

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**  
Université Djilali Bounaama - Khemis Miliana



**Faculté des Sciences et de la Technologie**  
**Département de la Technologie**

Mémoire du Projet de Fin d'Etudes  
Pour l'obtention de diplôme

**Master**

En

« Génie électrique »

Option :

« Automatique des système de production »

Thème :

**Suivi de trajectoire pour un robot mobile en temps fini (commande par mode glissant)**

Réalisé par :

KHADIR Abdellah  
HADJ MELIANI Oussama

Encadré par :

Mr. MALLEM Ali

Année Universitaire 2015/2016

## *Dédicace*

Merci Allah (mon dieu) de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout du rêve et le bonheur de lever mes mains vers le ciel et de dire ' Ya Kayom'

Je dédie ce modeste travail à celle qui m'a donné la vie, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, à ma mère, à mon père, école de mon enfance, qui a été mon ombre durant toutes les années des études.

Que dieu les garde et les protège.

A tous ceux qui me sont chère.

A tous ceux qui m'aiment.

A tous ceux que j'aime.

A mon encadreur Mr. (MALLEM).

Je dédie ce travail.....Khadir Abdellah

Je tiens à la fin de ce travail à remercier ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la foi et de m'avoir permis d'en arriver là.

Je remercie infiniment mon encadreur M. (MALLEM).et je remercie aussi tous les profs de la Faculté des Sciences et de la Technologie de Université de Djilali Bounaama Khemis Miliana. Mes remerciements vont également à ma mère, à mon père, et tous les sacrifices qu'ils ont consentis pour me permettre de suivre mes études dans les meilleures conditions possibles et n'avoir jamais cessé de m'encourager tout au long de mes années d'étude.

Enfin, je remercie particulièrement mes collègues et mes amis, qui ont rendu cette formation très sympathique.

Hadj Meliani Oussama

## ***Remerciements***

En préambule à ce mémoire nous remerciant ALLAH qui nous aide et nous donne la patience et le courage durant ces longues années d'étude. Nous souhaitant adresser nos remerciements les plus sincères aux personnes qui nous ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire. Ces remerciements vont tout d'abord au corps professoral et administratif de la Faculté des Sciences et technologie, pour la richesse et la qualité de leur enseignement et qui déploient de grands efforts pour assurer à leurs étudiants une formation actualisée.

Nous tenant à remercier sincèrement Monsieur, Mallem, qui, en tant que Encadreur de mémoire, il est toujours montrés à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il est bien voulu nous consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour. On n'oublie pas nos parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience. Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours encouragées au cours de la réalisation de ce mémoire. Merci à tous et à toutes.

## Résumé

Dans notre travail, nous proposons une approche de contrôle pour le suivi de trajectoire des robots mobiles, dont la dynamique de l'erreur est divisée en un sous-système de premier ordre et un sous-système de second ordre. La loi de commande proposée permet au robot de suivre sa trajectoire en temps fini tout en basant sur la commande en mode glissant rapide en cascade (CascadFast Terminal Sliding Mode). L'objectif de ce travail est de mettre le robot à suivre sa trajectoire dans un temps fini et de garder la stabilité du système, la fonction de Lyapunov est proposée pour assurer cette dernière. Le bon choix des surfaces de glissements nous permet d'obtenir de bons résultats.

### *Mot-clé :*

Robot mobile- modèle cinématique-mode glissant rapide-stabilité –Lyapunov.

## Abstract

In this work, we propose an approach to control the trajectory tracking of mobile robots, including the dynamics of the error is divided into a first class subsystem and a second-order subsystem. The proposed control law permits the robot follows its trajectory in finite time everything is based on the order in cascade fast sliding mode. The objective of this work is to put the robot to follow its trajectory and keep the system stability, the Lyapunov function is proposed to make it. The right choice of slides surfaces allow us to obtain good results.

### *Keywords:*

Mobile robot- Kinematic model –Fast sliding mode- Lyapunov stability.

## ملخص

في مشروعنا، نقترح نهجاً للتحكم في تتبع مسار الروبوتات المتحركة، أين ينقسم الخطا الديناميكي الى نظامين فرعيين الاول من الدرجة الاولى و الثاني من الدرجة الثانية. قانون التحكم المطروح يسمح للروبوت بتتبع مساره في وقت محدد بالاعتماد على التحكم عن طريق نظام الانزلاق. الهدف من هذا العمل هو جعل الروبوت يتتبع المسار في وقت محدد و المحافظة على استقرار النظام. و لهذه الاخيرة نقترح دالة لياپونوف. الاختيار المناسب لمساحات الانزلاق يسمح لنا بالحصول على نتائج جيدة.

### *كلمات مفتاحية :*

الروبوتات المتحركة-النموذج الديناميكي-التحكم عن طريق نظام الانزلاق-الاستقرار - لياپونوف

# SOMMAIRE

Introduction général	1
----------------------	---

## Chapitre 1 : modélisation des robots mobiles

1.1 Introduction	4
1.2 Définitions	4
1.3 Roulement sans glissement et contraintes non holonomes	5
1.3.1 Roulement sans glissement	5
1.3.2 Contraintes non holonomes	7
1.4 Les grandes classes de robots mobiles et leurs modèles	9
1.4.1 Disposition des roues et centre instantané de rotation	9
1.4.2 Robots mobiles de type unicycle	10
1.4.2.1 Description	10
1.4.2.2 Modélisation	11
1.4.3 Robots mobiles de type tricycle et de type voiture	15
1.4.3.1 Description	15
1.4.3.2 Modélisation	16
1.4.4 Robots mobiles omnidirectionnels	18
1.4.4.1 Description	18
1.4.4.2 Modélisation	19

## Chapitre 2 : la commande par mode glissant

2.1 Introduction	20
2.2 Formalisation classique du régime glissant	20
2.3 Etude de la commande par structure variable en régime glissant	22
2.3.1. Equation d'état exprimée à partir du gradient et du produit scalaire	23
2.3.2 Commande équivalente et équation d'état du régime glissant idéal	25
2.4. Formalisation par la géométrie différentielle pour l'analyse et la synthèse des régimes glissants	26
2.4.1 Mode de glissement	26
2.4.2 Commande équivalente et condition de glissement	28
2.4.3 Condition d'existence et d'unicité de la commande équivalente	28

2.4.4 Dépendance et indépendance du régime glissant idéal vis-à-vis des champs de vecteurs $f(x)$ et $g(x)$	29
2.4.5 Invariance des régimes glissants par rapport aux perturbations	30
2.5 Étude de la commande par mode de glissement	31
2.5.1 Principe de la commande par modes de glissement	32
2.5.2 Conception de la commande par mode glissant	33
2.5.3 Choix de la surface de glissement	33
2.5.4 Principe d'invariance	34
2.5.5 Conditions de convergence et d'existence	35
2.5.5.1 La fonction discrète de commutation	35
2.5.5.2 La fonction de Lyapunov	35
2.5.6 Synthèse de la commande	36
2.5.6.1 Méthode de Philippov	36
2.5.6.2 Méthode de la commande équivalente d'Utkin	36
2.5.7 Les nouveaux concepts de la commande par mode de glissement	37
2.5.7.1 Commande basée sur l'approche de la loi d'arrivée	37
2.5.7.2 Commande continue par Bande de surface	39
2.5.7.3 Commande robuste (Fast Terminal Sliding Mode Control)	41
2.6 Conclusion	42

### **Chapitre3 : Suivi de trajectoires pour un robot mobile par mode glissant**

3.1 Introduction	43
3.2 Poursuite de trajectoires	44
3.2.1 Modèle cinématique	44
3.2.2 Le problème de suivre la commande	45
3.2.3 La stratégie de suivi la commande	46
3.2.3.1 La conception de commande en cascade	46
3.2.3.2 Conception de loi de commande angulaire basée sur la technique de commande temps fini	47
3.3 Conception de la loi de commande de la vitesse vers l'avant à base de commande en mode glissant en temps fini	50
3.4. L'analyse de la stabilité	53
3.5 Conclusion	54

## **Chapitre 4 : Résultats et simulations**

4-1. Introduction	56
4.2. Commande robuste (Fast Terminal Sliding Mode Control)	56
4.3. Le modèle cinématique	57
4.4. Les Résultats et simulations	58
4.5 Calcul du temps d'arrivée (Reaching time)	72
4.6 Conclusion	73
Conclusion général	75

# LISTE DES FIGURES

Figure 1-1 : Repérage d'un robot mobile	5
Figure 1-2 : Caractérisation du roulement sans glissement	6
Figure 1-3 : Principaux types de roues	9
Figure 1-4 : Robot mobile de type unicycle	10
Figure 1-5 : Evolution des robots mobiles de type unicycle	11
Figure 1-6 : Centre instantané de rotation d'un robot de type unicycle	12
Figure 1-7 : Robot mobile de type tricycle	15
Figure 1-8 : Projets de voitures autonomes à l'université de Carnegie Mellon	16
Figure 1-9 : Robot mobile de type tricycle et son CIR	16
Figure 1-10 : Robot mobile de type voiture et son CIR	18
Figure 1-11 : Représentation d'un robot mobile omnidirectionnel	18
Figure 1-12 : Robot mobile omnidirectionnel Nomadic XR4000	19
Figure 2-1 : Espace d'état de dimension 3 et surface de glissement de dimension 2	21
Figure 2-2 : Région du mode de glissement et champ de vecteurs associé selon une coupe de l'espace d'état	23
Figure 2-3 : Construction du champ de vecteurs moyen $f^0$ dans l'espace d'état $(x_1, \dots, x_n)$	24
Figure 2-4 : Grandeur de commande équivalente $U_{eq}$	26
Figure 2-5 : Commutation de champs de vecteurs sur la variété $S$	27
Figure 2-6 : Différents modes de convergence pour la trajectoire d'état	32
Figure 2-7 : Phénomène de broutement	38
Figure 2-8 : Plan de phase et fonction de commutation de la commande par régime glissant à bande limite	40
Figure 2-9 : Loi de commande par bande continue au voisinage de la surface de glissement	40
Figure 2-10 : Loi de commutation au voisinage de la surface de glissement	41
Figure 3-1 : erreurs de posture de la coordonnée pour un robot mobile	44
Figure 4-1 : poursuite une trajectoire parabolique avec $\alpha = 8$	59
Figure 4-2 : erreur de poursuite une trajectoire parabolique avec $\alpha = 8$	59
Figure 4-3 : vitesse de commande $v$ avec $\alpha = 8$	59
Figure 4-4 : vitesse de commande $w$ avec $\alpha = 8$	59
Figure 4-5 : angle idéal et pratique avec $\alpha = 8$	60
Figure 4-6 : poursuite une trajectoire parabolique circulaire avec $\alpha = 8$	60



Figure 4-7 : erreur de poursuite une trajectoire circulaire avec $\alpha = 8$	60
Figure 4-8 : vitesse de commande $v$ avec $\alpha = 8$ .	61
Figure 4-9 : vitesse de commande $w$ avec $\alpha = 8$	61
Figure 4-10 : angle idéal et pratique avec $\alpha = 8$	61
Figure 4-11 : poursuite une trajectoire carrée avec $\alpha = 8$	62
Figure 4-12 : erreur de poursuite une trajectoire carrée avec $\alpha = 8$	62
Figure 4-13 : vitesse de commande $v$ avec $\alpha = 8$	62
Figure 4-14 : vitesse de commande $w$ avec $\alpha = 8$	62
Figure 4-15 : angle idéal et pratique avec $\alpha = 8$ .	63
Figure 4-16 : poursuite une trajectoire parabolique avec $\alpha = 4$	64
Figure 4-17 : erreur de poursuite une trajectoire parabolique avec $\alpha = 4$	64
Figure 4-18 : vitesse de commande $w$ avec $\alpha = 4$	64
Figure 4-19 : vitesse de commande $v$ avec $\alpha = 4$	64
Figure 4-20 : angle idéal et pratique avec $\alpha = 4$	65
Figure 4-21 : poursuite une trajectoire circulaire avec $\alpha = 4$	65
Figure 4-22 : erreur de poursuite une trajectoire circulaire avec $\alpha = 4$ .	65
Figure 4-23 : vitesse de commande $w$ avec $\alpha = 4$	66
Figure 4-24 : vitesse de commande $v$ avec $\alpha = 4$	66
Figure 4-25 : angle idéal et pratique avec $\alpha = 4$	66
Figure 4-26 : poursuite une trajectoire carrée avec $\alpha = 4$	67
Figure 4-27 : erreur de poursuite une trajectoire carrée avec $\alpha = 4$	67
Figure 4-28 : vitesse de commande $w$ avec $\alpha = 4$	67
Figure 4-29 : vitesse de commande $v$ avec $\alpha = 4$	67
Figure 4-30 : angle idéal et pratique avec $\alpha = 4$	68
Figure 4-31 : poursuite une trajectoire parabolique avec $\alpha = 0.5$	68
Figure 4-32 : erreur de poursuite une trajectoire parabolique avec $\alpha = 0.5$	68
Figure 4-33 : vitesse de commande $w$ avec $\alpha = 0.5$	69
Figure 4-34 : vitesse de commande $v$ avec $\alpha = 0.5$	69
Figure 4-35 : angle idéal et pratique avec $\alpha = 0.5$	69
Figure 4-36 : poursuite une trajectoire circulaire avec $\alpha = 0.5$	70
Figure 4-37 : erreur de poursuite une trajectoire circulaire avec $\alpha = 0.5$	70
Figure 4-38 : vitesse de commande $w$ avec $\alpha = 0.5$	70
Figure 4-39 : vitesse de commande $v$ avec $\alpha = 0.5$	70

Figure 4-40 : angle idéal et pratique avec $\alpha = 0.5$	71
Figure 4-41 : poursuite une trajectoire carrée avec $\alpha = 0.5$	71
Figure 4-42 : erreur de poursuite une trajectoire carrée avec $\alpha = 0.5$	71
Figure 4-43 : vitesse de commande $w$ avec $\alpha = 0.5$	72
Figure 4-44 : vitesse de commande $v$ avec $\alpha = 0.5$	72
Figure 4-45 : angle idéal et pratique avec $\alpha = 0.5$	72

# INTRODUCTION GENERALE

En robotique, on distingue les robots en deux principaux types : les robots manipulateurs et les robots mobiles. Les robots manipulateurs ont une base fixe contrairement aux robots mobiles qui peuvent se déplacer. Ainsi pour étudier les déplacements de ces robots, nous pouvons soit utiliser un repère allocentrique (absolu), soit un repère égocentrique (fixé sur le robot).

Bien souvent, quand on parle de robotique mobile, on sous-entend robots mobiles aux roues. Ce sont en effet les systèmes les plus étudiés, parce qu'ils sont plus simples à réaliser que les autres types de robots mobiles, ce qui permet d'en venir plus rapidement à l'étude de leur navigation. Ce type de robots est notamment très souvent utilisé pour l'étude des systèmes autonomes. Vient ensuite la robotique mobile à pattes, avec notamment la robotique humanoïde, mais également des robots avec un nombre de pattes plus élevés qui offrent de bonnes propriétés pour la locomotion en milieu difficile (milieux forestiers et agricoles). La stabilité des mouvements de ce type de robots est en particulier un thème de recherche important. Enfin il existe également de nombreux autres types de robots mobiles (robots marins, sous-marins, drones volants, micro et nano robots). Généralement l'étude de ce type de robots se fait dans des thématiques spécifiques avec des problèmes particuliers à l'application visée.

Dans le vaste domaine de la robotique mobile, l'étude du déplacement a une grande importance. De nombreuses approches concernant ce déplacement existent en utilisant différents types de capteurs. Les robots mobiles, connaissant leur position, se déplacent d'un point à un autre sur diverses contraintes. Les modèles utilisés dans ce contexte sont non linéaires et la propriété de non holonomie qui caractérise un certain nombre de ces robots mobiles conduit à l'utilisation de techniques de commande non linéaire, notamment la commande par mode de glissement. Il en découle qu'il faut pouvoir définir une stratégie de mouvement, puis exécuter le déplacement prescrit. L'objectif de ce mémoire trouve son intérêt dans l'exécution d'un mouvement planifié et concerne le développement de lois de commande pour le suivi de trajectoires des robots mobiles non holonomes. Nous nous intéressons seulement aux robots mobiles de type unicycle correspondant à notre application. Les modèles utilisés pour démontrer les lois de commandes dans ce mémoire sont basés sur le modèle cinématique du robot mobile de type unicycle.

L'idée principale dans le domaine de la robotique mobile est de faire un déplacement selon une courbe définie. Dans ce cas Il existe différents problèmes de commande pour le robot mobile :

- Le suivi de chemin où l'objectif est qu'un point lié au robot suive une courbe prédéterminée en imposant au robot une vitesse donnée.
- La stabilisation de trajectoires consistant à prendre en compte la dimension temporelle : la trajectoire de référence dépend du temps et la vitesse du robot n'est plus fixée à l'avance.
- La stabilisation de configurations fixes : il s'agit de stabiliser asymptotiquement le système dans une position d'équilibre donnée.

Notre travail consiste au développement d'algorithmes de commande par modes de glissement appliquée aux systèmes non linéaires et plus précisément la commande par modes glissants du suivi de trajectoires pour un robot mobile. Ce type de commande a suscité un grand intérêt parmi les chercheurs durant ces dernières années à cause de la simplicité de sa mise en œuvre et de sa robustesse vis-à-vis des incertitudes de modélisation et des perturbations sur le système à commander. Cette technique est basée sur la détermination d'une loi de commande de façon que le point de fonctionnement du système s'approche d'une certaine surface de glissement. La loi de commande est conçue en deux étapes, la première est une étape d'approche de la surface de commutation et la deuxième, une étape de glissement sur celle-ci vers le point d'équilibre.

Différentes techniques ont été étudiées pour démontrer ces lois d'approches en particulier la commande discontinue proposée par Utkin [01], Young et Utkin [02] qui ne peut prendre que deux valeurs suivant le signe de la surface de glissement  $S(x)$ . La caractéristique principale de cette technique est sa structure variable avec la commutation autour de la surface choisie, engendrant du coup des fréquences de commutation élevées des organes de commande qui peuvent provoquer une détérioration anticipée de l'organe de commande ou exciter des dynamiques hautes fréquences non considérées dans la modélisation du système. Ceci crée un phénomène de broutement (chattering en anglais) autour de la surface de glissement qui peut endommager les actionneurs de commande dans la mesure où la commande va osciller entre deux valeurs suivants le signe de  $S(x)$  d'une part et ne permet généralement pas de glissement sur la surface d'autre part.

Dans le but de résoudre le phénomène de réticence (chattering) et de l'éliminer complètement, des méthodes ont été étudiées par Slotine [03], Sastry et Slotine [04], Asada et Slotine [05], Hung et al [06], Habbi et al [07], Harashima et al [08], et Levant [09] en agissant sur la dynamique d'approche de la surface de glissement.

L'objectif principal de notre travail est de mettre le robot suivre sa trajectoire dans un temps fini et de garder la stabilité du système, la fonction de Lyapunov est proposée pour assurer cette dernière. Le bon choix des surfaces de glissements nous permettent obtenir des bons résultats. Pour cela notre mémoire sera structuré en quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la modélisation des différents types de robots mobiles et à leur étude cinématique.

