République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Djilali Bounaama Khemis Miliana

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et d'Informatique

Mémoire Présenté par

BENYETTOU CHERIFA

Pour obtenir

LE DIPLOME DE MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Mathématique Appliquées et Traitement du signal

Intitulé

Equations différentielles à second membre discontinu

Soutenu le juin 2016, devant les membres du jury :

Mme. Leila Djouamai	Univ. de Khemis Miliana	Président
Mr. Belkacem Chaouchi	Univ. de Khemis Miliana	Examinateur
Mr. Abderrazak Said	Univ. de Khemis Miliana	Examinateur
Mr. Maamar Benbachir	Univ. de Khemis Miliana	Encadreur
Mr. Omar Benniche	Univ. de Khemis Miliana	Co-Encadreur

Année Universitaire 2015/2016

Résumé

On a recontré au cours de nos études les équations différentielles avec un grand théorème garantissant l'existence de solution sous l'hypothèse : continuité du second membre. Que se passe -t-il si le second membre est discontinu? Dans ce travail on expose la méthode de Phillipov.

Abstract

We Stand face during our studies differential equations with a great theorem which guarantees the existence of solution under the assumption: continuity of the second member. What happens if the second member is discontinuous? In this work we present the method of Phillipov.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien Moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est Toujours sacrifié pour me voir réussir, que dieu te garde Dans son vaste paradis

A toi Mon père

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, ma vie et mon bonheur

Maman que j'adore

*A tous mes chers **enseignants** qui ont enseigné moi.*
*A mes adorables **soeurs** et mes chers **frères**.*
*A toutes mes **collègues** de la promotion 2015-2016.*
Et à tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin
Pour que ce projet soit possible, je vous dis merci.

BENYETTOU Cherifa

Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier Allah pour tout ce que m'a été donné de force, courage *et surtout de connaissances.*

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont participé de prés ou de loin, directement ou indirectement à la réalisation de ce travail.

Toute ma Gratitude à mes encadreurs.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Monsieur SAID Abderrezak pour son aide et son soutien.

Je veux remercier également les membres du jury d'avoir accepter l'évaluation de mon travail.

Je souhaite aussi dire un grand merci à tous mes amies et amis Dounia, Karima, Nacera, Zahia, Zahra, Hanan, Djamel, Karim, Mohamed, Hamza.

Merci

Table des matières

Préambule

Le développement de la théorie des équations différentielles avec second membre discontinu est une branche trés importante de la mécanique, génie électrique, et la théorie de contrôle automatique.

Dans ce travail, nous nous intéressons aux équations différentielles à second membre discontinu.

Notre travail se compose de cinq chapitres :

On commence tout d'abord au premier chapitre par donner quelques définitions de base .

Le deuxième chapitre est consacré aux équations différentielles à second membre continue, en particulier l'existence et l'unicité de la solution de quelques types du problème de Cauchy.

Dans le troisième chapitre, nous allons introduire une étude sur l'analyse multivoque.

Dans le quatrième chapitre nous étudierons l'existence d'une solution de l'inclusion différentielle.

Dans le dernier chapitre nous discuterons les équations différentielles à second membre discontinu. Ce chapitre est subdivisé en deux sections, dans la première où le second membre discontinue par rapport à t, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution au sens de Carathéodory. Et dans l'autre section nous introduisons les solutions au sens de Filippov pour les équations différentielle à seconde membre discontinu en x .

Chapitre 1

Préliminaires

Sommaire

Dans ce chapitre, on reprend toutes les notions, définitions et résultats nécessaires pour la suite de notre travail.

1.1 Notations

Dans toute la suite nous utiliserons les notations suivantes :

▶ $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.

▶ $\mathbb{R}^n$: espace euclidien de dimension n.

▶ $\|.\|$: la norme euclidienne.

▶ Ω : est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.

▶ D : Domaine du définition de f.

▶ $I = [0, T]$: est un interval dans $\mathbb{R}$ avec $T > 0$.

▶ $B(0, 1)$: la boule unité de centre 0 et de rayon 1.

▶ $co(A)$: l'enveloppe convexe de A.

▶ $\overline{co}(A)$: plut petit ensemble convexe fermée contien A.

▶ $AC\left(I, \mathbb{R}^n\right)$: l'espace des fonctions absolument continues sur I dans $\mathbb{R}^n$.

▶ $C(I, \mathbb{R})$: l'espace des fonctions continues sur I dans $\mathbb{R}$.

▶ $C^k(I, \mathbb{R})$: l'espace des fonctions continues de classe k de I dans $\mathbb{R}$.

▶ $L^1\left(I, \mathbb{R}\right)$: l'espace des fonctions $x : I \to \mathbb{R}$ Lebesgue intégrables.

▶ $L^1_{loc}\left(I, \mathbb{R}\right)$: l'espace des fonctions localement intégrables.

▶ $P(X) = 2^X$: Tout patrie de X.

▶ X, Y deux ensembles non vides.

▶ $\forall$ quantificateur universel.

▶ $\exists$ quantificateur existenciel.

1.2 Abréviations

▶ EDO : équation différentielle ordinaire.

▶ (PC) : Problème de Cauchy.

▶ $s.c.i$: semi continue inférieurement.

▶ $s.c.s$: semi continue supérieurement.

▶ ssi : si et seulement si.

▶ $i.e$: c'est à dire.

▶ PP : Qui veut dire presque partout.

1.3 Définitions et propriétés

Définition 1 *(**Èquicontinue**) Un ensemble $X \subset C([0,T], \mathbb{R}^n)$ est dite équicontinue si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $|x(t_2) - x(t_1)| < \varepsilon$ pour tout $x(\cdot) \in X$, et pour tout $t_1, t_2 \in [0,T]$ et $|t_2 - t_1| < \delta$.*

• *F est équicontinue si elle est équicontinue en tout point de X.*

Définition 2 *(**Ensemble convexe**) Soient X un espace vectoriel réel, C un sous-ensemble de*

X, on dit que C est un ensemble convexe si

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1], \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in C.$$

Définition 3 *(**Enveloppe convexe**) Soit C une partie de X. L'enveloppe convexe de C est l'intersection de toutes les parties convexes de X qui contiennent C, qui est le plus petit convexe contenant C. On le note par $co(C)$ et par $\overline{co}(C)$ de C est le plus petit ensemble fermé convexe contenant C.*

Théorème 1 *(**Valeur moyenne**) Soient $]a, b[$ un interval, $v \in L^1_{loc}(]a, b[\,, X)$ à valeurs dans un sous-ensemble $C \subset X$. Pour tout t_0, t_1 dans $]a, b[$, on a*

$$\int_{t_0}^{t_1} v(s)ds \in (t_1 - t_0)\overline{co}(C).$$

Définition 4 *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un ensemble non vide $A \subset \mathbb{R}$. Une fonction f est dite semi-continue inférieurement (resp.supérieurement) en $x_0 \in A$, si pour tout $\varepsilon > 0$,il existe un voisinage $V(x_0)$tel que $\forall x \in V(x_0)$, $f(x) - f(x_0) \geq \varepsilon$ (resp. $f(x) - f(x_0) \leq \varepsilon$).*

Exemple 1 *Soit la fonction f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & si\ x \neq 0 \\ 1 \quad si & x = 0 \end{cases}$$

f est semi-continue supérieurement (mais n'admet pas de limite à gauche ni à droite en 0). Soit $x_0 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$f(x) \leq f(x_0) = 1$$

car

$$\sin(\frac{1}{x}) \leq 1$$

donc f est semi-continue supérieurement

Théorème 2 *(**Arzelà-Ascoli**) Soit $X \subset C(I, \mathbb{R}^n)$. Si X est bornée et équicontinue, alors de toute suite d'élement dans X on peut extraire une sous suite convergeant uniformément sur I vers une fonction continue.*

En particulier, ce théorème implique qu'un ensemble X borné de fonctions absolument continues telle que $|x'(t)| \leq b$ pour tout $x(.) \in X$ contient une sous suite converge uniformément.

