r} f(u)}.$$

Par la continuité de $f(u)$, $f_0 = +\infty$ et $f_\infty = +\infty$, nous avons que
$a(r) : \left]0, +\infty\right[\to \left]0, +\infty\right[$ est continue et

$$\lim_{r \to 0} a(r) = \lim_{r \to +\infty} a(r) = 0.$$

Par (3.25) il existe $r_0 \in \left]0, +\infty\right[$, tel que

$$a(r_0) = \sup_{r>0} a(r) = \lambda_1,$$

pour $\lambda \in \left]0, \lambda_1\right[$, il existe les constantes c_1, c_2 $(0 < c_1 < r_0 < c_2 < +\infty)$ avec

$$a(c_1) = a(c_2) = \lambda.$$

Ainsi,

$$f(u) \leq \frac{c_1}{\lambda C_1}, \quad \text{pour } \ u \in [0, c_1], \tag{3.27}$$

$$f(u) \leq \frac{c_2}{\lambda C_1}, \quad \text{pour } \ u \in [0, c_2]. \tag{3.28}$$

D'autre part, l'application de la condition $f_0 = +\infty$ et $f_\infty = +\infty$, il existe les constantes d_1, d_2 $(0 < d_1 < c_1 < r_0 < c_2 < d_2 < +\infty)$ avec

$$\frac{f(u)}{u} \geq \frac{1}{q^2(l) \lambda C_3}, \quad \text{pour } \ u \in \left]0, d_1\right[\cup \left]\frac{\alpha-2}{M_0} q(l) d_2, +\infty\right[,$$

et on a

$$\min_{\frac{\alpha-2}{M_0} q(l) d_1 \leq u \leq d_1} f(u) \geq \frac{d_1(\alpha-2)}{\lambda C_3 q(l) M_0}, \tag{3.29}$$

$$\min_{\frac{\alpha-2}{M_0} q(l) d_2 \leq u \leq d_2} f(u) \geq \frac{d_2(\alpha-2)}{\lambda C_3 q(l) M_0}. \tag{3.30}$$

Par (3.27) et (3.29), (3.28) et (3.30), combinant avec le théorème (3.3) et le théorème (1.3), nous pouvons trouver l'existence de deux solutions pour $\lambda \in \left]0, \lambda_1\right[$.

Corollaire 3.1 *Si $f_0 = +\infty$ ou $f_\infty = +\infty$, alors le problème aux limite* (3.1) *et* (3.2) *a au moins une seule solutions positives .*

Théorème 3.5 *Si $f_0 = 0$ et $f_\infty = 0$, alors pour chaque $\lambda \in \left]\lambda_2, +\infty\right[$, le problème aux limite* (3.1) *et* (3.2) *a au moins deux solutions positives.*

Preuve: On définit

$$b(r) = \frac{r}{C_3 \min\limits_{\frac{\alpha-2}{M_0} q(l) r \leq u \leq r} f(u)}.$$

Par la continuité de $f_0 = 0$ et $f_\infty = 0$, on voit facilement que $b(r) : \left]0, +\infty\right[\to \left]0, +\infty\right[$ est continue et

$$\lim_{r \to 0} b(r) = \lim_{r \to +\infty} b(r) = +\infty.$$

Par (3.26), il existe $r_0 \in \left]0, +\infty\right[$, tel que

$$b(r_0) = \inf_{r>0} b(r) = \lambda_2.$$

Pour $\lambda \in \left]\lambda_2, +\infty\right[$, il existe les constantes d_1, d_2 $(0 < d_1 < r_0 < d_2 < +\infty)$ avec

$$b(d_1) = b(d_2) = \lambda.$$

Donc

$$f(u) \geq \frac{d_1}{\lambda C_3}, \text{ pour } u \in \left[\frac{\alpha-2}{M_0} q(l) d_1, d_1\right],$$

$$f(u) \geq \frac{d_2}{\lambda C_3}, \text{ pour } u \in \left[\frac{\alpha-2}{M_0} q(l) d_2, d_2\right].$$

D'autre part, par l'utilisation $f_0 = 0$, nous savons qu'il existe une constantes c_1 $(0 < c_1 < d_1)$ avec

$$\frac{f(u)}{u} \leq \frac{1}{\lambda C_1}, \text{ pour } u \in \left]0, c_1\right[,$$

$$\max_{0 \leq u \leq c_1} f(u) \leq \frac{c_1}{\lambda C_1}. \tag{3.31}$$

Compt tenu de $f_\infty = 0$, il existe une constantes $c_2 \in \left]d_2, +\infty\right[$ tel que

$$\frac{f(u)}{u} \leq \frac{1}{\lambda C_1}, \text{ pour } u \in \left]c_2, +\infty\right[.$$

