Remerciements

En préambule à ce mémoire je remercie **ALLAH** qui m'aide et me donne la patience et le courage durant ces langues années d'études.

Je tiens tout d'abord à remercier grandement Mme L.Djouamai, pour sa grande disponibilité et ses précieux conseils.

Je remercie vivement Mr M.Hachama pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire, je le remercie chaleureusement pour sa participation à ma formation.

J'adresse mes sincères remerciements aux Mr O.Benniche et Mr M.Bezziou pour leur contribution à ma formation et en acceptant de juger mon travaille.

Je voudrais remercier mes parents, mon mari, mes frères, ma sœur, mes chères amies, aussi toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à mes recherches et à l'élaboration de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

Notations

- $\|.\|_2$: La norme euclidienne.
- Ω : est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- $C^k(\Omega)$: L'espace des fonctions définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, k fois continûment dérivables.
- $C^\infty(\Omega)$: L'espace des fonctions indéfiniment dérivables $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
- $C_c^k(\Omega)$: Les éléments de $C^k(\Omega)$ à support compact dans Ω.
- $C_c^\infty(\Omega)$: Les éléments de $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω.
- $L^1(I, \mathbb{R})$: L'espace des fonctions $x : I \to \mathbb{R}$ Lebesgue intégrables.
- $L_{loc}^1(I, \mathbb{R})$: L'espace des fonctions localement intégrables.
- L^2 : L'espace des fonctions de carré intégrable.
- L^p : L'espace des fonctions dont la puissance p est intégrable au sens de Lebesgue.
- $D(\Omega)$: L'espace des fonctions indéfiniment dérivable à support compact dans Ω.
- $D'(\Omega)$: L'espace (des distributions) des formes linéaires continues sur $D(\Omega)$.

Table des matières

Résumé

Dans notre travail, nous montrons la stabilité exponentielle de l'énergie associé à un système en thermoélasticité. On considère le système de Bresse, ce modèle est un modèle linéaire couplant trois équations d'ondes et deux équations de la chaleur. Il décrit les mouvements d'une poutre thermoélastique planaire. Comme nous considèrons le système de Timoshenko qui décrit les vibrations d'une poutre thermoélastique dans un domaine bornée en dimension 1. Ce modèle est un modèle linéaire couplant trois équations d'ondes.

Introduction

Au cours des dernières années, la stabilité des poutres élastiques, thermoélastiques et viscoélastiques de type Timoshenko, Bresse, Rayleign et Euler-Bernoulli, et la stabilité des plaques vibrantes de type Kirchho , ont attiré beaucoup d'attention de beaucoup d'auteurs. Dans leur étude sur les réseaux de poutres felexibles, Lagnese, Leugering et Schmidt [1] découlent un modèle général de poutres élastiques non linéaires de trois dimensions. Un cas particulier de ce modéle est un modéle linéaire couplant trois équations des ondes. Il décrit les mouvement d'une poutre élastique planaire sous l'effet de petites déformations. C'est le système de Bresse donnée par :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - Gh\left(\varphi_x + \psi + lw\right)_x - lEh\left(w_x - l\varphi\right) = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - EI\psi_{xx} + Gh\left(\varphi_x + \psi + lw\right) = 0, \ , \\ \rho_3 w_{tt} - Eh\left(w_x - l\varphi\right) + lGh\left(\varphi_x + \psi + lw\right) = 0. \end{cases}$$

où $t > 0$ et $0 < x < L$. L'indice t désignele temp, et l'indice x désigne la variable spaciale. Les fonctions φ, ψ et ω désignent, respectivement, le déplacement transversal de la poutre, l'angle de rotation d'un filament de la poutre et le déplacement longitudinal de la poutre. En plus, ρ_1 , ρ_2 , I, l, G, E, et h désignent des constants positives caractérisent des propriétés physiques de la poutre et du filament.

Des autres auteurs ont étudié la stabilisation des systèmes couplés hyperbolique-parabolique tels que thermoélasticité, thermoplastes (voir [2], [3], [4]). Pour ces systèmes, l'objectif principal est de déterminer si la dissipation induite par l'équation de la chaleur est suffisante pour stabiliser le système obtenu par couplage à une équation de type hyperbolique.

Ce mémoire est divisé en deux parties principales. Dans la première partie on considère le système thermoélastique de Bresse suivant :

$$\begin{cases} \rho h\omega_{1tt} = \left(Eh\left(\omega_{1x} - k\omega_3\right) - \alpha\theta_{1t}\right)_x - kGh\left(\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1\right), \\ \rho h\omega_{3tt} = Gh\left(\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1\right)_x + kEh\left(\omega_{1x} - k\omega_3\right) - k\alpha\theta_{1t}, \\ \rho I\phi_{2tt} = EI\phi_{2xx} - Gh\left(\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1\right) - \alpha\theta_{3x}, \\ \rho c\theta_{1tt} = \theta_{1xxt} + \theta_{1xx} - \alpha T_0\left(\omega_{1tx} - k\omega_{3t}\right), \\ \rho c\theta_{3t} = \theta_{3xx} - \alpha T_0\phi_{2tx}, \end{cases} \tag{0.0.1}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} \omega_1(x,0) &= u_0(x), \quad \omega_{1t}(x,0) = v_0(x), \quad \phi_2(x,0) = \phi_0(x), \\ \phi_{2t}(x,0) &= \psi_0(x), \quad \omega_3(x,0) = \omega_0(x), \quad \omega_{3t}(x,0) = \varphi_0(x), \\ \theta_1(x,0) &= \theta_0(x), \quad \theta_{1t}(x,0) = \eta_0(x), \quad \theta_3(x,0) = \xi_0(x), \end{aligned} \tag{0.0.2}$$

et les conditions aux limites

$$\omega_1(x,t) = \omega_{3x}(x,t) = \phi_2(x,t) = \theta_1(x,t) = \theta_3(x,t) = 0, \text{ pour } x = 0,1, \tag{0.0.3}$$

où $t > 0$, et $0 < x < 1$, telle que ω_1, ω_3, et φ_2 sont respectivement le déplacement longitudinal, vertical, et l'angle de cisaillement, θ_1 et θ_3 sont les déviations de la température de référence T le long des directions longitudinale et verticale, E, G, ρ, I, m, k, h, et c sont des constants positives caractérisant les propriétés élastiques et thermiques des matériaux. Ce modèle est un modèle linéaire couplant trois équations d'ondes et deux équations de la chaleur. Il décrit les mouvements d'une poutre thermoélastique planaire. On a démontré que le taux de la décroissance exponentielle est préservée lorsque la vitesse de propagation du déplacement verticale coïncide avec la vitesse de propagation du déplacement longitudinal ou l'angle de rotation.

Dans la deuxième partie, on considère le système thermoélastique de Timoshenko suivant:

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - K\left(\varphi_x + \psi\right)_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + K\left(\varphi_x + \psi\right) + \beta\theta_x = 0, \\ \rho_3\theta_{tt} - \delta\theta_{xx} + \gamma\psi_{ttx} - k\theta_{txx} = 0, \\ \varphi(.,0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(.,0) = \varphi_t, \quad \psi(.,0) = \psi_0, \quad \psi_t(.,0) = \psi_t, \\ \theta(.,0) = \theta_0, \quad \theta_t(.,0) = \theta_t, \\ \varphi(0,t) = \varphi(1,t) = \psi(0,t) = \psi(1,t) = \theta_x(0,t) = \theta_x(1,t) = 0, \end{cases} \tag{0.0.4}$$

où t désigne le temp, et l'indice x désigne la variable spatiale telle que $t > 0$, et $0 < x < 1$. φ est le déplacement transverse de la poutre, et ψ est l'angle de rotation du filament de la poutre. θ est la déviations de la température, En plus, ρ_1, ρ_2, ρ_3, K, b, δ, γet k désignent des constants positives caractérisent des propriétés physiques de la poutre et du filament. Ce modèle est un modèle linéaire couplant trois équations des ondes. il décrit les vibrations d'une poutre thermoélastique. On a démontré la stabilité exponentielle du système (0.0.4) .

Cette thèse est divisée en trois chapitres. Dans le premier chapitre nous rappelons quelques notations de base, des définitions, des propriétés qui seront utilisés dans ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, on rappelle le travail de Z. Liu et B. Rao [5], nous commençons par l'étude de comportement asymptotique pour le système thermoélastique de Bresse, et nous démontrons une décroissance exponentielle de l'énergie.

Dans le troisième chapitre, on rappelle le travail de S- A. Messaoudi et B-Said-Houari [6], nous commençons par l'étude de comportement asymptotique pour le système thermoélastique de Timoshenko, et nous démontrons une décroissance exponentielle de l'énergie.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre, consacré aux rappels, nous avons regroupé les notions de base, les définitions, les propriétés qui seront utilisés dans ce mémoire.

1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espace $L^p(\Omega)$

Soit $1 \leq p < \infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on définit

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}.$$

On définit sur $L^p(\Omega)$ la norme :

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

1.1.2 Espace $L^p(a, b, \Omega)$

Soient Ω un espace de Banach et $]a, b[$ un ouvert de $\mathbb{R}$, on définit

$$L^p(a, b, \Omega) = \left\{ f :]a, b[\to \mathbb{R} : f \text{ mesurable et } \int_{(a,b)} |f(x)|^p \, dx < +\infty \right\}.$$

On définit sur $L^p(a,b,\Omega)$ la norme :

$$\|f\|_{L^p(a,b,\Omega)} = \left[\int\limits_{(a,b)} \|f(t)\|_\Omega^p \, dt \right]^{\frac{1}{p}}, \text{ pour } p < \infty.$$

Définition 1.1.1 *(Dérivée faible)*

Soit $1 \leq i \leq n$, on dit qu'une fonction $f \in L^1_{Loc}$ est dérivable dans la direction i au sens faible s'il exixte $D_i f \in L^1_{Loc}(\Omega)$ tel que :

$$\forall \varphi \in D(\Omega) \quad \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n D_i f(x) \varphi(x) \, dx,$$

si un tel $D_i f$ existe, il est unique.

1.1.3 Espace de Sobolev

On introduit l'espace $H^m(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions $u \in L^2(\Omega)$, dont toutes les dérivées partielles d'ordre inférieure ou égale à m-prises au sens faibles sont dans $L^2(\Omega)$.

Ces espaces jouent un rôle fondamental dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

Définition 1.1.2 *Pour $m \in \mathbb{N}$, on définit l'espace de Sobolev d'ordre $m \in \mathbb{N}$ par:*

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \, : \, D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m \right\},$$

où $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, et $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} ... \partial_n^{\alpha_n}$ où $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

On munit $H^m(\Omega)$ du produit scalaire

$$(u,v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx,$$

et la norme associeé à ce produit scalaire

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_2^2 \right)^{1/2}.$$

Notion de trace

Pour une fonction $u \in C^0\left(\bar{\Omega}\right)$, la trace de u sur $\partial\Omega$ est définie par

$$\begin{aligned} \gamma\left(u\right) \quad &: \quad \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto \quad u\left(x\right). \end{aligned}$$

En d'autres termes, $\gamma\left(u\right) = u|_{\partial\Omega}$. On introduit alors l'application trace

$$\begin{aligned} \gamma \quad &: \quad C^0\left(\bar{\Omega}\right) \longrightarrow C^0\left(\partial\Omega\right) \\ u \quad &\longmapsto \quad \gamma\left(u\right). \end{aligned}$$

qui est une application linéaire. A une application définie sur un ouvert Ω, elle associe la restriction de cette application au bord de l'ouvert.

Peut-on étendre la notion de trace à des fonctions moins régulières ?

On ne peut pas définir la trace d'une fonction de $L^2(\Omega)$. par exemple $u : x \rightarrow \sin(1/x)$ définie sur $\Omega =]0, 1[$. L'ensemble $\partial\Omega$ est alors compoé des deux points 0 et 1. Il n'y a pas de façon naturelle de définir la trace de u (la valeur de u) en le point 0.

Une fonction qui est dans $H^1(\Omega)$ n'est pas nécessairement continue. On peut cependant définir la trace sur $\partial\Omega$ d'une fonction de $H^1(\Omega)$. Plus précisément, on admet qu'il existe une application linéaire et continue

$$\begin{aligned} \gamma : H^1(\Omega) &\longrightarrow L^2\left(\partial\Omega\right) \\ u &\longmapsto \gamma\left(u\right) \end{aligned}$$

vériiant $\forall u \in H^1(\Omega) \cap C^0\left(\bar{\Omega}\right), \gamma\left(u\right) = u|_{\partial u}$.

Pour $u \in H^1(\Omega)$, la fonction $\gamma\left(u\right)$ est définie sur $\partial\Omega$, et elle n'est pas forcément continue, mais seulement $L^2\left(\partial\Omega\right)$.

Proposition 1.1.1

$$H_0^1\left(\Omega\right) = \left\{u \in H^1\left(\Omega\right), \ \gamma\left(u\right) = 0 \ \right\},$$

Autrement dit, $H_0^1\left(\Omega\right)$ est l'ensemble des fonctions de $H^1\left(\Omega\right)$, qui s'annulent sur le bords de Ω (quand ce bord est défini).

1.1.4 Théorème de Fubini

Les théorèmes de Fubini et de Tonelli sont des théorèmes qui permettent de changer les ordres d'intégration dans les calculs d'intégrales de fonctions dépendant de plusieurs variables.

Proposition 1.1.2 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]\times[c,d]$ à valeurs dans C. Alors*

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right)dy.$$

1.2 Quelques inégalités utiles

Lemme 1.2.1 *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*

$$\forall u,v\in L^2(\Omega)\quad \left|\int\limits_\Omega uv dx\right| \le \left(\int\limits_\Omega |u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_\Omega |v|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\left|\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n u_i v_i dx\right| \le \left(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n u_i^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n v_i^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve. On pose :

$$f(\lambda)=\int\limits_\Omega (\lambda u+v)^2 d\mu,$$

donc

$$(\lambda u+v)^2\ge 0 \text{ Alors } \quad f(\lambda)\ge 0,\qquad \forall\lambda\in\mathbb{R}.$$

On peut écrire $f(\lambda)$ sous la forme:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \int\limits_\Omega \left(\lambda^2u^2+v^2+2\lambda uv\right)d\mu = \int\limits_\Omega \lambda^2u^2 d\mu + \int\limits_\Omega v^2 d\mu + \int\limits_\Omega 2\lambda uv d\mu \\ &= \lambda^2\int\limits_\Omega u^2 d\mu + \int\limits_\Omega v^2 d\mu + 2\lambda\int\limits_\Omega uv d\mu. \end{aligned}$$

Dautre part on peut remarquer que $f(\lambda)$ est un polynôme du $2^{ème}$ degré positive donc son descriminant $\Delta\le 0$, alors:

$$\Delta = \left(2\int\limits_\Omega uv d\mu\right)^2 - 4\int\limits_\Omega u^2 d\mu\int\limits_\Omega v^2 d\mu \le 0 \implies \left(2\int\limits_\Omega uv d\mu\right)^2 \le 4\int\limits_\Omega u^2 d\mu\int\limits_\Omega v^2 d\mu.$$

Simplifiant l'inégalité par 4 on trouve:

$$\left(\int_{\Omega} uvd\mu\right) \leq \left(\int_{\Omega} u^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} v^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}},$$

d'où le résultat. ■

Lemme 1.2.2 *(Inégalité de Young)*

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, *et* $\epsilon > 0$, *on a:*

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}. \tag{1.2.1}$$

Preuve. On a

$$(2\varepsilon a - b)^2 \geq 0, \tag{1.2.2}$$

pour tous $\varepsilon > 0$, alors :

$$4\varepsilon^2 a^2 + b^2 - 4\varepsilon ab \geq 0, \tag{1.2.3}$$

cela implique

$$4\varepsilon ab \leq 4\varepsilon^2 a^2 + b^2, \tag{1.2.4}$$

donc

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon},$$

cela achève la démonstration. ■

Lemme 1.2.3 *L'inégalité de Young affirme que pour tous* a *et* b *réels positifs ou nuls, et tous* p *et* q *réels strictement positifs tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *(on dit parfois qu'ils sont conjugués), on a :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{1.2.5}$$

L'égalité a lieu si et seulement si $a^p = b^q$.

Preuve. La fonction exp est convexe, ce qui veut dire que pour tous x, y et pour $\lambda \in [0.1]$

$$\exp(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda \exp(x) + (1-\lambda) \exp(y).$$

En particulier

$$\begin{aligned} ab &= \exp(\ln ab) \\ &= \exp\left(\frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q}\right) \\ &\leq \frac{1}{p}\exp(\ln a^p) + \frac{1}{q}\exp(\ln b^q) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Lemme 1.2.4 *(Inégalité de Sobolev-Poincaré)*

Soit Ω un ouvert, alors il existe une constante C, dépendant uniquement de Ω telle que, pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ on a:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.2.6}$$

Preuve. On peut écrire:

$$u(x) = \int_a^x u'(y) dy.$$

Alors, pour $x \in [a.b]$,

$$\begin{aligned} u^2(x) &= \left(\int_a^x u'(y) dy\right)^2, \\ &\leq \int_a^x (u'(y))^2 dy \int_a^x dy, \end{aligned}$$

donc:

$$\begin{aligned} \int_a^b u^2(x) dx &\leq \int_a^b \left[\int_a^x (u'(y))^2 dy \times (x-a)\right] dx \\ &\leq \|u'\|_{L^2(a.b)}^2 \times \int_a^b (x-a) dx, \end{aligned}$$

cela implique :

$$\|u\|_{L^2(a.b)}^2 \leq \frac{(b-a)^2}{2} \|u'\|_{L^2(a.b)}^2 \Longrightarrow \|u\|_{L^2(a.b)} \leq \frac{(b-a)}{\sqrt{2}} \|u'\|_{L^2(a.b)},$$

d'où

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

■

1.3 Quelques définitions physiques

Définition 1.3.1 *(Energie)*

L'énergie (du grec : force en action) est ce qui permet d'agir : sans elle, rien ne se passe, pas de mouvement, pas de lumière, pas de vie !