Lemme 1 ***(Gronwall)***. *Soient I un intervalle et $t_0 \in I$. Soient α, β et f dans $C(I, \mathbb{R}_+)$. Supposons que*

$$f(t) \leq \alpha(t) + \left| \int_{t_0}^{t} \beta(s) f(s) ds \right|, \qquad \forall t \in I.$$

Alors

$$f(t) \leq \alpha(t) + \left| \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\left| \int_{s}^{t} \beta(\sigma) d\sigma \right| \right) ds \right|, \qquad \forall t \in I.$$

Corollaire 1 *Soient $f \in C(I, \mathbb{R}_+), \alpha$ et $\beta > 0, t_0 \in I$. Supposons que*

$$f(t) \leq \alpha + \beta \left| \int_{t_0}^{t} f(s) ds \right|, \qquad \forall t \in I.$$

Alors

$$f(t) \leq \alpha \exp(\beta \left| t - t_0 \right|), \qquad \forall t \in I.$$

Chapitre 2

Revisite des équations differentielles ordinaires

Sommaire

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions, propriétés et résultats fondamentaux sur les équations différentielles ordinaires.

Soit $I \subset \mathbb{R}$ et Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, soit$f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction, soit $(t_0,x_0) \in I \times \Omega$.

2.1 Equations différentielles du premier ordre

Définition 5 *Soit* $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *une fonction continue. On appelle équation différentielle ordinaire du premier ordre une équation de la forme*

$$x' = f(t, x) \tag{2.1}$$

Définition 6 *(* ***Solution*** *) Soit* J *un sous intervalle de* I*, on dit que* $x : J \subset I \to \mathbb{R}^n$ *est une solution locale de (2.1) si :*
(i) $\forall t \in J : x(t) \in \Omega.$
(ii) $\forall t \in J : x'(t) = f(t, x(t)).$

Dans le cas où $I = J$ en dit que x est une solution globale de (2.1).

2.2 Equation différentielle d'ordre superieur à un

De maniére plus générale, une équation différentielle peut aussi comprendre des dérivées d'ordre supérieur de la fonction inconnue.

Définition 7 *Soient* $n \geq 1$, $g : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *une fonction continue. On appelle équation différentielle ordinaire d'ordre* n *une équation du type*

$$x^{(n)} = g(t, x, x', ..., x^{(n-1)}). \tag{2.2}$$

Définition 8 *Une solution locale de l'équation (2.2) est une fonction* $v \in C^n(J, \mathbb{R})$*, où* $J \subset I$*, qui satisfait aux conditions :*
(i) $\forall t \in J : (t, v(t), ..., v^{(n-1)}(t)) \in \Omega,$
(ii) $\forall t \in J : v^{(n)}(t) = f(t, v(t), ..., v^{(n-1)}(t)).$

L'étude d'une équation d'ordre n peut toujours être ramenée à celle d'un systéme de n équations scalaires du premier ordre, soit:

l'EDO d'ordre n $(n \geq 2)$ suivante : $f(t, x, x', ..., x^{(n)}) = 0.$

En faisant le changement de fonctions

$$\begin{cases} z = (z_1, z_2, ..., z_n) = (x, x', ..., x^{(n-1)}), \\ g(t, z) = (z_2, ..., z_n, f(t, z_1, z_2, ..., z_n)). \end{cases}$$

On se ramène alors à une équation différentielle d'ordre un avec n inconnues

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1}' = z_n \\ f(t, z_1, z_2, ..., z_n, z_n') = 0. \end{cases}$$

2.3 Problème de Cauchy

Définition 9 *On appelle problème de Cauchy le problème suivant: Étant donné*
- I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.
- Une fonction définie et continue sur $I \times \Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} f: \quad I \times \Omega &\to \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto f(t, x). \end{aligned}$$

Trouver une fonction $x \in \mathcal{C}^1$ telle que

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & \forall t \in I, \forall x \in \Omega \\ x(t_0) = x_0 & t_0 \in I \quad \text{condition initiale} \end{cases} \tag{2.3}$$

Par la donné d'une condition dite condition de Cauchy, ou condition initiale.

Exemple 2 *On considère le problème de Cauchy suivant:*

$$\begin{cases} x'(t) = -2tx(t)^2 \quad t \in I = \mathbb{R} \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Ce problème admet une solution globale et une seule solution dans $\mathbb{R}$, telle que $x(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

Remarque 1 *1-Dans le cas où f est continue alors toute solution du problème de Cauchy (2.3) est continuement différentiable sur I.*
2- Si f est de classe $C^k(I, \mathbb{R})$ alors la solution du problème de Cauchy (2.3) est de classe $C^{k+1}(I, \mathbb{R})$.

Exemple 3 *Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t, x) = -x^2(t)$. On vérifie aisement que la fonction $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $x(t) = (1+t)^{-1}$ est une solution de problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) = -x^2(t) \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Le probléme de Cauchy peut se mettre sous une forme équivalente donnée par le théorème suivant :

Théorème 3 *(**forme intégrale**) Une fonction $x : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ est une solution au problème (2.3) si et seulement si :*
1- La fonction x est continue et $\forall t \in I$, $(t, x(t)) \in I \times \Omega$.
2-

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \qquad \forall t \in I \tag{2.4}$$

Preuve. (1) La fonction x est continue puisqu'elle est une solution de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$. En intégrant cette équation, on obtient

$$\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \;= \int_{t_0}^{t} x'(s)ds = x(t) - x_0,\ \forall t \in I.$$

(2) La fonction x' étant continue, il en va de même pour la fonction composée $t \mapsto f(t, x(t))$. Le second membre de (2.4) est dérivable, donc le premier l'est aussi. Par dérivation de (2.4), on obtient

$$x'(t) = f(t, x(t)) \qquad \forall t \in I$$

La fonction x est donc continûment dérivable; de plus $x(t_0) = x_0$. ■

Exemple 4 *Considérons le problème de Cauchy : trouver $v \in C^2(I, \mathbb{R})$, avec $0 \in I$, qui vérifie*

$$\begin{cases} v''(t) = 1, & t \in I \\ v(0) = 3, v'(0) = 1. \end{cases}$$

Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $f(t, x_1, x_2) = 1$ et la condition initiale est $(t_0, x_0, x_0') = (0, 3, 1)$. Mettons ce problème sous forme normale. Définissons $u_1 = v$ et $u_2 = v'$. Alors $u = (u_1, u_2)$ doit vérifier

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t), & t \in I \\ u_2'(t) = 1, & \\ u_1(0) = 3, \quad u_2(0) = 1. & \end{cases}$$

La forme intégrée est

$$\begin{cases} u_1(t) = 3 + \int_0^t u_2(s)ds \\ \qquad u_2(t) = 1 + t. \end{cases}$$

D'où la solution (unique) : $u(t) = (3 + t + \frac{1}{2}t^2, 1 + t)$, pour le problème sous forme normale, et $v(t) = 3 + t + \frac{1}{2}t^2$, pour le problème du deuxième ordre.

2.4 Théorème d'existence et d'unicité de solution

2.4.1 Théorème d'existence de Peano

Théorème 4 *(**Peano**)*[1] *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, il existe un intervalle $J = [t_0, t_0 + \delta]$, $\delta > 0$, et une solution $x : J \subset I \to \mathbb{R}^n$ de problème de Cauchy (2.1).*

L'exemple suivant nous montre que la solution d'une EDO n'est pas toujours unique.

Exemple 5 *Soit le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) = 3x^{2/3}(t) \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

On vérifie aisement que le problème ci dessus admet deux solutions: $x_1(t) = 0$ *et* $x_2(t) = t^3$.

2.4.2 Théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz

Pour étudier l'unicité de la solution on passe à la définition et le théorème suivant

Définition 10 *Soit Ω un ouvert $\mathbb{R}^n$. Une fonction $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ est lipschitziennes par rapport à x s'il existe une constante réelle $L > 0$ telle que*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L \|x - y\|, \qquad \forall (t,x), (t,y) \in I \times \Omega.$$

Définition 11 *Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ est dite localement lipchitzienne par rapport à la seconde variable si sur chaque compact K il existe un réel L strictement positif tel que f est lipchitzienne sur Ω.*

Les propositions suivantes sont trés utile.

Proposition 1 *Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction lipschitzienne par rapport à x. Alors f est uniformément continue par rapport à x.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire, définissons $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$, où l est la constante de Lipschitz. Alors, pour tout (t,x) et tout (t,y) dans Ω, avec $\|x - y\| \leq \delta$, on a

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq l\delta = \varepsilon.$$

■

[1] Peano a démontré ce théorème en 1890.