Dans le deuxième chapitre, de nature théorique, nous exposons les bases mathématiques de la commande à structure variable et de la commande par modes de glissement.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à la poursuite de trajectoires d'un robot mobile non holonome de type uni cycle, Ensuite nous proposons une approche de contrôle pour le suivi de trajectoire des robots mobiles. La loi de commande proposée permet au robot de suivre sa trajectoire en temps fini tout en basant sur la commande en mode glissant en cascade (cascade Terminal Sliding Mode). Et pour cela on met le robot suivre sa trajectoire dans un temps fini et de garder la stabilité du système, la fonction de Lyapunov est proposée pour assurer cette dernière.

Le dernier chapitre consiste à la détermination d'une loi de commande robuste par mode de glissement de type GFTSM (global fast terminal sliding mode) qui va résoudre le problème de suivi de trajectoires pour un robot mobile non holonome. Nous présentons également tous les résultats obtenus lors de nos différents travaux de simulation.

# CHAPITRE I

## MODELISATION DES ROBOTS MOBILES

### I.1 Introduction

Dans ce chapitre on va représenter les robots mobiles selon leurs modèles et leurs structures. On va juste présenter ici que les deux classes de modèles les plus fréquemment rencontrés, les robots de type unicycle et les robots de type voiture et on développe leurs modèles cinématiques sous forme d'équations. Ceci va nous servir notamment dans les parties suivantes pour les tests des commandes à synthétiser.

En générale pour la commande des robots mobiles, un modèle de commande en vitesse est utilisée plutôt qu'un modèle de commande en couple. Les raisons principales pour ce choix est :

- Le calcul de la commande est plus simple pour un modèle cinématique que pour un Modèle dynamique.
- Il n'y a pas de paramètres géométriques ou inertiels compliqués à identifier pour un modèle cinématique.

### I.2 Définitions

On note  $R=(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère fixe quelconque, dont l'axe  $\vec{z}$  est vertical et  $R'=(O', \vec{x}', \vec{y}', \vec{z}')$  un repère mobile lié au robot. On choisit généralement pour  $O'$  un point remarquable de la plate-forme, typiquement le centre de l'axe des roues motrices s'il existe, comme illustre-la figure (1.1).

Par analogie avec la manipulation, on appelle situation [10] ou souvent posture [11] du robot le vecteur :

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Où  $x$  et  $y$  sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point  $O'$  dans  $R$  et  $\theta$  l'angle  $(\vec{x}, \vec{x}')$ .

La situation du robot est donc définie sur un espace  $M$  de dimension  $m = 3$ , comparable à l'espace opérationnel d'un manipulateur plan.

La configuration d'un système mécanique est connue quand la position de tous ses points dans un repère donné est connue. Alors que pour un bras manipulateur cette notion est définie sans ambiguïté par les positions angulaires des différentes articulations, on peut, dans le cas d'un robot mobile, donner une vision plus ou moins fine de la configuration, comme on le verra par la suite. Dans tous les cas, on définira la configuration du robot mobile par un vecteur :

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

De  $n$  coordonnées appelées coordonnées généralisées. La configuration est ainsi définie sur un espace  $N$  de dimension  $n$ , appelée l'espace des configurations.

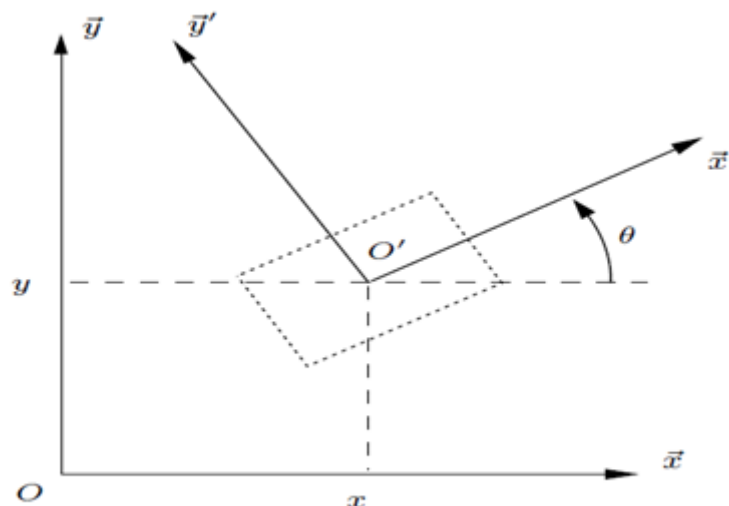


Figure 1.1 : Repérage d'un robot mobile

## I.3 Roulement sans glissement et contraintes non holonomes

### I.3.1 Roulement sans glissement

La locomotion à l'aide des roues exploite la friction au contact entre roue et sol. Pour cela, la nature du contact (régularité, matériaux en contact) a une forte influence sur les propriétés du mouvement relatif de la roue par rapport au sol. Dans de bonnes conditions, il y a roulement sans glissement (r.s.g.) de la roue sur le sol, c'est-à-dire que la vitesse relative de

la roue par rapport au sol au point de contact est nulle. Théoriquement, pour vérifier cette condition, il faut réunir les hypothèses suivantes :

- le contact entre la roue et le sol est ponctuel.
- les roues, de rayon  $r$ , sont indéformables.

En pratique le contact se fait sur une surface, ce qui engendre bien évidemment de légers glissements. De même, alors qu'il est raisonnable de dire que des roues pleines sont indéformables, cette hypothèse est largement fautive avec des roues équipées de pneus.

Malgré cela, on supposera toujours qu'il y'a roulement sans glissement et, par ailleurs, que le sol est parfaitement plan.

Mathématiquement, on peut traduire la condition de r.s.g. sur une roue. Soit  $P$  le centre de la roue,  $Q$  le point de contact de la roue avec le sol,  $\varphi$  l'angle de rotation propre de la roue et  $\theta$  l'angle entre le plan de la roue et le plan  $(O, \bar{x}, \bar{y})$  comme indiqué à la figure (1.2).

La nullité de la vitesse relative  $\vec{v}_Q$  roue/sol au point de contact permet d'obtenir une relation vectorielle entre la vitesse  $\vec{u}_P$  du centre  $P$  de la roue et le vecteur vitesse de rotation  $\vec{\omega}$  de la roue :

$$\vec{v}_Q = \vec{u}_P + \vec{\omega} \wedge \overline{PQ} = \vec{0} \quad (1.3)$$

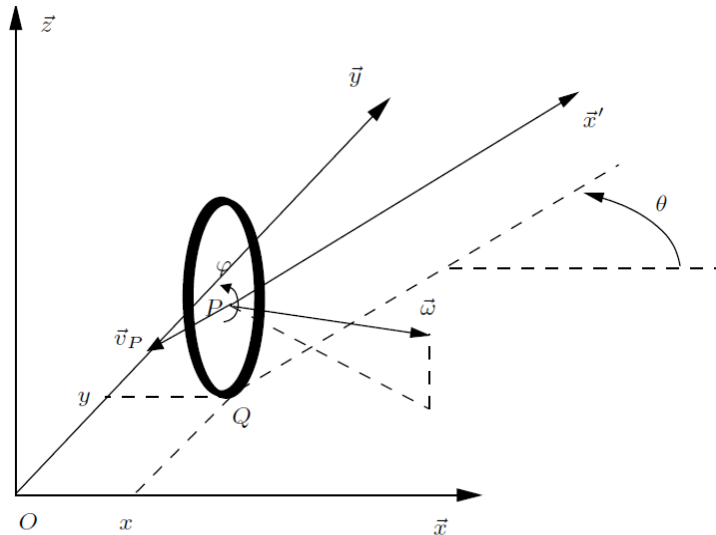


Figure 1.2 : Caractérisation du roulement sans glissement

Les points  $P$  et  $Q$  ont pour coordonnées respectives  $(x, y, r)^T$  et  $(x, y, 0)^T$ . Il vient alors :

$$\begin{aligned} \dot{x}\bar{x} + \dot{y}\bar{y} + (\dot{\theta}\bar{z} + \dot{\varphi}(\sin\theta\bar{x} - \cos\theta\bar{y})) \wedge (-r\bar{z}) &= \vec{0} \\ (\dot{x} + r\dot{\varphi}\cos\theta)\bar{x} + (\dot{y} + r\dot{\varphi}\sin\theta)\bar{y} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (1.4)$$



Ceci nous donne le système de contraintes scalaires :

$$\dot{x} + r\dot{\phi}\cos\theta = 0 \quad (1.5)$$

$$\dot{y} + r\dot{\phi}\sin\theta = 0 \quad (1.6)$$

Que l'on peut transformer pour faire apparaître les composantes de vitesse dans le plan de la roue d'une part et perpendiculairement à la roue d'autre part :

$$-\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta = 0 \quad (1.7)$$

$$\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta = -r\dot{\phi} \quad (1.8)$$

### I.3.2 Contraintes non holonomes

Les équations précédentes, caractérisant le roulement sans glissement d'une roue sur le sol, sont des contraintes non holonomes. Nous nous proposons dans ce paragraphe de préciser ce que recouvre ce terme et de caractériser les systèmes non holonomes.

Soit un système de configuration  $q$  soumis à des contraintes indépendantes sur les vitesses, regroupées sous la forme  $A^T(q)\dot{q} = 0$ . S'il n'est pas possible d'intégrer l'une de ces contraintes, elle est dite non intégrable ou non holonome. De manière concrète l'existence de contraintes non holonomes implique que le système ne peut pas effectuer certains mouvements instantanément. Par exemple, dans le cas de la roue, il ne peut y avoir de translation instantanée parallèlement à l'axe de la roue. Un tel déplacement nécessitera des manœuvres. De même, comme on le sait bien, une voiture ne peut se garer facilement sans effectuer de créneaux.

Il n'est pas évident de dire à priori si une contrainte est intégrable ou non. Pour cela, on a recours à l'application du théorème de Frobenius, dont une version complète pourra être trouvée dans un ouvrage de référence de géométrie différentielle [12] ou de commande non linéaire. Seule la connaissance du crochet de Lie est nécessaire à notre étude. Pour deux vecteurs  $b_i(q)$  et  $b_j(q)$ , cet opérateur est défini par :

$$[b_i(q), b_j(q)] = \frac{\partial b_j}{\partial q} b_i - \frac{\partial b_i}{\partial q} b_j \quad (1.9)$$

**Théorème :** Soit un système de configuration  $q$ , de dimension  $n$ , soumis à un ensemble de contraintes indépendantes s'écrivant sous la forme  $A^T(q)\dot{q} = 0$ . Soit :

$B(q) = (b_1(q) \ b_2(q) \ \dots \ b_m(q))$  une matrice de rang plein  $m$ , orthogonale à  $A(q)$  sur tout l'espace des configurations. Soit enfin l'algèbre de **Lie** de dimension  $p$ , avec  $m \leq p \leq n$  engendrée par l'ensemble des colonnes de  $B(q)$ , auxquelles s'ajoutent les crochets de **Lie** successifs formés à partir de ces colonnes, à condition qu'ils augmentent la dimension de l'algèbre. Alors, parmi les contraintes auxquelles est soumis le système,  $n - p$  sont intégrables. Prenons l'exemple de la roue dont on a écrit le modèle précédemment. Sa configuration est entièrement définie par sa configuration  $q = (x, y, \theta, \varphi)^T$ . D'après (1.7) et (1.8) on peut déterminer :

$$A(q) = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Et en déduire :

$$B(q) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Matrice formée par les colonnes indépendantes  $b_1(q) = \left( \cos \theta \ \sin \theta \ 0 \ -\frac{1}{r} \right)^T$  et  $b_2(q) = (0 \ 0 \ 1 \ 0)^T$  et qui vérifie bien  $A^T(q)B(q) = 0$  pour tout  $q$ . On calcule alors les crochets de **Lie** successifs à partir de  $b_1(q)$  et  $b_2(q)$  :

$$[b_1(q), b_2(q)] = (\sin \theta \ -\cos \theta \ 0 \ 0)^T \quad (1.12)$$

$$[b_1(q), [b_1(q), b_2(q)]] = 0$$

$$[b_2(q), [b_1(q), b_2(q)]] = (\cos \theta \ \sin \theta \ 0 \ 0)^T \quad (1.13)$$

On constate que  $b_1(q), b_2(q), [b_1(q), b_2(q)]$  et  $[b_2(q), [b_1(q), b_2(q)]]$  engendrent une algèbre de **Lie** de dimension 4, égale à celle de  $q$ . On arrête donc le calcul des crochets et on peut conclure qu'il n'existe pas de contrainte intégrable. Les contraintes (1.7) et (1.8) sont donc des contraintes non holonomes.

## I.4 Les grandes classes de robots mobiles et leurs modèles

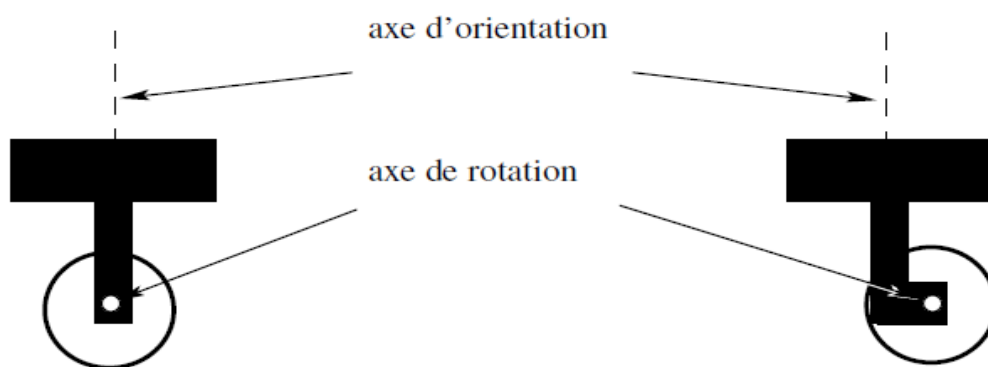
### I.4.1 Disposition des roues et centre instantané de rotation

C'est la combinaison du choix des roues et de leur disposition qui confère à un robotson mode de locomotion propre. Sur les robots mobiles, on rencontre principalement trois types de roues (figure 1.3) :

- les roues fixes dont l'axe de rotation, de direction constante, passe par le centre de la roue.
- les roues centrées orientables, dont l'axe d'orientation passe par le centre de la roue.
- les roues décentrées orientables, souvent appelées roues folles, pour lesquelles l'axe d'orientation ne passe pas par le centre de la roue.

De manière anecdotique on rencontrera aussi des systèmes particuliers, tels que les roues suédoises, les roues à plusieurs directions de roulement, etc.

Bien évidemment, pour un ensemble de roues donné, toute disposition ne conduit pas à une solution viable. Un mauvais choix peut limiter la mobilité du robot ou occasionner d'éventuels blocages. Par exemple, un robot équipé de deux roues fixes non parallèles ne pourrait pas aller en ligne droite !



(a) Roues fixes (axe d'orientation fixe) (b) Roues décentrées

orientable et roues centrées orientables

Figure 1.3 : Principaux types de roues

Pour qu'une disposition de roues soit viable et n'entraîne pas de glissement des roues sur le sol, il faut qu'il existe pour toutes ces roues un unique point de vitesse nulle autour duquel tourne le robot de façon instantanée. Ce point, lorsqu'il existe, est appelé centre instantané de rotation (CIR). Les points de vitesse nulle liés aux roues se trouvant sur leur axe

de rotation, il est donc nécessaire que le point d'intersection des axes de rotation des différentes roues soit unique. Pour cette raison, il existe en pratique trois principales catégories de robots mobiles à roues, que l'on va présenter maintenant.

## I.4.2 Robots mobiles de type unicycle

### I.4.2.1 Description

On désigne par unicycle un robot actionné par deux roues indépendantes et possédant éventuellement un certain nombre de roues folles assurant sa stabilité. Le schéma des robots de type unicycle est donné à la figure (1.4). On y a omis les roues folles, qui n'interviennent pas dans la cinématique, dans la mesure où elles ont été judicieusement placées.

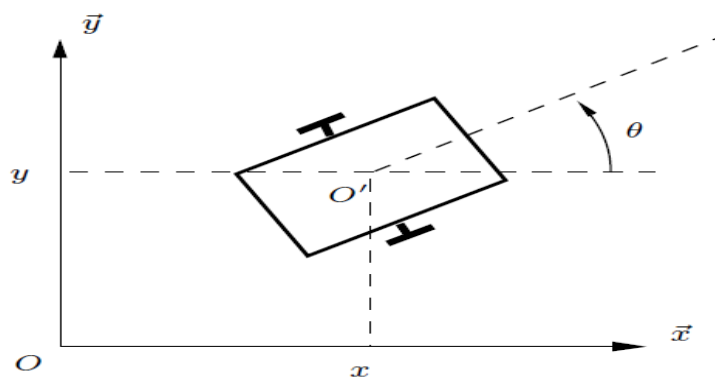


Figure 1.4 : Robot mobile de type unicycle

Ce type de robot est très répandu en raison de sa simplicité de construction et de propriétés cinématiques intéressantes. La figure (1.5) présente différents robots de type unicycle, depuis Hilare, en 1977, jusqu'aux modèles actuels, qui, à l'instar du robot Khepera, tendent parfois vers l'extrême miniaturisation.



Hilare, LAAS-CNRS, Toulouse, 1977 [13]

**Entraînement :** batteries au plomb 24V, 2 moteurs DC avec codeurs incrémentaux

**Calculateur :** 4 processeurs Intel 80286, pas d'OS, multibus, modem série radio à 9600 bauds

**Capteurs :** odométrie, 16 capteurs US, un télémètre laser

**Dimensions (L X l X h) :** 80 cm \_ 80 cm \_ 60 cm

**Poids :** 400 kg



Khepera II, K-team, EPFL, Lausanne, 2002 [14],

**Entraînement :** adaptateur secteur ou accus NiMH, 2 moteurs DC avec codeurs incrémentaux

**Calculateur :** processeur Motorola 68331 @25 MHz, 512 Ko RAM, 512 Ko mémoire Flash.

Programmable par le port série, communication par port série jusqu'à 115 Kbauds (limitée à 9600 bauds en liaison radio), 3 entrées analogiques 0 à 4.3 V, 8 bits

**Capteurs :** 8 capteurs infrarouges de luminosité et de proximité (100 mm de portée) et un détecteur de batteries faibles

**Dimensions (D X h) :** 7 cm \_ 3 cm

**Poids:** 80 g (charge admissible : 250 g)

Figure 1.5 : Evolution des robots mobiles de type unicycle

#### I.4.2.2 Modélisation

**Centre instantané de rotation :** Les roues motrices ayant même axe de rotation, le CIR du robot est un point de cet axe. Soit  $\rho$  le rayon de courbure de la trajectoire du robot, c'est-à-dire la distance du CIR au point  $O'$  voir figure (1.6). Soit  $L$  l'entre axe et  $\omega$  la vitesse de rotation du robot autour du CIR. Alors les vitesses des roues droite et gauche, respectivement notées  $v_d$  et  $v_g$  est définies à la figure 1.6, vérifient :

$$v_d = -r\dot{\varphi}_d = (\rho + L)\omega \quad (1.14)$$

$$v_g = r\dot{\varphi}_g = (\rho - L)\omega \quad (1.15)$$

Ce qui permet de déterminer  $\rho$  et  $\omega$  à partir des vitesses des roues :

$$\rho = L \frac{\dot{\varphi}_d - \dot{\varphi}_g}{\dot{\varphi}_d + \dot{\varphi}_g} \quad (1.16)$$

$$\omega = -r \frac{\dot{\varphi}_d + \dot{\varphi}_g}{2L} \quad (1.17)$$

L'équation (1.16) permet de situer le CIR sur l'axe des roues. Par ailleurs ces équations expliquent deux propriétés particulières du mouvement des robots de type unicycle : si  $\dot{\varphi}_d = -\dot{\varphi}_g$ , le robot se déplace en ligne droite ; si  $\dot{\varphi}_d = \dot{\varphi}_g$ , alors le robot effectue une rotation sur lui-même. L'utilisation de ces deux seuls modes de locomotion, bien que limitée, permet de découpler les mouvements et de fournir une solution simple pour amener le robot d'une posture à une autre. C'est sans doute là une des raisons du succès de ce type de robots. Pour élaborer une stratégie plus fine de déplacement, il est cependant intéressant de savoir comment la posture du robot est reliée à la commande de ses roues.