Soit

$$M = \max_{0 \leq u \leq c_2} f(u) \quad \text{et } c_2 \geq \lambda C_1 M,$$

donc on peut voir que

$$\max_{0\leq u\leq c_2} f(u) \leq \frac{c_2}{\lambda C_1}. \tag{3.32}$$

Par (3.29) et (3.30), combinant avec le théorème (3.3) et le théorème (1.3), la prouve est terminée.

Corollaire 3.2 *Supposons que la condition* (H) *est vérifiée. Si* $f_0 = 0$ *ou* $f_\infty = 0$ *, alors pour chaque*

$$\lambda \in \left]\lambda_2, +\infty\right[,$$

le problème aux limite (3.1) et (3.2) a au moins une seule solutions positives .

Par les théorèmes ci-dessus, nous pouvons obtenir les résultats suivantes :

Corollaire 3.3 *Si* $f_0 = +\infty$, $f_\infty = d$, *ou* $f_\infty = +\infty$, $f_0 = d$, *alors pour tout*

$$\lambda \in \left]0, (dC_1)^{-1}\right[,$$

le problème aux limite (3.1) et (3.2) a au moins une seule solutions positives.

Corollaire 3.4 *Si* $f_0 = 0$, $f_\infty = d$, *ou si* $f_\infty = 0$, $f_0 = d$, *alors pour tout*

$$\lambda \in \left] \left(\frac{\alpha - 2}{M_0} q\left(l\right) dC_2 \right)^{-1}, +\infty \right[,$$

le problème aux limite (3.1) et (3.2) a au moins une seule solutions positives.

3.4 Résultats de non-existence de valeurs propres

Dans cette section, nous donnons des conditions suffisants pour la non- existence de valeurs propres de problème(3.1) et (3.2)

Théorème 3.6 *Supposons que la condition* (H) *est vérifiée. Si* $F_0 < +\infty$ *et* $F_\infty < +\infty$ *, alors il existe un* $\lambda_0 > 0$ *tel que pour tout* $0 < \lambda < \lambda_0$*, le problème aux limites* (3.1) *et* (3.2) *n'admet pas de solution.*

Preuve: Comme $F_0 < +\infty$ et $F_\infty < +\infty$, ils existe des nombres positifs m_1, m_2, r_1 et r_2,tels que

$$r_1 < r_2$$

$$\begin{aligned} f(u) &\leq m_1 u\ , \quad \text{pour } u \in [0, r_1]\,, \\ f(u) &\leq m_2 u\ , \quad \text{pour } u \in [r_2, +\infty[\,. \end{aligned}$$

Soit

$$m = max\left\{m_1, m_2, \max_{r_1 \leq u \leq r_2}\left\{\frac{f(u)}{u}\right\}\right\}.$$

Nous avons aussi

$$f(u) \leq mu, \quad \text{pour } u \in \ [0, +\infty[\,.$$

Supposons $v(t)$ est un solution positive de (3.1) et (3.2). Nous allons montrer que cela conduit à une contradiction pour

$$0 < \lambda < \lambda_0 = (mC_1)^{-1}$$

Alors

$$A_\lambda v(t) = v(t) \ \text{ pour } t \in [0, 1]\,,$$

$$\begin{aligned} \| v \| = \| A_\lambda v \| &\leq \frac{\lambda M_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 k(s) f(v(s))\, ds \\ &< \frac{m\lambda_0 M_0}{\Gamma(\alpha)} \| v \| \int_0^1 k(s)\, ds \\ &< \frac{(mC_1)^{-1} m M_0}{\Gamma(\alpha)} \| v \| \int_0^1 k(s)\, ds, \end{aligned}$$

D'aprés la définition de C_1, on a donc

$$\| v \| = \| A_\lambda v \| < \| v \| \,.$$

Ce qui est une contradiction. Par conséquent (3.1) et (3.2) n'admet pas de solution positive.
■

Théorème 3.7 *Supposons que la condition* (H) *est vérifiée. Si* $f_0 > 0$ *et* $f_\infty > 0$ *, alors il existe un* $\lambda_0 > 0$ *tel que pour tout* $\lambda > \lambda_0$*, le problème aux limites* (3.1) *et* (3.2) *n'admet pas de solution.*