Proposition 2 *Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction possédant des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ continues, pour $1 \leq i \leq n$. Alors f est lipschitzienne par rapport à x si et seulement si ces dérivées sont bornées.*

L'exemple suivant nous montre que une fonction peut être lipschitizienne par rapport à x méme si ses dérivées partielles par rapport à x ne sont pas définies.

Exemple 6 *Soit $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par: $f(t,x) = |x|$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'existe pas en $x = 0$, mais la constante de Lipschitz est égale à 1.*
On a

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &= ||x| - |y|| \\ &\leq |x - y| \end{aligned}$$

mais $f(t,x) = |x|$ n'est pas de classe C^1.

Le Théorème de Cauchy-Lipschitz affirme l'existence et l'unicité de solution de probléme de Cauchy.

Théorème 5 *(*Cauchy-Lipschitz *) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport a x, alors pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in I \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

admet une soluion unique.

Preuve. *On suppose que le problème de cauchy admet deux solutions différentes φ, ψ définit respectivement sur I_1 et I_2. Comme f est localement lipchitzienne et K est un compact dans $I \times \Omega$ contenue (t_0, x_0) alors il existe $l > 0$ tel que*

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - \psi(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s)) ds \right| \\ &\leq \left| l \int_{t_0}^{t} \|\varphi(s) - \psi(s)\| \, ds \right|. \end{aligned}$$

On applique le corollaire (1) (Gronwal) à $f(t) = \|\varphi(t) - \psi(t)\|$ et $\alpha = 0, \beta = l$ on déduit que $\|\varphi(t) - \psi(t)\| = 0$ $\forall t \in I$,d'où l'unicité. ■

Exemple 7 *On considère le problème de Cauchy suivant*

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Comme le second membre de l'équation est lipschitzienne par rapport à x et continue par rapport à t, alors le problème de Cauchy admet unique solution $x(t) = e^t - 1$.

2.5 Dépendance des solutions par rapport aux données

2.5.1 Dépendance continue des solutions par rapport aux conditions initiales

Si le problème de Cauchy (2.3 possède une solution unique pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, on peut considérer cette solution comme une fonction de la condition initiale. A chaque $(t_0,x_0) \in I \times \Omega$ correspond un intervalle maximal $I' = I(t_0, x_0)$ (dépendant de (t_0, x_0)), et une solution $u : D \to \mathbb{R}^n$, $(t, t_0, x_0) \mapsto u(t, t_0, x_0)$, où:

$$D = \left\{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n : (t_0, x_0) \in I \times \Omega, t \in I'\right\}. \tag{2.5}$$

Autrement dit, u vérifie:

$$\begin{cases} u'(t, t_0, x_0) = f(t, u(t, t_0, x_0)), & t \in I' \\ u(t_0, t_0, x_0) = x_0. \end{cases}$$

Nous supposerons que f est une fonction localement lipschitzienne par rapport à x, ce qui garantit l'unicité de la solution. Nous savons déjà que :

$$u(\cdot, t_0, x_0) : I' \longmapsto \mathbb{R}^n, \; t \longmapsto u(t, t_0, x_0)$$

est une fonction continue (même de classe C^1). Nous allons montrer que u est une fonction continue sur l'ouvert D.

Proposition 3 *Soient Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$ et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, une fonction lipschitzienne par rapport à x et continue. Soient (t_0, x_0), (t_0, x_0') dans $I \times \Omega$. Soient $u(., t_0, x_0) : I \to \mathbb{R}^n$ et $v(., t_0, x_0') : J \to \mathbb{R}^n$ les deux solutions du problème de Cauchy (2.3), relatif aux conditions initiales (t_0, x_0), respectivement (t_0, x_0'). Alors, pour tout $t \in I \cap J$:*

$$\|u(t, t_0, x_0) - u(t, t_0, x_0')\| \leq \|x_0 - x_0'\| \exp(L\,|t - t_0|),$$

où L est la constante de Lipschitz.

Preuve. Posons $u(t) = u(t, t_0, x_0)$ et $v(t) = u(t, t_0, x_0')$. Pour tout $t \in I \cap J$:

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &\leq \|x_0 - x_0'\| + \left\| \int_{t_0}^{t} (f(s, u(s)) - f(s, v(s)))ds \right\| \\ &\leq \|x_0 - x_0'\| + L \int_{t_0}^{t} \|u(s) - v(s)\|\, ds. \end{aligned}$$

Grâce au corollaire (1) de Gronwall :

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|x_0 - x_0'\| \exp(L\,|t - t_0|).$$

■

Proposition 4 *Soient Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$ et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, une fonction lipschitzienne par rapport à x, continue et bornée. Soient (t_0, x_0) et (t_0', x_0') dans $I \times \Omega$. Soient $u(\cdot, t_0, x_0) : I \to \mathbb{R}^n$ et $u(\cdot, t_0', x_0') : J \to \mathbb{R}^n$ deux solutions du problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, relatif aux conditions initiales (t_0, x_0), respectivement (t_0', x_0'). Supposons qu'il existe un intervalle $[t_1, t_2]$ contenant t_0', sur lequel $u(\cdot, t_0, x_0)$ et $u(\cdot, t_0', x_0')$ sont définies. Alors, pour tout $t \in [t_1, t_2]$:*

$$\|u(t, t_0, x_0) - u(t, t_0', x_0')\| \leq (\|x_0 - x_0'\| + M\,|t_0 - t_0'|) \exp(L\,|t_0 - t_0'|), \tag{2.6}$$

où L est la constante de Lipschitz et $M = \sup \|f(t, x)\|$.

Preuve. Posons $u(t) = u(t, t_0, x_0)$ et $v(t) = u(t, t_0', x_0')$. Constatons que

$$\begin{aligned} \|u(t_0') - x_0'\| &\leq \|u(t_0') - x_0\| + \|x_0 - x_0'\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^{t_0'} f(s, u(s))ds \right\| + \|x_0 - x_0'\| \leq M\,|t_0 - t_0'| + \|x_0 - x_0'\|. \end{aligned}$$

Alors, pour tout $t \in [t_1, t_2]$:

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &= \left\| u(t_0') + \int_{t_0'}^{t} (f(s, u(s))ds - x_0' - \int_{t_0'}^{t} (f(s, v(s))ds \right\| \\ &\leq \|u(t_0') - x_0'\| + L \left| \int_{t_0'}^{t} \|u(s) - v(s)\|\, ds \right| \end{aligned}$$

Grâce au corollaire de Gronwall :

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|u(t, t_0, x_0) - u(t, t_0', x_0')\| \leq (\|x_0 - x_0'\| + M\,|t_0 - t_0'|) \exp(L\,|t_0 - t_0'|).$$

■

Théorème 6 *Soient Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$ et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, une fonction localement lipschitzienne par rapport à x et continue. Alors la solution de l'équation $x' = f(t, x)$:*

$$\begin{gathered} x : D \to \mathbb{R}^n, \\ (t, t_0, x_0) \to u(t, t_0, x_0) \end{gathered}$$

est une fonction continue, avec

$$D = \left\{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+2} : (t_0, x_0) \in I \times \Omega, \quad t \in I(t_0, x_0)\right\}.$$

2.5.2 Continuité par rapport aux paramètres

Supposons que l'équation différentielle dépende aussi d'un paramétre λ dans $\mathbb{R}^m$. La fonction f est alors de la forme

$$f : I \times \Omega' \to \mathbb{R}^n, \qquad (t, x, \lambda) \to f(t, x, \lambda)$$

où Ω' est un domaine de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. On note l'équation différentielle

$$x' = f(t, x, \lambda)$$

et sa solution, exprimée en fonction de la condition initiale et du paramètre,

$$u : D' \to \mathbb{R}^n, \qquad (t, t_0, x_0, \lambda) \to u(t, t_0, x_0, \lambda)$$

où l'ensemble D' est défini par

$$D' = \left\{(t, t_0, x_0, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : (t_0, x_0, \lambda) \in I \times \Omega', \quad t \in I(t_0, x_0, \lambda)\right\}$$

On suppose l'unicité de la solution pour tout (t_0, x_0, λ).