**Choix de la commande :** En ce qui concerne la commande, si l'on se contente de traiter le cas cinématique, on peut considérer que celle-ci est donnée, au plus bas niveau, par les vitesses de rotation des roues. Ceci étant, on préfère généralement exprimer cette commande par la

vitesse longitudinale du robot, notée  $v$  (en  $O'$ ) et sa vitesse de rotation  $\dot{\theta}$  (autour de  $O'$ ). Il y'a en effet équivalence entre les deux représentations. D'une part, on a :

$$v = \frac{v_d + v_g}{2} = r \frac{\dot{\phi}_g - \dot{\phi}_d}{2} \quad (1.18)$$

D'autre part, la vitesse de rotation du robot est égale à la vitesse de rotation autour du CIR [15] :

$$\omega = \dot{\theta} = -r \frac{\dot{\phi}_d + \dot{\phi}_g}{2L} \quad (1.19)$$

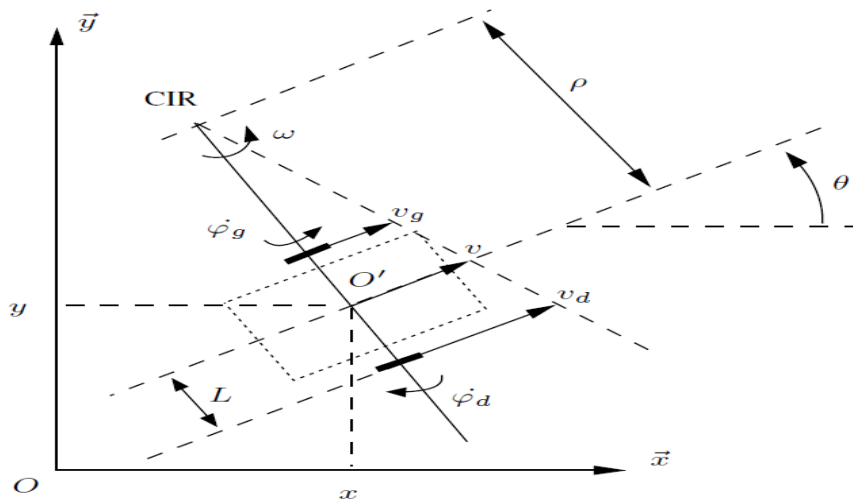


Figure 1.6 :Centre instantané de rotation d'un robot de type unicycle

Conformément à l'équation (1.17). On montre que ces relations sont parfaitement inversibles et qu'il y'a ainsi équivalence entre les couples  $(\dot{\phi}_d, \dot{\phi}_g)$  et  $(v, \omega)$ . Désormais, on utilise plutôt ce dernier couple de grandeurs, plus parlantes, quitte à calculer ensuite les angles ou vitesses de consigne des asservissements des roues.

**Modèle cinématique en posture** : Relier la dérivée de la posture à la commande :  $U = (v, \omega)^T$  est facile. Une simple considération géométrique donne :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos \theta \\ \dot{y} &= v \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \quad (1.20)$$

Ce qui s'écrit, sous forme matricielle :

$$\dot{\varepsilon} = c(q)U \quad (1.21)$$

Avec :

$$c(q) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

Ce modèle est appelé modèle cinématique en posture du robot [16].

**Modèle cinématique en configuration :** Considérons maintenant l'expression des conditions de r.s.g. des deux roues. On transpose les équations (1.5) et (1.6) aux deux roues de l'unicycle. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \dot{x} + L\dot{\theta}\cos\theta + r\dot{\varphi}_d \cos\theta &= 0 \\ \dot{y} + L\dot{\theta}\sin\theta + r\dot{\varphi}_d \sin\theta &= 0 \\ \dot{x} - L\dot{\theta}\cos\theta - r\dot{\varphi}_g \cos\theta &= 0 \\ \dot{y} - L\dot{\theta}\sin\theta - r\dot{\varphi}_g \sin\theta &= 0 \end{aligned}$$

En choisissant  $q = (x, y, \theta, \varphi_d, \varphi_g)^T$  comme vecteur de configuration, ces contraintes se regroupent sous la forme matricielle  $A^T(q)\dot{q} = 0$ , avec :

$$A^T(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & L\cos\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 1 & L\sin\theta & r\sin\theta & 0 \\ 1 & 0 & -L\cos\theta & 0 & -r\cos\theta \\ 0 & 1 & -L\sin\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

On constate que  $A(q)$  n'est pas de rang plein. On peut donc, sans perte d'information, supprimer la dernière ligne et réécrire les contraintes avec :

$$A^T(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & L\cos\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 1 & L\sin\theta & r\sin\theta & 0 \\ 1 & 0 & -L\cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

Par ailleurs il résulte des relations (2.17) et (2.19) la contrainte :  $\dot{\theta} = -r \frac{\dot{\varphi}_d + \dot{\varphi}_g}{2L}$  qui s'intègre en :

$$\theta = -r \frac{\varphi_d + \varphi_g}{2L} + \theta_0 \quad (1.25)$$

Où  $\theta_0$  est la valeur de  $\theta$  à l'initialisation (les angles des roues, généralement mesurés par des codeurs incrémentaux, étant alors choisis nuls). Cette contrainte intégrable est donc en fait une contrainte holonome. On peut donc éliminer une des quatre variables constituant le vecteur  $q$  choisi initialement, qui n'était donc pas constitué de grandeurs indépendantes (et n'était donc pas un vecteur de configuration au sens strict).

En prenant maintenant  $q = (x, y, \theta, \varphi_d)^T$  on trouve :

$$A^T(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & L \cos \theta & r \cos \theta \\ 0 & 1 & L \sin \theta & r \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{Et} \quad B(q) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{r} & -\frac{L}{r} \end{pmatrix}$$

En remarquant, d'après ce qui précède, que :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cdot \cos \theta \\ \dot{y} &= v \cdot \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\varphi}_d &= -\frac{v}{r} - L \frac{\omega}{r} \end{aligned}$$

On constate que, sous forme vectorielle, la dérivée du vecteur de configuration s'écrit :

$$\dot{q} = B(q)U \quad (1.26)$$

Avec pour vecteur de commande cinématique  $U = (v, \omega)^T$ . La matrice  $B(q)$  représente donc le modèle cinématique (en configuration) du robot mobile, ce résultat pouvant se généraliser [17]. On notera que la connaissance de ce modèle n'est pas toujours utile du point de vue pratique. Dans le cas de l'unicycle, étant donné que l'on cherche essentiellement à contrôler la posture du robot et que la variable  $\varphi_d$  n'apparaît pas dans les équations régissant la dérivée de la posture, on se contentera généralement du modèle simplifié :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cdot \cos \theta \\ \dot{y} &= v \cdot \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \quad (1.27)$$

On remarque que dans ce cas précis, le modèle simplifié est le modèle cinématique en posture. Ce n'est cependant pas le cas pour tous les robots mobiles.



### I.4.3 Robots mobiles de type tricycle et de type voiture

Ces robots partagent des propriétés cinématiques proches, raison pour laquelle on les regroupe ici.

#### I.4.3.1 Description

Considérons tout d'abord le cas du tricycle, représenté à la figure (1.7). Ce robot est constitué de deux roues fixes de même axe et d'une roue centrée orientable placée sur l'axe longitudinal du robot. Le mouvement est conféré au robot par deux actions : la vitesse longitudinale et l'orientation de la roue orientable. De ce point de vue, il est donc très proche d'une voiture. C'est d'ailleurs pour cela que l'on étudie le tricycle, l'intérêt pratique de ce type de robot (peu stable) restant limité.

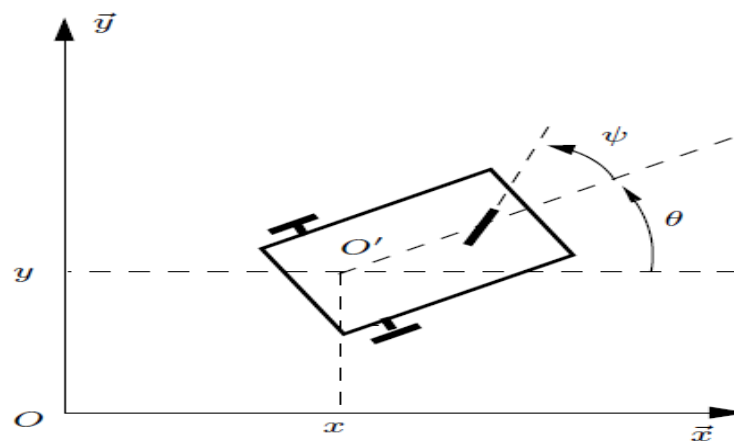


Figure 1.7 : Robot mobile de type tricycle

Le cas du robot de type voiture est très similaire à celui du tricycle. La différence se situe au niveau du train avant, qui comporte deux roues au lieu d'une. Cela va de soi, on rencontre beaucoup plus souvent ce type de systèmes. On parle de robot dès lors que la voiture considérée est autonome [18], [19], donc sans chauffeur ni télépilotage. Il s'agit là d'un des grands défis issus de la robotique mobile. Deux réalisations sont montrées à la figure (2.8), basées sur des voitures de série instrumentées.



Figure 1.8 : Projets de voitures autonomes à l'université de Carnegie Mellon

### I.4.3.2 Modélisation

Considérons tout d'abord le tricycle. Le CIR du robot se situe à la rencontre des axes des roues fixes et de la roue orientable, comme cela est représenté à la figure (1.9). On peut déterminer  $\rho$  de manière géométrique à partir de l'angle d'orientation de la roue avant et  $\omega$  à partir de la vitesse linéaire  $v$  du véhicule (vitesse en  $O'$ ) et de  $\rho$  :

$$\rho = \frac{D}{\tan \varphi} \quad (1.28)$$

$$\omega = \frac{v}{D} \tan \varphi \quad (1.29)$$

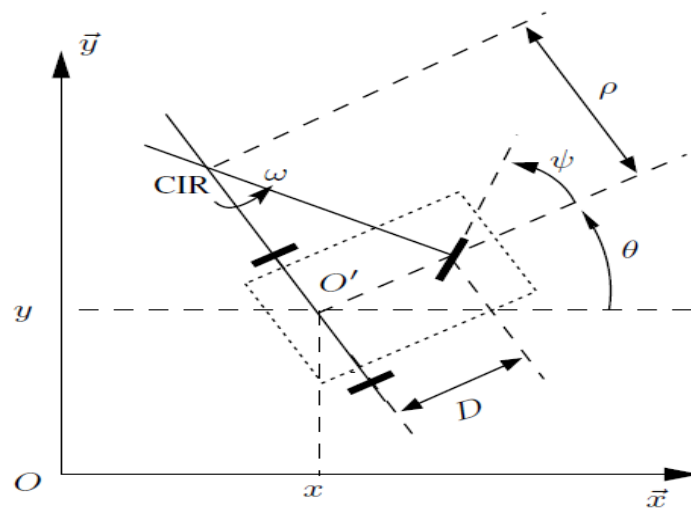


Figure 1.9 : Robot mobile de type tricycle et son CIR

Ce type de robot peut se diriger en ligne droite pour  $\varphi = 0$  et théoriquement tourner autour du point  $O'$  (on pourrait dire sur place) pour  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Néanmoins, le rayon de braquage de la roue orientable, généralement limité, impose le plus souvent des valeurs de  $\varphi$  telles que :

$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ , interdisant cette rotation du robot sur lui-même.

L'écriture des contraintes sur chacune des roues et un raisonnement similaire à celui suivi dans le cas de l'unicycle permettent de déterminer les modèles cinématiques des robots de type tricycle. Toutefois, par un simple raisonnement géométrique, on établit les équations :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos \theta \\ \dot{y} &= v \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \frac{v}{D} \tan \varphi \\ \dot{\varphi} &= \eta\end{aligned}\tag{1.30}$$

Où  $U = (v, \eta)^T$  est le vecteur de commande cinématique,  $\eta$  représentant la vitesse d'orientation imposée à la roue orientable. Ces équations sont celles du modèle cinématique en configuration simplifiée, la configuration associée  $q = (x, y, \theta, \varphi)^T$  ne décrivant pas les rotations propres des différentes roues.

Comme on l'a vu précédemment, l'existence d'un CIR unique impose que les axes des roues du robot soient concourants. Dans le cas du robot de type voiture, cela impose aux roues du train avant de n'avoir pas la même orientation, comme illustré à la figure (1.10). Ainsi, les roues avant d'un robot de type voiture (et a fortiori d'une voiture) ne sont pas parallèles. Le roulement idéal, assurant que le CIR est bien unique, est réalisé sur une voiture par un système de braquage différentiel (dit d'Ackerman). Par ailleurs, les trajectoires des roues n'ayant pas même rayon de courbure, leurs vitesses sont également différentes (et liées évidemment).

L'équivalence entre tricycle et voiture est facile à montrer. Il suffit pour cela de figurer une roue virtuelle qui transformerait un robot de type voiture en tricycle en plaçant la roue orientable du tricycle au centre de l'axe des roues avant de la voiture, orientée de sorte que le CIR reste inchangé, conformément à la figure (1.10).

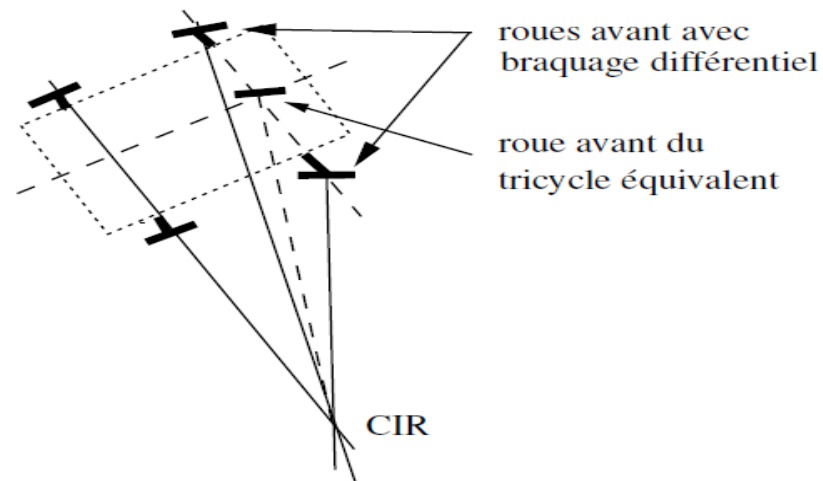


Figure 1.10 : Robot mobile de type voiture et son CIR

#### I.4.4 Robots mobiles omnidirectionnels

##### I.4.4.1 Description

Un robot mobile est dit omnidirectionnel si l'on peut agir indépendamment sur les vitesses : vitesse de translation selon les axes  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  et vitesse de rotation autour de  $\bar{z}$ .

D'un point de vue cinématique on montre que cela n'est pas possible avec des roues fixes ou des roues centrées orientables [11]. On peut en revanche réaliser un robot omnidirectionnel en ayant recours à un ensemble de trois roues décentrées orientables ou de trois roues suédoises disposées aux sommets d'un triangle équilatéral (voir figure 1.11). Du point de vue de la transmission du mouvement, ceci ne va pas sans poser de problème.

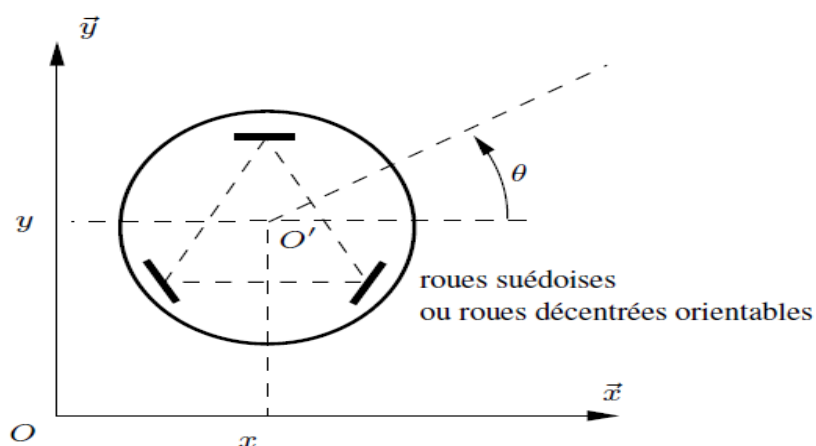


Figure 1.11 : Représentation d'un robot mobile omnidirectionnel

### I.4.4.2 Modélisation

Dans ce cas on peut considérer qu'il est possible de commander directement la posture et le modèle cinématique en posture est donc :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_1 \\ \dot{y} &= v_2 \\ \dot{\theta} &= v_3\end{aligned}\tag{1.31}$$

Où  $u = (v_1 \ v_2 \ v_3)^T$  représente le vecteur de commande. On choisit ainsi généralement ce type de robot pour se dispenser des problèmes de planification et de commande liés à la non-holonomie. L'avantage d'une cinématique extrêmement simple est cependant à mettre en balance avec les inconvénients liés à une localisation odométrique déficiente et à une plus grande complexité mécanique, généralement responsable d'un surcoût. On citera pour mémoire le cas du XR4000 Nomadic représenté à la figure (1.12), disparu en 2000.



Figure 1.12 : Robot mobile omnidirectionnel Nomadic XR4000

# CHAPITRE II

## LA COMMANDE PAR MODE GLISSANT

### II.1 Introduction

Les lois de commande classiques du type PID sont très efficaces dans le cas des systèmes linéaires à paramètres constants. Pour des systèmes non linéaires ou ayant des paramètres non constants, ces lois de commande peuvent être insuffisantes car elles ne sont pas robustes surtout lorsque les exigences sur la précision et autres caractéristiques dynamiques du système sont strictes. On doit faire appel à des lois de commande insensibles aux variations des paramètres, aux perturbations et aux non linéarités. Les lois de commande dite à structure variable constituent une solution à ces problèmes.

La commande à structure variable (CSV) est, par sa nature, une commande non linéaire, elle est basée sur la commutation de fonctions des variables d'état, utilisées pour créer une variété ou hyper surface de glissement, dont le but est de forcer la dynamique du système à correspondre avec celle définie par l'équation de l'hyper surface. Quand l'état est maintenu sur cette hyper surface, le système se trouve en régime glissant. Sa dynamique est alors insensible aux perturbations extérieures et paramétriques tant que les conditions du régime glissant sont assurées.

Dans la pratique, l'utilisation de cette technique de commande a été longtemps limitée par les oscillations liées aux commutations de la commande et qui peuvent se manifester sur les grandeurs asservies. Depuis, de nombreuses solutions ont été proposées permettant de réduire ces oscillations : augmentation de la fréquence de commutation, commande continue dans une bande autour de la variété de glissement ou décomposition de la commande en une composante continue de basse fréquence et une commande discontinue de haute fréquence et la méthode de la couche limite où la composante discontinue de la commande est remplacée au voisinage de l'hyper surface de glissement par une fonction continue.