Au sens physique, l'énergie caractérise la capacité à modifier un état, à produire un travail entraînant du mouvement, de la lumière, ou de la chaleur. Toute action ou changement d'état nécessite que de l'énergie soit échangée.

Définition 1.3.2 *(Thermoélastique)*

La Thermoélastique est relation entre l'élasticité d'un corps et à sa dilatation en fonction de la chaleur.

1.3.1 Stabilité

La notion de stabilité correspond à l'idée d'un comportement qui dure dans le temp. Une notion qui est primordiale dans l'étude de la stabilité est la notion du point d'équilibre.

Définition 1.3.3 *l'état x_e est appelé état d'équilibre ou point déquilibre pour un système autonome si lorsque $x(t_0) = x_e$ alors $x(t) = x_e$ pour tout $t \geq 0$. En d'autre termes, x_e vérifie l'équation $f(x_e) = 0$.*

Il existe plusieurs notions de stabilité :

Le premier degré consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, i.e :

$$E(t) \to 0, \text{ lorsque } t \to \infty.$$

C'est ce que l'on appelle la stabilisation forte.

Pour le second, on s'intéresse à la décroissance de l'énergie la plus rapide, c'est-à-dire lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle, i.e :

$$E(t) \leq C \exp(-\delta t), \forall t > 0,$$

ou C et δ sont des constantes positives avec C qui dépend des données initiales.

Quant au troisième, il étudie des situations intermédiaires, dans lesquelles la décroissance des solutions n'est pas exponentielle, mais du type polynomial par exemple :

$$E(t) \leq \frac{C}{t^{\alpha}}, \ \forall t > 0,$$

ou C et α sont des constantes positives avec C qui dépend des données initiales.

1.3.2 Fonction de Lyapunov

La notion de fonction de Lyapunov constitue d'une certaine manière une généralisation de l'énergie. Etant donnée une fonction définie positive, l'idée directrice des théorèmes de Lyapunov consiste à évaluer l'évolution de cette fonction sur les trajectoires du système afin de conclure à la décroissance de l'énergie.

Soit V une fonction de classe C^1 sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ contenant l'origine,

$$V : D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longrightarrow V(x)$$

On notera $\dot{V}$ la fonction définie par

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(x(t))\, |_{t=0} = \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, f(x) \right\rangle = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x),$$

c'est la dérivée de $V(x)$.

Proposition 1.3.1

- *V est dite définie positive si : $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ dans un voisinage de 0 pour tout $x \neq 0$.*
- *V est dite définie négative si : -V est définie positive.*
- *V est dite semi-définie positive si : $V(0) = 0$ et $V(x) \geq 0$ dans un voisinage de 0.*

- *V est non définie si: $V(0) = 0$ et $V(x)$ change de signe dans tout voisinage de 0.*

Définition 1.3.4 *(Fonction de Lyapunov)*

Une fonction de Lyapunov est une fonction de classe C^1, $V:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0, \qquad V(x) = 0 \quad x = 0,$$

ayant la propriété

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0, \qquad \dot{V}(x) = 0 \quad x = 0.$$

Nous devons être en mesure d'écrire qu'il existe des fonction $\phi(\|x\|)$ et $\psi(\|x\|)$ tel que :

$$\phi(\|x\|) \geq V(x,t) \geq \psi(\|x\|), \ \forall x \in G, \ \forall t \geq t_0,$$

où $\phi(\|x\|)$ et $\psi(\|x\|)$ sont des fonctions de classe K.

Le résultat fondamental de la stabilité de Lyapunov affirme que si une fonction de Lyapunov existe pour un système donné alors ce système est stable. Si la fonction de Lyapunov est strictement décroissante, $\dot{V}(x) < 0$, $\forall x \neq 0$, alors la stabilité est en plus exponentielle.

Chapitre 2

Stabilité exponentielle pour un système de Bresse Thermoélastique

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on considère le système suivant:

$$\rho h\omega_{1tt} = \left(Eh\left(\omega_{1x} - k\omega_3\right) - \alpha\theta_{1t}\right)_x - kGh\left(\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1\right), \tag{2.1.1}$$

$$\rho h\omega_{3tt} = Gh\left(\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1\right)_x + kEh\left(\omega_{1x} - k\omega_3\right) - k\alpha\theta_{1t}, \tag{2.1.2}$$

$$\rho I\phi_{2tt} = EI\phi_{2xx} - Gh\left(\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1\right) - \alpha\theta_{3x}, \tag{2.1.3}$$

$$\rho c\theta_{1tt} = \theta_{1xxt} + \theta_{1xx} - \alpha T_0\left(\omega_{1tx} - k\omega_{3t}\right), \tag{2.1.4}$$

$$\rho c\theta_{3t} = \theta_{3xx} - \alpha T_0\phi_{2tx}, \tag{2.1.5}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{aligned}
\omega_1(x,0) &= u_0(x), \quad \omega_{1t}(x,0) = v_0(x), \quad \phi_2(x,0) = \phi_0(x), \\
\phi_{2t}(x,0) &= \psi_0(x), \quad \omega_3(x,0) = \omega_0(x), \quad \omega_{3t}(x,0) = \varphi_0(x), \\
\theta_1(x,0) &= \theta_0(x), \quad \theta_{1t}(x,0) = \eta_0(x), \quad \theta_3(x,0) = \xi_0(x),
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

et les conditions aux limites

$$\omega_1(x,t) = \omega_{3x}(x,t) = \phi_2(x,t) = \theta_1(x,t) = \theta_3(x,t) = 0, \text{ pour } x = 0, 1, \tag{2.1.7}$$

où $t > 0$ et $0 < x < 1$, telle que ω_1, ω_3, et ϕ_2 sont respectivement le déplacement longitudinal, vertical, et l'angle de cissaillement, θ_1 et θ_3 sont les déviations de la température de référence T_0 le long des directions longitudinale et verticale, E, G, ρ, I, m, k, h, et c sont des constants positives caractérisant les propriétés élastiques et thermiques des matériaux.

2.2 Calcul d'énergie

On introduit quelques notations que nous utiliserons dans ce chapitre. On pose:

$$\aleph = H_0^1 \times H_*^1 \times H_0^1 \times H_0^1 \times \left(L^2\right)^5,$$

où

$$H_*^1 = \left\{ f \in H^1(0,1) / \int_0^1 f(x)\, dx = 0 \right\},$$

et

$$U_0 = (u_0, \omega_0, \phi_0, \theta_0, v_0, \varphi_0, \psi_0, \eta_0, \xi_0).$$

On désigne par U la solution du système $(2.1.1) - (2.1.5)$, où

$$U = (\omega_1, \omega_3, \phi_2, \theta_1, \theta_3).$$

Lemme 2.2.1 *Soit U la solution du système* $(2.1.1) - (2.1.5)$, *alors pour tout $t > 0$,*

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\frac{1}{T_0}\int_0^1 (\theta_{1xt}^2 + \theta_{3x}^2)dx. \tag{2.2.1}$$

où

$$\begin{aligned} E(t) \;=\; & \frac{1}{2}\int_0^1 ([Eh(\omega_{1x} - k\omega_3)^2 + Gh(\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1)^2 + EI\phi_{2x}^2] \\ & + \left[\rho h\left(\omega_{1t}^2 + \omega_{3t}^2\right) + \rho I \phi_{2t}^2\right] + \frac{1}{T_0}\left(\rho c\left(\theta_{1t}^2 + \theta_3^2\right) + \theta_{1x}^2\right))dx. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Preuve. Multipliant (2.1.1), (2.1.2) , (2.1.3) , (2.1.4) , et (2.1.5) , respectivement par ω_{1t}, ω_{3t}, ϕ_{2t}, θ_{1t}, θ_3, en intègrant par rapport à x sur $[0,1]$ on obtient:

$$\begin{cases} \rho h\int_0^1 \omega_{1tt}\omega_{1t}dx = \int_0^1 (Eh(\omega_{1x}-k\omega_3)-\alpha\theta_{1t})_x\omega_{1t}dx - kGh\int_0^1 (\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)\,\omega_{1t}dx, \\ \rho h\int_0^1 \omega_{3tt}\omega_{3t}dx = Gh\int_0^1 (\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)_x\omega_{3t}dx + kEh\int_0^1 (\omega_{1x}-k\omega_3)\omega_{3t}dx - k\alpha\int_0^1 \theta_{1t}\omega_{3t}dx, \\ \rho I\int_0^1 \phi_{2tt}\phi_{2t}dx = EI\int_0^1 \phi_{2xx}\phi_{2t}dx - Gh\int_0^1 (\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)\,\phi_{2t}dx - \alpha\int_0^1 \theta_{3x}\phi_{2t}dx, \\ \rho c\int_0^1 \theta_{1tt}\theta_{1t}dx = \int_0^1 \theta_{1xxt}\theta_{1t}dx + \int_0^1 \theta_{1xx}\theta_{1t}dx - \alpha T_0\int_0^1 (\omega_{1tx}-k\omega_{3t})\,\theta_{1t}dx, \\ \rho c\int_0^1 \theta_{3t}\theta_3 dx = \int_0^1 \theta_{3xx}\theta_3 dx - \alpha T_0\int_0^1 \phi_{2tx}\theta_3 dx. \end{cases} \tag{2.2.3}$$

On peut voir que :

$$\rho h\int_0^1 \omega_{1tt}\omega_{1t}dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \rho h\omega_{1t}^2 dx, \text{ et } \rho h\int_0^1 \omega_{3tt}\omega_{3t}dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \rho h\omega_{3t}^2 dx, \tag{2.2.4}$$

$$\rho I\int_0^1 \phi_{2tt}\phi_{2t}dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \rho I\phi_{2t}^2 dx, \text{ et } \rho c\int_0^1 \theta_{1tt}\theta_{1t}dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \rho c\theta_{1t}^2 dx, \tag{2.2.5}$$

et

$$\rho c\int_0^1 \theta_{3t}\theta_3 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \rho c\theta_3^2 dx. \tag{2.2.6}$$

Remplaçons (2.2.4) , (2.2.5) et (2.2.6) dans (2.2.3). Puis additionnons les équations résultantes, alors on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \left\{\rho h\omega_{1t}^2+\rho h\omega_{3t}^2+\rho I\phi_{2t}^2+\frac{\rho c}{T_0}\theta_{1t}^2+\frac{\rho c}{T_0}\theta_3^2\right\}dx - Eh\int_0^1 \omega_{1xx}\omega_{1t}dx \\
&+Ehk\int_0^1 \omega_{3x}\omega_{1t}dx+\alpha\int_0^1 \theta_{1tx}\omega_{1t}dx+kGh\int_0^1 \left(\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1\right)\omega_{1t}dx \\
&-Gh\int_0^1 \phi_{2x}\omega_{3t}dx-Gh\int_0^1 \omega_{3xx}\omega_{3t}dx-kGh\int_0^1 \omega_{1x}\omega_{3t}dx-kEh\int_0^1 (\omega_{1x}-k\omega_3)\omega_{3t}dx \\
&+k\alpha\int_0^1 \theta_{1t}\omega_{3t}dx-EI\int_0^1 \phi_{2xx}\phi_{2t}dx+Gh\int_0^1 \left(\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1\right)\phi_{2t}dx \\
&+\alpha\int_0^1 \theta_{3x}\phi_{2t}dx-\frac{1}{T_0}\int_0^1 \theta_{1xxt}\theta_{1t}dx-\frac{1}{T_0}\int_0^1 \theta_{1xx}\theta_{1t}dx+\alpha\int_0^1 \left(\omega_{1tx}-k\omega_{3t}\right)\theta_{1t}dx \\
&-\frac{1}{T_0}\int_0^1 \theta_{3xx}\theta_3dx+\alpha\int_0^1 \phi_{2tx}\theta_3dx \\
= {}& 0. \qquad (2.2.7)
\end{aligned}$$

Une intégration par partie, donne :

$$Eh\int_0^1 \omega_{1xx}\omega_{1t}dx=-Eh\int_0^1 \omega_{1x}\omega_{1tx}dx,\ \text{ et } Ehk\int_0^1 \omega_{3x}\omega_{1t}dx=-Ehk\int_0^1 \omega_3\omega_{1tx}dx, \qquad (2.2.8)$$

$$\alpha\int_0^1 \theta_{1tx}\omega_{1t}dx=-\alpha\int_0^1 \theta_{1t}\omega_{1xt}dx\ ,\ \text{ et } Gh\int_0^1 \phi_{2x}\omega_{3t}dx=-Gh\int_0^1 \phi_2\omega_{3tx}dx, \qquad (2.2.9)$$

$$Gh\int_0^1 \omega_{3xx}\omega_{3t}dx=-Gh\int_0^1 \omega_{3x}\omega_{3xt}dx, \text{et } kGh\int_0^1 \omega_{1x}\omega_{3t}dx=-kGh\int_0^1 \omega_1\omega_{3xt}dx,, \qquad (2.2.10)$$

$$EI\int_0^1 \phi_{2xx}\phi_{2t}dx=-EI\int_0^1 \phi_{2x}\phi_{2tx}dx,\ \text{ et } \alpha\int_0^1 \theta_{3x}\phi_{2t}dx=-\alpha\int_0^1 \theta_3\phi_{2tx}dx, \qquad (2.2.11)$$

$$\frac{1}{T_0}\int_0^1 \theta_{1xx}\theta_{1t}dx=-\frac{1}{T_0}\int_0^1 \theta_{1x}\theta_{1tx}dx\ ,\ \text{ et } \frac{1}{T_0}\int_0^1 \theta_{1xxt}\theta_{1t}dx=-\frac{1}{T_0}\int_0^1 \theta_{1xt}^2dx, \qquad (2.2.12)$$

$$\frac{1}{T_0}\int_0^1 \theta_{3xx}\theta_3 dx = -\frac{1}{T_0}\int_0^1 \theta_{3x}^2 dx, \tag{2.2.13}$$

et remarquant :

$$\alpha\int_0^1 \theta_{1tx}\omega_{1t}dx + k\alpha\int_0^1 \theta_{1t}\omega_{3t}dx = -\alpha\int_0^1 \left(\omega_{1tx} - k\omega_{3t}\right)\theta_{1t}dx. \tag{2.2.14}$$

On peut voir aussi :

$$Gh\int_0^1 \phi_2\omega_{3xt}dx + Gh\int_0^1 \omega_{3x}\omega_{3xt}dx + Gh\int_0^1 k\omega_1\omega_{3xt}dx = Gh\int_0^1 \left(\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1\right)\omega_{3xt}dx,$$

donc

$$\begin{aligned}
&Gh\int_0^1 \left(\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1\right)k\omega_{1t}dx + Gh\int_0^1 \left(\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1\right)\omega_{3xt}dx + Gh\int_0^1 \left(\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1\right)\phi_{2t}dx \\
= \ & Gh\int_0^1 \left(\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1\right)\left(\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1\right)_t dx \\
= \ & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{Gh(\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1)^2\right\}. \qquad (2.2.15)
\end{aligned}$$

De même

$$Eh\int_0^1 \omega_{1x}\omega_{1xt}dx - Eh\int_0^1 k\omega_3\omega_{1xt}dx = Eh\int_0^1 \left(\omega_{1x} - k\omega_3\right)\omega_{1xt}dx,$$

donc

$$\begin{aligned}
Eh\int_0^1 \left(\omega_{1x} - k\omega_3\right)\omega_{1xt}dx - kEh\int_0^1 (\omega_{1x} - k\omega_3)\omega_{3t}dx &= Eh\int_0^1 \left(\omega_{1x} - k\omega_3\right)\left(\omega_{1x} - k\omega_3\right)_t dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{Eh\left(\omega_{1x} - k\omega_3\right)^2\right\}. \qquad (2.2.16)
\end{aligned}$$

Regroupant (2.2.8) , (2.2.9) , (2.2.10) , (2.2.11) , (2.2.12) ,(2.2.13) , (2.2.14) , (2.2.15) et (2.2.16) dans (2.2.7), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 ([Eh(\omega_{1x} - k\omega_3)^2 + Gh(\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1)^2 + EI\phi_{2x}^2] \\
&+[\rho h\left(\omega_{1t}^2 + \omega_{3t}^2\right) + \rho I\phi_{2t}^2] + \frac{1}{T_0}\left[\rho c\left(\theta_{1t}^2 + \theta_3^2\right) + \theta_{1x}^2\right])dx \\
= \ & -\frac{1}{T_0}\int_0^1 (\theta_{1xt}^2 + \theta_{3x}^2)dx,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Théorème 2.2.1 *On suppose que* $E = G$ *et* $(u_0, \omega_0, \varphi_0, \theta_0, v_0, \phi_0, \psi_0, \eta_0, \xi_0) \in \aleph$. *Alors il existe deux constantes positives* C *et* μ *telles que l'énergie de la solution de système* $(2.1.1) - (2.1.5)$, *satisfait*

$$E(t) \leq CE(0)\, e^{-\mu t} \quad \forall t > 0.$$

Pour prouver ce Théorème on a besoin des lemmes suivants.