Preuve: Comme $f_0 > 0$ et $f_\infty > 0$, ils existe des nombres positifs n_1, n_2, r_1 et r_2,tels que

$$r_1 < r_2$$

et

$$\begin{aligned} f(u) &\geq n_1 u, \quad \text{pour } u \in [0, r_1], \\ f(u) &\geq n_2 u, \quad \text{pour } u \in [r_2, +\infty[. \end{aligned}$$

Soit

$$n = min\left\{ n_1, n_2, \min_{r_1 \leq u \leq r_2} \left\{ \frac{f(u)}{u} \right\} \right\} > 0,$$

Alors on a

$$f(u) \geq nu, \quad \text{pour } \ u \in [0, +\infty[.$$

Supposons $v(t)$ est une solution positive de (3.1) et (3.2). Nous allons montrer que cela conduit à une contradiction pour

$$\lambda > \lambda_0 = \left(\frac{M_0 n C_2}{\alpha - 2} \right)^{-1}$$

Alors

$$A_\lambda v(t) = v(t) \ \text{ pour } t \in [0, 1],$$

en effet

$$\begin{aligned} \| v \| = \| A_\lambda v \| &\geq \frac{\lambda (\alpha - 2)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 q(l) k(s) f(v(s)) ds \\ &> \frac{\lambda_0 (\alpha - 2)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 q(l) k(s) f(v(s)) ds \\ &> \frac{\left(\frac{M_0 n C_2}{\alpha - 2} \right)^{-1} n (\alpha - 2)}{\Gamma(\alpha)} \| v \| \int_0^1 q(l) k(s) f(v(s)) ds, \end{aligned}$$

D'aprés la définition de C_2, on a donc

$$\| v \| = \| A_\lambda v \| > \| v \|,$$

Ce qui est une contradiction. Par conséquent (3.3) et (3.4) n'admet pas de solution positive.

3.5 Exemples

Dans cette section, nous présentons quelques exemples pour illustrer les principaux résultats.

Exemple 3.1 *On considère le problème aux limites suivant :*

$$D_{0^+}^{\frac{7}{2}} u(t) = \lambda u^a, \quad 0 < t < 1, a > 1, \tag{3.33}$$

$$u(0) = u(1) = u^{'}(0) = 0. \tag{3.34}$$

tq

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{7}{2}, M_0 = \max\left\{\alpha - 1, (\alpha-2)^2\right\} = \frac{5}{2}, \\
C_1 &= \frac{M_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 k(s)\,ds = \frac{\frac{5}{2}}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} \int_0^1 s^2 (1-s)^{\frac{3}{2}}\,ds = \frac{64}{945\sqrt{\pi}} = 0.03821, \\
C_2 &= \frac{(\alpha-2)^2}{\Gamma(\alpha) M_0} \int_0^1 k(s)\,ds = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} \int_0^1 s^2 (1-s)^{\frac{3}{2}}\,ds = \frac{9}{25} C_1 = 0.01375.
\end{aligned}$$

Soit

$$f(u) = u^a, a > 1$$

nous avons aussi

$$F_0 = 0, f_\infty = +\infty.$$

nous choissisons

$$l = \frac{1}{2}, q\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{16} = 0.08839 \text{ alors } q(l)\, C_2 f_\infty > C_1 F_0$$

Par conséquence, par le théorème (3.1), le problème aux limite (3.33) et (3.34) possède une solution positive pour tout

$$\lambda \in \left]0, +\infty\right[.$$

Exemple 3.2 *On considère le problème aux limites suivant :*

$$D_{0^+}^{\frac{7}{2}} u(t) = \lambda u^b, \quad 0 < t < 1, 0 < b < 1, \tag{3.35}$$

$$u(0) = u(1) = u^{'}(0) = 0. \tag{3.36}$$

tq

$$\alpha = \frac{7}{2}, M_0 = \frac{5}{2}, C_1 = 0.03821, C_2 = 0.01375.$$

Soit

$$f(u) = u^b, 0 < b < 1.$$

nous avons aussi

$$F_{+\infty} = 0, f_0 = +\infty.$$

nous choissisons

$$l = \frac{1}{2}, q\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{16} = 0.08839 \text{ alors } q(l)\, C_2 f_0 > C_1 F_0$$