### II.2 Formalisation classique du régime glissant

Soit le système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{dx_i}{dt} = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

Où les seconds membres  $f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  sont des fonctions continues par morceaux présentant des discontinuités sur une hyper surface  $S$ , d'équation :

$$S(x) = 0, \text{ avec } x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T.$$

Les fonctions  $f$  sont supposées définies dans un domaine  $G$  de l'espace des variables  $(t, x_1, x_2, \dots)$  ; on pose  $f = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)^T$ .

La surface  $S$  sépare l'espace d'état en deux parties  $G^+(S > 0)$  et  $G^-(S < 0)$ , ce qui nous donne au voisinage de la surface  $S$  deux valeurs de  $f$  soit  $f^+$  et  $f^-$  sur la normale à la surface  $S$ , la normale étant orientée de  $G^-$  vers  $G^+$  comme représenté sur la figure (2.1).

Le théorème suivant, dû à Philippov, permet de préciser les conditions d'existence et d'unicité d'une solution  $x(t)$  de (2.1).

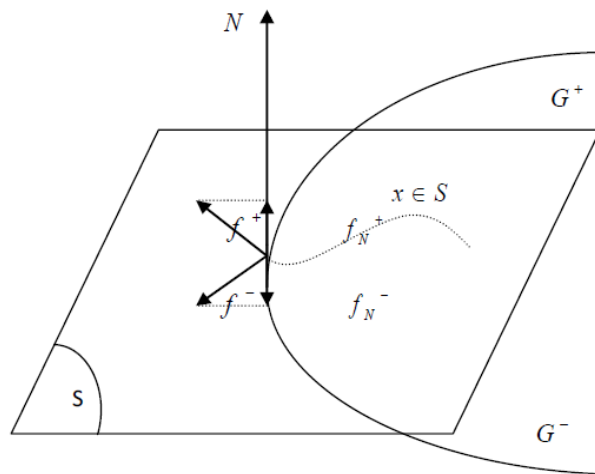


Figure 2.1 : Espace d'état de dimension 3 et surface de glissement de dimension 2

**Théorème :** Soit le système différentiel écrit sous la forme (2.1) satisfaisant la condition :

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq k \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \tag{2.2}$$

$K$  étant une constante arbitraire indépendante de  $t$  et de  $x$ , ces inégalités étant vérifiées pour tout  $t$  dans le domaine  $G = G^+ \cup G^-$  Soit la surface  $S$  deux fois différentiable, chacune des fonctions  $f_N^+$  et  $f_N^-$  étant continue sur  $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  appartenant à  $S$  et le vecteur  $h = f^+ - f^-$  étant continument différentiable. Si en chaque point de la surface  $S$  une inégalité de type  $f_N^- > 0$  ou  $f_N^+ > 0$  est vérifiée (pas obligatoirement la même en tout point de  $S$ ), il existe alors, dans le domaine  $G$ , une solution  $x(t)$  pour (2.1) et les propriétés d'unicité et de dépendance continue de cette solution par rapport aux conditions initiales sont vérifiées. Ce théorème nous amène naturellement à penser que si l'on vérifie à la fois les conditions type  $f_N^- > 0$  et  $f_N^+ > 0$  la surface  $S$  sera attractive au moins dans un petit voisinage de  $S$ , pour

toute solution  $x(t)$  de (2.1), puisque de chaque côté de  $S$ , le vecteur vitesse est dirigé vers  $S$ . Il y a donc un régime glissant limite sur la surface  $S$ .

Supposons que le second membre de ce système possède une discontinuité qui se produise sur la surface  $S$  définie par :

$$S(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (2.3)$$

En dérivant (2.3) par rapport à  $t$ , on aura :

$$\dot{S} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} \cdot f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.4)$$

Le second membre de cette expression n'est autre que le produit scalaire de la normale orientée à la surface  $S$  et du vecteur  $f$ .

Si les conditions du théorème précédent sont vérifiées, on déduit :

$$f_N^+ > 0 \rightarrow S > 0 \text{ et } \dot{S} < 0 \quad (2.5)$$

$$f_N^- < 0 \rightarrow S < 0 \text{ et } \dot{S} > 0 \quad (2.6)$$

D'où

$$f_N^- > 0 \text{ et } f_N^+ < 0 \rightarrow S \cdot \dot{S} < 0 \quad (2.7)$$

L'implication inverse est évidente et nous pouvons donc dire que les conditions  $f_N^- > 0$  et  $f_N^+ < 0$  et  $(S \cdot \dot{S}) < 0$  sont équivalentes.

La condition (2.7) qui assure que la surface  $S$  est attractive pour la trajectoire de phase est l'inégalité fondamentale utilisée pour résoudre le problème de la synthèse (calcul des commandes) d'un système à structure variable commandé en régime glissant ; sous certaines conditions le point représentatif de l'évolution du système dans l'espace de phase peut être maintenu sur une surface qui est choisie a priori. L'état du système bouclé est alors plongé dans l'état du système réduit de dimension inférieure et libre. Dans ce cas, les propriétés dynamiques du système bouclé ne dépendent plus des coefficients de la surface de glissement  $S$ , ce qui explique l'invariance de la structure variable par rapport aux perturbations ainsi que son applicabilité aux systèmes linéaires et non linéaires.

### II.3 Etude de la commande par structure variable en régime glissant

Les résultats sur les équations différentielles à second membre discontinu ont été exploités par Emelyanov et Utkin pour la mise en œuvre d'une commande à structure variable de système



non linéaire. Nous donnons ci-dessous deux expressions équivalentes pour l'équation d'évolution de la solution  $x(t)$ , trajectoire d'état du système en mode de glissement.

### 2.3.1. Equation d'état exprimée à partir du gradient et du produit scalaire

Cette méthode est basée sur les résultats de Philippov qui est l'une des premières méthodes qui a montré l'existence et l'unicité de la solution des systèmes dynamiques à second membre discontinu en régime glissant. Philippov a défini un champ de vecteurs moyen décrivant la trajectoire d'état en mode de glissement idéal. Ce champ de vecteurs moyen est obtenu par la moyenne géométrique ou par une combinaison convexe des champs de vecteurs définis de chaque côté de  $S$  (figure 2.2). Ce champ de vecteurs moyen est tangentiel à la surface de glissement où le mode de glissement existe. Soit le système non linéaire dont le fonctionnement est régi par un système différentiel de type (2.1), dans lequel la variable indépendante  $U$  désigne la commande :

$$\frac{dx}{dt} = f(U, x, t) \quad (2.8)$$

Considérons une commande non linéaire de type discontinu :

$$U = \begin{cases} U^+(x, t) & \dots \dots \dots \text{si} \dots \dots S(x, t) > 0 \\ U^-(x, t) & \dots \dots \dots \text{si} \dots \dots S(x, t) < 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Supposons que la partie droite de l'équation (2.8) présente une discontinuité à la traversée de la surface  $S(x, t)$  figure (2.2).

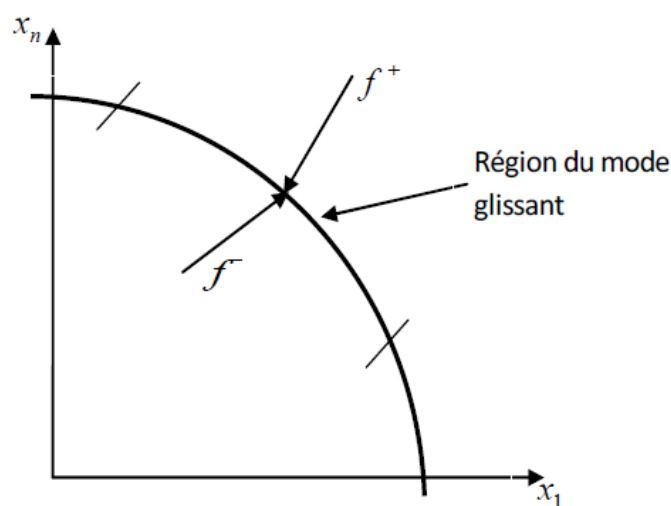


Figure 2.2 : Région du mode de glissement et champ de vecteurs associé selon une coupe de l'espace d'état.

Considérons le cas général d'une surface de glissement  $S(x, t) = 0$  ; la trajectoire d'état du système (2.8) piloté avec la loi de commande (2.9) est solution de l'équation suivante :

$$\frac{dx}{dt} = \mu f^+ + (1 - \mu) \cdot f^- = f^0 \tag{2.10}$$

Avec :

$$0 \leq \mu \leq 1 \quad \text{et} \quad f^0 = (f_1^0 \dots \dots \dots f_n^0) \tag{2.11}$$

$f^0$  Est appelée vitesse d'état moyenne (c'est un champ de vecteurs moyen) sur la trajectoire d'état en mode de glissement idéal. Ce champ de vecteurs moyen est tangentiel à la surface de glissement, il est obtenu par la moyenne géométrique ou par une combinaison convexe des champs de vecteurs définis de chaque côté de  $S$  figure (2.3).

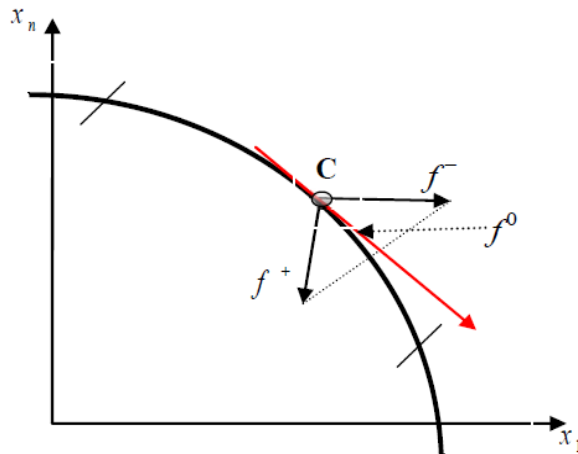


Figure 2.3 : Construction du champ de vecteurs moyen  $f^0$  dans l'espace d'état  $(x_1, \dots, x_n)$

Soit  $\nabla S$  le gradient de  $S(x, t)$  et  $\langle \dots, \dots \rangle$  le produit scalaire de deux vecteurs. En dérivant  $S(x, t) = 0$  par rapport à  $t$ , on aura :

$$\frac{dS(x,t)}{dt} = \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^T \cdot f^0 + \frac{\partial S}{\partial t} = \langle \nabla S, f^0 \rangle + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{2.12}$$

En tenant compte de (2.10) et (2.12) on aura :

$$\mu = \frac{\langle \nabla S, f^- \rangle + \frac{\partial S}{\partial t}}{\langle \nabla S, f^- - f^+ \rangle} \tag{2.13}$$

En portant l'expression de  $\mu$  dans (2.10), l'équation d'état décrivant le système bouclé en régime glissant est :

$$\mu = \left[ \frac{\langle \nabla S, f^- \rangle + \frac{\partial S}{\partial t}}{\langle \nabla S, f^- - f^+ \rangle} \right] \cdot f^+ - \left[ \frac{\langle \nabla S, f^- \rangle + \frac{\partial S}{\partial t}}{\langle \nabla S, f^- - f^+ \rangle} \right] \cdot f^- = f^0 \quad (2.14)$$

Cette équation donne lieu à une détermination de la trajectoire d'état  $x(t)$  en mode de glissement. Nous ferons deux remarques : si  $t_n$  n'est pas explicite alors on a  $x(t)$  fournie par l'équation (2.14) dans laquelle  $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$  ; en plus, la commande  $U$  qui n'est pas explicite dans l'équation (2.14) intervient dans la solution puisque  $f^-$  et  $f^+$  sont fonction de  $U$ .

### II.3.2 Commande équivalente et équation d'état du régime glissant idéal

Soit le système dynamique mono variable décrit par l'équation d'état suivante :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + g(x, t) \cdot U \quad (2.15)$$

Un vecteur de commande équivalente  $U_{eq}$  est défini pour obtenir les équations du régime glissant idéal (sans retard, sans seuil et sans hystérésis). Ce régime ayant lieu sur la surface  $S(x, t) = 0$ , on exprime que :

$$\frac{dS(x, t)}{dt} = 0 \quad (2.16)$$

Cette équation est utilisée pour déterminer  $U_{eq}$

$$\frac{dS(x, t)}{dt} = \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^T \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial S}{\partial t} = \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^T \cdot [f(x, t) + g(x, t) \cdot U_{eq}] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (2.17)$$

D'où :

$$U_{eq}(x, t) = - \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^T \cdot g(x, t) \right]^{-1} \left\{ \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^T \cdot (x, t) + \frac{\partial S}{\partial t} \right\} \quad (2.18)$$

Avec la condition d'existence :

$$\left[ \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^T \cdot g(x, t) \right] \neq 0 \quad (2.19)$$

En portant l'expression de  $U_{eq}(x, t)$  dans l'équation (2.18), la trajectoire de l'état  $x(t)$  décrivant le système en régime glissant est solution de :

$$\frac{dx}{dt} = \left\{ I - g(x, t) \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^T \cdot g(x, t) \right]^{-1} \cdot \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^T \right\} \cdot f(x, t) - g(x, t) \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^T \cdot g(x, t) \right]^{-1} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^T \quad (2.20)$$

L'équation (2.20) est équivalente à (2.14). Le vecteur  $U_{eq}$  a un sens physique que l'on peut déduire des équations (2.15) :

$$U_{min} = \text{MIN}\{U^+(x), U^-(x)\} < U_{eq}(x) < \text{MAX}\{U^+(x), U^-(x)\} = U_{max} \quad (2.21)$$

On peut interpréter  $U_{eq}$  comme la valeur moyenne de  $U(t)$  lors de la commutation rapide entre  $U_{max}$  et  $U_{min}$  comme représenté sur la figure (2.4).

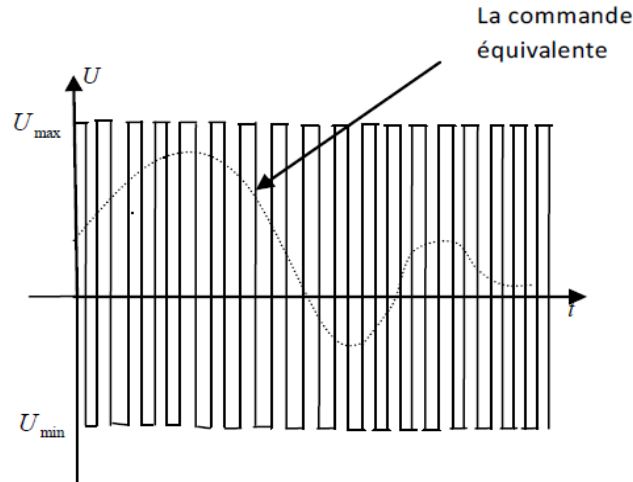


Figure 2.4 : Grandeur de commande équivalente  $U_{eq}$

## II.4. Formalisation par la géométrie différentielle pour l'analyse et la synthèse des régimes glissants

Dans cette seconde formalisation nous utilisons des outils de base de la géométrie différentielle pour la synthèse des régimes glissants.

### II.4.1 Mode de glissement

Soit le système dynamique non linéaire décrit par l'équation (2.22) dans lequel le temps ne figure pas explicitement :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + g(x, t). U \quad (2.22)$$

Où  $x \in X$  un ouvert de  $R^n$ ,  $f(x)$  et  $g(x)$  des champs de vecteurs définis sur  $R$  avec  $g(x) \neq 0; \forall x \in X, f(x) = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T, g(x) = [g_1, g_2, \dots, g_n]^T$

La fonction de commande  $U$  définie dans  $R, U : R^n \rightarrow R$ . Supposons que la fonction commande subisse une discontinuité de premier ordre sur une surface définie par une fonction continue  $S : X \rightarrow R$ , dont le gradient est non nul sur  $X$ . L'ensemble suivant noté  $S$  sera défini ainsi :

$$S = \{x \in R^n : S(x) = 0\} \quad (2.23)$$

Nous avons vu au paragraphe (2.3.1) que dans un système à structure variable, la condition de régime glissant entraînait l'introduction dans le régulateur d'une commutation de la commande entre deux valeurs différentes suivant le signe de  $S(x)$  :

$$U = \begin{cases} U^+(x, t) & \text{si } S(x, t) > 0 \\ U^-(x, t) & \text{si } S(x, t) < 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

La commande  $U$  prend ainsi la valeur de deux fonctions continues en  $x$  et possède une discontinuité avec  $(U^+(x) > U^-(x))$  sur la variété formée par la surface de glissement dans l'espace d'état.

Nous désignons par  $L_{h\sigma}$  comme spécifié par [20], la dérivée directionnelle de la fonction scalaire  $\sigma$  suivant le champ de vecteurs  $h$ . A l'aide de la commande  $U$  définie en (2.24), la commutation d'une valeur à l'autre s'effectue à la traversée d'une hyper surface de l'espace des phases du système de façon à contraindre le point représentatif du mouvement du système à rester sur cette hyper surface. On dit alors que le système est en régime glissant sur  $S$  chaque fois que :

$$\lim(L_{f+g.U^+} S < 0) \text{ et } \lim(L_{f+g.U^-} S > 0) \quad (2.25)$$

Puisque  $\nabla S$  désigne le gradient de  $S(x)$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire de deux vecteurs la condition précédente (2.25) s'écrit sous la forme :

$$\lim(\langle \nabla S, f + g.U^+ \rangle < 0) \text{ et } \lim(\langle \nabla S, f + g.U^- \rangle > 0) \quad (2.26)$$

Cette condition est équivalente à la condition classique (2.7) et traduit le résultat suivant : La surface  $S$  sépare  $G$  (domaine de l'espace des variables  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ) en deux parties  $G^+(S > 0)$  et  $G^-(S < 0)$  si dans un petit voisinage les projections  $f + g.U^+$  et  $f + g.U^-$  sur le vecteur gradient de  $S$  sont de signes contraires, alors la surface  $S$  sera attractive et les champs commandés se dirigent vers cette surface de commutation. La figure (2.5) suivante est à rapprocher de la figure (2.2).

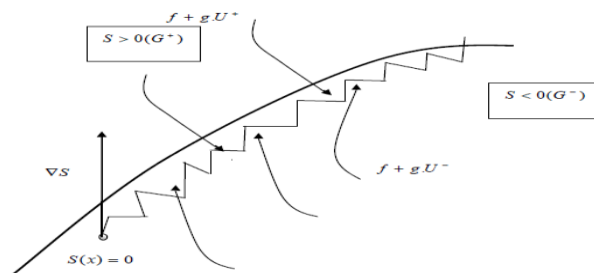


Figure 2.5 : Commutation de champs de vecteurs sur la variété  $S$

### II.4.2 Commande équivalente et condition de glissement

Le vecteur des commandes équivalentes  $U_{eq}$  est défini pour obtenir les équations du régime glissant idéal, dans ce cas la commutation se traduit par une oscillation de fréquence infinie et d'amplitude nulle. Le point représentatif du mouvement du système glisse alors parfaitement sur la surface de commutation. Ceci est expliqué par le fait que la surface de glissement porte dans ce cas la trajectoire du système dans l'espace des phases. Le mouvement glissant idéal est décrit en utilisant les conditions d'invariances suivantes :

$$S(x, t) = 0 \text{ et } L_{f+g.U_{eq}} \cdot S = \langle \nabla S, f + g \cdot U_{eq} \rangle = 0 \quad (2.27)$$

Où  $U_{eq}$  est une loi de commande pour laquelle  $S$  est une variété locale invariante.