2.3 Résultats principaux

Lemme 2.3.1 *Soit* U *la solution du système* $(2.1.1) - (2.1.5)$, *alors pour tout* $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$, *et* $t > 0$ *on a:*

$$\begin{aligned} \frac{dI_1(x,t)}{dt} &\leq -\int_0^1 \frac{EI}{2}\phi_{2x}^2 dx + \rho I \int_0^1 \phi_{2t}^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^1 \left[\omega_{3t}^2 + (\omega_{1x} - k\omega_3)^2\right] dx \\ &\quad + C(\varepsilon_1) \int_0^1 \left(\theta_{3x}^2 + \theta_{1xt}^2 + \phi_{2t}^2\right) dx, \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

où:

$$I_1(x,t) = \int_0^1 (\rho I \phi_{2t}\phi_2 + \rho h \omega_{3t} f)\, dx, \tag{2.3.2}$$

et f *la solution de l'équation differentielle suivante:*

$$\begin{cases} -f_{xx} = \phi_{2x}, \\ f(0) = f(1) = 0, \end{cases} \tag{2.3.3}$$

telle que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_x^2 dx &\leq \int_0^1 \phi_2^2 dx \leq c_p \int_0^1 \phi_{2x}^2 dx, \\ \int_0^1 f_t^2 dx &\leq c_p \int_0^1 f_{tx}^2 dx \leq c_p \int_0^1 \phi_{2t}^2 dx, \\ \int_0^1 \theta_{1t}^2 dx &\leq c_p \int_0^1 \theta_{1tx}^2 dx. \end{aligned}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\frac{dI_1(x,t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\int_0^1 \left(\rho I\phi_{2t}\phi_2 + \rho h\omega_{3t}f\right)dx\\ &= \int_0^1 \left(\rho I\phi_{2tt}\phi_2 + \rho I\phi_{2t}^2\right)dx + \int_0^1 \left(\rho h\omega_{3tt}f + \rho h\omega_{3t}f_t\right)dx.\end{aligned}$$

Utilisant (2.1.2), (2.1.3) on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{dI_1(x,t)}{dt} &= \int_0^1 \left[EI\phi_{2xx} - Gh\left(\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1\right) - \alpha\theta_{3x}\right]\phi_2 dx + \rho I\int_0^1 \phi_{2t}^2 dx\\ &\quad + \int_0^1 \left[Gh\left(\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1\right)_x + kEh\left(\omega_{1x} - k\omega_3\right) - k\alpha\theta_{1t}\right] f dx + \rho h\int_0^1 \omega_{3t}f_t dx.\end{aligned}$$

On peut voir que :

$$\begin{aligned}&\frac{dI_1(x,t)}{dt} + \int_0^1 \left[Gh\left(\phi_2^2 + \omega_{3x}\phi_2 + k\omega_1\phi_2\right) + \alpha\theta_{3x}\phi_2\right]dx\\ &-\int_0^1 \rho I\phi_{2t}^2 dx - \int_0^1 \left[kEh\left(\omega_{1x} - k\omega_3\right) - k\alpha\theta_{1t}\right] f dx - \rho h\int_0^1 \omega_{3t}f_t dx\\ = &\int_0^1 EI\phi_{2xx}\phi_2 dx + Gh\int_0^1 \phi_{2x} f dx + Gh\int_0^1 \omega_{3xx} f dx + Ghk\int_0^1 \omega_{1x} f dx. \qquad (2.3.4)\end{aligned}$$

Une intégration par partie sur le deuxième membre de (2.3.4), donne:

$$\int_0^1 \phi_{2xx}\phi_2 dx = -\int_0^1 \phi_{2x}^2 dx, \qquad (2.3.5)$$

$$\int_0^1 \phi_{2x} f dx = -\int_0^1 \phi_2 f_x dx, \qquad (2.3.6)$$

$$\int_0^1 \omega_{3xx} f dx = -\int_0^1 \omega_{3x} f_x dx, \qquad (2.3.7)$$

$$\int_0^1 \omega_{1x} f dx = -\int_0^1 \omega_1 f_x dx. \qquad (2.3.8)$$

On remplace (2.3.5) , (2.3.6) , (2.3.7) , et (2.3.8) , dans (2.3.4) . On trouve:

$$\begin{aligned}
&\frac{dI_1(x,t)}{dt}+EI\int_0^1\phi_{2x}^2dx-\rho I\int_0^1\phi_{2t}^2dx\\
=\;& -\alpha\int_0^1\theta_{3x}\phi_2dx+kEh\int_0^1(\omega_{1x}-k\omega_3)\,fdx-k\alpha\int_0^1\theta_{1t}fdx+\rho h\int_0^1\omega_{3t}f_tdx. \quad (2.3.9)
\end{aligned}$$

Maintenant, on va estimer les termes du membre droit de (2.3.9). En utilisant l'inégalités de Young et l'inégalité de Sobolev-Poincaré et l'équation (2.3.3), on obtient:

$$\begin{aligned}
\int_0^1\theta_{3x}\phi_2dx &\le \varepsilon_1\int_0^1\phi_2^2dx+c(\varepsilon_1)\int_0^1\theta_{3x}^2dx\\
&\le c_1\int_0^1\phi_{2x}^2dx+c(\varepsilon_1)\int_0^1\theta_{3x}^2dx, \qquad (2.3.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1(\omega_{1x}-k\omega_3)\,fdx &\le \varepsilon_1\int_0^1(\omega_{1x}-k\omega_3)^2dx+c(\varepsilon_1)\int_0^1f^2dx\\
&\le \varepsilon_1\int_0^1(\omega_{1x}-k\omega_3)^2dx+c_1(\varepsilon_1)\int_0^1\phi_{2x}^2dx, \qquad (2.3.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1\theta_{1t}fdx &\le \varepsilon_1\int_0^1f^2dx+c(\varepsilon_1)\int_0^1\theta_{1t}^2dx\\
&\le c_1\int_0^1\phi_{2x}^2dx+c_1(\varepsilon_1)\int_0^1\theta_{1xt}^2dx, \qquad (2.3.12)
\end{aligned}$$

$$\int_0^1\omega_{3t}f_tdx\le\varepsilon_1\int_0^1\omega_{3t}^2dx+c_1(\varepsilon_1)\int_0^1\phi_{2t}^2dx. \qquad (2.3.13)$$

On remplace (2.3.10), (2.3.11), (2.3.12) et (2.3.13) dans (2.3.9), on trouve:

$$\begin{aligned}
\frac{dI_1(x,t)}{dt} \le\;& -\frac{EI}{2}\int_0^1\phi_{2x}^2dx+\rho I\int_0^1\phi_{2t}^2dx+\varepsilon_1\int_0^1\left[\omega_{3t}^2+(\omega_{1x}-k\omega_3)^2\right]dx\\
&+C(\varepsilon_1)\int_0^1\left[\theta_{3x}^2+\theta_{1xt}^2+\phi_{2t}^2\right]dx,
\end{aligned}$$

pour un choix convenable de $C(\varepsilon_1)$, où $C(\varepsilon_1)$ est une constante dépend de ε_1 et la constante de Sobolev-Poincaré et k, E, G, h, α, et ρ. ■

Lemme 2.3.2 *Soit U la solution du système* $(2.1.1)-(2.1.5)$, *alors pour tout* $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$, *et* $t>0$ *on a:*

$$\begin{aligned} \frac{dI_2(x,t)}{dt} &\leq \frac{-\alpha\rho h T_0}{2}\int_0^1 \omega_{1t}^2 dx + C(\varepsilon_2)\int_0^1 \left(\theta_{1xt}^2+\omega_{3t}^2\right)dx \\ &\quad +\varepsilon_2\int_0^1 \left((\omega_{1x}-k\omega_3)^2+(\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)^2\right)dx, \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

où

$$I_2(x,t)=\rho c\rho h\int_0^1\left(\int_0^x \theta_{1t}dy\right)\omega_{1t}dx. \tag{2.3.15}$$

Preuve. On a

$$\frac{dI_2(x,t)}{dt}=\rho h\int_0^1\left(\int_0^x \rho c\theta_{1tt}dy\right)\omega_{1t}dx+\rho c\int_0^1\left(\int_0^x\theta_{1t}dy\right)\rho h\omega_{1tt}dx.$$

Utilisant (2.1.1) et (2.1.4), on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{dI_2(x,t)}{dt} &= \rho h\int_0^1\left(\int_0^x\left[\theta_{1xxt}+\theta_{1xx}-\alpha T_0\left(\omega_{1tx}-k\omega_{3t}\right)\right]dy\right)\omega_{1t}dx \\ &\quad +\rho c\int_0^1\left(\int_0^x\theta_{1t}dy\right)\left[\left(Eh\left(\omega_{1x}-k\omega_3\right)-\alpha\theta_{1t}\right)_x-kGh\left(\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1\right)\right]dx, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{dI_2(x,t)}{dt} &= \rho h\int_0^1\left(\int_0^x\theta_{1xxt}dy\right)\omega_{1t}dx+\rho h\int_0^1\left(\int_0^x\theta_{1xx}dy\right)\omega_{1t}dx-\rho h\alpha T_0\int_0^1\left(\int_0^x\omega_{1tx}dy\right)\omega_{1t}dx \\ &\quad +\alpha T_0 phk\int_0^1\left(\int_0^x\omega_{3t}dy\right)\omega_{1t}dx+Eh\rho c\int_0^1\left(\int_0^x\theta_{1t}dy\right)\left(\omega_{1x}-k\omega_3\right)_x dx \\ &\quad -\alpha\rho c\int_0^1\left(\int_0^x\theta_{1t}dy\right)\theta_{1tx}dx-kGh\rho c\int_0^1\left(\int_0^x\theta_{1t}dy\right)\left(\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1\right)dx. \end{aligned} \tag{2.3.16}$$

On peut voir que :

$$\int_0^x \theta_{1xxt}dy = \theta_{1xt}(x,t) - \theta_{1xt}(0,t) = \theta_{1xt}(x,t), \tag{2.3.17}$$

de même

$$\int_0^x \theta_{1xx}dy = \theta_{1x}(x,t), \tag{2.3.18}$$

et

$$\int_0^x \omega_{1tx}dy = \omega_{1t}(x,t). \tag{2.3.19}$$

On peut écrire aussi que:

$$\int_0^1\int_0^x \theta_{1t}(\omega_{1x} - k\omega_3)_x\, dydx = -\int_0^1 \theta_{1t}(\omega_{1x} - k\omega_3)\, dx, \tag{2.3.20}$$

et

$$\int_0^1 \left(\int_0^x \theta_{1t}dy\right)\theta_{1tx}dx = -\int_0^1 \theta_{1t}^2 dx. \tag{2.3.21}$$

Remplaçant $(2.3.17), (2.3.18), (2.3.19), (2.3.20)$, et $(2.3.21)$ dans $(2.3.16)$ on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{dI_2(x,t)}{dt} + \rho h\alpha T_0\int_0^1 \omega_{1t}^2dx &= \rho h\int_0^1 (\theta_{1xt} + \theta_{1x})\,\omega_{1t}dx + \rho hk\alpha T_0\int_0^1 (\int_0^x \omega_{3t}dy)\omega_{1t}dx \\ &\quad -\rho cEh\int_0^1 \theta_{1t}(\omega_{1x} - k\omega_3)\,dx + \rho c\alpha\int_0^1 \theta_{1t}^2dx \\ &\quad -\rho ckGh\int_0^1\left(\int_0^x \theta_{1t}dy\right)(\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1)\,dx.\end{aligned} \tag{2.3.22}$$

Utilisant l'inégalité de Young et l'inégalité Sobolev-Poincaré sur les termes de deuxième membre de (2.3.22), on obtient:

$$\int_0^1 \theta_{1xt}\omega_{1t}dx \le \varepsilon_2\int_0^1 \omega_{1t}^2dx + c(\varepsilon_2)\int_0^1 \theta_{1xt}^2dx,$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \theta_{1x}\omega_{1t}dx &\leq \varepsilon_2\int_0^1 \omega_{1t}^2dx + c\left(\varepsilon_2\right)\int_0^1 \theta_{1x}^2dx\\ &\leq \varepsilon_2\int_0^1 \omega_{1t}^2dx + c_2\left(\varepsilon_2\right)\int_0^1 \theta_{1xt}^2dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \omega_{1t}\left(\int_0^x \omega_{3t}dy\right)dx &\leq c_p\int_0^1 \omega_{3t}\omega_{1t}dx\\ &\leq \varepsilon_2\int_0^1 \omega_{1t}^2dx + c_2\left(\varepsilon_2\right)\int_0^1 \omega_{3t}^2dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \theta_{1t}\left(\omega_{1x}-k\omega_3\right)dx &\leq \varepsilon_2\int_0^1 \left(\omega_{1x}-k\omega_3\right)^2dx + c\left(\varepsilon_2\right)\int_0^1 \theta_{1t}^2dx\\ &\leq \varepsilon_2\int_0^1 \left(\omega_{1x}-k\omega_3\right)^2dx + c_2\left(\varepsilon_2\right)\int_0^1 \theta_{1xt}^2dx,\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \theta_{1t}^2dx \leq c_2\int_0^1 \theta_{1xt}^2dx,$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_0^x \theta_{1t}dy\right)\left(\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1\right)dx &\leq c_p\int_0^1 \theta_{1t}\left(\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1\right)dx\\ &\leq \varepsilon_2\int_0^1 \left(\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1\right)^2dx + c_2\left(\varepsilon_2\right)\int_0^1 \theta_{1xt}^2dx.\end{aligned}$$

Regroupant les estimations prècèdentes dans (2.3.22), on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{dI_2\left(x,t\right)}{dt} &\leq \frac{-\alpha\rho hT_0}{2}\int_0^1 \omega_{1t}^2dx + C(\varepsilon_2)\int_0^1 \left(\theta_{1xt}^2+\omega_{3t}^2\right)dx\\ &+\varepsilon_2\int_0^1 \left[\left(\omega_{1x}-k\omega_3\right)^2+\left(\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1\right)^2\right]dx,\end{aligned}$$

pour un choix convenable de $C(\varepsilon_2)$, où $C(\varepsilon_2)$ est une constante dépend de ε_2 et la constante de Sobolev-Poincaré et k, E, G, h, α, et ρ. ■

Lemme 2.3.3 *Soit U la solution du système* $(2.1.1)-(2.1.5)$, *alors pour tout* $\varepsilon_3 \in \mathbb{R}^+$, *et* $t>0$ *on a:*

$$\begin{aligned}\frac{dI_3(x,t)}{dt} \leq & -\frac{\alpha\rho I T_0}{2}\int_0^1 \phi_{2t}^2 dx + C(\varepsilon_3)\int_0^1 \theta_{3x}^2 dx \\ & +\varepsilon_3\int_0^1 \phi_{2x}^2 dx + \varepsilon_3\int_0^1 (\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)^2 dx, \end{aligned} \tag{2.3.23}$$

où

$$I_3(x,t) = \rho c\rho I\int_0^1 \left(\int_0^x \theta_3 dy\right)\phi_{2t} dx. \tag{2.3.24}$$

Preuve. On a

$$\frac{dI_3(x,t)}{dt} = \rho c\rho I\int_0^1 \left(\int_0^x \theta_{3t} dy\right)\phi_{2t} dx + \rho c\rho I\int_0^1 \left(\int_0^x \theta_3 dy\right)\phi_{2tt} dx.$$

Remplaçant par (2.1.3) et (2.1.5), on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{dI_3(x,t)}{dt} = & \rho I\int_0^1 \left(\int_0^x (\theta_{3xx}-\alpha T_0\phi_{2tx}) dy\right)\phi_{2t} dx \\ & +\rho c\int_0^1 \left(\int_0^x \theta_3 dy\right)(EI\phi_{2xx}-Gh(\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)-\alpha\theta_{3x}) dx.\end{aligned}$$

On peut écrire aussi:

$$\begin{aligned}\frac{dI_3(x,t)}{dt} = & \rho I\int_0^1 \left(\int_0^x \theta_{3xx} dy\right)\phi_{2t} dx - \alpha T_0\rho I\int_0^1 \left(\int_0^x \phi_{2tx} dy\right)\phi_{2t} dx \\ & -Gh\rho c\int_0^1 \left(\int_0^x \theta_3 dy\right)(\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1) dx \\ & +EI\rho c\int_0^1 \phi_{2xx}\left(\int_0^x \theta_3 dy\right) dx - \alpha\rho c\int_0^1 \left(\int_0^x \theta_3 dy\right)\theta_{3x} dx. \end{aligned} \tag{2.3.25}$$

On a

$$\int_0^x \theta_{3xx} dy = \theta_{3x}(x,t), \tag{2.3.26}$$

et

$$\int_0^x \phi_{2tx} dy = \phi_{2t}(x,t). \tag{2.3.27}$$

Une intégration par partie pour les deux dernier termes de (2.3.25) , donne:

$$\int_0^1 \int_0^x \theta_3 \phi_{2xx} dy dx = -\int_0^1 \phi_{2x} \theta_3 dx, \tag{2.3.28}$$

et

$$\int_0^1 \int_0^x \theta_3 dy \theta_{3x} dx = -\int_0^1 \theta_3^2 dx. \tag{2.3.29}$$

Remplaçant (2.3.26) , (2.3.27) , (2.3.28) , et (2.3.29), dans (2.3.25) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dI_3(x,t)}{dt} + \rho I \alpha T_0 \int_0^1 \phi_{2t}^2 dx &= \rho I \int_0^1 \theta_{3x} \phi_{2t} dx - \rho c G h \int_0^1 \left(\int_0^x \theta_3 dy \right) (\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1) dx \\ &\quad - \rho c E I \int_0^1 \phi_{2x} \theta_3 dx + \alpha \rho c \int_0^1 \theta_3^2 dx. \end{aligned} \tag{2.3.30}$$

Une estimation du membre droit de (2.3.30) par l'inégalité de Young et l'inégalité de Sobolev-Poincaré,

$$\int_0^1 \theta_{3x} \phi_{2t} dx \leq \varepsilon_3 \int_0^1 \phi_{2t}^2 dx + c(\varepsilon_3) \int_0^1 \theta_{3x}^2 dx, \tag{2.3.31}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^x \theta_3 dy \right) (\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1) dx &\leq c_p \int_0^1 \theta_3 (\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1) dx \\ &\leq \varepsilon_3 \int_0^1 (\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1)^2 dx + c_3(\varepsilon_3) \int_0^1 \theta_{3x}^2 dx, \end{aligned} \tag{2.3.32}$$

$$\int_0^1 \phi_{2x} \theta_3 dx \leq \varepsilon_3 \int_0^1 \phi_{2x}^2 dx + c(\varepsilon_3) \int_0^1 \theta_{3x}^2 dx, \tag{2.3.33}$$

et

$$\theta_3^2 \leq c_p \theta_{3x}^2. \tag{2.3.34}$$

On vertu (2.3.31) , (2.3.33) , (2.3.32) , et (2.3.34) dans (2.3.30), on obtient :

$$\frac{dI_3(x,t)}{dt} \leq -\frac{\alpha\rho I T_0}{2}\int_0^1 \phi_{2t}^2 dx + C(\varepsilon_3)\int_0^1 \theta_{3x}^2 dx + \varepsilon_3\int_0^1 \phi_{2x}^2 dx + \varepsilon_3\int_0^1 (\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)^2 dx,$$

pour un choix convenable de $C(\varepsilon_3)$, où $C(\varepsilon_3)$ est une constante dépend de ε_3 et la constante de Sobolev-Poincaré et k, E, G, h, α, et ρ. ■