Théorème 7 *Soit $f : \Omega' \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à (x, λ). Alors, la solution $u : (t, t_0, x_0, \lambda) \to u(t, t_0, x_0, \lambda)$ est une focntion continue.*

Preuve. L'équation du premiere ordre

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ \lambda' = 0. \end{cases}$$

est localement lipschitizienne par raport à (λ, x) et continue dans Ω'. Le résultat découle du théorème (6). ■

Chapitre 3

Analyse multivoque

Sommaire

Dans ce chapitre, on introduit des notations, définitions et des lemmes concernant l'analyse multivoque. Pour plus de détails sur l'analyse multivoques voir les références [3, 6, 7].

3.1 Application multivoque

Définition 12 *Soient X, Y deux ensembles non vides, on appelle multivoque toute application définie sur X et à valeurs dans 2^Y. Dans la suite on note une application multivoque $F : X \to 2^Y$* [(1)] *par $F : X \rightsquigarrow Y$.*

3.2 Continuité des applications multivoques

Soient X, Y deux espaces normés.

On rapelle que si $F : X \to Y$ une fonction continue en x_0 alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : \|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|F(x) - F(x_0)\| \leq \varepsilon.$$

[(1)] On rapelle que $2^X = P(X)$

D'une maniére équivalente

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : \|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow F(x) \in F(x_0) + \varepsilon B.$$

où $B = B(0,1)$. Les définitions suivantes généralisent la notion de continuité dans le cas où F est une multivoque, plus précisement on a

Définition 13 • *On dit que $F : X \rightsquigarrow Y$ est $(\varepsilon - \delta)$ semi-continue supérieurement (s.c.s) en x_0 si:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : \|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon B.$$

• *f est $(\varepsilon - \delta)$ semi-continue inférieurement (s.c.i) en x_0 si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : \ \|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon B.$$

• *f est continue en x_0 si elle est $(\varepsilon - \delta)$ semi-continue supérieurement et $(\varepsilon - \delta)$ semi-continue inférieurement en x_0.*

Exemple 8 *Soit $F_1 : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ définie par :*

$$F_1(x) = \begin{cases} [-1,1] & si\ x = 0 \\ \{0\} & si\ x \neq 0 \end{cases}$$

est $(\varepsilon - \delta)$ semi-continue supérieurement en $x_0 = 0$.
On a $x_0 = 0$, alors $F(x_0) = [-1,1]$.
Si $x = 0$, $F(x) = [-1,1]$ on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x : \|x\| < \delta \Rightarrow [-1,1] \subset [-1,1] + \varepsilon B$$

d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x : \|x\| < \delta \Rightarrow F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon B$$

Si $x \neq 0, F(x) = \{0\}$ on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x : \|x\| < \delta \Rightarrow \{0\} \subset [-1,1] + \varepsilon B$$

d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x : \|x\| < \delta \Rightarrow F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon B$$

Donc F est $(\varepsilon - \delta)$ semi-continue supérieurement en $x_0 = 0$.

Exemple 9 *Soit* $F_2 : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ *définie par :*

$$F_2(x) = \begin{cases} \{0\} & si\ x = 0 \\ [-1,1] & si\ x \neq 0 \end{cases}$$

est $(\varepsilon - \delta)$ *semi-continue inférieurement en* $x_0 = 0$.
On a $x_0 = 0$, *alors* $F(x_0) = \{0\}$
Si $x = 0$, $F(x) = \{0\}$ *on a*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x : \|x\| < \delta \Rightarrow \{0\} \subset \{0\} + \varepsilon B$$

d'où

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x : \|x\| < \delta \Rightarrow F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon B$$

Si $x \neq 0, F(x) = [-1,1]$ *on a*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x : \|x\| < \delta \Rightarrow \{0\} \subset [-1,1] + \varepsilon B$$

d'où

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x : \|x\| < \delta \Rightarrow F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon B$$

Donc F *est* $(\varepsilon - \delta)$ *semi-continue inférieurement en* $x_0 = 0$.

Nous allons maintenant donner une définition plus générale sur la continuité d'une application multivoque.

Définition 14 *Soit* $(X, \|.\|)$ *un espace de Banach et* $F : X \to 2^X$ *une multivoque :*
i) F *est semi-continue supérieurement* $(s.c.s)$ *en* x_0 *si pour tout ouvert* W *contenant* $F(x_0)$, *il existe un voisinage ouvert* $V(x_0)$*dans* X *tel que pour tout* $x \in V(x_0)$ *on a* $F(x) \subset W$.
ii) F *est semi-continue inférieurement* $(s.c.i)$ *si l'ensemble* $\{x \in X : F(x) \cap C \neq \emptyset\}$ *est ouvert pour tout ensemble ouvert* C *dans* X.
iii) F *est continue si elle est semi-continue supérieurement et inférieurement.*

Exemple 10 *Soit la multivoque suivante :*$F_2 : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$,

$$F_2(x) = \begin{cases} \{0\} & si\ x = 0 \\ [-1,1] & si\ x \neq 0 \end{cases}$$

est s.c.i en $x = 0$, *et n'est pas s.c.s en* $x = 0$.
1) Soit $x_0 = 0$, *on prend* $W =]-1,1[$ *tel que* $F_2(x_0) \subset W$, $\exists V(x_0) =]-2,2[\ : \forall x \in V(x_0)$ *on a*

$$F_2(]-2,2[) = [-1,1] \subsetneq]-1,1[$$

donc F_2 *n'est pas s.c.s en* $x = 0$.
2) On a pour tout ouvert $C \subset \mathbb{R}$ *tel que* $\{F_2(x) \cap C \neq \emptyset\}$ *est ouvert car*

$$\{F_2(x) \cap C\} = F_2(x) = \{0\}$$

donc F_2 *est s.c.i en* $x = 0$.

3.3 Sélection

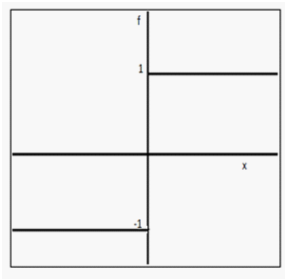
Définition 15 *Soit $F : X \rightsquigarrow Y$, on dit que $f : X \to Y$ est une sélection de F si $\forall x \in X$: $f(x) \in F(x)$.*

D'après l'axiome du choix l'existence des sélections est toujours assuré. Le problème se pose dans l'existence des sélections continues.

Soit $F : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ une multivoque semi continue superieurement en $x = 0$ définit par

$$F(x) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } x < 0 \\ [-1, 1] & \text{si } x = 0 \\ \{-1\} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

si $x < 0$, $f(x) \in F(x) = -1$, si $x > 0$, $f(x) \in F(x) = 1$ et si $x = 0, f(x) \in [-1, 1]$, soit le graphe de f :



On remarqons que F n'admet pas des sélections continue.

Définition 16 *Un espace metrique X est dit précompact si, pour tout nombre réel strictement positif ε, il existe une partie finie P de X telle que les boules ouvertes de rayon ε dont le centre appartient à P recouvrent X.*

Proposition 5 *Si $F : X \rightsquigarrow Y$ est semi-continue inférieurement et soit $G : X \rightsquigarrow Y$ une multivoque avec graphe ouvert, pour tout $x \in X$, $(F \cap G)(x) = F(x) \cap G(x) \neq \emptyset$, puis $(F \cap G)$ est semi continue inférieurement.*

Le théorème suivant nous donne des conditions suffisante pour l'existence des sélections continue.

Théorème 8 ***(sélection de Micheal)*** *Soient X est un espace précompact, Y un espace de Banach, alors, toute multivoque semi-continue inférieurement $F : X \rightsquigarrow Y$ possède une « sélection » continue, c'est-à-dire qu'il existe une application continue $f : X \to Y$ telle que pour tout x de X, $f(x) \in F(x)$.*[1]

[1] Ernest Michael a démontré ce théorème en 1956.

3.3.1 Intégral d'Aumane

Définition 17 *Soit Y un espace de Banach et $X \subset \mathbb{R}$. Une multivoque $F : X \rightsquigarrow Y$ est mesurable, si pour tout ensemble ouvert $O \subset Y$ l'image inverse de O, i.e., $F^{-1}(O) = \{t \in X, F(x) \cap O \neq$ est mesurable.*

Théorème 9 *Soit Y un espace de Banach séparable. Supposons que $F : X \rightsquigarrow Y$ est une multivoque mesurable avec des valeurs non vides et fermées. Alors F admet au moins une sélection mesurable.*

Remarque 2 *On note que si F est intégrable bornée, i.e.,*

$$F(t) \subset l(t)B, \text{ p.p pour tout } t \in X,$$

pour un certain $l \in L^1(X, \mathbb{R}^+)$, Alors chaque sélection mesurable de F est intégrable, grâce au théorème de Lebesgue.