De l'équation (2.27), on déduit la commande équivalente :

$$U_{eq} = -\frac{\langle \nabla S, f \rangle}{\langle \nabla S, g \rangle} = -\frac{L_f \cdot S}{L_g \cdot S} \quad (2.28)$$

Cette expression pour la commande équivalente est en effet égale à l'expression de l'équation (2.18).

Notons par  $T_x X$  l'espace tangent à  $X$  et soit  $\Delta_S(x)$  un sous espace de  $T_x X$  tel que  $\langle \nabla S, \Delta_S(x) \rangle = 0$ , c'est-à-dire  $\Delta_S(x) = \ker \nabla S$ .

Où  $\Delta_S(x)$  est appelée distribution glissante associée à  $S$  et  $\ker$  représente le noyau de  $\nabla S$ .

Les conditions d'invariance (2.27) conduisent à :

$$f + g \cdot U_{eq}|_{S=0} \in \ker \nabla S = \Delta_S(x) \quad (2.29)$$

L'équation (2.29) est équivalente à l'équation (2.18) dans le formalisme classique.

La dynamique du système commandé en mode de glissement idéal est alors décrite par :

$$\frac{dx}{dt} = f + g \cdot U_{eq} \quad (2.30)$$

Cette dynamique ne dépend que des coefficients de  $S = 0$ , hyper surface sur laquelle se trouve la trajectoire  $x(t)$  de solution (2.22).

### II.4.3 Condition d'existence et d'unicité de la commande équivalente

**Définition :** Une condition nécessaire et suffisante pour définir une commande équivalente est que la condition de transversalité :

$$\langle \nabla S, g \neq 0 \rangle \quad (2.31)$$

Soit localement satisfaite sur  $S$ .

**Définition:** Si le régime glissant existe localement sur  $S$  alors :

$$L_g S = \langle \nabla S, g \rangle < 0 \quad (2.32)$$

Une condition nécessaire et suffisante d'existence locale des régimes glissants sur  $S$  est que localement dans  $X$ :

$$U^-(x) < U_{eq}(x) < U^+(x) \quad (2.33)$$

#### II.4.4 Dépendance et indépendance du régime glissant idéal vis-à-vis des champs de vecteurs $f(x)$ et $g(x)$

A partir de l'expression de la commande équivalente, donnée par (2.18) et (2.28) le mouvement du système sur  $S$ , dû à la commande équivalente est donné par :

$$\dot{x} = f(x) + g(x).U_{eq}(x) = \left[ I - g(x). \left( (\nabla S, g(x)) \right)^{-1} . \nabla S \right] f(x) \quad (2.34)$$

Cette dernière équation caractérise le système en mode de glissement idéal. La condition d'invariance de la variété donnée en (2.29) sera de la forme :

$$\dot{x} = f(x) + g(x).U_{eq}(x) = F.f(x) \in \ker \nabla S(x) = \Delta_s(x) \quad (2.35)$$

Ou :

$$F = \left[ I - g(x). \left( (\nabla S, g(x)) \right)^{-1} . (\nabla S) \right] \quad (2.36)$$

Représente l'opérateur de projection sur l'espace  $T_x X$ .

Le long de la distribution  $\Delta_s(x)$ , seules les composantes du champ de vecteurs  $f$  définissent la nature du mode de glissement idéal. Montrons en effet que le champ de vecteurs  $g$  n'a aucune influence dans le mode de glissement idéal.

Pour cela, considérons la distribution  $G : x \rightarrow \text{span} \{g(x)\}$ , avec  $\text{span} \{g(x)\}$  l'espace engendré par la base  $g(x)$ . Soit une distribution de champ de vecteurs  $\Delta G \text{span} (g(x))$ .

C'est-à-dire des vecteurs de la forme  $g(x).U(x)$ .

Considérons l'expression donnée par  $F.g(x).U(x)$ , on aura :

$$\begin{aligned} & \left[ I - g(x). \left( (\nabla S, g(x)) \right)^{-1} . (\nabla S) \right] . g(x)U(x) = \\ & \left[ I - g(x). \left( (\nabla S, g(x)) \right)^{-1} . (\nabla S, g(x)) \right] U(x) = 0. U = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ainsi, le champ de vecteurs  $g(x)$  n'intervient pas dans le mode de glissement idéal défini par (2.35).

#### II.4.5 Invariance des régimes glissants par rapport aux perturbations

Considérons le système dynamique perturbé suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + g(x, t) \cdot U(t) + \xi \quad (2.38)$$

Avec :

$$\xi = \partial f(x) \quad (2.39)$$

$\xi$  représente les perturbations paramétriques du champ de vecteurs nominal  $f$ . On dit que le régime glissant possède une propriété d'invariance forte vis-à-vis du vecteur perturbateur  $\xi$ , chaque fois que  $\xi$  satisfait la définition suivante :

**Définition :** Le régime glissant idéal jouit de propriété d'invariance forte par rapport au signal de perturbation  $\xi$  chaque fois que la dynamique du système en mode de glissement idéal est indépendante du signal de perturbation  $\xi$

Le régime glissant sur la variété  $S$  du système perturbé (2.38) satisfait les propriétés d'invariance vis-à-vis de  $\xi$  si et seulement si le vecteur de perturbations satisfait la condition suivante :  $\xi \in \text{span} \{g(x)\}$ , où  $\text{span}$  représente l'espace engendré par la base  $g(x)$ .

Pour le système dynamique perturbé (2.38), le régime glissant idéal est gouverné par :

$$dx/dt = F(f + \partial f) \quad (2.40)$$

Avec  $F$  l'opérateur de projection et  $\partial f = \xi$

La condition nécessaire vient du fait que si :

$$F \cdot \xi = [I - g(x) \cdot ((\nabla S, g(x)))^{-1} \cdot (\nabla S)] \cdot \xi = 0 \quad (2.41)$$

Alors on déduit :

$$\xi = \{g(x) \cdot ((\nabla S, g(x)))^{-1} \cdot (\nabla S)\} \cdot \xi = g(x) \mu(x) \quad (2.42)$$

C'est-à-dire  $\xi \in \text{span} g(x)$  pour toute fonction scalaire continue  $\mu(x)$ .

La condition suffisante vient du fait que si  $\xi \in \text{span} g(x)$ , soit  $\xi = g(x) \cdot \vartheta(x)$  pour toute fonction scalaire continue  $\vartheta(x)$ , alors tenant compte de (2.37) l'opérateur de projection  $F$  annule l'influence de sur la dynamique équivalente.



Soit  $\xi \in \text{span } g(x)$  et  $U_{eq}(x)$  la commande équivalente correspondante au régime sur  $S$  du système non perturbé (2.22). Soient  $U^+(x)$  et  $U^-(x)$  les bornes fixes de la loi de commande à structure variable, avec  $U^+(x) > U^-(x)$  localement dans  $x$ . Si le régime glissant existe pour le système perturbé (2.34) alors, nécessairement, le vecteur perturbateur s'écrit  $\xi = g(x) \cdot \vartheta(x)$ .

Avec  $\vartheta(x)$  une fonction scalaire continue bornée.

$$U^-(x) - U^+(x) > \vartheta(x) > U^-(x) - U^+(x) \quad (2.43)$$

## II.5 Étude de la commande par mode de glissement

La commande par mode de glissement est une commande à structure variable (VSS variable structure system) qui est basée essentiellement sur la résolution des équations différentielles à seconds membres discontinus, initiée par le mathématicien soviétique Philippov. Le véritable essor de l'utilisation de cette technique date de la parution de livres d'Itkis. Cette technique de commande a reçu un intérêt sans cesse croissant en raison de sa simplicité d'élaboration et de son application dans divers domaines de l'automatique et de l'électronique de puissance. Le principe de la commande est de contraindre le système à atteindre une surface prédéfinie et d'y rester par la suite malgré d'éventuelles perturbations. La surface choisie (représentant un ensemble de relations, statique et entre les variables d'état) est alors désignée comme étant la surface de glissement ou de commutation. Le comportement dynamique résultant appelé régime glissant est complètement déterminé par les paramètres de cette surface. Un des avantages de la commande par modes de glissements est notamment la robustesse par rapport aux perturbations intervenant de façon colinéaire avec l'entrée (conditions de recouvrement).

Dans la pratique, l'utilisation de la commande a été longtemps limitée par des oscillations liées aux commutations de la commande : des oscillations hautes fréquences apparaissant dans un voisinage de la surface, connues sous le nom de réticence ou broutement. Ce phénomène peut en outre exciter des dynamiques non modélisées conduisant à des situations d'instabilité. Ceci a conduit certains chercheurs à donner des solutions pour supprimer ou du moins réduire ce phénomène indésirable.

La commande à structure variable (par modes de glissement) est une commande non linéaire, elle est caractérisée par la discontinuité de la commande aux passages d'une surface de commutation appelée surface de glissement. Dans cette étude, nous donnons une définition

du concept de système à structure variable et nous exprimons les caractéristiques essentielles de cette loi de commande à partir de différents outils théoriques de l'automatique linéaire et non linéaire.

### II.5.1 Principe de la commande par modes de glissement

Le principe de la commande par modes de glissement et de contraindre le système à atteindre la surface donnée appelée surface de glissement, en fonction des objectifs de la commande fixant la dynamique en boucle fermée : c'est le mode de convergence. Puis par la synthèse d'une commande discontinue qui permet aux trajectoires du système à atteindre, et rester sur cette surface : c'est la surface de glissement et le mouvement qui se produit le long de celle-ci est appelé mouvement de glissement.

La trajectoire dans le plan de phase est constituée de trois parties distinctes [21] :

- Le mode de convergence « MC » : C'est le mode durant lequel l'état du système se déplace à partir de n'importe quel point initial dans le plan de phase et tend vers la surface de commutation  $s(x)=0$ . Ce mode est caractérisé par la loi de commande et le critère de convergence.
- Le mode de glissement « MG » : C'est le mode durant lequel la variable d'état a atteint la surface de glissement et tend vers l'origine du plan de phase. La dynamique de ce mode est caractérisée par le choix de la surface de glissement  $s(x)=0$ .
- Le mode du régime permanent « MRP » : Ce mode est ajouté pour l'étude de la réponse du système autour de son point d'équilibre (origine du plan de phase), il est caractérisé par la qualité et les performances de la commande.

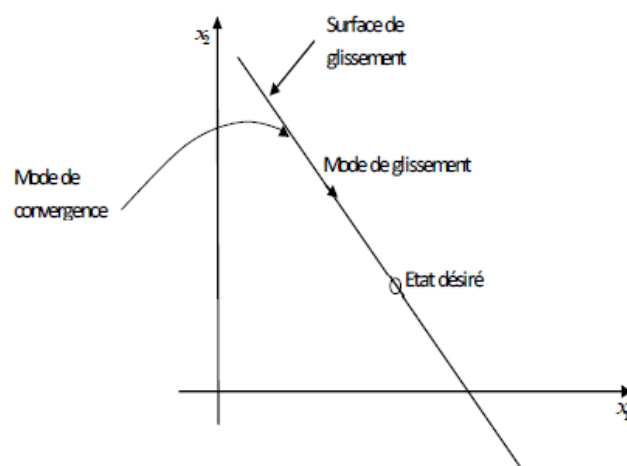


Figure 2.6 : Différents modes de convergence pour la trajectoire d'état

### II.5.2 Conception de la commande par mode glissant

Les avantages de la commande par mode glissant sont importants et multiples, entre autres, la haute précision, la bonne stabilité, la simplicité, l'invariance, la robustesse...etc. Ceci lui permet d'être particulièrement adaptée pour les systèmes ayant des modèles imprécis [22]. La conception de la commande peut être effectuée en trois étapes principales très dépendantes l'une de l'autre :

- Choix de la surface.
- Etablissement des conditions d'existence.
- Détermination de la loi de commande.

### II.5.3 Choix de la surface de glissement

La surface de glissement peut être linéaire ou non linéaire, elle est construite de telle sorte que le système ait toujours une dynamique désirée et est généralement choisie avec un degré relatif égal à un (i.e. la dérivée de la surface  $S(x)$  par rapport au temps fait apparaître explicitement la commande  $U$ ). Pour les systèmes d'ordre entier, plusieurs formes d'écriture sont proposées dans [23].

Considérons une classe de systèmes non linéaires (2.45), le vecteur de surface a la même dimension que le vecteur de commande  $u$ .

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t).u \quad (2.44)$$

Où :

$x = (x_1, x_2, x_3, \dots \dots \dots x_n)^T$  Appartient à  $X$  est le vecteur d'état de système

$u = (u_1, u_2, u_3, \dots \dots \dots u_n)^T$  Vecteur de commande.

$f, g$  Sont des champs du vecteur suffisamment différentiables définis sur  $X$

La surface est donnée par :

$$S_j(x) = \sum_{i=1}^n c_{ji}.e_{ji} \quad (2.45)$$

Où :  $s_i = 0$  est la fonction de commutation, elle sépare l'espace d'état en deux parties disjointes  $s(x, t) < 0$  et  $s(x, t) > 0$ .

$S(x) = [S_1(x), S_2(x), \dots \dots \dots S_m(x)]$  : Vecteur de la surface de glissements.

$x_{ref1} = (x_{ref1}, x_{ref2}, \dots \dots \dots x_{refn})^T$  : Vecteur de référence (l'état désiré).

$e_i = x_i - x_{refi}$  L'erreur entre la variable à commander et sa référence.

$e_i = (e_1, e_2, e_3, \dots, \dots, \dots, e_n)^T$  : Vecteur de l'écart.

$C_{ij}$ : Paramètres de la surface de glissement.

$C$  : Matrice d'éléments de  $m \times n$  paramètres de la surface (matrice de pente de la droite de surface).

Le choix des paramètres de la surface se fait de façon satisfaisant les performances désirées. Slotine propose une forme d'équation générale pour déterminer la surface de glissement qui assure la convergence d'une variable vers sa valeur désirée.

$$S(x) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right)^{r-1} . e(x) \quad (2.46)$$

Avec :

$$e_i = x_i - x_{refi} \quad (2.47)$$

$\lambda$ : Une constante positive

$r$  : degré relatif, égal au nombre de fois qu'il faut dériver la sortie pour faire apparaître la commande.

$S(x) = 0$  est une équation différentielle linéaire dont l'unique solution est :  $e(x) = 0$ , ceci implique que l'état du système est égal à l'état désiré.

### II.5.4 Principe d'invariance

Cette propriété nécessite toutefois que certaines hypothèses appelées (matching conditions) soient vérifiées par les perturbations [24].

$$\dot{x} = (A + \Delta A).x(t) + B.u(t) + f(t) \quad (2.48)$$

Où :  $\Delta A$  et  $f(t)$  sont respectivement le terme d'erreurs de modélisation et une perturbation externe.

**Définition** : *matching conditions*.

$\Delta A$  et  $f(t)$  vérifient l'hypothèse des matching conditions s'il existe  $\Delta \tilde{A} \in R^{n \times m}$  et

$\Delta \tilde{f} \in R^{n \times m}$  Telles que :

$$\Delta A = B. \Delta \tilde{A} \quad \text{et} \quad \Delta f = B. \Delta \tilde{f} \quad (2.49)$$

La signification physique de cette hypothèse est que l'on considère des incertitudes de modélisation ou une perturbation attaquant le système par la matrice d'entrée.

## II.5.5 Conditions de convergence et d'existence

Les conditions d'existence et de convergence sont les critères qui permettent aux différentes dynamiques du système de converger vers la surface de glissement et d'y rester, indépendamment de la perturbation. Il existe deux considérations pour assurer le mode de convergence.

### II.5.5.1 La fonction discrète de commutation

Cette approche est la plus ancienne. Elle est proposée par Emelyanov et Utkin. Il s'agit de donner à la surface une dynamique convergente vers zéro. Elle est donnée par :

$$U = \begin{cases} \dot{S}(x) > 0 \dots \dots si \dots \dots S(x, t) < 0 \\ \dot{S}(x) < 0 \dots \dots si \dots \dots S(x, t) > 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

Cette condition peut être formulée comme suit :

$$\dot{S}(x).S(x) < 0 \quad (2.51)$$

Elle est globale mais ne garantit pas en revanche un temps d'accès fini. Cette condition est toutefois difficile à utiliser pour faire la synthèse de la loi de commande.

### II.5.5.2 La fonction de Lyapunov

La fonction de Lyapunov est une fonction scalaire positive  $V(x) > 0$  pour les variables d'état du système. La loi de commande doit faire décroître cette fonction  $\dot{V}(x) < 0$ . L'idée est de choisir une fonction scalaire  $S(x)$  pour garantir l'attraction de la variable à contrôler vers sa valeur de référence et de concevoir une commande  $u$  telle que le carré de la surface correspond à une fonction de Lyapunov. Nous définissons la fonction de Lyapunov comme suit :

$$V(x) = \frac{1}{2} S^T(x) S(x) \quad (2.52)$$

La dérivée de cette fonction est :

$$\dot{V}(x) = S(x)\dot{S}(x) \quad (2.53)$$

Pour que la fonction puisse décroître  $V(x) < 0$ , il suffit d'assurer que sa dérivée soit négative. Ceci n'est vérifiée que si la condition (2.51) est vérifiée.

### II.5.6 Synthèse de la commande

Une fois la surface de glissement choisie, ainsi que le critère de convergence, il reste à déterminer la condition nécessaire pour ramener la variable à contrôler vers la surface et ensuite vers son point d'équilibre en maintenant le mode de glissement.

#### II.5.6.1 Méthode de Philippov

L'une des premières approches est la méthode de Philippov. Cette approche est basée sur les résultats des travaux effectués par ce dernier sur les équations différentielles à second membre discontinu. Il propose une loi de commande qui prend deux valeurs suivant le signe de la surface de glissement :

$$U = \begin{cases} U^+(x) & \dots \dots \dots \text{si} \dots \dots S(x, t) > 0 \\ U^-(x) & \dots \dots \dots \text{si} \dots \dots S(x, t) < 0 \end{cases} \quad (2.54)$$

$U^-, U^+$  Sont des fonctions continues, avec  $U^+ \neq U^-$ .

Cette commande  $u$  de nature discontinue va contraindre la trajectoire du système à atteindre la surface de glissement et de rester au voisinage de celle-ci malgré la présence de perturbations.

#### II.5.6.2 Méthode de la commande équivalente d'Utkin

Cette méthode décrit la dynamique du système sur la surface de glissement. Elle permet de garder la variable contrôlée sur cette surface en imposant la valeur désirée en régime permanent de la grandeur d'entrée. Pour un système contrôlé donné, la première étape pour la réalisation d'une structure de régulation par ajout de la commande équivalente consiste à trouver un vecteur d'entrée équivalent  $U_{eq}$  de sorte que la trajectoire d'état du système à contrôler reste sur la surface de glissement prédéfinie.

Lorsque le système est en régime glissant, la trajectoire restera sur la surface de commutation. Cela peut être exprimé par :

$$S(x, t) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{S}(x, t) = 0 \quad (2.55)$$

La commande équivalente est une fonction continue qui sert à maintenir la variable à contrôler sur la surface de glissement.

La condition (2.55) est appelée la condition de l'invariance de la surface de glissement.