Lemme 2.3.4 *Soit U la solution du système* $(2.1.1)-(2.1.5)$, *alors pour tout* $\varepsilon_4 \in \mathbb{R}^+$, *et* $t>0$ *on a:*

$$\begin{aligned}\frac{dI_4(x,t)}{dt} &\leq -\frac{Gh^2}{2}\int_0^1 (\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)^2 dx + C(\varepsilon_4)\left(\int_0^1 \theta_{3x}^2 dx + \int_0^1 \theta_{1xt}^2 dx\right) + C(\varepsilon_4)\int_0^1 \phi_{2x}^2 dx \\ &+\frac{kh\rho I}{2}\left(\int_0^1 \phi_{2t}^2 dx + \int_0^1 \omega_{1t}^2 dx\right) + \varepsilon_4\int_0^1 (\omega_{1x}-k\omega_3)^2 dx, \end{aligned} \tag{2.3.35}$$

où

$$I_4(x,t) = h\rho I\int_0^1 \phi_{2t}(\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)\,dx + h\rho I\int_0^1 \phi_{2x}\omega_{3t}dx. \tag{2.3.36}$$

Preuve. On divise I_4 en deux parties:

$$I_4 = (1) + (2),$$

telle que:

$$(1) = h\rho I\int_0^1 \phi_{2t}(\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)\,dx,$$

et

$$(2) = h\rho I\int_0^1 \phi_{2x}\omega_{3t}dx.$$

En dérivant la 1^{er} partie par rapport à t,

$$\begin{aligned}(1)_t &= h\int_0^1 \rho I\phi_{2tt}(\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)\,dx + h\rho I\int_0^1 \phi_{2t}(\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)_t\,dx \\ &= h\int_0^1 [EI\phi_{2xx} - Gh(\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1) - \alpha\theta_{3x}](\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)\,dx \\ &\quad + h\rho I\int_0^1 \phi_{2t}^2 dx + h\rho I\int_0^1 \phi_{2t}\omega_{3xt}dx + h\rho I\int_0^1 \phi_{2t}k\omega_{1t}dx,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}(1)_t &= hEI\int_0^1 \phi_{2xx}(\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)\,dx - Gh^2\int_0^1 (\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)^2\,dx \\ &\quad -\alpha h\int_0^1 \theta_{3x}(\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)\,dx + h\rho I\int_0^1 \phi_{2t}^2 dx + h\rho I\int_0^1 \phi_{2t}\omega_{3xt}dx \\ &\quad +h\rho I\int_0^1 \phi_{2t}k\omega_{1t}dx. \end{aligned} \tag{2.3.37}$$

En dérivant la $2^{\grave{e}me}$ partie par rapport à t,

$$\begin{aligned}(2)_t &= h\rho I\int_0^1 \phi_{2xt}\omega_{3t}dx + h\rho I\int_0^1 \phi_{2x}\omega_{3tt}dx \\ &= -h\rho I\int_0^1 \phi_{2t}\omega_{3xt}dx + GhI\int_0^1 \phi_{2x}(\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)_x\,dx \\ &\quad +IkEh\int_0^1 \phi_{2x}(\omega_{1x}-k\omega_3)\,dx - \alpha Ik\int_0^1 \phi_{2x}\theta_{1t}dx. \end{aligned} \tag{2.3.38}$$

Regroupant (2.3.37), (2.3.38) , on obtient:

$$\begin{aligned}&\frac{dI_4(x,t)}{dt} + Gh^2\int_0^1 (\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)^2\,dx - h\rho I\int_0^1 \phi_{2t}^2 dx \\ &= -\alpha h\int_0^1 \theta_{3x}(\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)\,dx + h\rho I\int_0^1 \phi_{2t}k\omega_{1t}dx \\ &\quad +IkEh\int_0^1 \phi_{2x}(\omega_{1x}-k\omega_3)\,dx - \alpha Ik\int_0^1 \phi_{2x}\theta_{1t}dx. \end{aligned} \tag{2.3.39}$$

Une estimation du membre droit de (2.3.39) par l'inégalité de Young et l'inégalité de Sobolev-Poincaré, donne:

$$\int_0^1 \theta_{3x}(\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)\,dx \le \varepsilon_4\int_0^1 (\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)^2\,dx + c(\varepsilon_4)\int_0^1 \theta_{3x}^2 dx, \tag{2.3.40}$$

$$\int_0^1 \phi_{2t}\omega_{1t}dx \le \varepsilon_4\int_0^1 \phi_{2t}^2 dx + c(\varepsilon_4)\int_0^1 \omega_{1t}^2 dx, \tag{2.3.41}$$

$$\int_0^1 \phi_{2x}(\omega_{1x}-k\omega_3)\,dx \leq \varepsilon_4 \int_0^1 (\omega_{1x}-k\omega_3)^2\,dx + c(\varepsilon_4)\int_0^1 \phi_{2x}^2 dx, \tag{2.3.42}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi_{2x}\theta_{1t}dx &\leq \varepsilon_4 \int_0^1 \phi_{2x}^2 dx + c(\varepsilon_4)\int_0^1 \theta_{1t}^2 dx \\ &\leq \varepsilon_4 \int_0^1 \phi_{2x}^2 dx + c_4(\varepsilon_4)\int_0^1 \theta_{1xt}^2 dx. \end{aligned} \tag{2.3.43}$$

Remplaçant $(2.3.40)$, $(2.3.41)$, $(2.3.42)$, et $(2.3.43)$ dans (2.3.39), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dI_4(x,t)}{dt} &\leq -\frac{Gh^2}{2}\int_0^1 (\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)^2\,dx + C(\varepsilon_4)\left(\int_0^1 \theta_{3x}^2 dx + \int_0^1 \theta_{1xt}^2 dx\right) \\ &\quad + \frac{kh\rho I}{2}\left(\int_0^1 \phi_{2t}^2 dx + \int_0^1 \omega_{1t}^2 dx\right) + C(\varepsilon_4)\int_0^1 \phi_{2x}^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^1 (\omega_{1x}-k\omega_3)^2\,dx, \end{aligned}$$

pour un choix convenable de $C(\varepsilon_4)$, où $C(\varepsilon_4)$ est une constante dépend de ε_4 et la constante de Sobolev-Poincaré et k, E, G, h, α, et ρ. ■

Lemme 2.3.5 *Soit U la solution du système $(2.1.1)-(2.1.5)$, alors pour tout $\varepsilon_5 \in \mathbb{R}^+$, et $t>0$ on a:*

$$\begin{aligned} \frac{dI_5(x,t)}{dt} &\leq -\frac{kEh}{2}\int_0^1 (\omega_{1x}-k\omega_3)^2\,dx - \frac{\rho h}{2}\int_0^1 \omega_{1t}^2 dx + k\rho h\int_0^1 \omega_{3t}^2 dx + \frac{\rho h}{2}\int_0^1 \phi_{2t}^2 dx \\ &\quad + C(\varepsilon_5)\int_0^1 \theta_{1xt}^2 dx + (kGh+\varepsilon_5)\int_0^1 (\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)^2\,dx, \end{aligned} \tag{2.3.44}$$

où

$$I_5(x,t) = -h\rho\int_0^1 \omega_{3t}(\omega_{1x}-k\omega_3)\,dx - h\rho\int_0^1 \omega_{1t}(\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)\,dx. \tag{2.3.45}$$

Preuve. On divise I_5 en deux parties:

$$I_5 = (1)+(2),$$

telle que:

$$(1) = -h\rho \int_0^1 \omega_{3t} (\omega_{1x} - k\omega_3)\, dx,$$

et

$$(2) = -h\rho \int_0^1 \omega_{1t} (\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1)\, dx.$$

En dérivant la 1^{er} partie par rapport à t:

$$\begin{aligned}
(1)_t &= -h\rho \int_0^1 \omega_{3tt} (\omega_{1x} - k\omega_3)\, dx - h\rho \int_0^1 \omega_{3t} (\omega_{1x} - k\omega_3)_t\, dx \\
&= -Gh \int_0^1 (\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1)_x (\omega_{1x} - k\omega_3)\, dx - kEh \int_0^1 (\omega_{1x} - k\omega_3)^2\, dx \\
&\quad + \alpha k \int_0^1 \theta_{1t} (\omega_{1x} - k\omega_3)\, dx - \rho h \int_0^1 \omega_{3t}\omega_{1xt} dx + k\rho h \int_0^1 \omega_{3t}^2 dx. \qquad (2.3.46)
\end{aligned}$$

En dérivant la $2^{ème}$ partie par raport à t:

$$\begin{aligned}
(2)_t &= -h\rho \int_0^1 \omega_{1tt} (\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1)\, dx - h\rho \int_0^1 \omega_{1t} (\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1)_t\, dx \\
&= Eh \int_0^1 (\omega_{1x} - k\omega_3)(\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1)_x\, dx + \alpha \int_0^1 \theta_{1xt} (\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1)\, dx - \rho hk \int_0^1 \omega_{1t}^2 dx \\
&\quad + kGh \int_0^1 (\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1)^2\, dx - \rho h \int_0^1 \omega_{1t}\phi_{2t} dx + \rho h \int_0^1 \omega_{1tx}\omega_{3t} dx. \qquad (2.3.47)
\end{aligned}$$

Additionnant (2.3.46) et (2.3.47), on trouve la dérivée de I_5:

$$\begin{aligned}
&\frac{dI_5(x,t)}{dt} + kEh \int_0^1 (\omega_{1x} - k\omega_3)^2\, dx - k\rho h \int_0^1 \omega_{3t}^2 dx - kGh \int_0^1 (\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1)^2\, dx + \rho hk \int_0^1 \omega_{1t}^2 dx \\
&= k\alpha \int_0^1 \theta_{1t} (\omega_{1x} - k\omega_3)\, dx + \alpha \int_0^1 \theta_{1xt} (\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1)\, dx - \rho h \int_0^1 \omega_{1t}\phi_{2t} dx. \qquad (2.3.48)
\end{aligned}$$

Une estimation du second membre de (2.3.48) par l'inégalité de Young et l'inégalité de Sobolev-Poincaré, donne:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \theta_{1t}\left(\omega_{1x}-k\omega_3\right)dx &\leq \varepsilon_5\int_0^1 \left(\omega_{1x}-k\omega_3\right)^2dx + c\left(\varepsilon_5\right)\int_0^1 \theta_{1t}^2 dx \\ &\leq \varepsilon_5\int_0^1 \left(\omega_{1x}-k\omega_3\right)^2dx + c_5\left(\varepsilon_5\right)\int_0^1 \theta_{1xt}^2 dx, \qquad (2.3.49)\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \theta_{1xt}\left(\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1\right)dx \leq \varepsilon_5\int_0^1 \left(\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1\right)^2dx + c\left(\varepsilon_5\right)\int_0^1 \theta_{1xt}^2 dx, \qquad (2.3.50)$$

et

$$\int_0^1 \omega_{1t}\phi_{2t}dx \leq \varepsilon_5\int_0^1 \omega_{1t}^2dx + c\left(\varepsilon_5\right)\int_0^1 \phi_{2t}^2dx. \qquad (2.3.51)$$

Regroupant $(2.3.49)$, $(2.3.50)$, et $(2.3.51)$, dans (2.3.48), on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{dI_5\left(x,t\right)}{dt} \leq\ & \frac{-kEh}{2}\int_0^1 \left(\omega_{1x}-k\omega_3\right)^2dx - \frac{\rho hk}{2}\int_0^1 \omega_{1t}^2dx + k\rho h\int_0^1 \omega_{3t}^2dx \\ & +\frac{\rho h}{2}\int_0^1 \phi_{2t}^2dx + C\left(\varepsilon_5\right)\int_0^1 \theta_{1xt}^2dx + \left(kGh+\varepsilon_5\right)\int_0^1 \left(\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1\right)^2dx,\end{aligned}$$

pour un choix convenable de $C\left(\varepsilon_5\right)$, où $C\left(\varepsilon_5\right)$ est une constante dépend de ε_5 et la constante de Sobolev-Poincaré et k, E, G, h, α, et ρ. ■

Lemme 2.3.6 *Soit U la solution du système* $(2.1.1)-(2.1.5)$, *alors pour tout $t>0$ on a:*

$$\frac{dI_6\left(x,t\right)}{dt} \leq -\rho h\left(\int_0^1 \omega_{3t}^2dx + \int_0^1 \omega_{1t}^2dx\right) + C\int_0^1 \theta_{1xt}^2dx + C\int_0^1 \phi_{2x}^2dx, \qquad (2.3.52)$$

où

$$I_6\left(x,t\right) = -\rho h\int_0^1 \omega_{3t}\omega_3dx - \rho h\int_0^1 \omega_{1t}\omega_1dx, \qquad (2.3.53)$$

et $\exists C>0$ telle que:

$$-\alpha\int_0^1 \theta_{1t}\left(\omega_{1x}-k\omega_3\right)dx \leq C\int_0^1 \theta_{1xt}^2 - Eh\int_0^1 \left(\omega_{1x}-k\omega_3\right)^2dx, \qquad (2.3.54)$$

de même

$$\begin{aligned}
& Gh\int_0^1 (\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)(\omega_{3x}+k\omega_1)\,dx \\
= & Gh\int_0^1 (\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)^2\,dx - Gh\int_0^1 (\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)\,\phi_2 dx \\
\leq & C\int_0^1 \phi_{2x}^2 dx. \qquad (2.3.55)
\end{aligned}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\frac{dI_6(x,t)}{dt} = & -\rho h\int_0^1 \omega_{3tt}\omega_3 dx - \rho h\int_0^1 \omega_{3t}^2 dx - \rho h\int_0^1 \omega_{1tt}\omega_1 dx - \rho h\int_0^1 \omega_{1t}^2 dx \\
= & -\rho h\int_0^1 \omega_{3t}^2 dx - \rho h\int_0^1 \omega_{1t}^2 dx - kEh\int_0^1 (\omega_{1x}-k\omega_3)\,\omega_3 dx \\
& +k\alpha\int_0^1 \theta_{1t}\omega_3 dx + kGh\int_0^1 (\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)\,\omega_1 dx + \alpha\int_0^1 \theta_{1tx}\omega_1 dx \\
& -Gh\int_0^1 (\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)_x\,\omega_3 dx - Eh\int_0^1 (\omega_{1x}-k\omega_3)_x\,\omega_1 dx. \qquad (2.3.56)
\end{aligned}$$

Une intégration par partie sur les trois derniers termes de $(2.3.56)$, donne:

$$Gh\int_0^1 (\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)_x\,\omega_3 dx = -Gh\int_0^1 (\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)\,\omega_{3x} dx, \qquad (2.3.57)$$

$$Eh\int_0^1 (\omega_{1x}-k\omega_3)_x\,\omega_1 dx = -Eh\int_0^1 (\omega_{1x}-k\omega_3)\,\omega_{1x} dx, \qquad (2.3.58)$$

et

$$\alpha\int_0^1 \theta_{1tx}\omega_1 dx = -\alpha\int_0^1 \theta_{1t}\omega_{1x} dx. \qquad (2.3.59)$$

Remplaçant $(2.3.57)$, $(2.3.58)$, et $(2.3.59)$, dans $(2.3.56)$, on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{dI_6(x,t)}{dt} &= -\rho h\int_0^1 \omega_{3t}^2 dx - \rho h\int_0^1 \omega_{1t}^2 dx + Gh\int_0^1 (\phi_2+\omega_{3x}+k\omega_1)(\omega_{3x}+k\omega_1)\,dx \\ &\quad + Eh\int_0^1 (\omega_{1x}+k\omega_3)^2 dx - \alpha\int_0^1 \theta_{1t}(\omega_{1x}-k\omega_3)\,dx. \qquad (2.3.60)\end{aligned}$$

Insèrant (2.3.54), et (2.3.55), dans (2.3.60), on obtient:

$$\frac{dI_6(x,t)}{dt} \le -\rho h\left(\int_0^1 \omega_{3t}^2 dx + \int_0^1 \omega_{1t}^2 dx\right) + C\int_0^1 \theta_{1xt}^2 dx + C\int_0^1 \phi_{2x}^2 dx,$$

d'où le résultat. ∎

Lemme 2.3.7 *Soit U la solution du système* $(2.1.1)-(2.1.5)$, *alors pour tout* $\varepsilon_7 \in \mathbb{R}^+$, *et* $t>0$ *on a:*

$$\frac{dI_7(x,t)}{dt} \le -\frac{1}{2}\int_0^1 \theta_{1x}^2 dx + \rho c\int_0^1 \theta_{1xt}^2 dx + C(\varepsilon_7)\left(\int_0^1 \omega_{1t}^2 dx + \int_0^1 \omega_{3t}^2 dx\right), \qquad (2.3.61)$$

où

$$I_7(x,t) = \rho c\int_0^1 \theta_{1t}\theta_1 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \theta_{1x}^2 dx. \qquad (2.3.62)$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\frac{dI_7(x,t)}{dt} &= \rho c\int_0^1 \theta_{1tt}\theta_1 dx + \rho c\int_0^1 \theta_{1t}^2 dx + \int_0^1 \theta_{1x}\theta_{1xt} dx \\ &= \rho c\int_0^1 \theta_{1t}^2 dx + \int_0^1 \theta_{1x}\theta_{1xt} dx \\ &\quad + \int_0^1 \theta_{1xxt}\theta_1 dx + \int_0^1 \theta_{1xx}\theta_1 dx - \alpha T_0\int_0^1 (\omega_{1xt}-k\omega_{3t})\,\theta_1 dx. \qquad (2.3.63)\end{aligned}$$

Une intégration par partie sur les trois derniers termes de (2.3.63):

$$\int_0^1 \theta_{1xxt}\theta_1 dx = -\int_0^1 \theta_{1xt}\theta_{1x} dx, \qquad (2.3.64)$$

$$\int_0^1 \theta_{1xx}\theta_1 dx = -\int_0^1 \theta_{1x}^2 dx, \tag{2.3.65}$$

et

$$\int_0^1 \omega_{1xt}\theta_1 dx = -\int_0^1 \omega_{1t}\theta_{1x} dx. \tag{2.3.66}$$