Définition 18 *Soit Y un espace de Banach et $F : X \rightsquigarrow Y$ une multivoque. L'intégrale d'Aumane de F sur $M \subset X$ est l'ensemble des intégrales des sélections intégrables de F sur M, i.e*

$$\int_M F ds = \left\{ \int_M f ds : f(x) \in \ \widetilde{F} \right\},$$

avec $\widetilde{F} = \{f \in L^1(X, Y) : f(x) \in F(x), \text{ p.p } t \in M\}$.

Lemme 2 *Soit F une application multivoque semi continue supérieurement de $I \times X$ dans le sous-ensemble convexe, compact X. La fonction continue $x(.)$ est une solution de*

$$x'(t) \in F(x(t)) \tag{3.1}$$

si et seulement si, pour chaque paire (t_1, t_2) on a :

$$x(t_2) \in x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} F(x(t))dt. \tag{3.2}$$

Preuve. *1- si $x(.)$ est une solution de (3.1) sur I, sa dérivée est une sélection mesurable de $F(x(s))$, on a :*

$$\int_{t_1}^{t_2} x'(t)dt \in \int_{t_1}^{t_2} F(t, x)dt$$

$$x(t_2) \in x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} F(t, x)dt$$

d'où (3.2) est satisfaite.

2- Pour prouver le contraire, on remarque d'abord que pour un ensemble convexe fermé,

$$\int_{t_1}^{t_2} Ads = (t_2 - t_1)\, A. \tag{3.3}$$

En fait, $(t_2 - t_1)\, A \subset \int_{t_1}^{t_2} Ads$. *Soit* $z \in \int_{t_1}^{t_2} Ads$, *i.e* $z = \int_{t_1}^{t_2} g(s)ds$, $g(.)$ *mesurable avec des valeurs dans* A. *Par la théorème de la valeur moyenne, on a*

$$z = (t_2 - t_1)\, g, \;\; g \in \overline{\text{co}}\left\{g(s) : t_1 \leq s \leq t_1\right\},$$

i.e $z \in (t_2 - t_1)\, A$, *démontrons (3.1). On suppose que (3.2) est satisfaite. Puis* $\|x(t_2) - x(t_1)\| \leq \|F\|\, |t_2 - t_1|$ *c'est à dire* x *est Lipschitizien, par conséquent* x *est différentiable p.p Soit* t *un point où* $x'(t)$ *existe. Fixons* $\varepsilon > 0$, *soit* $\delta > 0$ *tel que*

$$|t - t'| \leq \delta \Rightarrow F(x(t')) \subset F(x(t)) + \varepsilon B.$$

Puis

$$\begin{aligned} x(t_1) - x(t) &\in \int_t^{t_1} F(s, x(s))ds \\ &\subset \int_t^{t_1} (F(x(t)) + \varepsilon B)ds = (t_1 - t)\,(F(x(t) + \varepsilon B)\,, \end{aligned}$$

i.e.

$$x'(t) \in F(x(t)) + \varepsilon B.$$

ε *étant arbitraire et* $F(x)$ *est fermée, alors* $x'(t) \in F(x(t))$. ∎

Chapitre 4

Les inclusions différentielles autonome

Sommaire

Dans ce chapitre nous allons étudier l'existence de solution du problème suivant

$$\begin{cases} x'(t) \in F(x(t)), t \in I = [0, T] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

où $F : X \rightsquigarrow Y$ une multivoque.

4.1 Définition et Propriétés

Motivation

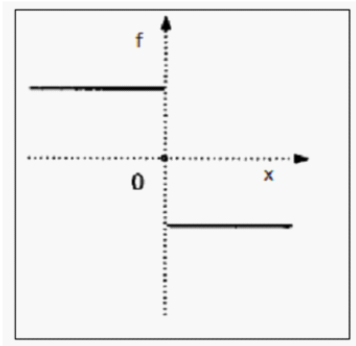
Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x < 0 \\ -1, \text{ si } x \geq 0. \end{cases}$$

on a le graphe de f :



f n'est pas continue en 0.

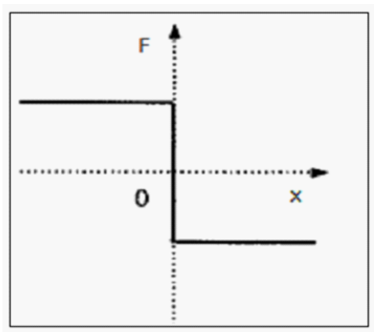
Soit l'inclusion différentielle suivante :

$$\begin{cases} x'(t) \in F(x(t)) \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

où $F : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ définie par :

$$F(x) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } x < 0 \\ [-1, 1] & \text{si } x = 0 \\ \{-1\} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

on a le graphe de F :



Définition 19 *Une inclusion différentielle est une relation ensembliste de la forme*

$$\begin{cases} x' \in F(x(t)), & t \in I \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{4.1}$$

où $F : I \times \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ une multivoque.

4.2 Existence de solutions

Dans cette section on énnonce quelques résultats concernat l'existence de solution pour les inclusions différentielle.

Une notion qui est primordial dans l'étude d'existence de solution de probléme (4.1) est la notion d'une fonction absolument continue.

Définition 20 *Soit $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application. On dit que x est absolument continue si pour tous les intervalles $]\alpha_1, \beta_1[, ...,]\alpha_n, \beta_n[$ disjoints inclus dans $[a,b]$, on a:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \alpha_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |x(\beta_k) - x(\alpha_k)| < \varepsilon.$$

Nous avons la caractérisation suivante de la continuité absolue

x est absolument continue sur l'intervalle $[a,b]$ si et seulement s'il existe une fonction intégrable (au sens de Lebesgue) sur l'inetrvalle $[a,b]$ telle que pour tout $t \in [a,b]$

$$x(t) - x(a) = \int_a^t x'(s)ds.$$

Autrement dit, x est absolument continue si et seulement s'il existe une fonction x' (Lebesgue intégrable) qui soit presque partout égale à la dérivée de x.

Proposition 6 *1- Une fonction absolument continue est à variation bornée.*
2- Toute fonction lipschitzienne est absolument continue

Définition 21 *Une solution $x(t)$ du problème (4.1) est une fonction absolument continue, c'est-à-dire une fonction à dérivée Lebesgue intégrable, satisfait la relation :*

$$x(t_1) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} x'(t)dt, \text{ avec } (t_1, t_0) \in I.$$

Théorème 10 *Soit la multifonction $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ semi-continue supérieurement, fermé, convexe et bornée alors pour chaque $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une fonction absolument continue $x(t)$ définie sur I est solution de $x' \in F(x(t))$ avec $x(t_0) = x_0$.*

Exemple 11 *Soit l'inclusion différentielle suivante :*

$$y' + 2y \in \begin{cases} 2 & ,0 \le t < 1 \\ 1, & ,1 \le t < 2 \\ -1, & t \ge 2. \end{cases}$$
$$y(0) = 0,$$

la solution obtenue par l'utilisation directe de la formule de variation du paramètre est :

$$y(t) = \begin{cases} 1 - e^{-2t} & 0 \le t < 1 \\ \frac{1}{2}\left(1 - 2e^{-2t} + e^{-2(t-1)}\right), & 1 \le t < 2 \\ \frac{1}{2}\left[e^{-2t}\left(2e^4 + e^2 - 2\right) - 1\right], & t \ge 2. \end{cases}$$

4.3 Inclusions différentielles semi-continues supérieurement

Dans cette section, nous considérons les inclusions différentielles

$$x'(t) \in F(x) \tag{4.2}$$

où $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ est une application multivoque semi-continue supérieurement à valeurs fermées et convexe. Nous supposons qu'il existe une constante $b > 0$ telle que $F(x) \subset bB_n$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On note par $S(F, x_0)$ l'ensemble des solutions de (4.2) issue de la condition initiale x_0. C'est l'ensemble des fonctions $x(.) \in AC\left([0,T], \mathbb{R}^n\right)$ avec $x(0) = x_0$ satisfaisant (4.2) presque partout.