Nous prenons  $S(x, t) = S(x(t)) = S(x)$ .

$$\dot{S} = 0 \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial x} (f(x) + g(x).U_{eq}) = 0 \quad (2.56)$$

$U_{eq}$  Appelée commande équivalente est associée au système nominale. Elle est déterminée d'une façon unique par la condition de l'invariance (2.55). En supposant que  $\frac{\partial S}{\partial x} g(x) \neq 0$ , la commande équivalente est donnée par le scalaire :

$$U_{eq} = - \left( \frac{\partial S}{\partial x} g(x) \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} f(x) \quad (2.57)$$

Physiquement, la commande équivalente représente la valeur moyenne de  $u$  qui maintient l'état du système sur la surface de glissement  $S(x) = 0$ . L'équation du régime glissant idéal est obtenue en portant l'expression de  $U_{eq}$  dans (2.44) :

$$\dot{x} = f(x) - g(x) \left( \frac{\partial S}{\partial x} g(x) \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} f(x) \quad (2.58)$$

$\frac{\partial S}{\partial x}$  Étant non nul sur  $X$ , ceci implique  $m$  états en fonction de  $(m-n)$  autres. Ainsi, en régime glissant, la dynamique du système évoluant sur l'espace d'état est réduite de dimensions  $(m-n)$ . On aura alors  $m$  valeurs propres nulles et  $(m-n)$  valeurs propres non nulles.

## II.5.7 Les nouveaux concepts de la commande par mode de glissement

Il y'a plusieurs nouveaux concepts de la commande par le glissement des VSS, telle que l'approche développée par Gao et Hung et les approches basées sur la géométrie différentielle ainsi que l'algèbre différentielle [25]. Nous allons présenter les différentes approches définies.

### II.5.7.1 Commande basée sur l'approche de la loi d'arrivée

Dans cet approche la loi d'arrivée est directement une équation différentielle spécifiant la dynamique de la fonction de commutation, cette équation asymptotiquement stable est la même que la condition de glissement, La forme générale de la loi d'arrivée est :

$$\dot{S}(x) = -Q \cdot \text{sign}(s(x)) - K \cdot S(x) \quad (2.59)$$

Ou :

$$Q: \text{diag} [q_1, q_2, \dots, q_m], q_i > 0$$

$$\text{sign}(S) = (\text{sign}(S_1), \text{sign}(S_2), \dots, \text{sign}(S_n))^T$$

$$K: \text{diag}(K_1, K_2, \dots, K_m)^T, K_i > 0$$

Trois cas spéciaux pratiques de (2.59) sont donnés ci-dessous et développés dans [25]

### A. Loi d'arrivée avec une vitesse constante

La loi d'arrivée dans ce cas est donnée par :

$$\dot{S}(x) = -Q \cdot \text{sign}(S(x)) \quad (2.60)$$

Cette loi force la trajectoire d'état à atteindre la surface de glissement à vitesse constante qui dépend de la valeur de  $Q$ . Cette loi force la fonction de commutation  $S(x)$  à atteindre l'hyperplan de commutation  $S$  à une vitesse de commutation. Le choix  $Q$  dans ce cas doit éviter à la fois un temps d'attractivité long et la production de grandes oscillations connues sous le nom de réticence, figure (2.7).

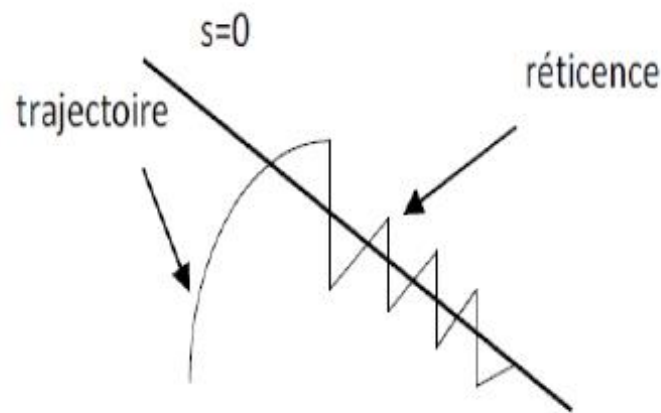


Figure 2.7 : Phénomène de broutement

### B. Loi d'arrivée avec une vitesse constante et à action proportionnelle

L'addition du terme proportionnel ( $-K \cdot S(x)$ ) fait que la trajectoire d'état est forcée de s'approcher de la surface de glissement plus vite lorsque  $S(x)$  est grand. Plus  $K$  est grand, plus le temps d'attractivité est rapide ; tandis qu'une petite valeur de  $Q$  réduit les oscillations. La loi d'arrivée dans ce cas est :

$$\dot{S}(x) = -Q \cdot \text{sign}(S(x)) - K \cdot S(x) \quad (2.61)$$

Le temps d'arrivée pour que  $x$  se déplace de l'état initial  $x_0$  vers l'hyperplan est fini et il donné par :

$$T_i = \frac{1}{k_i} \ln \frac{k_i |S_i| + q_i}{q_i} \quad (2.62)$$

### C. Loi d'arrivée avec une puissante vitesse

La loi dans ce cas est :



$$\dot{S} = -k_i |S_i|^\alpha \text{sign}(S_i), \text{ avec } 0 < \alpha < 1, i = 1 \dots \dots \dots m \quad (2.63)$$

Cette loi d'arrivée augmente la vitesse quand l'état du système est loin de l'hyperplan de commutation, et le réduit lorsque l'état est près. Le temps d'arrivée sera :

$$T_i = \frac{1}{(1-\alpha)k_i} \cdot S_{i0}(1 - \alpha) \quad i = 1 \dots \dots \dots m \quad (2.64)$$

### II.5.7.2 Commande continue par Bande de surface

Deux solutions analytiques sont proposées.

#### A. Première Forme continue de saturation (quasi- sliding mode)

Elle consiste à approximer la commande discontinue par la loi continue au voisinage de la surface. Le problème principal des régimes glissants est que la commande est discontinue sur la surface de glissement et par conséquent, elle va commuter régulièrement (chattering). Pour résoudre ce problème, la fonction discontinue est remplacée par une fonction continue ceci au voisinage de la surface de glissement et l'on procédera à un lissage de la commande. Ainsi, on définira une "condition d'équilibre", qui doit remplacer toutes les fonctions discontinues apparaissant au voisinage de cette surface de glissement.

Le "chattering" étant indésirable, on peut remédier à cette situation en lissant la discontinuité de la commande dans une étroite bande limite avoisinant la surface de glissement (de commutation), ainsi cette bande limite sera définie par :

$$B(t) = \{X; S(x, t) \leq \emptyset\} \quad \text{et} \quad \emptyset > 0 \quad (2.65)$$

Avec :

$\emptyset$  Est l'épaisseur de la bande, variant en fonction de t.

$\varepsilon = \frac{\emptyset}{\lambda^{n-1}}$  Est la largeur de la bande.

Ce lissage sera réalisé, en choisissant en dehors de la bande  $B(t)$  une loi de commande comme auparavant satisfaisant la condition de glissement qui garantira l'attraction vers la bande et donc l'invariance positive : c'est-à-dire que toutes les trajectoires commençant dans  $B(t = 0)$  restent à l'intérieur de  $B(t)$ .

Cette nouvelle loi de commande est établie en remplaçant dans l'expression de la commande  $u(t)$ , le terme  $\text{sign}(S)$  par la fonction  $S/\emptyset$ , ceci à l'intérieur de la bande  $B(t)$ , comme illustré sur la figure (2.8).

L'épaisseur de la bande  $\emptyset$  sera variable dans le temps et variera de façon à exploiter toujours la largeur de la bande maximale de la commande.

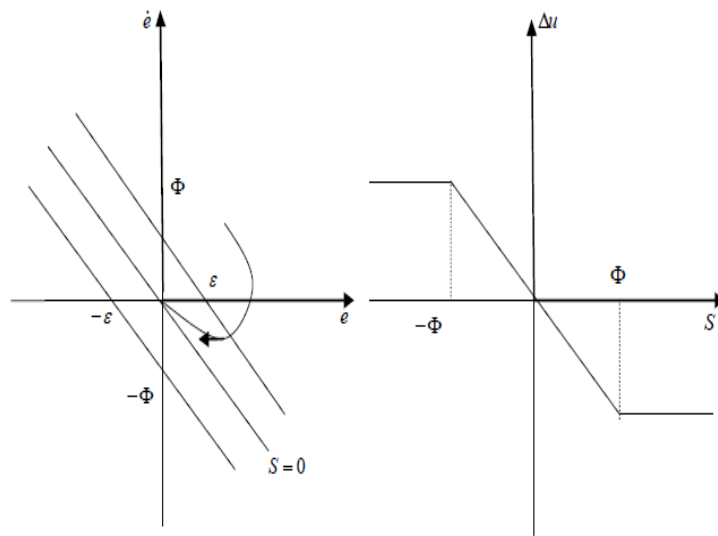


Figure 2.8 : Plan de phase et fonction de commutation de la commande par régime glissant à bande limite.

Dans cette approche Slotine a proposé de remplacer la fonction signe  $u = -K \cdot \text{sign}(S)$  (dans le voisinage de la surface de commutation) de la loi de commande par la fonction «  $\text{sat}(S)$  », figure (2.9).

Donc la commande discontinue devient alors :

$$u = -K \cdot \text{sign}(S) \tag{2.66}$$

Où :

$$\text{sat}(S) = \begin{cases} \frac{S}{\Phi} & \dots \dots \dots \text{si} \dots \dots \dots |S| < \Phi \\ \text{sign}(S) & \dots \dots \dots \text{si} \dots \dots \dots |S| > \Phi \end{cases} \tag{2.67}$$

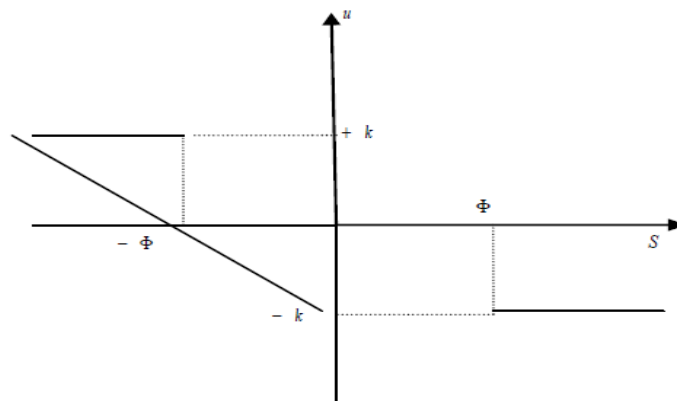


Figure 2.9 : Loi de commande par bande continue au voisinage de la surface de glissement

### B. Deuxième forme continue (quasi-sliding mode)

Une autre solution pour lisser la commande au voisinage des surfaces de commutation  $S_i = 0$  est proposée dans [26], elle consiste à remplacer dans la bande  $|S_i| < \Phi$  les fonctions discontinues  $sign(S_i)$  par des fonctions continues de la forme  $\theta(S)$  et la commande discontinue sera alors  $\Delta u = -K\theta(S)$  où :

$$\theta = \begin{cases} \frac{S}{|S|+\delta} \dots \dots si \dots \dots |S| \leq \Phi \\ sign(S) \dots \dots si \dots \dots |S| > \Phi \end{cases} \quad (2.68)$$

Ceci est illustré sur la figure (2.10).

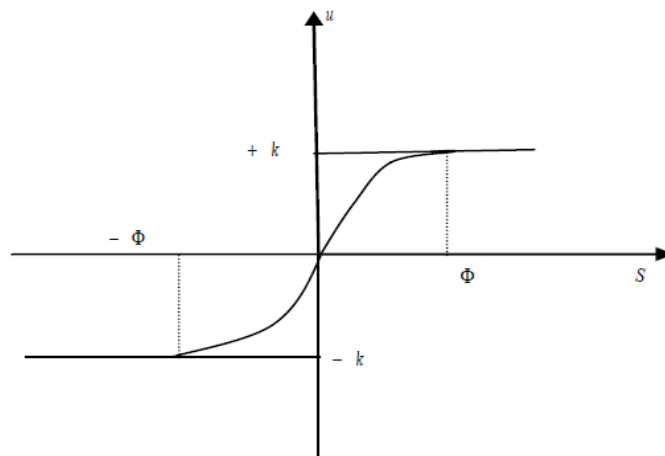


Figure 2.10 : Loi de commutation au voisinage de la surface de glissement

Cette loi de commutation a par conséquent un grand avantage dans la réduction du phénomène de broutement, mais les chercheurs n'ont pas cessé de proposer des approches pour éviter d'une manière complète ce phénomène. Dans la suite nous exprimons une nouvelle approche qui a été proposée par Park et al et qui a un rôle très important pour l'évitement de ce phénomène.

#### II.5.7.3 Commande robuste (Fast Terminal Sliding Mode Control)

Cette nouvelle approche peut converger l'état du système vers zéro dans un temps fini, elle ne possède pas de fonction discontinue  $signet$  permet d'éviter d'une façon complète le phénomène de broutement. La surface de glissement proposée par Park et al est non linéaire, construite de telle sorte que le système converge dans un temps fini et sa forme peut être donnée comme suit :

$$S = \dot{x} + \beta \cdot x^{\frac{q}{p}} = 0 \quad (2.69)$$

Avec  $x \in R, \beta > 0, p, q, (p > q)$  des paramètres positifs.

A partir de cette dernière équation on peut écrire :

$\left(\frac{dx}{dt} = \beta \cdot x^{\frac{q}{p}}\right)$  D'où  $dt = -\beta \cdot x^{\frac{-q}{p}} dx$  et on a :

$$t_s = \frac{p}{\beta \cdot (p-q)} |x(0)|^{\frac{p-q}{p}} \quad (2.70)$$

La vitesse de convergence est augmentée par le terme non linéaire  $\beta \cdot x^{\frac{q}{p}}$ , cependant le temps d'arrivée à la surface de glissement est très court. Par conséquent, cette loi augmente la vitesse d'approche à la surface de glissement lorsque l'état est loin et le résultat obtenu est plus rapide et il y'a absence du phénomène de broutement.

## II.6 Conclusion

La commande par mode de glissement est par nature une commande non linéaire. La caractéristique principale de cette commande est que sa loi de commande change d'une manière discontinue selon une logique déterminée. Les commutations de la commande s'effectuent en fonction des variables d'état utilisées pour créer une variété ou hyper surface dite de glissement dont le but est de forcer la dynamique du système à correspondre avec celle définie par l'équation de l'hyper surface. Au niveau de ce deuxième chapitre nous nous sommes efforcés de montrer les différentes formes de lois de commande et nous remarquons que cette loi est constituée de deux composantes : la commande équivalente qui maintient la trajectoire d'état du système à contrôler sur la surface de glissement et la commande attractive qui représente la transition de la trajectoire d'état à partir d'un point initial jusqu'au début de la phase du mode de glissement.

Dans le chapitre suivant, nous exposons d'autres commandes du suivi de trajectoires qui sont adaptées à la commande des systèmes non linéaires.

# CHAPITRE III

## SUIVI DE TRAJECTOIRES POUR UN ROBOT MOBILE PAR MODE GLISSANT

### III.1 Introduction

Le suivi de trajectoires est une tâche primordiale pour les robots autonomes, simple et facile à implémenter. Les modèles cinématiques sont les plus utilisés dans la littérature cette solution est satisfaisante pour les robots ayant des caractéristiques mécaniques simples et des vitesses d'évolution relativement réduites. On peut citer ici l'exemple du robot unicycle, son modèle cinématique garde une grande performance et robustesse.

Les performances de ce type de solution se dégradent remarquablement quand la dynamique du véhicule et les glissements deviennent importants notamment pour les robots rapides. Pour faire face à l'incertitude du modèle ainsi que les perturbations venant du sol, une approche utilisant la commande par mode glissant est avancée dans [27]. Cette commande est souvent citée pour sa robustesse vis-à-vis des perturbations non modélisées. Mais malgré sa robustesse d'un point de vue théorique, elle présente un inconvénient lors de son implémentation.

Cette loi de commande relie deux configurations (plan de glissement et point d'équilibre) [28] et elle est oscillante autour de la position d'équilibre, ce qui montre les limites de cette approche dans le plan pratique. Afin de profiter de la boîte à outils de l'automatique linéaire, plusieurs travaux proposent une linéarisation exacte du modèle cinématique du suivi de trajectoires et une conversion sous une forme dite chaînée pour la partie qui n'est pas linéarisable du modèle [29].

Ces modèles développés pour des robots type unicycle ou type voiture restent les plus utilisés dans le cas où les glissements et la dynamique latérale sont négligeables. Dans le cas contraire, le glissement est supposé comme une perturbation externe sous l'hypothèse de roulement sans glissement [30], [31] et [32]. Dans ce cas la robustesse de la commande et sa capacité du rejet des perturbations font toute la différence.

Notre approche s'inspire de la technique de la commande par modes glissants; ce choix est guidé par le fait que cette méthode a déjà fait ses preuves dans le cadre de la commande des robots mobiles notamment dans [33] et qu'elle ouvre des pistes de recherches intéressantes pour la synthèse de commandes robustes, facilement imprévisibles et présentant un bon compromis entre robustesse et performance.