Regroupant (2.3.64) , (2.3.65) , et (2.3.66) , dans (2.3.63) , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dI_7(x,t)}{dt} &= -\int_0^1 \theta_{1xt}\theta_{1x} dx - \int_0^1 \theta_{1x}^2 dx + \alpha T_0 \int_0^1 \omega_{1t}\theta_{1x} dx + \alpha k T_0 \int_0^1 \omega_{3t}\theta_1 dx + \rho c \int_0^1 \theta_{1t}^2 dx + \int_0^1 \theta_{1x}\theta_{1xt} dx \\ &= -\int_0^1 \theta_{1x}^2 dx + \alpha T_0 \int_0^1 \omega_{1t}\theta_{1x} dx + \alpha k T_0 \int_0^1 \omega_{3t}\theta_1 dx + \rho c \int_0^1 \theta_{1t}^2 dx, \end{aligned} \tag{2.3.67}$$

d'où

$$\frac{dI_7(x,t)}{dt} + \int_0^1 \theta_{1x}^2 dx = \alpha T_0 \int_0^1 \omega_{1t}\theta_{1x} dx + \alpha T_0 k \int_0^1 \omega_{3t}\theta_1 dx + \rho c \int_0^1 \theta_{1t}^2 dx. \tag{2.3.68}$$

Une estimation du second membre de (2.3.68) par l'inégalité de Young et l'inégalité de Sobolev-Poincaré, donne:

$$\int_0^1 \omega_{1t}\theta_{1x} dx \leq \varepsilon_7 \int_0^1 \theta_{1x}^2 dx + c(\varepsilon_7) \int_0^1 \omega_{1t}^2 dx, \tag{2.3.69}$$

$$\int_0^1 \omega_{3t}\theta_1 dx \leq \varepsilon_7 \int_0^1 \theta_{1x}^2 dx + c(\varepsilon_7) \int_0^1 \omega_{3t}^2 dx, \tag{2.3.70}$$

et

$$\int_0^1 \theta_{1t}^2 dx \leq c_p \int_0^1 \theta_{1xt}^2 dx. \tag{2.3.71}$$

Remplaçant (2.3.69) , (2.3.70) , et (2.3.71) dans (2.3.68) , donc

$$\frac{dI_7(x,t)}{dt} \leq -\frac{1}{2}\int_0^1 \theta_{1x}^2 dx + \rho c \int_0^1 \theta_{1xt}^2 dx + C(\varepsilon_7)\left(\int_0^1 \omega_{1t}^2 dx + \int_0^1 \omega_{3t}^2 dx\right),$$

pour un choix convenable de $C(\varepsilon_7)$, où $C(\varepsilon_7)$ est une constante dépend de ε_7 la constante de Sobolev-Poincaré et k, E, G, h, α, et ρ. ■

Preuve de théorème

On définit la fonction de Lyaponov:

$$L = NE + N_1 I_1 + N_2 I_2 + N_3 I_3 + N_4 I_4 + N_5 I_5 + N_6 I_6 + N_7 I_7,$$

où $N, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7$ sont des constantes positives. En différentiant la fonctionnelle L par rapport au temps:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} L(x,t) &= \frac{d}{dt}\left[NE + N_1 I_1 + N_2 I_2 + N_3 I_3 + N_4 I_4 + N_5 I_5 + N_6 I_6 + N_7 I_7\right] \\
&= N\frac{dE}{dt} + N_1 \frac{dI_1}{dt} + N_2 \frac{dI_2}{dt} + N_3 \frac{dI_3}{dt} + N_4 \frac{dI_4}{dt} + N_5 \frac{dI_5}{dt} + N_6 \frac{dI_6}{dt} + N_7 \frac{dI_7}{dt}.
\end{aligned}$$

Utilisant $(2.2.1)$, $(2.3.1)$, $(2.3.14)$, $(2.3.23)$ $(2.3.35)$, $(2.3.44)$, $(2.3.52)$, et $(2.3.61)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} L(x,t) \leq\ & \gamma_1 \int_0^1 \theta_{1xt}^2 dx + \gamma_2 \int_0^1 \theta_{3x}^2 dx + \gamma_3 \int_0^1 \phi_{2x}^2 dx + \gamma_4 \int_0^1 \omega_{1t}^2 dx + \gamma_5 \int_0^1 \phi_{2t}^2 dx \\
& + \gamma_6 \int_0^1 (\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1)^2 dx + \gamma_7 \int_0^1 (\omega_{1x} + k\omega_3)^2 dx + \gamma_8 \int_0^1 \omega_{3t}^2 dx + \gamma_9 \int_0^1 \theta_{1x}^2 dx,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= -\frac{N}{T_0} + N_1 C(\varepsilon_1) + N_2 C(\varepsilon_2) + N_4 C(\varepsilon_4) + N_5 C(\varepsilon_5) + N_6 C + \rho c N_7, \\
\gamma_2 &= -\frac{N}{T_0} + N_1 C(\varepsilon_1) + N_3 C(\varepsilon_3) + N_4 C(\varepsilon_4), \\
\gamma_3 &= -\frac{N_1 EI}{T_0} + N_3 \varepsilon_3 + N_4 C(\varepsilon_4) + N_6 C, \\
\gamma_4 &= -\frac{N_2 \alpha \rho h T_0}{2} + \frac{N_4 k \rho h I}{2} - \frac{N_5 \rho h}{2} - N_6 \rho h + N_7 C(\epsilon_7), \\
\gamma_5 &= -\frac{N_3 \alpha \rho I T_0}{2} + \frac{N_4 k h \rho I}{2} + N_1 \rho I + N_1 C(\varepsilon_1) + \frac{N_5 \rho h}{2}, \\
\gamma_6 &= -\frac{N_4 G h^2}{2} + kGhN_5 + N_5 \varepsilon_5 + N_3 \varepsilon_3 + N_2 \varepsilon_2, \\
\gamma_7 &= -\frac{N_5 k E h}{2} + N_4 \varepsilon_4 + N_1 \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_2, \\
\gamma_8 &= -N_6 \rho h + N_5 k \rho h + N_2 C(\varepsilon_2) + N_1 \varepsilon_1 + N_7 C(\varepsilon_7), \\
\gamma_9 &= -\frac{N_7}{2}.
\end{aligned}$$

Car on peut choisir N assez grand ,$\epsilon_1, .. , \epsilon_8$, assez petits, et

$$\begin{aligned}
N_1 &> N_4, N_6 \\
N_2 &> N_4, \\
N_3 &> N_1, N_6, \\
N &> N_5, \\
N_6 &> N_2, N_5, N_7,
\end{aligned}$$

alors $\gamma_1, ..., \gamma_8$, sont des constantes négatives. Donc $\exists\ \zeta > 0$, telle que :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} L(x,t) \leq & -\zeta\Big(\int_0^1 \theta_{1xt}^2 dx + \int_0^1 \theta_{1x}^2 dx + \int_0^1 \theta_{3x}^2 dx + \int_0^1 \phi_{2x}^2 dx \\
& + \int_0^1 \omega_{1t}^2 dx + \int_0^1 \phi_{2t}^2 dx + \int_0^1 (\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1)^2 dx \\
& + \int_0^1 (\omega_{1x} + k\omega_3)^2 dx + \int_0^1 \omega_{3t}^2 dx\Big).
\end{aligned}$$

ce qui donne:

$$\frac{d}{dt} L(x,t) \leq -\omega E(t). \tag{2.3.72}$$

D'autre part, on a:

$$|L - NE| = |N_1 I_1 + N_2 I_2 + N_3 I_3 + N_4 I_4 + N_5 I_5 + N_6 I_6 + N_7 I_7|.$$

Utilisant (2.3.2) , (2.3.15) , (2.3.24) , (2.3.36) , (2.3.45) , (2.3.53) , (2.3.62) , on obtient :

$$\begin{aligned}
|L - NE| \;=\; & |N_1 \left[\int_0^1 (\rho I \phi_{2t}\phi_2 + \rho h \omega_{3t} f)\, dx \right] + N_2 \left[\rho c \rho h \int_0^1 \left(\int_0^x \theta_{1t} dy \right) \omega_{1t} dx \right] \\
& + N_3 \left[\rho c \rho I \int_0^1 \left(\int_0^x \theta_3 dy \right) \phi_{2t} dx \right] + N_4 \left[h \rho I \int_0^1 \phi_{2t} (\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1)\, dx \right] \\
& + N_4 \left[h \rho I \int_0^1 \phi_{2x} \omega_{3t} dx \right] - N_5 \left[h\rho \int_0^1 \omega_{3t} (\omega_{1x} - k\omega_3)\, dx \right] \\
& - N_5 \left[h\rho \int_0^1 \omega_{1t} (\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1)\, dx \right] - N_6 \left[\rho h \int_0^1 \omega_{3t}\omega_3 dx \right] \\
& - N_6 \left[\rho h \int_0^1 \omega_{1t}\omega_1 dx \right] + N_7 \left[\rho c \int_0^1 \theta_{1t}\theta_1 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \theta_{1x}^2 dx \right] |. \qquad (2.3.73)
\end{aligned}$$

Des estimations par l'inégalité de Young et l'inégalité de Sobolev-Poincaré, donne:

$$N_1 \int_0^1 \rho I \phi_{2t}\phi_2 dx \leq N_1 K_1 \int_0^1 \phi_{2t}^2 dx,$$

$$N_1 \int_0^1 \rho h \omega_{3t} f dx \leq N_1 K_2 \int_0^1 \omega_{3t}^2 dx + N_1 K_3 \int_0^1 \phi_{2x}^2 dx,$$

$$N_2 \rho c \rho h \int_0^1 \left(\int_0^x \theta_{1t} dy \right) \omega_{1t} dx \leq N_2 K_4 \int_0^1 \omega_{1t}^2 dx + N_2 K_5 \int_0^1 \theta_{1t}^2 dx,$$

$$N_3 \left[\rho c \rho I \int_0^1 \left(\int_0^x \theta_3 dy \right) \phi_{2t} dx \right] \leq N_3 K_6 \int_0^1 \phi_{2t}^2 dx + N_3 K_7 \int_0^1 \theta_3^2 dx,$$

$$N_4 h \rho I \int_0^1 \phi_{2t} (\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1)\, dx \leq N_4 K_8 \int_0^1 \phi_{2t}^2 dx + N_4 K_9 \int_0^1 (\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1)^2 dx,$$

$$N_4 h \rho I \int_0^1 \phi_{2x} \omega_{3t} dx \leq N_4 C \int_0^1 \phi_{2x}^2 dx + N_4 C_1 \int_0^1 \omega_{3t}^2 dx,$$

$$N_5 h \rho \int_0^1 \omega_{3t} (\omega_{1x} - k\omega_3)\, dx \leq N_5 C_2 \int_0^1 \omega_{3t}^2 dx + N_5 C_3 \int_0^1 (\omega_{1x} - k\omega_3)^2 dx,$$

$$N_5 h\rho \int_0^1 \omega_{1t} \left(\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1\right) dx \leq N_5 C_4 \int_0^1 \omega_{1t}^2 dx + N_5 C_5 \int_0^1 \left(\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1\right)^2 dx,$$

$$N_6 \rho h \int_0^1 \omega_{3t} \omega_3 dx \leq N_6 C_6 \int_0^1 \omega_{3t}^2 dx,$$

$$N_6 \rho h \int_0^1 \omega_{1t} \omega_1 dx \leq N_6 C_7 \int_0^1 \omega_{1t}^2 dx,$$

$$N_7 \rho c \int_0^1 \theta_{1t} \theta_1 dx \leq N_7 C_8 \int_0^1 \theta_{1t}^2 dx.$$

Alors on peut écrire (2.3.73) comme:

$$\begin{aligned} |L - NE| \quad \leq \quad & |N_5 C_3 \int_0^1 \left(\omega_{1x} - k\omega_3\right)^2 dx + \delta_1 \int_0^1 \left(\phi_2 + \omega_{3x} + k\omega_1\right)^2 dx \\ & + \delta_2 \int_0^1 \phi_{2x}^2 dx + \delta_3 \int_0^1 \omega_{1t}^2 dx + \delta_4 \int_0^1 \omega_{3t}^2 dx + \delta_5 \int_0^1 \phi_{2t}^2 dx \\ & + \delta_6 \int_0^1 \theta_{1t}^2 dx + N_3 K_7 \int_0^1 \theta_3^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \theta_{1x}^2 dx|, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \delta_1 &= N_4 K_9 + N_5 C_5, \\ \delta_2 &= N_1 K_3 + N_4 C, \\ \delta_3 &= N_2 K_4 + N_5 C_4 + N_6 C_7, \\ \delta_4 &= N_1 K_2 + N_4 C_1 + N_5 C_2 + N_6 C_6, \\ \delta_5 &= N_1 K_1 + N_3 K_6 + N_4 K_8, \\ \delta_6 &= N_1 K_1 + N_7 C_8, \end{aligned}$$

Donc, $\exists \lambda > 0$ telle que:

$$|L - NE| \leq \lambda E\left(t\right),$$

alors

$$\left(N - \lambda\right) E \leq L \leq \left(N + \lambda\right) E,$$

pour un choix de N trés grand, on déduit facilement que:

$$\omega_2 E(t) \leq L(x,t) \leq \omega_1 E(t). \tag{2.3.74}$$

A partir de (2.3.72) , et (2.3.74) , on trouve

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq -\mu E(t). \tag{2.3.75}$$

Intègrant (2.3.75) par rapport à t, on obtient:

$$E(t) \leq CE(0)\, e^{-\mu t}.$$

D'où le résultat.

Chapitre 3

Décroissance de l'énergie pour un système Timoshenko de Thermoélastique

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on considère le système suivant:

$$\rho_1\phi_{tt} - K\left(\phi_x + \psi\right)_x = 0 \tag{3.1.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + K\left(\phi_x + \psi\right) + \beta\theta_{tx} = 0 \tag{3.1.2}$$

$$\rho_3\theta_{tt} - \delta\theta_{xx} + \gamma\psi_{tx} - k\theta_{txx} = 0 \tag{3.1.3}$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \phi(.,0) &= \phi_0, \ \ \phi_t(.,0) = \phi_1, \ \psi(.,0) = \psi_0, \ \psi_t(.,0) = \psi_1, \\ \theta(.,0) &= \theta_0, \ \ \theta_t(.,0) = \theta_1, \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

et les conditions aux limites:

$$\phi(0,t) = \phi(1,t) = \psi(0,t) = \psi(1,t) = \theta_x(0,t) = \theta_x(1,t) = 0, \tag{3.1.5}$$

où $t \in (0,\infty)$ et $x \in (0,1)$, telle que φ est le déplacement transverse du poutre, et ψ est l'angle de rotation du filement du poutre. θ est la déviations de la température , En plus, ρ_1, ρ_2, ρ_3, K, b, δ, γ et k sont des constantes positives.

3.2 Calcul d'énergie

Lemme 3.2.1 *Soit* (ϕ, ψ, θ) *solution de* $(3.1.1) - (3.1.3)$*, pour tout* $t > 0$ *on a l'identité suivante:*

$$\frac{dE\,(t)}{dt} = -\beta k \int_0^1 \theta_{tx}^2 dx. \tag{3.2.1}$$

où

$$E(t) = \frac{\gamma}{2}\int_0^1 \left(\rho_1\phi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + K\left(\phi_x + \psi\right)^2 + b\psi_x^2\right) dx + \frac{\beta}{2}\int_0^1 \left(\rho_3\theta_t^2 + \delta\theta_x^2\right) dx. \tag{3.2.2}$$

Preuve. Multiplions (3.1.1) par $\gamma\phi_t$, (3.1.2) par $\gamma\psi_t$, et (3.1.3) par $\beta\theta_t$, en intègre par rapport à x sur $[0,1]$, on obtient :

$$\begin{cases} \rho_1\gamma\int_0^1 \phi_{tt}\phi_t dx - K\gamma\int_0^1 \left(\phi_x + \psi\right)_x \phi_t dx = 0, \\ \rho_2\gamma\int_0^1 \psi_{tt}\psi_t dx - b\gamma\int_0^1 \psi_{xx}\psi_t dx + K\gamma\int_0^1 \left(\phi_x + \psi\right)\psi_t dx + \beta\gamma\int_0^1 \theta_{tx}\psi_t dx = 0, \\ \rho_3\beta\int_0^1 \theta_{tt}\theta_t dx - \delta\beta\int_0^1 \theta_{xx}\theta_t dx + \beta\gamma\int_0^1 \psi_{tx}\theta_t dx - k\beta\int_0^1 \theta_{txx}\theta_t dx = 0. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

On peut voir que:

$$\rho_1\gamma\int_0^1 \phi_{tt}\phi_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\rho_1\gamma\int_0^1 \phi_t^2 dx, \tag{3.2.4}$$

$$\rho_2\gamma\int_0^1 \psi_{tt}\psi_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\rho_2\gamma\int_0^1 \psi_t^2 dx, \tag{3.2.5}$$

et

$$\rho_3\beta\int_0^1 \theta_{tt}\theta_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\rho_3\beta\int_0^1 \theta_t^2 dx. \tag{3.2.6}$$