Soit l'inclusion différentielle suivante :

$$x' \in F_k(x), k = 0, 1, \dots . \tag{4.3}$$

où F_k , $k = 0, 1, ...$sont des multifonctions lipschitziennes.

Lemme 3 *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe, compact. On suppose que $x_k \in AC\left(I, \mathbb{R}^n\right)$ est une suite, telle que $x_k(t) \to x(t)$ pour toute $t \in [0,T]$ et $x'_k(t) \in A$ pour tout $t \in [0,T]$ alors $x(.) \in AC\left(I, \mathbb{R}^n\right)$ et $x'(t) \in A$ presque partout.*

Théorème 11 *Soit $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ et $F_k : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$, $k = 0, 1, ...,$ une multivoque avec des valeurs convexes fermés. Supposons que*

1. *L'ensemble F et F_k, $k = 0, 1, ...,$ sont semi-continues supérieurement.*
2. *$F(x) \subset ... \subset F_k(x) \subset F_{k-1}(x) \subset ... \subset F_0(x) \subset bB_n$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.*
3. *Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$ il existe un entier positif $k(\varepsilon, x)$ telle que $F_k(x) \subset F(x) + \varepsilon B_n$ quand $k > k(\varepsilon, x)$.*

   Si la suite de solution $x_k(.) \in S_{[0,T]}(F_k)$, $k = 0, 1, ...,$ converge uniformément vers une fonction $x(.)$, alors $x(.) \in S_{[0,T]}(F)$.

Preuve. Comme $x'_k(t) \in bB_n, k = 0, 1, \dots$, d'aprés le lemme (3) la fonction $x(t)$ est absolument continue. Soit $t_0 \in I$, tel que il existe la fonction $x'(t_0)$.

On fixe $\varepsilon > 0$,il existe un entier positif k_0 satisfait $F_{k_0}(x(t_0)) \subset F(x(t_0)) + \varepsilon B_n$. Et comme F_{k_0} est semi-continue supérieurement, par conséquent il existe $\delta > 0$, tel que $F_{k_0}(x) \subset F(x(t_0)) + \varepsilon B_n$

quand $x \in x(t_0) + 2\delta B_n$, comme $x_k(\cdot)$ converge uniformement vers $x(\cdot)$, alors il existe un entier positif $k_1 > k_o$ et un nombre positif $d < \delta$ tel que

$$|x_k(t) - x(t)| < \delta \text{ et } |x(t) - x(t_0)| < \delta$$

Pour tout $k > k_1$ et $t \in \left]t_0 - d, t_0 + d\right[\cap [0, T]$. Ainsi, si $k > k_1$ et $t \in \left]t_0 - d, t_0 + d\right[\cap [0, T]$, alors on a

$$x'_k(t) \in F_k(x_k(t)) \subset F_{k_0}(x_k(t)) \subset F_{k_0}(x(t_0)) + \varepsilon B_n \subset F(x(t_0)) + 2\varepsilon B_n$$

D'aprés le lemme (3) on a

$$x'(t) \in F(x(t_0)) + 2\varepsilon B_n$$

presque partout $t \in \left]t_0 - d, t_0 + d\right[\cap [0, T]$. En particulier $x'(t_0) \in F(x(t_0)) + 2\varepsilon B_n$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire et la multivoque $F(x(t_0))$ fermée, on obtient $x'(t_0) \in F(x(t_0))$. ■

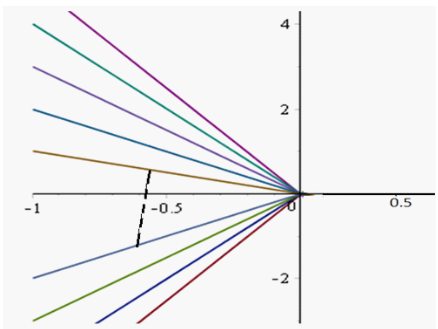
Exemple 12 *On considère l'inclusion différentielle suivant*

$$x' \in F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2} sgn(x) & si \ x \neq 0 \\ [-2, 4] & si \ x = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

Avec une condition initiale $x(0) = 0$.

D'après le théorème (10) l'existence de solution est garanté car F est semi-continue supérieurement non vide, fermée,convexe et bornée.

Les solutions de cette inclusion représenté dans la figure suivante.



Les solutions de l'inclusion différentielle (4.4)

Chapitre 5

Equations différentielles à second membre discontinu

Sommaire

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence de solutions d'une équation différentielle à second membre discontinue.

5.1 Equations différentielles à second membre continue en x et discontinu en t

On presente dans cette section quelques résultats sur l'existence et l'unicité de solutions au sens de Carathéodory d'un problème de Cauchy.

5.1.1 Solution de Carathéodory

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue, on appelle solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \quad t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{5.1}$$

une application $t \mapsto x(t)$ continue et différentiable en tout point $t \in I \subset \mathbb{R}$ et qui satisfait la relation$x'(t) = f(t,x)$ telle que $x(t_0) = x_0$

Lemme 4 *une fonction $t \mapsto x(t)$ est solution du problème de Cauchy (5.1) si et seulement si*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \quad \text{pour tout } t \in I. \tag{5.2}$$

Remarquons que si la fonction $f(t,x)$ est discontinue en t et continue en x alors la fonction qui satisfait l'équation (5.2) ne peut pas être une solution de l'équation $x'(t) = f(t,x)$, dans ce cas en utilisant la notion de l'integrale de Lebesgue, on obtient la définition d'une solution qui est à la base de la théorie de la résolution des équations différentielles au sens de Carathéodory.

Dans ce qui suit on présente les résultats d'existence et d'unicité des solutions au sens de Carathéodory.

Théorème 12 *(**Ascoli-Arzela**) Soit M un sous enemble de $C(I,\mathbb{R})$, on dit que M est relativement compact dans $C(I,\mathbb{R})$ ssi M est uniformément borné et équicontinu (i.e $\overline{M}$ compacte).*

Définition 22 *On considère que $x(.)$ et $f(.,x)$ sont des fonctions vectorielles de dimension n et que la fonction $f(.,x) \in D$ (Domaine D) satisfait les conditions suivantes qu'on appelle les conditions de Carathéodory :*
1/ *$f(t,x)$ est définie et continue en x pour presque tout $t \in I$.*
2/ *$f(t,x)$ est mesurable en t pour chaque x.*
3/ *$\exists$ $m(.)$ une fonction définie et integrable sur I telle que :*

$$|f(t,x)| \leq m(t), \forall t \in I.$$

Remarque 3 *Une fonction f qui satisfait les conditions de Carathéodory est appelée fonction de Carathéodory.*

Définition 23 *Une fonction $x(t)$ définie sur un intervalle I (fermé et borné) est une solution de l'équation de Carathéodory si elle est absolument continue sur chaque intervalle fermé $[a,b] \subset I$ et elle satisfait l'équation $x' = f(t,x)$ presque partout sur I ou si elle satisfait l'équation integrale (5.2) pour $t_0 \in I$ en satisfaisant les conditions de Carathéodory.*

Lemme 5 *Soit la fonction f qui satisfait les conditions de Carathéodory et soit x une fonction mesurable sur l'intervalle $[a, b]$ alors la fonction composée $f(t, x)$ est integrable sur l'intervalle $[a, b]$.*

Théorème 13 ***(Théorème d'existence de solutions au sens de Carathéodory)***
On suppose que la fonction f satisfasse les conditions de Carathéodory pour tout $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ et $|x - x_0| \leq b$, alors il existe une solution du problème de Cauchy (5.1) dans un intervalle férmé $[t_0, t_0 + c]$ $c > 0$ dans ce cas on définit un nombre arbitraire c qui satisfait l'inégalité :

$$\varphi(t_0 + c) \leq b, \qquad 0 < c \leq a \text{ avec } \varphi(t) = \int_{t_0}^{t} m(s)ds. \tag{5.3}$$

Preuve. Pour tout entier $k \geq 1$, on prend $h = \frac{d}{k}$ sur l'intervalle :

$$t_0 + ih \leq t \leq t_0 + (i+1)h, \quad i = 0, ..., k-1.$$

Considerons une solution approchée :

$$\begin{cases} x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s-h))ds & \text{pour } t_0 < t \leq t_0 + c \\ x_k(t) = x_0 & \text{pour } t < t_0. \end{cases} \tag{5.4}$$

En vertu du lemme (5) et de l'estimation (5.3), on montre que $|x_k(t) - x_0| \leq b$ comme suit :

on a d'aprés (5.4) :

$$x_k(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s-h))ds$$

donc

$$\begin{aligned} |x_k(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s-h))ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x_k(s-h))|\, ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} m(s)ds \quad \text{(d'aprés la condition 3 de Carathéodory)} \\ &\leq \varphi(t) \\ &\leq b \quad \text{(d'aprés l'estimation (5.3))} \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $a, b \in [t_0, t_0 + c]$ (arbitrairement choisi), on a :

$$|x_k(b) - x_k(a)| \leq \left| \int_{a}^{b} m(t)dt \right| = |\varphi(b) - \varphi(a)| \tag{5.5}$$

la fonction $\varphi(.)$ est continue dans $[t_0, t_0 + c]$ et donc elle est uniformement continue sur cet intervalle fermé, par conséquent :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que si } |b - a| < \delta \text{ alors } |\varphi(b) - \varphi(a)| < \varepsilon$$

D'où la suite de fonction $x_k(.), k \in \mathbb{N}^*$ est equicontinue et uniformement bornée.