## III.2 Poursuite de trajectoires

### III.2.1 modèle cinématique

Notre robot mobile considéré est constitué de trois roues. Deux roues motrices à l'avant du robot mobile sont parallèles, entraînés par deux moteurs indépendants. Une autre est une roue motrice à l'arrière du robot mobile (figure 3.1). Soit  $D$  et  $r$  représentent la longueur de l'axe de la roue et le rayon des roues motrices, respectivement. Les vitesses  $v_l$  et  $v_r$  représentent les vitesses de la roue gauche et la roue droite, respectivement. Les variables de contrôle  $v$  et  $w$  désignent l'avant la vitesse et la vitesse angulaire du robot mobile, respectivement, ce qui peut être décrit comme

$$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/D & 1/D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_l \\ v_r \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

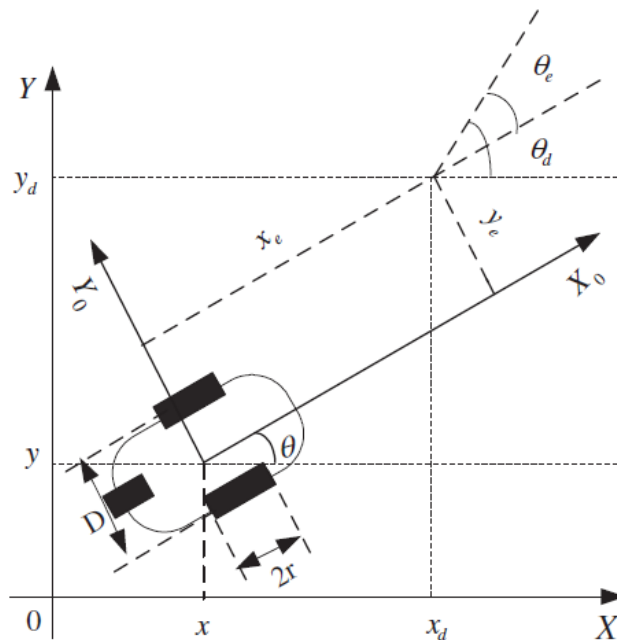


Figure 3.1 : erreurs de posture de la coordonnée pour un robot mobile

Le modèle cinématique du robot mobile dans le plan  $X - Y$  est donnée comme suit :

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \quad (3.2)$$

Où  $q = [x, y, \theta]^T$  désigne la position de coordonnées dans le centre de la masse du robot mobile.  $(x, y)$  Est défini comme étant les coordonnées cartésiennes, et  $\theta$  est l'angle d'orientation entre la direction de cap et de l'axe  $x$ . Et  $u$  l'entrée de commande est :

$$u = [v \ w]^T \quad (3.3)$$

Supposons qu'il n'y ait pas d'effet de glissement, et le modèle cinématique du robot mobile satisfait la contrainte non holonome. Pour les robots mobiles sous les hypothèses ci-dessus, l'équation de contrainte non holonome peut être exprimée comme :

$$\dot{x} \sin \theta = \dot{y} \cos \theta \quad (3.4)$$

### III.2.2 le problème de suivre la commande :

L'objectif de suivi de commande est de concevoir les lois de la vitesse d'avancement  $v$  et la vitesse angulaire  $w$ , de telle sorte que la trajectoire de référence est suivie par le robot mobile. Dans (figure 3.1) le vecteur d'état  $q_d = (x_d y_d \theta_d)^T$  désigne la posture de référence et le vecteur d'état  $q = (x, y, \theta)^T$  représente la position réelle. Le vecteur d'état  $q_e = (x_e y_e \theta_e)^T$  Est défini comme étant l'erreur de posture. Accord à la relation géométrique, un moyen efficace de transformation de coordonnées global est décrit comme suit [11]

$$q_e = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ \theta_d - \theta \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

En prenant la dérivée de l'équation (3.5), la dynamique d'erreur du système peuvent être obtenus sous forme de :

$$\dot{x}_e = y_e w - v + v_d \cos \theta_e \quad (3.6)$$

$$\dot{y}_e = -x_e w + v_d \sin \theta_e \quad (3.7)$$

$$\dot{\theta}_e = w_d - w \quad (3.8)$$

Considérons  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ,  $|v_d| \leq v_d^{max}$  and  $w_d \neq 0$ , où  $v_d^{max}$  sont des constantes appropriées, et  $|\cdot|$  désigne le signe de valeur absolue. Dans cet article, la trajectoire de suivi problème pour les robots mobiles est de concevoir un variant dans le temps l'état-rétroaction des lois de la forme :

$$w = w(t, x_e, y_e, \theta_e), \quad (3.9)$$

$$v = v(t, x_e, y_e, \theta_e) \quad (3.10)$$

De telle sorte que trois erreurs d'état  $x_e, y_e$  et  $\theta_e$  converge vers zéro en un temps fini.

### III.2.3 la stratégie de suivi la commande

Dans cette section, un système de contrôle combinant trois stratégies différentes est proposé. Tout d'abord, le système compliqué est décomposé en deux sous-systèmes de conception de commande en cascade. Pour les deux sous-systèmes une méthode de commande à temps fini et un temps fini de commande de mode de glissement sont développés respectivement.

#### III.2.3.1 la conception de commande en cascade

Considérons le système en cascade  $\dot{z} = f(t, z)$  qui peut être exprimée en tant que :

$$\dot{z}_1 = f_1(t, z_1) + g(t, z_1, z_2) \quad (3.11)$$

$$\dot{z}_2 = f_2(t, z_2) \quad (3.12)$$

Où  $z_1 = (x_e, y_e) \in R^2, z_2 = \theta_e \in R$  la fonction  $f_1(t, z_1)$  est continûment différentiable par rapport à  $(t, z_1)$ ,  $f_2(t, z_2)$  et  $g(t, z_1, z_2)$  sont continués dans leurs arguments.

En supposant  $z_2 = 0$ , il résulte de l'équation (3.11) cette :

$$\dot{z}_1 = f_1(t, z_1)$$

Donc l'équation (3.11) peut être vu un sous-système :

$$\Sigma_1: \dot{z}_1 = f_1(t, z_1) \quad (3.13)$$

Qui est perturbé par le sous-système suivant :

$$\Sigma_2: \dot{z}_2 = f_2(t, z_2) \quad (3.14)$$

**Définition 1 :** [34] Une fonction continue  $\alpha: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  est dit être une fonction de classe K seulement si elle est strictement croissante et  $\alpha(0) = 0$ .

**Définition 2 :** [35,36] Considérons le système en cascade (3.11) et (3.12) Si les hypothèses suivantes A1-A3 tenir, le système (3.11) et (3.12) est globalement uniformément stable (GUS) :

- A1. Supposons que le sous-système  $\Sigma_1: \dot{z}_1 = f_1(t, z_1)$  est GUS et qu'il existe une fonction de Lyapunov définie positive auxiliaire candidat  $V(t, z_1): R \geq 0 \times R^n \rightarrow R \geq 0$  tel que :



$$\left\| \frac{\partial V}{\partial Z_1} \right\| \|Z_1\| \leq cV(t, Z_1) \quad \forall \|Z_1\| \geq \eta$$

Où  $c > 0$  et  $\eta > 0$  des constants, en outre  $\frac{\partial V}{\partial Z_1}(t, z_1)$  est délimitée de manière uniforme dans l'ensemble pour  $t \|Z_1\| \leq \eta$ . En d'autres termes, il existe un constant  $c_1 > 0$  et  $t \geq t_0 \geq 0$  tel que :

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial Z_1} \right\| \leq c_1 \quad \forall \|Z_1\| \leq \eta$$

- A2. Le sous-système  $\Sigma_2: \dot{z}_2 = f_2(t, z_2)$  est globalement uniformément asymptotiquement stable.
- A3. Pour le système (3.11), il existe une fonction bornée  $w(t, z_1): R \geq 0 \times R^2 \rightarrow R \geq 0$  définie positive, adéquate et radialement sans bornes, qui satisfait :

$$\dot{W}(t, z_1)|_{(3.10)} \leq \gamma_1(W(t, z_1)), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

Où  $\dot{W}(t, z_1)|_{(\#)}$  désigne la dérivée temporelle de  $W(t, z_1)$  ainsi que les solutions de l'équation différentielle (#).  $\gamma_1: R \geq 0 \rightarrow R \geq 0$  est une fonction croissante satisfaisant à la condition suivante pour une constante  $a > 0$

$$\gamma_1(a) \geq 0; \quad \int_a^\infty \frac{d\eta}{\gamma_1(\eta)} = \infty$$

Pour prouver que le système en cascade (3.11) et (3.12) c'est des GUS, nous devons montrer que toutes les solutions de (3.11) et (3.12) sont uniformément bornée et uniformément attrayant pour l'origine

**Remarque 1 :** Une idée importante de la conception de contrôle en cascade simplifie la conception des lois [37,38], ce qui est souvent importante dans certains cas [36]. Dans notre travail, l'idée de cascade sont utilisés pour simplifier les dynamiques cinématiques de robots mobiles afin de dériver une classe de nouvelles lois sur le contrôle.

### III.2.3.2 Conception de loi de commande angulaire basée sur la technique de commande temps fini

Selon les idées du système en cascade, nous pouvons voir (3.8), comme un sous-système de premier ordre  $\Sigma_2$ :

$$\dot{\theta}_e = w_d - w \quad (3.15)$$

**Théorème 1 :** Considérons un système linéaire de premier ordre :

$$\dot{x} = u \quad (3.16)$$

Qui peuvent être stabilisées par la loi de commande suivante dans un temps fini :

$$u = -x - \alpha x - \beta x^{q_0/p_0} \quad (3.17)$$

Où  $x \in \mathbb{R}$  désigne des variables d'état,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $p_0 > 0$ , et  $q_0 > 0$  sont des nombres entiers impairs  $q_0/p_0 < 1$ .

Substituer (3.17) dans (3.16) on obtient :

$$\dot{x} = -x - \alpha x - \beta x^{q_0/p_0} \quad (3.18)$$

De (3.18), nous avons :

$$x^{-q_0/p_0} \frac{dx}{dt} + (1 + \alpha)x^{1-q_0/p_0} = -\beta \quad (3.19)$$

On met  $y = x^{\frac{1-q_0}{p_0}}$ . Nous avons  $\frac{dy}{dt} = \frac{p_0 - q_0}{p_0} x^{\frac{-q_0}{p_0}} \frac{dx}{dt}$

Tel que :

$$\frac{dy}{dt} + \frac{p_0 - q_0}{p_0} (1 + \alpha)y = -\frac{p_0 - q_0}{p_0} \beta \quad (3.20)$$

On notera que la solution  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$  est donné par :

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left( \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_0 \right) \quad (3.21)$$

On a équation (3.21), la solution d'équation (3.20) peut être écrite comme :

$$y = e^{-\int_0^t \frac{p_0 - q_0}{p_0} (1 + \alpha) dt} \left( \int_0^t -\frac{p_0 - q_0}{p_0} \beta e^{\int_0^t \frac{p_0 - q_0}{p_0} (1 + \alpha) dt} dt + C_0 \right) \quad (3.22)$$

On met :  $C_0 = y(0)$ , on trouve :

$$\begin{aligned} y &= e^{-\frac{p_0 - q_0}{p_0} (1 + \alpha)t} \left( \int_0^t -\frac{p_0 - q_0}{p_0} \beta e^{\int_0^t \frac{p_0 - q_0}{p_0} (1 + \alpha)t} dt + y(0) \right) \\ &= -\frac{\beta}{1 + \alpha} + \frac{\beta}{1 + \alpha} e^{-\frac{p_0 - q_0}{p_0} (1 + \alpha)t} + y(0) e^{-\frac{p_0 - q_0}{p_0} (1 + \alpha)t} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Suppose que :

$t = t_s$ , puis  $x = 0$ . Notez que  $y = 0$  quand  $x = 0$ . De (3.23) on trouve :

$$e^{\frac{p_0 - q_0}{p_0} (1 + \alpha)t_s} = \frac{\beta + (1 + \alpha)y(0)}{\beta} \quad (3.24)$$

De l'état initial  $x(0) \neq 0$  à  $0$ , le temps de convergence peut être exprimée par :

$$t_s = \frac{p_0}{(1+\alpha)(p_0-q_0)} \ln \frac{(1+\alpha)x(0)^{(p_0-q_0)/p_0+\beta}}{\beta} \quad (3.25)$$

La preuve est terminée.

Considérons le premier ordre sous-système (3.15) nous concevons une loi de commande finie à temps, en utilisant Théorème 1. La loi de commande peut être réalisée sous la forme :

$$w = w_d + \theta_e + \alpha_1 \theta_e + \beta_1 \theta_e^{q_1/p_1} \quad (3.26)$$

Lorsque  $\theta_e \in R$  désigne des variables d'état,  $\alpha_1 > 0$ ,  $\beta_1 > 0$ ,  $p_1 > 0$  et  $q_1 > 0$  sont des nombres entiers impairs,  $\frac{q_1}{p_1} < 1$ . De (3.17), la loi sur la commande de la vitesse angulaire est réalisée sous la forme suivante :

$$\dot{\theta}_e = -\theta_e - \alpha_1 \theta_e - \beta_1 \theta_e^{q_1/p_1} \quad (3.27)$$

Donc, le système (3.15) atteindra  $\theta_e = 0$  au moment  $t_1$ , qui est donnée par :

$$t_1 = \frac{p_1}{(1+\alpha_1)(p_1-q_1)} \ln \frac{(1+\alpha_1)x(0)^{(p_1-q_1)/p_1+\beta_1}}{\beta_1} \quad (3.28)$$

**Remarque 2 :** Si  $\theta_e$  est loin de zéro, la loi de commande (3.27) peut être approchée par son terme linéaire  $\dot{\theta}_e = -\theta_e - \alpha_1 \theta_e$  dont la convergence rapide quand il est loin de zéro est bien comprise. Si  $\theta_e$  est proche de zéro, la loi de commande (3.27) peut être approchée par le terme non-linéaire.

**Théorème 2 :** Considérons le système (3.15), il existe la loi de commande (3.26) de telle sorte que le système (3.15) est finie à temps stable.

Selon que  $\theta_e - \alpha_1 \theta_e - \beta_1 \theta_e^{q_1/p_1} = 0$  nous obtenons que la solution  $\theta_e = 0$ . D'autre part, pour analyser la stabilité du système de commande donné par (3.14) et (3.26) nous choisissons la fonction Lyapunov décrite par :

$$V = \frac{1}{2} \theta_e^2 \quad (3.29)$$

En utilisant l'équation (3.27), nous pouvons avoir

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \dot{\theta}_e \theta_e = \left( -\theta_e - \alpha_1 \theta_e - \beta_1 \theta_e^{q_1/p_1} \right) \theta_e = -\theta_e^2 - \alpha_1 \theta_e^2 - \beta_1 \theta_e^{1+\frac{q_1}{p_1}} \\ &= -\theta_e^2 - \alpha_1 \theta_e^2 - \beta_1 \theta_e^{(p_1+q_1)/p_1} \end{aligned}$$

En notant que  $p_1 > 0$  et  $q_1 > 0$  sont des nombres entiers impairs,  $\alpha_1 > 0$  et  $\beta_1 > 0$ , on obtient

$$\dot{V} \leq 0 (\dot{V} = 0 \text{ Si et seulement si } \theta_e = 0)$$

Selon la définition 2, le système en boucle fermée est finie à temps stable.

De l'analyse de la stabilité du système de commande (3.15) et (3.26), la fonction de Lyapunov  $V$  est définie positive ( $V(t, 0) = 0$  et  $V(t, \theta_e) > 0$  pour tous  $\theta_e \neq 0$ ), son dérivé  $\dot{V}$  est définie négative ( $V(t, 0) = 0$  et  $V(t, \theta_e) < 0$  pour tous  $\theta_e \neq 0$ ). Par conséquent, le système en boucle fermée (3.15) et (3.26) est-temps fini mondial stable.

**Remarque 3 :** La loi de commande de la vitesse angulaire est conçue pour les robots mobiles basés sur la méthode de contrôle temps fini. Le système de premier ordre par correspondant est stabilisé par cette loi de commande à temps fini de la vitesse angulaire de telle sorte que l'erreur d'angle se termine à zéro en un temps fini. Avec cela, la dynamique d'erreur (3.6) - (3.8) sont convertis en un système de second ordre sur la base de l'approche en cascade. Différents du temps fini des lois de contrôle dans [35, 39, 40], nous introduisons deux termes linéaires dans la conception des lois de commande finie à temps fini afin d'obtenir le taux de convergence plus rapide.

### III.3 Conception de la loi de commande de la vitesse vers l'avant à base de commande en mode glissant en temps fini

On Note que la loi de commande (3.26) garantit que l'erreur angulaire converge vers zéro. Ainsi, le mode d'erreur de suivi de piste non linéaire (3.6) - (3.8) peut être réduite au système linéaire suivant variant dans le temps où  $\theta_e = 0$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & w_d(t) \\ -w_d(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [v_d(t) - v] \quad (3.30)$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & w_d(t) \\ -w_d(t) & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ et } u_1 = v_d(t) - v, \text{ puis}$$

$$\dot{x}_1(t) = A_1(t)x_1(t) + B_1 u_1(t) \quad (3.31)$$

Nous sommes maintenant en position de prouver la contrôlabilité du système (3.31). Selon le critère de contrôlabilité, on peut obtenir :

$$M_0(t) = B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1(t) = -A_0 M_0(t) + \frac{d}{dt} M_0(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ w_d(t) \end{bmatrix}$$

On a aussi :  $Rank[M_0(t) : M_1(t)] = Rank \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w_d(t) \end{bmatrix} = 2$ , Dans lequel  $w_d(t) \neq 0$ . Par conséquent, le système (3.31) peut être commandé.

Basé sur la théorie de la conception de commande en cascade, si  $w_d(t) \neq 0$ , on considère (3.29), le sous-système  $\Sigma_1$ , et (3.29) peut être transformés en :

$$\dot{x}_e = w_d y_e - v + v_d \quad (3.32)$$

$$\dot{y}_e = -w_d x_e \quad (3.33)$$

Nous considérons en outre le sous-système donné par (3.33) et la conception d'un retour d'état de  $x_e$  d'une manière à stabiliser solidement le d'état  $y_e = 0$ .

**Théorème 3 :** Considérons le système (3.33), où  $sgn(\cdot)$  est la fonction signe. On note que  $w_d \neq 0$ ,  $k_0$  est une constante et  $k_0 > 0$ . Il existe  $x_e = k_0 y_e sgn(w_d)$  de telle sorte que le système (3.33) uniformément stable.

Pour résoudre (3.33) pour le point d'équilibre, on a  $w_d x_e = 0$ , et  $x_e = 0$ . Par conséquent, le sous-système (3.33) ne comporte qu'un seul point d'équilibre. Afin d'analyser la stabilité du système (3.33), nous considérons la fonction candidate de Lyapunov  $V(y_e) = \frac{1}{2} y_e^2$ . Le dérivé de Lyapunov  $\dot{V}(y_e)$  est donné par :

$$\dot{V}(y_e) = y_e \dot{y}_e = y_e (-w_d x_e) = -k_0 y_e^2 w_d sgn(w_d) \quad (3.34)$$

On note que  $sgn(w_d) > 0$  quand  $w_d > 0$  et  $sgn(w_d) < 0$  quand  $w_d < 0$ , alors  $w_d sgn(w_d) > 0$ .  $\dot{V}(y_e) \leq 0$  ( $\dot{V}(y_e) = 0$  si et seulement si  $y_e = 0$ ), ce qui implique que la solution zéro  $x_e = 0$  à (3.31) est globalement asymptotiquement stable.

**Remarque 4 :** Dans le théorème 3, nous pouvons utiliser une classe de fonctions continues telles que  $\frac{w_d}{|w_d| + \delta}$ ,  $1 - e^{-k_1 w_d}$  et  $e^{-k_2 w_d}$  de remplacer le terme  $sgn(w_d)$ , où,  $k_1, k_2$  sont des constants et  $\delta > 0$ ,  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ , le théorème 3 détient toujours.

Le collecteur de glissement est définie par :

$$s = x_e - k_0 y_e sgn(w_d) \quad (3.35)$$

En utilisant  $x_e = k_0 y_e sgn(w_d)$ , On obtient :

$$s = x_e - k_0 y_e sgn(w_d) = 0 \quad (3.36)$$

Pour garantir l'existence le collecteur de glissement  $S$ , à savoir  $\dot{s} < 0$ ,  $\dot{s}$  est spécifiée par :

$$\dot{s} = -s - \alpha_2 s - \beta_2 s^{p_2} \quad (3.37)$$

Où  $\alpha_2 > 0$ ,  $\beta_2 > 0$ ,  $p_2 > 0$  et  $q_2 > 0$  sont des nombres entiers impairs,  $\frac{q_2}{p_2} < 1$ .

D'après le théorème 1, le système (3.37) atteindra  $s = 0$  à  $t_2$  qui est écrit par :

$$t_2 = \frac{p_2}{(1+\alpha_2)(p_2-q_2)} \ln \frac{(1+\alpha_2)s(0)^{(p_2-q_2)/p_2 + \beta_2}}{\beta_2} \quad (3.38)$$

La commande en mode glissant est conçue en utilisant (3.32) – (3.35) – (2.37). Nous pouvons obtenir :

$$\dot{s} = -s\alpha_2 - \beta_2 s^{p_2} = \dot{x}_e - k_0 \dot{y}_e \operatorname{sgn}(w_d) = w_d \dot{y}_e - v + v_d - k_0 (-w_d \dot{y}_e) \operatorname{sgn}(w_d) \quad (3.39)$$

Ensuite, il résulte de (3.39) que :

$$v = v_d + w_d \dot{y}_e + k_0 w_d x_e \operatorname{sgn}(w_d) + s + \alpha_2 s + \beta_2 s^{p_2} \quad (3.40)$$

Considérer le sous-système (3.32) et (3.33), nous obtenons la loi de commande de la vitesse vers l'avant qui garantit uniforme mondiale la stabilité de cette boucle fermée sous-système en exploitant le mode de glissement en temps fini.