Remplaçons $(3.2.4)$, $(3.2.5)$, et $(3.2.6)$ dans $(3.2.3)$. Puis additionnons les équations résultantes, on obtient :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\rho_1\gamma\int_0^1 \phi_t^2 dx + \rho_2\gamma\int_0^1 \psi_t^2 dx + \rho_3\beta\int_0^1 \theta_t^2 dx\right\} + K\gamma\int_0^1 \left(\phi_x + \psi\right)\psi_t dx + \beta\gamma\int_0^1 \theta_{tx}\psi_t dx \\ = \;& \gamma\int_0^1 \left[K\left(\phi_x + \psi\right)_x \phi_t + b\psi_{xx}\psi_t - \beta\psi_{tx}\theta_t\right] dx + \delta\beta\int_0^1 \theta_{xx}\theta_t dx + k\beta\int_0^1 \theta_{txx}\theta_t dx. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Une intégration par partie sur le second membre de (3.2.7), donne :

$$\int_0^1 (\phi_x+\psi)_x \phi_t dx = -\int_0^1 (\phi_x+\psi)\phi_{tx} dx, \tag{3.2.8}$$

$$\int_0^1 \psi_{xx}\psi_t dx = -\int_0^1 \psi_x\psi_{tx} dx, \tag{3.2.9}$$

$$\int_0^1 \psi_{tx}\theta_t dx = -\int_0^1 \psi_t\theta_{tx} dx, \tag{3.2.10}$$

$$\int_0^1 \theta_{xx}\theta_t dx = -\int_0^1 \theta_x\theta_{tx} dx. \tag{3.2.11}$$

et

$$\int_0^1 \theta_{txx}\theta_t dx = -\int_0^1 \theta_{tx}^2 dx, \tag{3.2.12}$$

En insèrant (3.2.8) , (3.2.9) , (3.2.10) , (3.2.11) et (3.2.12) dans (3.2.7), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\rho_1\gamma\int_0^1 \phi_t^2 dx + \rho_2\gamma\int_0^1 \psi_t^2 dx + \rho_3\beta\int_0^1 \theta_t^2 dx\right\} + K\gamma\int_0^1 (\phi_x+\psi)\psi_t dx + \beta\gamma\int_0^1 \theta_{tx}\psi_t dx \\
&+K\gamma\int_0^1 (\phi_x+\psi)\phi_{tx} dx + b\gamma\int_0^1 \psi_x\psi_{tx} dx + k\beta\int_0^1 \theta_{tx}^2 dx - \gamma\beta\int_0^1 \psi_t\theta_{tx} dx + \delta\beta\int_0^1 \theta_x\theta_{tx} dx \\
=\ & 0.
\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

On peut voir aussi :

$$K\gamma\int_0^1 (\phi_x+\psi)\phi_{tx} dx + K\gamma\int_0^1 (\phi_x+\psi)\psi_t dx = \frac{\gamma}{2}\frac{d}{dt}\left\{K\int_0^1 (\phi_x+\psi)^2 dx\right\}, \tag{3.2.14}$$

et

$$b\gamma\int_0^1 \psi_x\psi_{xt} dx = \frac{\gamma}{2}\frac{d}{dt}\left[b\int_0^1 \psi_x^2 dx\right], \tag{3.2.15}$$

de même

$$\delta\beta\int_0^1 \theta_x\theta_{xt} dx = \frac{\beta}{2}\frac{d}{dt}\left[\delta\int_0^1 \theta_x^2 dx\right]. \tag{3.2.16}$$

Remplaçant $(3.2.14), (3.2.15)$, et $(3.2.16)$ dans $(3.2.13)$, on obtient :

$$\begin{aligned}&\frac{\gamma}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \left[\rho_1\phi_t^2+\rho_2\psi_t^2+K\left(\phi_x+\psi\right)^2+b\psi_x^2\right]dx+\frac{\beta}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\left[\rho_3\theta_t^2dx+\delta\theta_x^2\right]dx\\ = \; & -\beta k\int_0^1\theta_{tx}^2dx.\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Théorème 3.2.1 *On suppose que*

$$\frac{\rho_1}{K}=\frac{\rho_2}{b}, \tag{3.2.17}$$

et

$$\phi_0,\psi_0,\theta_0\in H_0^1\left(0,1\right),\;\;\phi_1,\psi_1,\theta_1\in L^2\left(0,1\right).$$

Alors l'énergie $E(t)$ décroît exponentiellement quand le temps tend vers l'infini, autrement dit, il existe deux constantes positives C et ξ indépendant de t, telles que

$$E(t)\leq CE(0)e^{-\xi t},\;\;\forall t>0. \tag{3.2.18}$$

Pour prouver ce Théorème on a besoin des lemmes suivants

3.3 Résultat principaux

Lemme 3.3.1 *Soit (ϕ,ψ,θ) solution de $(3.1.1)-(3.1.3)$, alors pour tout $t>0$, et $\varepsilon_1\in\mathbb{R}^+$, on a :*

$$\frac{dI_1\left(x,t\right)}{dt}\leq-\frac{b}{2}\int_0^1\psi_x^2dx+\varepsilon_1\rho_1\int_0^1\phi_t^2dx+\left(\rho_2+\frac{\rho_1}{4\varepsilon_1}\right)\int_0^1\psi_t^2dx+\frac{\beta^2}{2b}\int_0^1\theta_{tx}^2dx, \tag{3.3.1}$$

où

$$I_1\left(x,t\right)=\int_0^1\left(\rho_2\psi_t\psi+\rho_1\phi_t\omega\right)dx, \tag{3.3.2}$$

et ω la solution de l'équation différentielle:

$$\begin{cases}-\omega_{xx}=\psi_x,\\ \omega\left(0\right)=\omega\left(1\right)=0.\end{cases} \tag{3.3.3}$$

telle que:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \omega_x^2 dx &\leq \int_0^1 \psi^2 dx \leq c_p \int_0^1 \psi_x^2 dx, \\ \int_0^1 \omega_t^2 dx &\leq c_p \int_0^1 \omega_{tx}^2 dx \leq c_p \int_0^1 \psi_t^2 dx, \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\frac{dI_1(x,t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\int_0^1 (\rho_2 \psi_t \psi + \rho_1 \phi_t \omega)\, dx \\ &= \int_0^1 \left(\rho_2 \psi_{tt} \psi + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 \phi_{tt} \omega + \rho_1 \phi_t \omega_t\right) dx. \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Remplaçons par (3.1.1) et (3.1.2), dans (3.3.5) :

$$\frac{dI_1(x,t)}{dt} = \int_0^1 \left(b\psi_{xx}\psi - K(\phi_x + \psi)\psi - \beta\theta_{tx}\psi + \rho_2\psi_t^2 + K(\phi_x + \psi)_x \omega + \rho_1 \phi_t \omega_t\right) dx,$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{dI_1(x,t)}{dt} &= -K\int_0^1 \phi_x \psi - K\int_0^1 \psi^2 dx - \beta\int_0^1 \theta_{tx}\psi dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \rho_1 \int_0^1 \phi_t \omega_t dx \\ &\quad + b\int_0^1 \psi_{xx}\psi dx + K\int_0^1 \phi_{xx}\omega dx + K\int_0^1 \psi_x \omega dx. \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

L'intégration par partie sur les trois derniers termes de (3.3.6), donne :

$$\int_0^1 \psi_{xx}\psi dx = -\int_0^1 \psi_x^2 dx, \tag{3.3.7}$$

$$\int_0^1 \phi_{xx}\omega dx = -\int_0^1 \phi_x \omega_x dx, \tag{3.3.8}$$

$$\int_0^1 \psi_x \omega dx = -\int_0^1 \psi \omega_x dx. \tag{3.3.9}$$

En vertu $(3.3.7)$, $(3.3.8)$, et $(3.3.9)$ dans $(3.3.6)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{dI_1(x,t)}{dt} &= -b\int_0^1 \psi_x^2 dx - K\int_0^1 \phi_x\psi - K\int_0^1 \psi^2 dx - \beta\int_0^1 \psi\theta_{tx} dx + \rho_2\int_0^1 \psi_t^2 dx \\ &\quad -K\int_0^1 \phi_x\omega_x dx - K\int_0^1 \psi\omega_x dx + \rho_1\int_0^1 \phi_t\omega_t dx,\end{aligned}$$

et d'aprés $(3.3.3)$, on trouve:

$$\frac{dI_1(x,t)}{dt} = -b\int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_2\int_0^1 \psi_t^2 dx - \beta\int_0^1 \psi\theta_{tx} dx + \rho_1\int_0^1 \phi_t\omega_t dx. \tag{3.3.10}$$

Maintenant, on va estimer les deux derniers termes de $(3.3.10)$. En utilisant l'inégalité de Young et l'inégalité de Sobolev-Poincaré et $(3.3.4)$, on obtient:

$$\beta\int_0^1 \psi\theta_{tx} dx \le \frac{b}{2}\int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\beta^2}{2b}\int_0^1 \theta_{tx}^2 dx, \tag{3.3.11}$$

$$\rho_1\int_0^1 \phi_t\omega_t dx \le \rho_1\varepsilon_1\int_0^1 \phi_t^2 dx + \frac{\rho_1}{4\varepsilon_1}\int_0^1 \psi_t^2 dx, \tag{3.3.12}$$

Regroupant $(3.3.11)$ et $(3.3.12)$ dans $(3.3.10)$, on trouve :

$$\frac{dI_1(x,t)}{dt} \le -\frac{b}{2}\int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon_1\rho_1\int_0^1 \phi_t^2 dx + \left(\rho_2 + \frac{\rho_1}{4\varepsilon_1}\right)\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\beta^2}{2b}\int_0^1 \theta_{tx}^2 dx.$$

d'où le résultat. ■

Lemme 3.3.2 *Soit (ϕ,ψ,θ) solution de $(3.1.1)-(3.1.3)$, alors pour tout $t>0$, et $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$, on a :*

$$\frac{dI_2(x,t)}{dt} \le -\frac{\gamma\rho_2}{2}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \varepsilon_2\int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon_2\int_0^1 \phi_x^2 dx + C(\varepsilon_2)\int_0^1 \theta_{tx}^2 dx, \tag{3.3.13}$$

où

$$I_2(x,t) = \rho_2\left(\rho_3\int_0^1\int_0^x \theta_t(t,y)\,dy\right)\psi_t(t,x)\,dx - \delta\int_0^1 \theta_x\psi dx, \tag{3.3.14}$$

et

$$\int_0^x \theta_t(t,y)\,dy = \frac{d}{dt}\int_0^x \theta(t,y)\,dy = 0. \tag{3.3.15}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\frac{dI_2(x,t)}{dt} &= \rho_2\int_0^1\left(\int_0^x\rho_3\theta_{tt}(t,y)\,dy\right)\psi_t dx+\rho_3\int_0^1\left(\int_0^x\theta_t(t,y)\,dy\right)\rho_2\psi_{tt}dx\\&-\delta\int_0^1\theta_{xt}\psi dx-\delta\int_0^1\theta_x\psi_t dx,\end{aligned}$$

Utilisant (3.1.2) et (3.1.3) :

$$\begin{aligned}\frac{dI_2(x,t)}{dt} &= \int_0^1\left[\int_0^x(\delta\theta_{xx}-\gamma\psi_{tx}+k\theta_{txx})\,dy\right]\rho_2\psi_t dx\\&+\rho_3\int_0^1\left(\int_0^x\theta_t dy\right)\left[b\psi_{xx}-K(\phi_x+\psi)-\beta\theta_{tx}\right]dx\\&-\delta\int_0^1\theta_{xt}\psi dx-\delta\int_0^1\theta_x\psi_t dx.\end{aligned}\tag{3.3.16}$$

On peut voir que :

$$\int_0^x\theta_{xx}dy=\theta_x(x,t)-\theta_x(0,t)=\theta_x(x,t),\tag{3.3.17}$$

de même

$$\int_0^x\psi_{tx}dy=\psi_t(x,t)-\psi_t(0,t)=\psi_t(x,t),\tag{3.3.18}$$

et

$$\int_0^x\theta_{txx}dy=\theta_{tx}(x,t)-\theta_{tx}(0,t)=\theta_{tx}(x,t).\tag{3.3.19}$$

On peut écrire aussi que :

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_0^x\theta_t dy\right)\psi_{xx}dx &= \left[\left(\int_0^x\theta_t dy\right)\psi_x\right]_0^1-\int_0^1\left(\int_0^x\theta_{tx}dy\right)\psi_x dx\\&=\left[\left(\int_0^x\theta_t dy\right)\psi_x\right]_0^1-\int_0^1\theta_t\psi_x dx,\end{aligned}\tag{3.3.20}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_0^x \theta_t dy\right)\phi_x dx &= \left[\left(\int_0^x \theta_t dy\right)\phi\right]_0^1 - \int_0^1\left(\int_0^x \theta_{tx} dy\right)\phi dx\\ &= \left[\left(\int_0^x \theta_t dy\right)\phi\right]_0^1 - \int_0^1 \theta_t\phi dx, \qquad (3.3.21)\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_0^x \theta_t dy\right)\theta_{tx} dx &= \left[\left(\int_0^x \theta_t dy\right)\theta_t\right]_0^1 - \int_0^1\left(\int_0^x \theta_{tx} dy\right)\theta_t dx\\ &= \left[\left(\int_0^x \theta_t dy\right)\theta_t\right]_0^1 - \int_0^1 \theta_t^2 dx. \qquad (3.3.22)\end{aligned}$$

Remplaçant $(3.3.17)$, $(3.3.18)$, $(3.3.19)$, $(3.3.20)$, $(3.3.21)$ et $(3.3.22)$ dans $(3.3.16)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{dI_2}{dt} &= \rho_2\int_0^1 (\delta\theta_x - \gamma\psi_t + k\theta_{tx})\psi_t dx - K\rho_3\int_0^1\left(\int_0^x \theta_t dy\right)\psi dx - \rho_3 b\int_0^1 \theta_t\psi_x dx + K\rho_3\int_0^1\theta_t\phi dx\\ &\quad+\beta\rho_3\int_0^1\theta_t^2 dx - \delta\int_0^1\theta_{xt}\psi dx - \delta\int_0^1\theta_x\psi_t dx + \left[\rho_3\left(\int_0^x \theta_t(t,y)\,dy\right)(b\psi_x - k\phi - \beta\theta_t)\right]_{x=0}^{x=1}.\end{aligned}$$

En utilisant $(3.3.15)$,on obtient:

$$\left[\rho_3\left(\int_0^x \theta_t(t,y)\,dy\right)(b\psi_x - k\phi - \beta\theta_t)\right]_{x=0}^{x=1} = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}I_2' + \gamma\rho_2\int_0^1\psi_t^2 dx &= \delta\rho_2\int_0^1\theta_x\psi_t dx + k\rho_2\int_0^1\theta_{tx}\psi_t dx - K\rho_3\int_0^1\left(\int_0^x\theta_t dy\right)\psi dx\\ &\quad-\rho_3 b\int_0^1\theta_t\psi_x dx + \rho_3 K\int_0^1\theta_t\phi dx + \beta\rho_3\int_0^1\theta_t^2 dx\\ &\quad-\delta\int_0^1\theta_{xt}\psi dx - \delta\int_0^1\theta_x\psi_t dx. \qquad (3.3.23)\end{aligned}$$

Maintenant, on va estimer les termes de second membre de (3.3.23) par L'inégalités de Young et l'inégalité de Sobolev-Poincaré, on obtient :

$$\int_0^1 \theta_x \psi_t dx \leq \varepsilon_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + c_2(\varepsilon_2) \int_0^1 \theta_{tx}^2 dx,$$

$$\int_0^1 \theta_{tx} \psi_t dx \leq \varepsilon_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + c(\varepsilon_2) \int_0^1 \theta_{tx} dx,$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_0^x \theta_t dy \right) \psi dx &\leq c_p \int_0^1 \theta_t \psi dx \\ &\leq c_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + c_2(\varepsilon_2) \int_0^1 \theta_{tx}^2 dx,\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \theta_t \psi_x dx \leq \varepsilon_2 \int_0^1 \psi_x^2 dx + c_2(\varepsilon_2) \int_0^1 \theta_{tx}^2 dx,$$

$$\int_0^1 \theta_t \phi dx \leq \varepsilon_2 \int_0^1 \phi_x^2 dx + c_2(\varepsilon_2) \int_0^1 \theta_{tx} dx,$$

$$\int_0^1 \theta_t^2 dx \leq c_2 \int_0^1 \theta_{tx}^2 dx,$$

$$\int_0^1 \theta_{xt} \psi dx \leq c_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + c_2(\varepsilon_2) \int_0^1 \theta_{xt}^2 dx,$$

et

$$\int_0^1 \theta_x \psi_t dx \leq \epsilon_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + c_2(\varepsilon_2) \int_0^1 \theta_{xt}^2 dx.$$

Regroupant les estimations précédentes dans (3.3.23) , on obtient :

$$\frac{dI_2}{dt} \leq -\frac{\gamma \rho_2}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 \phi_x^2 dx + C(\varepsilon_2) \int_0^1 \theta_{tx}^2 dx,$$

pour un choix convenable de $C(\varepsilon_2)$, où $C(\varepsilon_2)$ est une constante dépend de ε_2 et la constante de Pincaré et K, b, δ, γ, β, ρ_1, et ρ_2. ■

Lemme 3.3.3 *Soit* (ϕ, ψ, θ) *solution de* $(3.1.1) - (3.1.3)$, *alors pour tout* $t > 0$, *et* $\frac{\rho_1}{K} = \frac{\rho_2}{b}$ *on a:*

$$\frac{dJ(x,t)}{dt} \leq [b\phi_x\psi_x]_{x=0}^{x=1} - \frac{K}{2}\int_0^1 (\phi_x + \psi)^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\beta^2}{2K}\int_0^1 \theta_{tx}^2 dx, \tag{3.3.24}$$

où

$$J(x,t) = \rho_2 \int_0^1 \psi_t (\phi_x + \psi) dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_x \phi_t dx. \tag{3.3.25}$$

Preuve. On a

$$\frac{dJ(x,t)}{dt} = \rho_2 \int_0^1 \psi_{tt}(\phi_x + \psi) dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t (\phi_x + \psi)_t dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_{tx}\phi_t dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_x \phi_{tt} dx.$$

On peut écrire aussi:

$$\begin{aligned} \frac{dJ(x,t)}{dt} &= \int_0^1 (b\psi_{xx} - K(\phi_x + \psi) - \beta\theta_{tx})(\phi_x + \psi) dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t (\phi_x + \psi)_t dx \\ &\quad + \rho_2 \int_0^1 \psi_{xt}\phi_t dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_x \phi_{tt} dx, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{dJ(x,t)}{dt} &= -K\int_0^1 (\phi_x + \psi)^2 dx - \beta \int_0^1 \theta_{tx}(\phi_x + \psi) dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t \phi_{xt} dx \\ &+ \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_x \phi_{tt} dx + b\int_0^1 \psi_{xx}(\phi_x + \psi) dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_{xt}\phi_t dx. \end{aligned} \tag{3.3.26}$$