D'aprés le théorème d'Ascoli-Arzela, on peut choisir une sous-suite uniformement convergente, sa limite sera notée $x(.)$ et donc :

$$|x_k(s-h) - x(s)| \leq |x_k(s-h) - x_k(s)| + |x_k(s) - x(s)|$$

et

$$|x_k(s-h) - x_k(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour} \quad h = \frac{c}{k} < \delta$$

Il s'ensuit que $|x_k(s-h)|$ tend vers $x(s)$. comme $f(t,x)$ est continue en x et $|f(t,x)| \leq m(t)$ on peut passer à la limite sous le signe de l'integrale (5.4) d'où la fonction $x(.)$ satisfait l'équation (5.2.) pour $x(t_0) = x_0$, i.e $x(.)$ est solution du problème (5.1). ■

Exemple 13 *Soit l'équation $x' = f(t,x)$ où la fonction f est définie par*

$$f(t,x) = x\,\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} x \;\; si \; t > 0 \\ 0 \quad si \; t = 0 \\ -x \quad si \; t < 0 \end{cases}$$

avec une condition initiale $x(t_0) = x_0$.

pour $t > 0$ la solution de probléme $x' = f(t,x)$ donnée par (figure 1) est :

$$x(t) = c_1 \exp(t) \;,\; c_1 \in \mathbb{R}.$$

Et pour $t < 0$ la solution de l'équation $x' = f(t,x)$ est donnée par :

$$x(t) = c_2 \exp(-t) \;,\; c_2 \in \mathbb{R}.$$

Comme la solution est abslument continue on obtient pour $t = 0$

$$\begin{aligned} x(0) &= \lim_{t \to 0^-} (c_2 \exp(-t)) = \lim_{t \to 0^+} (c_1 \exp(t)), \\ x(0) &= c_1 = c_2. \end{aligned}$$

d'où la solution générale de l'équation $x' = f(t,x)$ avec une condition initiale $x(t_0) = x_0$ est :

$$x(t) = x_0 \exp(|t|),\;\; x_0 \in \mathbb{R}$$

On remarque que pour $t = 0$, la dérivé x' n'existe pas.

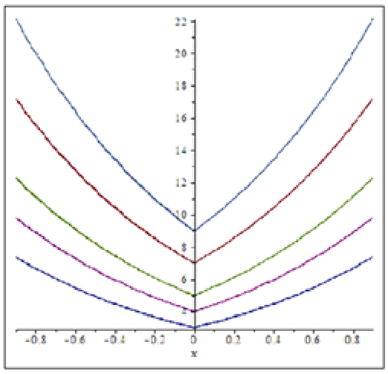


Figure 1

Exemple 14 *Soit l'équation $x' = f(t, x)$ où la fonction f est définie par*

$$f(t, x) = \begin{cases} 1 \ si \ t > 0 \\ -1 \ \ si \ t < 0 \end{cases}$$

pour $t > 0$ la solution de léquation $x' = f(t, x)$ est donnée par (figure 2) :

$$x(t) = t + c_1 \ , \ c_1 \in \mathbb{R}$$

pour $t < 0$ la solution de léquation $x' = f(t, x)$ est donnée par :

$$x(t) = -t + c_2 \ , \ c_2 \in \mathbb{R}$$

et pour $t = 0$ la solution est donnée par :

$$x(0) = \lim_{t \to ^> 0} (t + c_1) = \lim_{t \to ^< 0} (-t + c_2),$$
$$x(0) = c_1 = c_2.$$

d'où la solution générale de l'équation $x' = f(t, x)$ est :

$$x(t) = |t| + c, \ \ c \in \mathbb{R}$$

On remarque que pour $t = 0$, le dérivé x' n'existe pas.

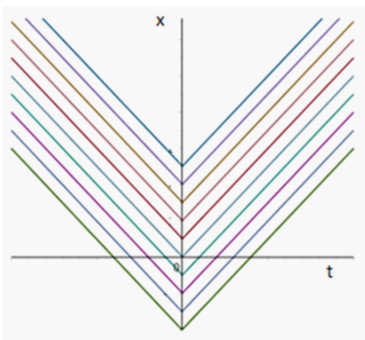


Figure 2

Théorème 14 ***(Unicité de solution)*** *Soit* $(t_0, x_0) \in D$ *et soit* $\varphi(.)$ *une fonction intégrable définie sur* I *à valeurs positives tel que* $\forall\, (t, x)$ *et* $(t, y) \in D$ *on a :*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \varphi(t)\, |x - y| \tag{5.6}$$

Alors il existe au plus une solution au problème (5.1) dans D.

Preuve. *Supposons qu'il existe deux solutions du problème (5.1) notées* $x(t)$ *et* $y(t)$ *pour* $t_0 \leq t \leq t_0 + d$ *où* d *est définie dans le théorème 13..*
On a :

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s))ds - f(s, y(s))|\, ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \varphi(t)\, |x - y|\, . \end{aligned}$$

On applique le lemme (1) de Gronwall à $f(t) = |x(t) - y(t)|$, $\alpha(t) = 0$ *et* $\beta(t) = \varphi(t)$, *il result que* $f(t) = 0$, *donc* $x(t) = y(t)$ *pour* $t \geq t_0$, *ainsi l'unicité est prouvée pour* $t \geq t_0$.
Le cas où $t \leq t_0$ *est ramené au cas* $t > t_0$ *en remplaçant* $-t$ *par* t. ■

5.2 Equations differentielles à second membre discontinu en x

Dans cette section on présente la technique de Filippov pour les équations différentielles à second membre discontinu en x.

Définition 24 *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. *On appelle solution de probléme de Cauchy*

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0. \tag{5.7}$$

une application continue, différentiable en tout point, $t \mapsto x(t)$, *telle que* $x(t_0) = x_0$ *et qui sur tout l'intervalle* $[0, T]$ *satisfait la relation* $x'(t) = f(x(t))$.

Une fonction $t \mapsto x(t)$ est solution du problème de Cauchy (5.7) si et seulement si

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s))ds, \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Motivation

Soit le problème suivant :

$$x'(t) = 1 - 2\,\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x > 0, \end{cases} \tag{5.8}$$
$$x(t_0) = x_0.$$

Pour une condition initiale $x(0) \neq 0$ on obtient :

$$x(t) = \begin{cases} 3t + c_1 & \text{si } \ x < 0 \\ -t + c_2 & \text{si } \ x > 0 \end{cases}.$$

Où c_1, c_2 des constants déterminée pour une condition initiale.

Si la solution arrive au $x = 0$, il ne peut pas quitter $x = 0$ car x est croissante ($x' > 0$) pour $x < 0$ et x est décroissante ($x' < 0$) pour $x > 0$. Par conséquent la solution reste à $x = 0$, ce qui implique que $x'(t) = 0$, alors cette solution n'est pas une solution dans le sens classique $x'(t) = 1 - 2\,\mathrm{sgn}(0) \neq 0$.

Alors comment résoudre ce problème ?

5.2.1 Existence de solution au sens de Filippov

Dans [5] Filippov a proposé la définition suivant.