Par conséquence, par le théorème (3.2), le problème aux limite (3.35) et (3.36) possède une solution positive pour tout

$$\lambda \in \left]0, +\infty\right[.$$

Exemple 3.3 *On considère le problème aux limites suivant :*

$$D_{0+}^{\frac{7}{2}} u(t) = \lambda \frac{(70u^2 + u)(2 + \sin u)}{u + 1}, \qquad 0 < t < 1, \tag{3.37}$$

$$u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0$$

tq

$$\alpha = \frac{7}{2}, M_0 = \frac{5}{2}, C_1 = 0.03821, C_2 = 0.01375.$$

Soit

$$f(u) = \left(70u^2 + u\right)(2 + \sin u) / (u + 1),$$

nous avons aussi

$$F_0 = f_0 = 2, F_\infty = 210, f_\infty = 70 \text{ et } 2u < f(u) < 210u.$$

(i) nous choissisons $l = \frac{1}{2}$, $q\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{16} = 0.08839$ alors $q(l)\, C_2 f_\infty > F_0 C_1$

Par conséquence, par théorème (3.1), le problème aux limite (3.37) et (3.38) possède une solution positive pour tout

$$\lambda \in \left]11.7546, 13.0855\right[.$$

(ii) Par le théorème (3.6), le problème aux limite (3.37) et (3.38) n'admet pas de solution positive pour tout

$$\lambda \in \left]0, 0.1246\right[.$$

(iii) nous choissisons $l = \frac{1}{2}$, $q\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{16} = 0.08839.$alors $q(l)\, C_2 f_\infty > F_0 C_1$

Par conséquence, par le théorème (3.7), le problème aux limite (3.37) et (3.38) n'admet pas de solution positive pour tout

$$\lambda \in \left]685.6794, +\infty\right[$$

.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a rappelé les définitions des dérivées fractionnaires (Riemann-Liouville, Caputo), et on a traité (détaillé) un problème aux valeurs propres fractionnaire avec des conditions séparées

$$\begin{cases} \alpha u(0) + \beta u'(0) = 0 \\ \alpha u(1) + \beta u'(1) = 0 \end{cases}$$

On a appliqué le théorème du point fixe de Guo-Krasnosel'skii (exponsion et compréssion du cône) pour preuver l'existence de la solution.

Pour vérifier les conditions de ce théorème, on étudier la positivité de la fonction de Green pour pouvoir appliquer l'opérateur sur le cône des fonctions positives.

On a vu que sous certaines conditions pour le terme non linéaire (f), il y a l'existence de valeurs propres.

On a aussi donné des conditions de non existence de solutions pour ce problème aux limites.

Bibliographie

[1] **A.A.KILBAS**, **H.H.Srivastava and J.J.Trojillo**, Theory and applications of fractional differential equtions, Elsevier Science B. V., Amsterdam, 2006.

[2] **Belakroum Kheireddine**, existence et positivité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire, mémoire de Magistère, Université Badji MOKHTAR de Annaba, 2013.

[3] **H.Dib,** Equations Différentielles Fractionnaires, EDA-EDO (4ème Ecole)-Tlemcen 23-27 mai 2009.

[4] **Lalmi Abdellatif,** existence et unicité de solution d'un équation déffirentielle fractionnaire du type voltérra avec retard, mémoire de Magistère, The Université of new south wales, 2010.

[5] **M.A. Krasnoselskii**, Positive solution of operator equation, Noordhoff Groningen, 1964.

[6] **Shurong Sun, Yige Zhao, Zhenlai Han, Jian Liu**, Eigenvalue problem for a class of nonlinear fractional differential equations, Ann. Funct. Anal. 4 (2013), no. 1,25-39.

[7] **S. Zhang,** Positive solution for boundary value-problems of a nonlinear fractional differential equtions, Electron. J. Differential Equtions 36 (2006), 1-12.

[8] **X.XU,D. Jiang and C. Yuan,** Multiple positive solutions for the boundary value problem of a nonlinear fractional differential eqution, Nonlinear Anal. 71 (2009), 4676-4688.

[9] **Q.Yao**, Positive solutions for eigenvalue problems of fourth-order elastic beam equations, App. Math. Lett. 17 (2004), 237-243.

[10] **Q.Yao**, Existence and multiplicity of positive solutions to a singular elastic beam equations rigidly fixed at both ends, Nonlinear Anal. 69 (2008), 2683-2694.