Une integration par partie sur les deux derniers termes de (3.3.26), donne:

$$\int_0^1 \psi_{xx}\phi_x dx = [\psi_x \phi_x]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \psi_x \phi_{xx} dx, \tag{3.3.27}$$

$$\int_0^1 \psi_{xx}\psi dx = -b\int_0^1 \psi_x^2 dx, \tag{3.3.28}$$

et

$$\int_0^1 \psi_{tx}\phi_t dx = -\int_0^1 \psi_t \phi_{xt} dx. \qquad (3.3.29)$$

On regroupe (3.3.27) , (3.3.28) , et (3.3.29) dans (3.3.26), on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{dJ(x,t)}{dt} &= [b\psi_x\phi_x]_{x=0}^{x=1} - b\int_0^1 \psi_x\phi_{xx}dx - b\int_0^1 \psi_x^2 dx - K\int_0^1 (\phi_x+\psi)^2 dx - \beta\int_0^1 (\phi_x+\psi)\theta_{tx}dx \\ &+\rho_2\int_0^1 \psi_t^2 dx + \rho_2\int_0^1 \psi_x\phi_{tt}dx. \end{aligned} \qquad (3.3.30)$$

On peut voir aussi :

$$-b\int_0^1 \psi_x\phi_{xx}dx - b\int_0^1 \psi_x^2 dx = -b\int_0^1 \psi_x(\phi_x+\psi)_x dx, \qquad (3.3.31)$$

et

$$\rho_2\int_0^1 \psi_x\phi_{tt}dx = \frac{\rho_2}{\rho_1}\int_0^1 \psi_x\rho_1\phi_{tt}dx.$$

D'autre part, on a :

$$\rho_1\phi_{tt} = K(\phi_x+\psi)_x,$$

donc

$$\begin{aligned} \rho_2\int_0^1 \psi_x\phi_{tt}dx &= \frac{K\rho_2}{\rho_1}\int_0^1 \psi_x(\phi_x+\psi)_x dx \\ &= b\int_0^1 \psi_x(\phi_x+\psi)_x dx. \end{aligned} \qquad (3.3.32)$$

Regroupant (3.3.31) et (3.3.32) dans (3.3.30) , on obtient:

$$\frac{dJ(x,t)}{dt} = [b\psi_x\phi_x]_{x=0}^{x=1} - K\int_0^1 (\phi_x+\psi)^2 dx + \rho_2\int_0^1 \psi_t^2 dx - \beta\int_0^1 (\phi_x+\psi)\theta_{tx}dx. \qquad (3.3.33)$$

L'estimation du dernier terme de (3.3.33) par l'inégalité de Young donne :

$$\beta\int_0^1 (\phi_x+\psi)\theta_{tx}dx \le \frac{K}{2}\int_0^1 (\phi_x+\psi)^2 dx + \frac{\beta^2}{2K}\int_0^1 \theta_{tx}^2 dx. \qquad (3.3.34)$$

En vertu, (3.3.34) , dans (3.3.33) , on obtient :

$$J'(t) \leq [b\phi_x\psi_x]_{x=0}^{x=1} - \frac{K}{2}\int_0^1 (\phi_x+\psi)^2 dx + \rho_2\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\beta^2}{2K}\int_0^1 \theta_{tx}^2 dx.$$

d'où le résultat. ■

Ensuite, afin d'absorber les termes limites, apparaissant dans (3.3.24), nous exploitons, la fonction :

$$q(x) = 2 - 4x, \quad x \in (0,1). \tag{3.3.35}$$

Lemme 3.3.4 *Soit* (ϕ, ψ, θ) *solution de* (3.1.1)−(3.1.3), *alors pour tout* $t > 0$, *et* $\varepsilon_3 \in \mathbb{R}^+$,*on a :*

$$\begin{aligned}
[b\phi_x\psi_x]_{x=0}^{x=1} \quad \leq \quad & -\frac{\varepsilon_3}{K}\frac{d}{dt}\int_0^1 q\phi_t\phi_x dx - \frac{b\rho_2}{4\varepsilon_3}\frac{d}{dt}\int_0^1 q\psi_t\psi_x dx \\
& +3\varepsilon_3\int_0^1 \phi_x^2 dx + \left(\varepsilon_3 + \frac{3b^2}{4\varepsilon_3} + \frac{b^2}{4\varepsilon_3^3}\right)\int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{2\rho_1\varepsilon_3}{K}\int_0^1 \phi_t^2 dx \\
& +\frac{\rho_2 b}{2\varepsilon_3}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{K^2}{4}\varepsilon_3\int_0^1 (\phi_x+\psi)^2 dx + \frac{\beta^2}{4\varepsilon_3}\int_0^1 \theta_{tx}^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.3.36}$$

Preuve. Utilisant l'inégalité de Young, alors $\forall\epsilon_3 > 0$,

$$[b\phi_x\psi_x]_{x=0}^{x=1} \leq \varepsilon_3\left[\phi_x^2(1) + \phi_x^2(0)\right] + \frac{b^2}{4\varepsilon_3}\left[\psi_x^2(1) + \psi_x^2(0)\right]. \tag{3.3.37}$$

Ensuite, calculant les dérivées, $\frac{d}{dt}\int_0^1 b\rho_2 q\psi_t\psi_x dx$ et $\frac{d}{dt}\int_0^1 \rho_1 q\phi_t\phi_x dx$.

On a :

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 b\rho_2 q\psi_t\psi_x dx = \int_0^1 b\rho_2 q\psi_{tt}\psi_x dx + \int_0^1 b\rho_2 q\psi_t\psi_{xt} dx.$$

D'autre part on a :

$$\rho_2\psi_{tt} = b\psi_{xx} - K(\phi_x+\psi) - \beta\theta_{tx},$$

alors :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_0^1 b\rho_2 q\psi_t\psi_x dx \quad = \quad & -Kb\int_0^1 q\psi_x(\phi_x+\psi) dx - \beta b\int_0^1 q\theta_{tx}\psi_x dx \\
& +b^2\int_0^1 q\psi_{xx}\psi_x dx + b\rho_2\int_0^1 q\psi_t\psi_{xt} dx.
\end{aligned} \tag{3.3.38}$$

Une integration par partie, sur les deux derniers termes de (3.3.38) , donne :

$$b^2\int_0^1 q\psi_{xx}\psi_x dx = \frac{b^2}{2}\left[q\psi_x^2\right]_0^1 - \frac{b^2}{2}\int_0^1 q_x\psi_x^2 dx. \tag{3.3.39}$$

et

$$b\rho_2\int_0^1 q\psi_t\psi_{xt}dx = -\frac{b\rho_2}{2}\int_0^1 q_x\psi_t^2 dx. \tag{3.3.40}$$

En vertus (3.3.39) et (3.3.40) dans (3.3.38) , on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^1 b\rho_2 q\psi_t\psi_x dx &= \frac{b^2}{2}\left[q\psi_x^2\right]_{x=0}^{x=1} - \frac{b^2}{2}\int_0^1 q_x\psi_x^2 dx - \frac{\rho_2 b}{2}\int_0^1 q_x\psi_t^2 dx \\ &\quad -Kb\int_0^1 q\psi_x\left(\phi_x+\psi\right)dx - \beta b\int_0^1 q\psi_x\theta_{tx}dx. \end{aligned}\tag{3.3.41}$$

On peut voire que:

$$\begin{aligned}\frac{b^2}{2}\left[q\psi_x^2\right]_{x=0}^{x=1} &= \frac{b^2}{2}\left[q(1)\psi_x^2(1) - q(0)\psi_x^2(0)\right] \\ &= -b^2\left[\psi_x^2(1)+\psi_x^2(0)\right], \end{aligned}\tag{3.3.42}$$

et

$$-\frac{b^2}{2}\int_0^1 q_x\psi_x^2 dx = 2b^2\int_0^1 \psi_x^2 dx, \tag{3.3.43}$$

de même

$$-\frac{b\rho_2}{2}\int_0^1 q_x\psi_t^2 dx = 2b\rho_2\int_0^1 \psi_t^2 dx, \tag{3.3.44}$$

car

$$\frac{dq}{dx} = -4,$$

et d'aprés (3.3.35), on a $\forall\ x \in (0,1)$:

$$q(x) \leq 2. \tag{3.3.45}$$

Remplaçant (3.3.42) , (3.3.43) , (3.3.44) , et (3.3.45) , dans (3.3.41) , on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^1 b\rho_2 q\psi_t\psi_x dx &\leq -b^2\left[\psi_x^2(1)+\psi_x^2(0)\right] + 2b^2\int_0^1 \psi_x^2 dx + 2b\rho_2\int_0^1 \psi_t^2 dx \\ &\quad -2Kb\int_0^1 \psi_x\left(\phi_x+\psi\right)dx - 2\beta b\int_0^1 \psi_x\theta_{tx}dx. \end{aligned}\tag{3.3.46}$$

Une estimation par l'inégalité de Young pour les deux derniers termes de (3.3.46) , donne :

$$2Kb\int_0^1 \psi_x\left(\phi_x+\psi\right)dx \le \epsilon_3^2K^2\int_0^1 \left(\phi_x+\psi\right)^2dx+\frac{b^2}{\epsilon_3^2}\int_0^1 \psi_x^2dx, \tag{3.3.47}$$

et

$$2\beta b\int_0^1 \psi_x\theta_{tx}dx \le b^2\int_0^1 \psi_x^2+\beta^2\int_0^1 \theta_{tx}^2dx. \tag{3.3.48}$$

On regroupe (3.3.47) et (3.3.48), dans (3.3.41) , on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^1 b\rho_2q\psi_t\psi_xdx \;&\le\; -b^2\left[\psi_x^2(1)+\psi_x^2(0)\right]+3b^2\int_0^1 \psi_x^2dx\\ &\quad+2b\rho_2\int_0^1 \psi_t^2dx+\varepsilon_3^2K^2\int_0^1 \left(\phi_x+\psi\right)^2dx\\ &\quad+\frac{b^2}{\varepsilon_3^2}\int_0^1 \psi_x^2dx+\beta^2\int_0^1 \theta_{tx}^2dx,\end{aligned} \tag{3.3.49}$$

Maintenant, on arrive a calculer la dérivé $\frac{d}{dt}\int_0^1 \rho_1q\phi_t\phi_xdx$:

On a

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \rho_1q\phi_t\phi_xdx=\int_0^1 \rho_1q\phi_{tt}\phi_xdx+\int_0^1 \rho_1q\phi_t\phi_{xt}dx,$$

et

$$\rho_1\phi_{tt}=K\left(\phi_x+\psi\right)_x.$$

Alors

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \rho_1q\phi_t\phi_xdx=K\int_0^1 q\psi_x\phi_xdx+K\int_0^1 q\phi_{xx}\phi_xdx+\rho_1\int_0^1 q\phi_t\phi_{xt}dx. \tag{3.3.50}$$

Une intégration par partie sur les deux derniers termes de (3.3.50) , donne:

$$K\int_0^1 q\phi_{xx}\phi_xdx=\frac{K}{2}\left[q\phi_x^2\right]_0^1-\frac{K}{2}\int_0^1 q_x\phi_x^2dx, \tag{3.3.51}$$

et

$$\rho_1\int_0^1 \phi_tq\phi_{xt}dx=-\frac{\rho_1}{2}\int_0^1 q_x\phi_t^2dx. \tag{3.3.52}$$

Remplaçant (3.3.51) et (3.3.52) dans (3.3.50) , on obtient :

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \rho_1 q\phi_t\phi_x dx = \frac{K}{2}\left[q\phi_x^2\right]_0^1 - \frac{K}{2}\int_0^1 q_x\phi_x^2 dx - \frac{\rho_1}{2}\int_0^1 q_x\phi_t^2 dx + K\int_0^1 q\psi_x\phi_x dx. \qquad (3.3.53)$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\frac{K}{2}\left[q\phi_x^2\right]_0^1 &= \frac{K}{2}\left[q(1)\phi_x^2(1) - q(0)\phi_x^2(0)\right] \\ &= -K\left[\phi_x^2(1) + \phi_x^2(0)\right],\end{aligned} \qquad (3.3.54)$$

aussi :

$$-\frac{K}{2}\int_0^1 q_x\phi_x^2 dx = 2K\int_0^1 \phi_x^2 dx, \qquad (3.3.55)$$

et

$$-\frac{\rho_1}{2}\int_0^1 q_x\phi_t^2 dx = 2\rho_1\int_0^1 \phi_t^2 dx. \qquad (3.3.56)$$

Une estimation pour le dernier terme de (3.3.53) par L'inégalité de Young, donne:

$$\begin{aligned}K\int_0^1 q\psi_x\phi_x dx &\leq 2K\int_0^1 \psi_x\phi_x dx \\ &\leq K\int_0^1 \psi_x^2 dx + K\int_0^1 \phi_x^2 dx.\end{aligned} \qquad (3.3.57)$$

En vertu, (3.3.54) , (3.3.55) , (3.3.56) , et (3.3.57) dans (3.3.53) on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^1 \rho_1 q\phi_t\phi_x dx &\leq -K\left[\phi_x^2(1) + \phi_x^2(0)\right] \\ &\quad +3K\int_0^1 \phi_x^2 dx + K\int_0^1 \psi_x^2 dx + 2\rho_1\int_0^1 \phi_t^2 dx.\end{aligned} \qquad (3.3.58)$$

Alors, daprés (3.3.49) , on peut voir que :

$$\begin{aligned}\frac{b^2}{4\varepsilon_3}\left[\psi_x^2(1)+\psi_x^2(0)\right] &\leq -\frac{b\rho_2}{4\varepsilon_3}\frac{d}{dt}\int_0^1 q\psi_t\psi_x dx+\frac{3b^2}{4\varepsilon_3}\int_0^1 \psi_x^2 dx\\ &+\frac{b\rho_2}{2\varepsilon_3}\int_0^1 \psi_t^2 dx+\frac{K^2}{4}\varepsilon_3\int_0^1 (\phi_x+\psi)^2 dx\\ &+\frac{b^2}{4\varepsilon_3^3}\int_0^1 \psi_x^2 dx+\frac{\beta^2}{4\varepsilon_3}\int_0^1 \theta_{tx}^2 dx, \qquad (3.3.59)\end{aligned}$$

de même, d'aprés (3.3.58) :

$$\begin{aligned}\varepsilon_3\left[\phi_x^2(1)+\phi_x^2(0)\right] &\leq -\frac{\rho_1\varepsilon_3}{K}\frac{d}{dt}\int_0^1 q\phi_t\phi_x dx+3\varepsilon_3\int_0^1 \phi_x^2 dx\\ &+\varepsilon_3\int_0^1 \psi_x^2 dx+\frac{2\rho_1\varepsilon_3}{K}\int_0^1 \phi_t^2 dx. \qquad (3.3.60)\end{aligned}$$

Remplaçant (3.3.59), (3.3.60) dans (3.3.37) , on obtient :

$$\begin{aligned}\left[b\phi_x\psi_x\right]_{x=0}^{x=1} &\leq -\frac{\rho_1\varepsilon_3}{K}\frac{d}{dt}\int_0^1 q\phi_t\phi_x dx-\frac{b\rho_2}{4\varepsilon_3}\frac{d}{dt}\int_0^1 q\psi_t\psi_x dx\\ &+3\varepsilon_3\int_0^1 \phi_x^2 dx+\left(\varepsilon_3+\frac{3b^2}{4\varepsilon_3}+\frac{b^2}{4\varepsilon_3^3}\right)\int_0^1 \psi_x^2 dx+\frac{2\rho_1\varepsilon_3}{K}\int_0^1 \phi_t^2 dx\\ &+\frac{\rho_2 b}{2\varepsilon_3}\int_0^1 \psi_t^2 dx+\frac{K^2}{4}\varepsilon_3\int_0^1 (\phi_x+\psi)^2 dx+\frac{\beta^2}{4\varepsilon_3}\int_0^1 \theta_{tx}^2 dx.\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Lemme 3.3.5 *Soit* (ϕ,ψ,θ) *solution de* $(3.1.1)-(3.1.3)$*, alors pour tout* $t>0$*, on a :*

$$\begin{aligned}\frac{d\kappa(x,t)}{dt} &\leq -\rho_1\int_0^1 \phi_t^2 dx-\rho_2\int_0^1 \psi_t^2 dx+\left(b+\frac{1}{2}\right)\int_0^1 \psi_x^2 dx\\ &+K\int_0^1 (\phi_x+\psi)^2 dx+\frac{\beta^2}{2}\int_0^1 \theta_{tx}^2 dx, \qquad (3.3.61)\end{aligned}$$

où

$$\kappa(x,t) = -\rho_1 \int_0^1 \phi_t \phi dx - \rho_2 \int_0^1 \psi_t \psi dx, \tag{3.3.62}$$

Preuve. On a

$$\frac{d\kappa(x,t)}{dt} = -\rho_1 \int_0^1 \phi_{tt} \phi dx - \rho_1 \int_0^1 \phi_t^2 dx - \rho_2 \int_0^1 \psi_{tt} \psi dx - \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx. \tag{3.3.63}$$

D'autre part, on a

$$\rho_1 \phi_{tt} = K (\phi_x + \psi)_x, \tag{3.3.64}$$

et

$$\rho_2 \psi_{tt} = b\psi_{xx} - K(\phi_x + \psi) - \beta \theta_{tx}. \tag{3.3.65}$$

Remplaçant (3.3.64) et (3.3.65), dans (3.3.63) , on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa(x,t)}{dt} &= K \int_0^1 (\phi_x + \psi) \psi dx + \beta \int_0^1 \theta_{tx} \psi dx - \rho_1 \int_0^1 \phi_t^2 dx - \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx \\ &\quad - K \int_0^1 (\phi_x + \psi)_x \phi dx - b \int_0^1 \psi_{xx} \psi dx. \end{aligned} \tag{3.3.66}$$