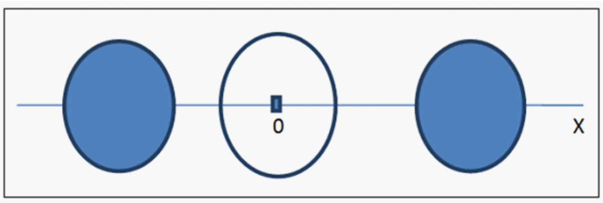
Définition 25 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application bornée mesurable. On définit l'ensemble :*

$$F(x) = \bigcap_{\varepsilon>0, \mu(S)=0} \overline{\mathrm{co}\,\{f\,(B(x,r)\setminus S\}} \tag{5.9}$$

où $B(x,r)$ désigne la boule fermée de rayon r centrée en x et S n'importe quel ensemble de mesure nulle contenu dans $B(x,r)$ et la barre supérieure désigne la fermeture.

On applique cette définition sur le problème (5.8).

Soit la figure suivante :



On remarque que pour $x > 0$ la $\overline{\text{co}}(f) = -1$, et pour $x < 0$ la $\overline{\text{co}}(f) = 3$, mais pour $x = 0$,

$$\overline{\text{co}}\left\{f(B(0,\varepsilon)\backslash\{0\}\right\} = \overline{\text{co}}\left\{-1,3\right\} = [-1,3].$$

Donc

$$\overline{\text{co}}(f) = \begin{cases} -1 & \text{si } x > 0 \\ [-1,3] & \text{si } x = 0 \\ 3 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Alors pour résoudre le problème , on remplace " $=$ " par " $\in$ " et $F_f(x)$ par $F(x) = \overline{\text{co}}(f)$ c'est-à-dire

$$x'(t) \in F(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x > 0 \\ [-1,3] & \text{si } x = 0 \\ 3 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \tag{5.10}$$

est un inclusion différentielle.

Définition 26 *Une solution (**de Filippov**) du problème de Cauchy :*

$$x'(t) = f(x(t))$$
$$x(t_0) = x_0,$$

est une fonction absolument continue : $t \mapsto x(t), t \in [0,T]$, telle que $x(t_0) = x_0$ et

$$x'(t) \in F(x(t)), \tag{5.11}$$

presque partout $t \in [0,T]$.

Lorsque l'ensemble $F(x)$ est convexe pour tout x, on peut montrer l'existence locale d'une solution.

Les solutions de l'inclusion différentielle (5.10) représenté dans la figure 03 suivante :

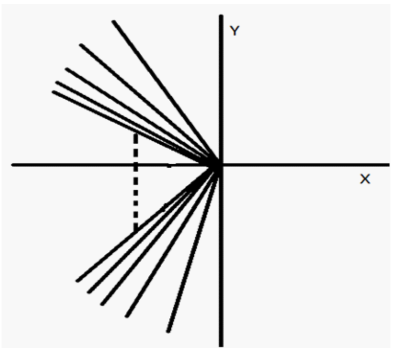


Figure 03: Solution de
l'inclution différentielle 5.10

Examinons maintenant sur des exemples ce que peuvent être les solutions de Filippov.

Exemple 15 *Soit le champs de $\mathbb{R}^2$, représenté dans la figure 4 et défini comme suit :*

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ si } y > 0, \quad f(x,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ si } y < 0. \tag{5.12}$$

En appliquant la définition de F donnée par la formule (5.9), nous obtenons alors :

$$F(x,y) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ si } y > 0$$

et

$$F(x,y) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ si } y < 0$$

Cas où $y = 0$: sur toute boule centrée en $(x,0)$ la fonction f prend trois valeurs :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si nous enlevons un ensemble de mesure nulle les deux premières valeurs sont toujours prises. En revanche, si nous enlevons l'axe des x la troisième valeur n'est plus prise. Donc, dans ce cas , on a :

$$F(x,0) = co \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La première constatation est donc que la définition ne change rien aux points où f est continue. La seconde est que, là ou il y a discontinuité; ce qui se passe sur les ensembles de mesure nulle.

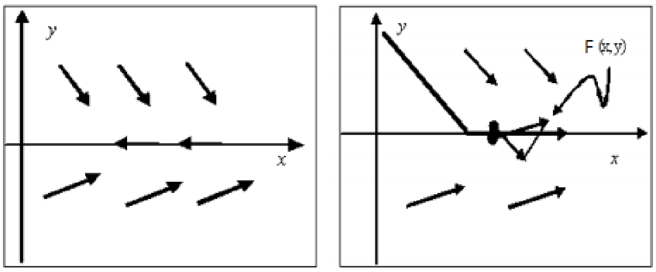


Figure 4 le champ de vecteurs discontinu (5.12) et sa vitesse au sens de Filippov sur la ligne de discontinuité.

La définition de F "oublie" ce que nous avions dit de la définition de f sur l'axe des x. Les solutions de l'inclusion différentielle sont en effet :

$t \rightarrow (x_0 + t, y_0 - t)$ *dans le demi-plan supérieur,*

$t \rightarrow (x_0 + 3t, y_0 + t)$ *dans le demi-plan inférieur,*

$t \rightarrow (x_0 + 2t, 0)$ *le long de l'axe des x.*

Cette derniére affirmation se voit en constatant que toute solution issue de $(x_0, 0)$ ne peut pas quitter l'axe des x.

Exemple 16 *Soit la champs de $\mathbb{R}^2$, représenté dans la figure 5 et défini par :*

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ si } y > 0, \quad f(x,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ si } y < 0 \tag{5.13}$$

Les solutions de Filippov sont :

$t \to (x_0 + 3t, y_0 + t)$ *dans le demi-plan supérieur,*

$t \to (x_0 + t, y_0 - t)$ *dans le demi-plan inférieur,*

$t \to (x_0 + 2t, 0)$ *le long de l'axe des x.puis suivre n'importe quelle solution du demi plan supérieur ou inferieur.*

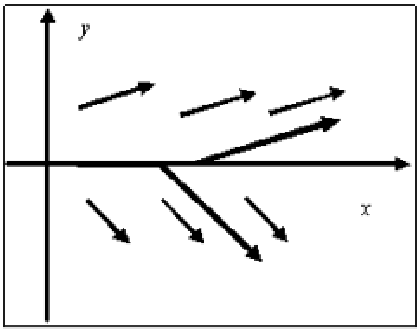


Figure 5 Les champs de vecteurs discontinus (5.13).

Proposition 7 *Soit f une fonction continue définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Les solutions classiques et les solutions de Filippov de coïncident.*

Preuve. *Soit f une fonction continue,on a*

$$\begin{aligned} F(x) &= \bigcap_{\varepsilon>0, \mu(S)=0} \overline{\text{co}} \{ f\left(B(x,r\right) \backslash S \} \\ &= \bigcap_{\varepsilon>0} \{ f\left(B(x,r)\right\} \\ &= f\left(B(x,r\right) \text{ et comme } f \text{ est continue} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

■

Exemple 17 *Soit l'équation différentielle suivante :*

$$x'(t) = f(x(t)) = 3$$

comme

$$\begin{aligned} F(x(t)) &= \bigcap_{\varepsilon>0,\mu(S)=0} \overline{\text{co}}\,\{f\,(B(x,\varepsilon)\,\backslash S\} \\ &= \overline{\text{co}}\,\{3\} = 3 = f(x). \end{aligned}$$

Et la solution de cette équation est :

$$x(t) = 3t + x_0,\; x_0 \in \mathbb{R}.$$

Donc la solution de Filippov est une solution classique.

Bibliographie

[1] ***L.Pujo − Menjouet***, Equations Différentielles Ordinaires et Partielles, 2003.

[2] ***Jean − Pierre Richerd***, Mathématiques pour les systèmes dynamiques, Lavoisier, 2002.

[3] ***Georgi V.Smirnov*** Introduction to the Theory of Differential Inclusions, Graduate studies in mathematics, AMS, 2001

[4] ***Claude Lobry et Tewfik Sari***, Equations differentielles à second membre discontinu, Cimpa Tlemcen, 2003.

[5] ***A.F.Filippov,*** Differential Equation with Discontinuos Righthand Sides.

[6] ***Shouchaun Hu et Nikolas S.Papageorgiou***, Handbook of multivalued analysis.

[7] ***J. P. Aubin and A. Cellina***, Differential inclusions, Spriger-Verlag Berlin, 1984.