Une intégration par partie sur les deux derniers termes de (3.3.66) donne:

$$-K \int_0^1 (\phi_x + \psi)_x \phi dx = K \int_0^1 (\phi_x + \psi) \phi_x dx, \tag{3.3.67}$$

et

$$-b \int_0^1 \psi_{xx} \psi dx = b \int_0^1 \psi_x^2 dx, \tag{3.3.68}$$

et remarquons:

$$K \int_0^1 (\phi_x + \psi) \phi_x dx + K \int_0^1 (\phi_x + \psi) \psi dx = K \int_0^1 (\phi_x + \psi)^2 dx. \tag{3.3.69}$$

En insèrant (3.3.67), (3.3.68) et (3.3.69) dans (3.3.66) , on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa(x,t)}{dt} &= -\rho_1 \int_0^1 \phi_t^2 dx - \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + b \int_0^1 \psi_x^2 dx \\ &\quad + K \int_0^1 (\phi_x + \psi)^2 dx + \beta \int_0^1 \theta_{tx} \psi dx. \end{aligned} \tag{3.3.70}$$

Une estimation par l'inégalité de Young et l'inégalité de Sobolev-Poincaré, donne :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \beta\theta_{tx}\psi dx &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \psi^2 dx+\frac{\beta^2}{2}\int_0^1 \theta_{tx}^2 dx\\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \psi_x^2 dx+\frac{\beta^2}{2}\int_0^1 \theta_{tx}^2 dx. \qquad (3.3.71)\end{aligned}$$

Remplaçant (3.3.71) dans (3.3.70) , on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d\kappa(x,t)}{dt} &\leq -\rho_1\int_0^1 \phi_t^2 dx-\rho_2\int_0^1 \psi_t^2 dx+\left(b+\frac{1}{2}\right)\int_0^1 \psi_x^2 dx\\ &\quad +K\int_0^1 (\phi_x+\psi)^2 dx+\frac{\beta^2}{2}\int_0^1 \theta_{tx}^2 dx,\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Lemme 3.3.6 *Soit* (ϕ,ψ,θ) *solution de* $(3.1.1)-(3.1.3)$, *alors pour tout* $t>0$, *et* $\varepsilon_2\in\mathbb{R}^+$,*on a :*

$$\frac{d\Theta(x,t)}{dt}\leq -\delta\int_0^1 \theta_x^2 dx+\left(\rho_3+\frac{\gamma^2}{4\varepsilon_2}\right)\int_0^1 \theta_t^2 dx+\varepsilon_2\int_0^1 \psi_x^2 dx,$$

où

$$\Theta(t)=\int_0^1\left(\rho_3\theta_t\theta+\frac{k}{2}\theta_x^2+\gamma\psi_x\theta\right)dx. \qquad (3.3.72)$$

Preuve. On a

$$\frac{d\Theta(x,t)}{dt}=\int_0^1\left(\rho_3\theta_{tt}\theta+\rho_3\theta_t^2+k\theta_x\theta_{xt}+\gamma\psi_{tx}\theta+\gamma\psi_x\theta_t\right)dx. \qquad (3.3.73)$$

Utilisant (3.1.3), on obtient:

$$\frac{d\Theta(x,t)}{dt}=\int_0^1(\delta\theta_{xx}-\gamma\psi_{tx}+k\theta_{txx})\theta dx+\rho_3\theta_t^2+k\theta_x\theta_{xt}+\gamma\psi_{tx}\theta+\gamma\psi_x\theta_t dx,$$

d'où

$$\frac{d\Theta(x,t)}{dt}=\delta\int_0^1\theta_{xx}\theta dx+k\int_0^1\theta_{txx}\theta dx+\rho_3\int_0^1\theta_t^2+k\int_0^1\theta_x\theta_{xt}+\gamma\int_0^1\psi_x\theta_t dx. \qquad (3.3.74)$$

Une integration par partie sur les deux premiers termes de membre droit de (3.3.74), donne :

$$\delta\int_0^1 \theta_{xx}\theta dx = -\delta\int_0^1 \theta_x^2 dx, \tag{3.3.75}$$

et

$$k\int_0^1 \theta_{txx}\theta dx = -k\int_0^1 \theta_{tx}\theta_x dx. \tag{3.3.76}$$

Remplaçant (3.3.75) et (3.3.76) dans (3.3.74), on obtient :

$$\frac{d\Theta(x,t)}{dt} - \rho_3\int_0^1 \theta_t^2 + \delta\int_0^1 \theta_x^2 dx = \gamma\int_0^1 \psi_x\theta_t dx. \tag{3.3.77}$$

Une estimation du second membre de (3.3.77) par l'inégalité de Young donne :

$$\gamma\int_0^1 \psi_x\theta_t dx \leq \varepsilon_2\int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\gamma^2}{4\varepsilon_2}\int_0^1 \theta_t^2 dx. \tag{3.3.78}$$

En vertu, (3.3.78) dans (3.3.77), on obtient :

$$\frac{d\Theta(x,t)}{dt} \leq -\delta\int_0^1 \theta_x^2 dx + \left(\rho_3 + \frac{\gamma^2}{4\varepsilon_2}\right)\int_0^1 \theta_t^2 + \varepsilon_2\int_0^1 \psi_x^2 dx,$$

d'où le résultat. ■

Lemme 3.3.7 *Soit* (ϕ,ψ,θ) *solution de* $(3.1.1)-(3.1.3)$, *alors* $\exists\beta>0$, *telle que :*

$$\frac{dL(x,t)}{dt} \leq -\beta E(t), \quad \forall t>0, \tag{3.3.79}$$

où L *la fonction de Lyaponov définie par :*

$$\begin{aligned} L &= NE + N_1I_1 + N_2I_2 + J + \frac{\rho_1\varepsilon_3}{K}\int_0^1 q\phi_t\phi_x dx \\ &\quad + \frac{\rho_2 b}{4\varepsilon_3}\int_0^1 q\psi_t\psi_x dx + \mu\kappa + \Theta, \end{aligned} \tag{3.3.80}$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}\frac{dL(x,t)}{dt} &= N\frac{dE(x,t)}{dt}+N_1\frac{dI_1(x,t)}{dt}+N_2\frac{dI_2(x,t)}{dt}+\frac{dJ(x,t)}{dt}+\frac{d}{dt}\frac{\varepsilon_3}{K}\int_0^1\rho_1 q\phi_t\phi_x dx\\ &\quad+\frac{d}{dt}\frac{\rho_2 b}{4\varepsilon_3}\int_0^1 q\psi_t\psi_x dx+\mu\frac{d\kappa(x,t)}{dt}+\frac{d\Theta(x,t)}{dt}.\end{aligned}$$

Maintenant, utilisant (3.2.1) , (3.3.1) , (3.3.13) , (3.3.24) , (3.3.36) , (3.3.61) , (**??**), et

$$\int_0^1\theta_t^2 dx\le\int_0^1\theta_{tx}^2 dx,$$

aussi

$$\int_0^1\phi_x^2 dx\le 2\int_0^1(\phi_x+\psi)^2 dx+2\int_0^1\psi_x^2 dx,$$

on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{dL(x,t)}{dt} &\le \gamma_1\int_0^1\theta_{tx}^2 dx+\gamma_2\int_0^1\psi_x^2 dx+\gamma_3\int_0^1\phi_t^2 dx+\gamma_4\int_0^1\theta_x^2 dx+\gamma_5\int_0^1\psi_t^2 dx\\ &\quad+\gamma_6\int_0^1(\phi_x+\psi)^2 dx.\end{aligned}\tag{3.3.81}$$

où

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= -\beta kN+N_1\frac{\beta^2}{2b}+N_2C(\varepsilon_2)+\frac{\beta^2}{2k}+\frac{\beta^2}{4\varepsilon_3}+\mu\frac{\beta^2}{2}+\rho_3+\frac{\gamma^2}{4\varepsilon_2},\\ \gamma_2 &= -\frac{N_1 b}{2}+3N_2\varepsilon_2+7\varepsilon_3+\frac{3b^2}{4\varepsilon_3}+\frac{b^2}{4\varepsilon_3^3}+\mu\left(b+\frac{1}{2}\right)+\varepsilon_2,\\ \gamma_3 &= \rho_1\left[N_1\varepsilon_1+\frac{2\varepsilon_3}{K}-\mu\right],\\ \gamma_4 &= -\delta,\\ \gamma_5 &= -\rho_2\left(\frac{N_2\gamma}{2}-1-\frac{b}{2\varepsilon_3}+\mu\right)+N_1\left(\rho_2+\frac{\rho_1}{4\varepsilon_1}\right),\\ \gamma_6 &= -\frac{K}{2}+\left(\frac{K^2}{4}+6\right)\varepsilon_3+2\varepsilon_2 N_2+\mu K.\end{aligned}$$

À ce stade, nous devons choisir très soigneusement nos constantes. Tout d'abord, laissez-nous prendre $\mu=\frac{1}{16}$ et et choisissez $\varepsilon_3=\min\left(\frac{\mu K}{4},\frac{1}{2}\frac{7K}{16\left(\frac{k^2}{4}+6\right)}\right)$.

Maintenant, sélectionnez N_1 assez grand pour que

$$\frac{N_1 b}{4} - \left[7\varepsilon_3 + \frac{3b^2}{4\varepsilon_3} + \frac{b^2}{4\varepsilon_3^3} + \mu\left(b + \frac{1}{2}\right)\right] > 0,$$

puis choisir ε_1 si petit que

$$N_1\varepsilon_1 + \frac{2\varepsilon_3}{K} - \mu \leq N_1\varepsilon_1 - \frac{\mu}{2} \leq -\frac{\mu}{4},$$

donc $\varepsilon_1 < \frac{\mu}{4N_1}$. Ensuit nous choisissons N_2 assez grand pour que

$$\rho_2\left(\frac{N_2\gamma}{2} - 1 - \frac{b}{2\varepsilon_3} + \mu\right) - N_1\left(\rho_2 + \frac{\rho_1}{4\varepsilon_1}\right) \geq \frac{\rho_2 N_2\gamma}{4},$$

alors

$$N_2 \geq \frac{4}{\rho_2\gamma}\left[N_1\left(\rho_2 + \frac{\rho_1}{4\varepsilon_1}\right) - \mu + 1 + \frac{b}{2\varepsilon_3}\right].$$

Après, nous choisissons ε_2 si petit que

$$\varepsilon_2 < \min\left(\frac{7K}{64N_2}, \frac{N_1 b}{4\left(3N_2+1\right)}\right).$$

Finalement, nous choisisons N asser grand, pour que (3.3.81) devient:

$$\frac{dL\left(x,t\right)}{dt} \leq -\eta\int_0^1 \left(\theta_t^2 + \theta_{xt}^2 + \psi_x^2 + \psi_t^2 + \phi_t^2 + \left(\phi_x + \psi\right)^2\right)dx, \tag{3.3.82}$$

donc

$$\frac{dL\left(x,t\right)}{dt} \leq -\beta E\left(t\right).$$

d'où le résultat. ■

Preuve de Théorème

On a

$$L = NE + N_1 I_1 + N_2 I_2 + J + \frac{\rho_1\varepsilon_3}{K}\int_0^1 q\phi_t\phi_x dx + \frac{\rho_2 b}{4\varepsilon_3}\int_0^1 q\psi_t\psi_x dx + \mu\kappa + \Theta.$$

Alors

$$\begin{aligned}\left|L - NE\right| &= N_1 I_1 + N_2 I_2 + J + \frac{\varepsilon_3}{K}\int_0^1 \rho_1 q\phi_t\phi_x dx \\ &\quad + \frac{\rho_2 b}{4\varepsilon_3}\int_0^1 q\psi_t\psi_x dx + \mu\kappa + \Theta.\end{aligned}$$

Utilisant (3.3.2) , (3.3.14) , (3.3.25) , (3.3.36) , (3.3.62) , et (3.3.72) , on obtient:

$$\begin{aligned}
|L - NE| &= |N_1\int_0^1 (\rho_2\psi_t\psi + \rho_1\phi_t\omega)\,dx + N_2\rho_2\rho_3\int_0^1\int_0^x \theta_t(t,y)\,dy\psi_t(t,x)\,dx \\
&\quad -N_2\delta\int_0^1 \theta_x\psi dx + \rho_2\int_0^1 \psi_t(\phi_x+\psi)\,dx + \rho_2\int_0^1 \psi_x\phi_t dx \\
&\quad +\frac{\varepsilon_3}{K}\int_0^1 \rho_1 q\phi_t\phi_x dx + \frac{\rho_2 b}{4\varepsilon_3}\int_0^1 q\psi_t\psi_x dx - \mu\rho_1\int_0^1 \phi_t\phi dx \\
&\quad -\mu\rho_2\int_0^1 \psi_t\psi dx + \int_0^1 \left(\rho_3\theta_t\theta + \frac{k}{2}\theta_x^2 + \gamma\psi_x\theta\right) dx|. \qquad (3.3.83)
\end{aligned}$$

Des estimation par l'inégalité de Young et l'inégalité de Sobolev-Poincaré, donne:

$$N_1\rho_2\int_0^1 \psi_t\psi dx \leq N_1C\int_0^1 \psi_t^2 dx,$$

$$N_1\rho_1\int_0^1 \phi_t\omega dx \leq N_1C_1\int_0^1 \phi_t^2 + N_1C_2\int_0^1 \psi_x dx,$$

et

$$N_2\rho_2\rho_3\int_0^1\int_0^x \theta_t(t,y)\,dy\psi_t(t,x)\,dx \leq N_2C_3\int_0^1 \theta_t^2 dx + N_2C_4\int_0^1 \psi_t^2 dx,$$

$$-N_2\delta\int_0^1 \theta_x\psi dx \leq N_2C_5\int_0^1 \theta_x^2 dx + NC_5\int_0^1 \psi_x^2 dx,$$

de même

$$\rho_2\int_0^1 \psi_t(\phi_x+\psi)\,dx \leq \rho_2\varepsilon\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\rho_2}{4\varepsilon}\int_0^1 (\phi_x+\psi)^2\,dx,$$

$$\rho_2\int_0^1 \psi_x\phi_t dx \leq \rho_2\varepsilon_2\int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\rho_2}{4\varepsilon_2}\int_0^1 \phi_t^2 dx,$$

$$\frac{\varepsilon_3}{K}\int_0^1 \rho_1 q\phi_t\phi_x dx \leq K_1\int_0^1 \phi_t^2 dx + K_2\int_0^1 \phi_x^2 dx,$$

$$\frac{\rho_2 b}{4\varepsilon_3}\int_0^1 q\psi_t\psi_x dx \leq K_8\int_0^1 \psi_t^2 dx + K_9\int_0^1 \psi_x^2 dx,$$

aussi

$$-\mu\rho_1\int_0^1 \phi_t\phi dx \leq K_3\int_0^1 \phi_t^2 dx,$$

$$-\mu\rho_2\int_0^1 \psi_t\psi dx \leq K_4\int_0^1 \psi_t^2 dx,$$

finalement

$$\rho_3\int_0^1 \theta_t\theta dx \leq K_5\int_0^1 \theta_t^2 dx,$$

$$\gamma\int_0^1 \psi_x\theta dx \leq K_6\int_0^1 \psi_x^2 dx + K_7\int_0^1 \theta_t^2 dx.$$

Remplaçant les estimations précédents dans (3.3.83) , on obtient:

$$\begin{aligned} |L - NE| &\leq \delta_1\int_0^1 \phi_t^2 dx + \delta_2\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\rho_2}{4\varepsilon}\int_0^1 (\phi_x+\psi)^2 dx + \delta_3\int_0^1 \psi_x^2 dx \\ &\quad +\delta_4\int_0^1 \theta_t^2 dx + N_2C_5\int_0^1 \theta_x^2 dx + K_2\int_0^1 \phi_x^2 dx \\ &\leq \lambda E(t), \end{aligned} \tag{3.3.84}$$

où

$$\begin{aligned} \delta_1 &= N_1C_1 + \frac{\rho_2}{4\varepsilon_2} + K_1 + K_3, \\ \delta_2 &= N_1C + N_2C_4 + \rho_2\varepsilon + K_4 + K_8, \\ \delta_3 &= N_1C_2 + NC_5 + \rho_2\varepsilon_2 + K_6 + K_9, \\ \delta_4 &= N_2C_3 + K_5 + K_7, \end{aligned}$$

et $\lambda \geq 0$. Donc on peut écrire:

$$\beta_1 E(t) \leq L(x,t) \leq \beta_2 E(t). \tag{3.3.85}$$

Cambinant (3.3.79) et (3.3.85) , on trouve

$$\frac{d}{dt}L\left(x,t\right) < -\xi L\left(x,t\right), \tag{3.3.86}$$

où

$$\xi = \frac{\beta}{\beta_2}.$$

Iintègrant (3.3.86) par rapport a t et exploitant (3.3.85) , on obtient :

$$E\left(t\right) \leq CE\left(0\right)e^{-\xi t}.$$

Ceci termine la preuve de théorème.

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons étudié la stabilité exponentielle de l'énergie associé aux système en Thermoélasticité, nous avons étudier le système de Bresse et le système de Timoshenko.

Bibliographie

[1] J. E. Lagnese, G. Leugering et E. J. P. G. Schmidt, Modelling of dynamic networks of thin thermoelastic beams. Math. Meth. in Appl. Sci., Vol. 16(1993), pp.327-358.

[2] Z. Liu ; B. Rao, Energy Decay of the Thermoelastic Bresse System. Z. Angew. Math. Phys. (2008).

[3] G. Lebeau ; E. Zuazua, Decay rates for the three-dimensional linear system of thermoelasticity. Arch. Ration. Mech. Anal. 148 (1999), no. 3, 179-231.

[4] I. Lasiecka, Uniform decay rates for full von KÆrmÆn system of dynamic therémoelasticity with free boundary conditions and partial boundary dissipation. Comm. Partial Di erential Equations 24 (1999), no.9-10, 1801-1847.

[5] Zhiyong Ma. Exponential Stability and Global Attractors for a Thermoelastic Bresse System. Article ID 748789, volume 2010.

[6] Salim A. Messaoudi, Belkacem Said-Houari. Energy decay in a Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III, J. Math. Anal. Appl. 348 (2008) 298–307.

[7] P.G. Ciarlet et J.L. Lion. Analyse fonctionnelle théorie et applications Haim Brezis.