**Remarque 5 :** En choisissant le collecteur coulissant représenté sur l'équation (3.35), l'état  $x_e$  va converger vers  $k_0 y_e \operatorname{sgn}(w_d)$  en temps fini par la conception de la loi pour atteindre (3.37). Évidemment, si l'état  $x_e = 0$ , alors l'état  $y_e = 0$ . De théorème 3, nous savons que  $y_e$  va converger vers zéro éventuellement avec le changement de temps de convergence. Il en découle que  $x_e$  converge à zéro aussi longtemps que  $y_e$  converge à zéro.

**Remarque 6 :** Dans [35, 39, 40], la vitesse angulaire désirée  $w_d$  pour les robots mobiles doit satisfaire  $0 < w_d^{\min} \leq |w_d| \leq w_d^{\max}$ , lorsque  $w_d^{\min}$  et  $w_d^{\max}$  sont des constantes appropriées. En revanche, la vitesse angulaire souhaitée  $w_d$  a seulement besoin de satisfaire  $w_d \neq 0$ . Dans notre travail. Par conséquent la conception des lois de contrôle dans ce travail se détend des contraintes strictes sur les vitesses souhaitées rapportées dans les littératures existantes.

**Remarque 7 :** De (3.37) il est remarquable que la conception de la loi de commande introduise un terme non linéaire pour le système de second ordre (3.32) et (3.33). Dans [41,

42, 43, 44, 45, 46,47] les états arrivent au niveau du collecteur coulissant dans l'infini du temps de prise.

### III.4 L'analyse de la stabilité

Dans cette section, nous analysons la stabilité du système en boucle fermée (3.6)-(3.8), (3.26) et (3.40) en utilisant le lemme 1.

**Théorème 4 :** Considérons le système (3.6) - (3.8), il existe des lois de commande (3.26) et (3.40) de telle sorte que le système (3.6) - (3.8) est uniforme globalement stable.

On note que les collecteurs de glissement converge vers zéro en un temps fini, nous pouvons obtenir  $x_e = k_0 y_e \text{sgn}(w_d)$ , et (3.40) sera remplacé par :

$$v = v_d + w_d y_e + k_0 w_d x_e \text{sgn}(w_d) \quad (3.41)$$

La substitution des équations (3.26) et (3.41) dans (3.6) - (3.8), nous avons :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_0 w_d x_e \text{sgn}(w_d) \\ -w_d x_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_e \sigma(\theta_e) + v_d (\cos \theta_e - 1) \\ v_d \sin \theta_e - x_e \sigma(\theta_e) \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\dot{\theta}_e = -\sigma(\theta_e) \quad (3.43)$$

Lorsque, De toute évidence, la fonction  $\sigma(\cdot) \in K$ . En utilisant la définition 2, nous obtenons :

$$f_1(t, z_1) = \begin{bmatrix} -k_0 w_d x_e \text{sgn}(w_d) \\ -w_d x_e \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$g(t, z_1, z_2) = \begin{bmatrix} y_e \sigma(\theta_e) + v_d (\cos \theta_e - 1) \\ v_d \sin \theta_e - x_e \sigma(\theta_e) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$f_1(t, z_1) = -\sigma(\theta_e) \quad (3.46)$$

Considérons une transformation d'état défini par :

$$z_1 = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \end{bmatrix}, z_2 = \theta_e \quad (3.47)$$

Les dérivés des  $z_1$  et  $z_2$  sont :

$$\dot{z}_1 = f_1(t, z_1) + g(t, z_1, z_2) \quad (3.48)$$

$$\dot{z}_2 = -\sigma(\theta_e) \quad (3.49)$$

**Vérification de A1 :** Considérons le système  $\dot{z}_1 = f_1(t, z_1)$ , nous choisissons la fonction Lyapunov décrite par :

$$V = \frac{1}{2}x_e^2 + \frac{1}{2}y_e^2 \quad (3.50)$$

Ensuite, on calcule la dérivée temporelle (3.50) sur les sous-systèmes (3.32) et (3.33), nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}_e x_e + \dot{y}_e y_e = (w_d y_e - v + v_d) x_e + (-w_d x_e) y_e = (-k_0 w_d x_e \operatorname{sgn}(w_d)) x_e + \\ &\quad (-w_d x_e) y_e \\ &= -k_0 y_e^2 w_d \operatorname{sgn}(w_d) - k_0 x_e^2 w_d \operatorname{sgn}(w_d) \end{aligned}$$

On note  $w_d \operatorname{sgn}(w_d) > 0$  et  $k_0 > 0$ , on obtient :

$$\dot{V} \leq 0 \quad (\dot{V} = 0 \text{ Si et seulement si } x_e = 0 \text{ et } y_e = 0)$$

Donc,  $\dot{z}_1 = f_1(t, z_1)$  est global uniformément stable et satisfait le reste de A1.

**Vérification de A2:** Considérons le système  $\dot{z}_2 = -\sigma(\theta_e)$ , de la démonstration du théorème 2, nous pouvons tirer une conclusion que ce système satisfait A2.

**Vérification de A3 :** Considérons le système (3.48), nous choisissons la fonction de Lyapunov décrite par

$$W = \frac{1}{2}x_e^2 + \frac{1}{2}y_e^2 \quad (3.51)$$

Ce qui est évidemment une fonction décroissante. En prenant la dérivée (3.43) le long du système (3.48), nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \dot{x}_e x_e + \dot{y}_e y_e \\ &= -k_0 x_e^2 w_d \operatorname{sgn}(w_d) - k_0 y_e^2 w_d \operatorname{sgn}(w_d) + v_d [x_e (\cos \theta_e - 1) + y_e \sin \theta_e] \\ &\leq v_d [x_e (\cos \theta_e - 1) + y_e \sin \theta_e] \leq 2v_d^{\max} \|z_1\| \end{aligned}$$

On prend  $\gamma_1(\eta) = \eta$ , nous pouvons vérifier que le système (3.48) satisfait A3. Par conséquent, en utilisant la définition 2, nous savons que le théorème 4 détiert.

### III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a montré comment suivi une trajectoire pour un robot mobile de type unicycle, avec la commande en cascade, on a déterminé la surface de glissement utilisant la commande en cascade. La surface est déterminée par S1 qui est la vitesse angulaire  $w$  et S2 qui est la vitesse de notre robot. Le robot qui on a commandé c'est de type unicycle constitué de trois roues, deux roues motrices à l'avant du robot mobile sont parallèles, une autre est une roue motrice à l'arrière du robot mobile.

Pour suivi de trajectoire d'un robot mobile en temps fini il faut d'abord choisir le type de robot puis la surface de glissement qui sorte des lois des commandes.



# CHAPITRE IV

## RESULTATS ET SIMULATIONS

### IV.1 Introduction

Dans les dernières années la commande de mouvement des robots mobiles a trouvé une attention considérable. Plusieurs des travaux sont concentrés sur les problèmes de génération de trajectoires du point de vue de la cinématique, ça veut dire considérer le système des vitesses comme grandeurs de commande et ignorer la dynamique du système mécanique. Il y a aussi des travaux qui ont été publiés sur la commande avec la présence d'incertitudes dans le modèle dynamique.

En effet, Il y a trois tâches possibles pour un robot mobile qui sont : la stabilisation point à point, le suivi d'un chemin et le suivi d'une trajectoire. La stabilisation point à point nécessite que le robot se déplace d'un point A à un point B sans conditions sur son déplacement entre ces deux points. Le suivi d'un chemin nécessite que le robot doive se déplacer le long d'un chemin géométrique. Le suivi d'une trajectoire est le même que le suivi d'un chemin sauf que le robot évolue avec une vitesse donnée.

Dans ce chapitre, on va présenter une étude théorique de la commande glissante puis son application sur un robot non holonome afin que ce dernier puisse suivre une trajectoire de référence. Différentes trajectoires de références sont prises en considération, premièrement une parabole, puis une trajectoire circulaire et enfin une trajectoire carrée.

### IV.2 Commande robuste (FastTerminal Sliding Mode Control)

Cette nouvelle approche peut converger l'état du système vers zéro dans un temps fini, elle ne possède pas de fonction discontinue *signet* permet d'éviter d'une façon complète le phénomène de broutement. La surface de glissement proposée par Park et al est non linéaire, construite de telle sorte que le système converge dans un temps fini et sa forme peut être donnée comme suit :

$$S = \dot{x} + \beta \cdot x^{\frac{q}{p}} = 0 \quad (5.1)$$

Avec  $x \in R, \beta > 0, p, q, (p > q)$  des paramètres positifs.

A partir de cette dernière équation on peut écrire :

$\left(\frac{dx}{dt} = \beta \cdot x^{\frac{q}{p}}\right)$  D'où  $dt = -\beta \cdot x^{-\frac{q}{p}} dx$  et on a :

$$t_s = \frac{p}{\beta \cdot (p-q)} |x(0)|^{\frac{p-q}{p}} \quad (5.2)$$

La vitesse de convergence est augmentée par le terme non linéaire  $\beta \cdot x^{\frac{q}{p}}$ , cependant le temps d'arrivée à la surface de glissement est très court. Par conséquent, cette loi augmente la vitesse d'approche à la surface de glissement lorsque l'état est loin et le résultat obtenu est plus rapide et il y'a absence du phénomène de broutement.

### IV.3 Le modèle cinématique

Notre robot mobile considéré est constitué de trois roues. Deux roues motrices à l'avant du robot mobile sont parallèles, entraînés par deux moteurs indépendants. Un autre est une roue motrice à l'arrière du robot mobile.

Le modèle cinématique du robot mobile est donnée comme suit :

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \quad (5.3)$$

Où  $q = [x, y, \theta]^T$  désigne la position de coordonnées dans le centre de la masse du robot mobile. Et  $u$  l'entrée de commande est  $u = [v \ w]^T$

L'objectif de suivi problème de contrôle est de concevoir les lois de la vitesse d'avancement  $v$  et la vitesse angulaire  $w$ , de telle sorte que la trajectoire de référence est suivi par le robot mobile. Le vecteur d'état  $q_e = (x_e y_e \theta_e)^T$  est défini comme étant l'erreur de posture. Accord à la relation géométrique, un moyen efficace de transformation de coordonnées global est décrit comme suit [11]

$$q_e = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ \theta_d - \theta \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

En prenant la dérivée de l'équation (5.4), la dynamique d'erreur du système peuvent être obtenus sous forme de :

$$\dot{x}_e = y_e w - v + v_d \cos \theta_e \quad (5.5)$$

$$\dot{y}_e = -x_e w + v_d \sin \theta_e \quad (5.6)$$

$$\dot{\theta}_e = w_d - w \quad (5.7)$$

Considérons  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ,  $|v_d| \leq v_d^{max}$  et  $w_d \neq 0$ , où  $v_d^{max}$  sont des constantes

#### IV.4 Les Résultats et simulations

Pour démontrer l'efficacité des lois de contrôle proposées, nous simulons le modèle d'erreur différentiel cinématique de robots mobiles avec (5.4).

Pour démontrer la robustesse de la commande utilisée, on propose de donner des valeurs différentes du paramètre  $\alpha$ , donc les résultats sont obtenus selon la valeur de  $\alpha$ .

##### *Les lois de commande*

Les surfaces de glissements sont choisies comme :

$$S_1 = \theta_e \quad (5.8)$$

$$S_2 = x_e - k_0 y_e \operatorname{sgn}(w_d) \quad (5.9)$$

Donc les lois de commandes sont :

- La vitesse angulaire

$$w = w_d + \theta_e + \alpha_1 \theta_e + \beta_1 \theta_e^{q_1/p_1} \quad (5.10)$$

- La vitesse linéaire

$$v = v_d + w_d y_e + k_0 w_d x_e \operatorname{sgn}(w_d) + s + \alpha_2 s + \beta_2 s^{q_2/p_2} \quad (5.11)$$

Durant la première partie de la simulation on va choisir  $\alpha_2 = 8$

##### **a. Trajectoire parabolique**

- Le suivi d'une ligne courbe avec des vitesses souhaitées indiquées par  $v_d(t) = 1$ ,  $w_d(t) = 1$

La position désirée  $q_d = (x_d, y_d, \theta_d)^T$  est spécifié comme :

$$\begin{cases} x_d(t) = 1.5 \cos\left(\frac{\pi t}{15}\right) \\ y_d(t) = 1.5 \cos\left(\frac{2\pi t}{15}\right) \\ \theta_d(t) = w_d(t) = t \end{cases} \quad (5.12)$$

Nous employons les lois de commande (25) et (36), où tous les paramètres sont donnés par  $\alpha_1 = 4, \beta_1 = 8, p_1 = 7, q_1 = 5, p_2 = 5, q_2 = 3, k_0 = 1, \beta_2 = 2$ . Dans la simulation, nous prenons les erreurs de position initiale.

Les résultats de simulation sont présentés sur les figures suivantes.

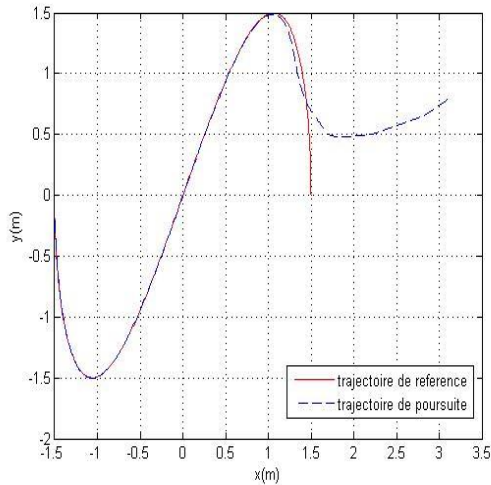


Figure 4.1: poursuite une trajectoire parabolique avec  $\alpha_2 = 8$

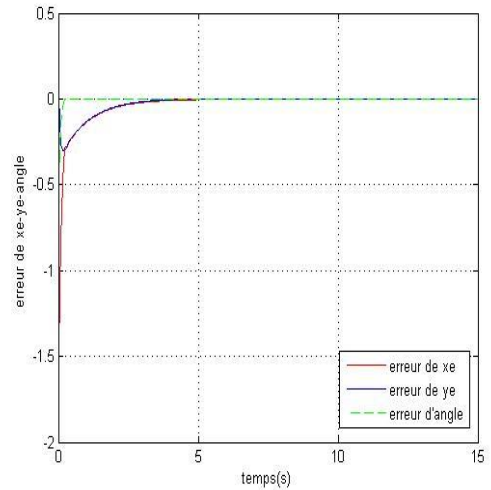


Figure 4.2: erreur de poursuite une trajectoire parabolique avec  $\alpha_2 = 8$

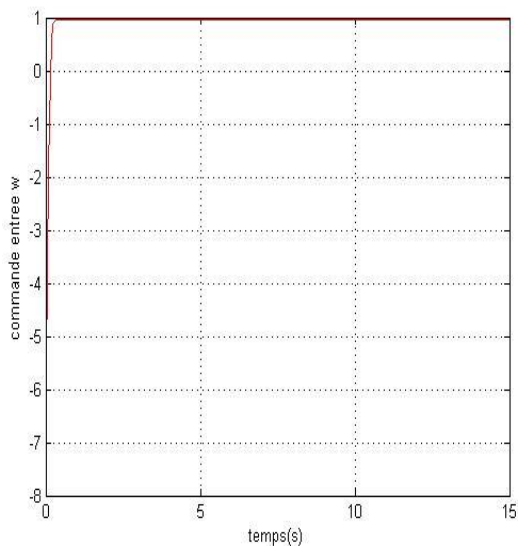


Figure 4.3 : vitesse de commande w avec  $\alpha = 8$

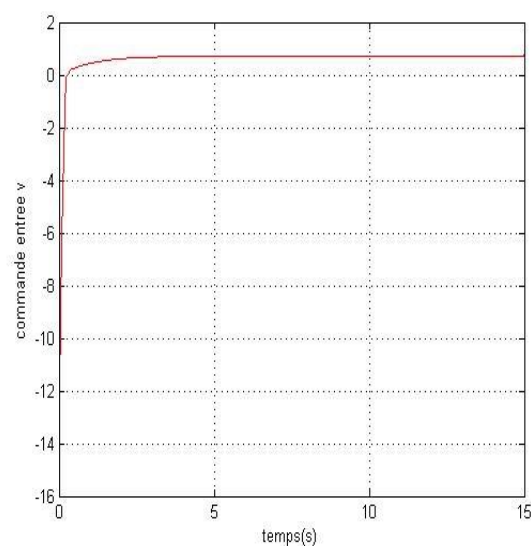


Figure 4.4 : vitesse de commande v avec  $\alpha_2 = 8$

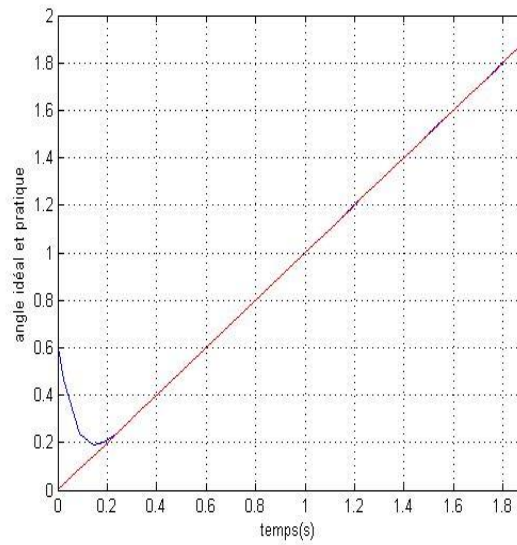


Figure 4.5: angle idéal et pratique avec  $\alpha_2 = 8$

**b. trajectoire circulaire**

- Le suivi d'une ligne courbe avec des vitesses souhaitées indiquées par  $v_d(t) = 1, w_d(t) = 1$

La position désirée  $q_d = (x_d, y_d, \theta_d)^T$  est spécifié comme :

$$\begin{cases} x_d(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{15}\right) \\ y_d(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{15}\right) \\ \theta_d(t) = w_d(t) = t \end{cases} \quad (5.13)$$

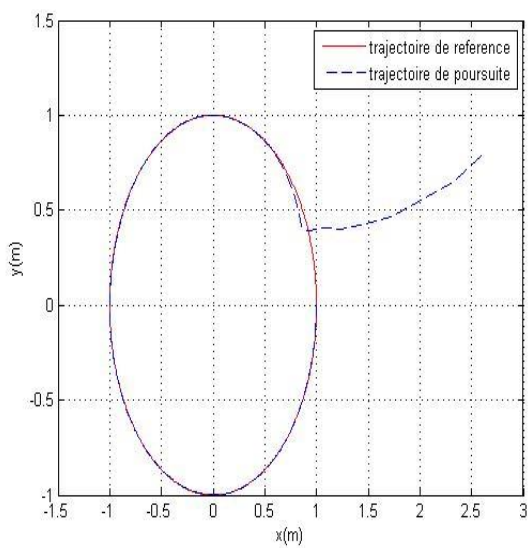


Figure 4.6 : poursuite une trajectoire circulaire avec  $\alpha_2 = 8$

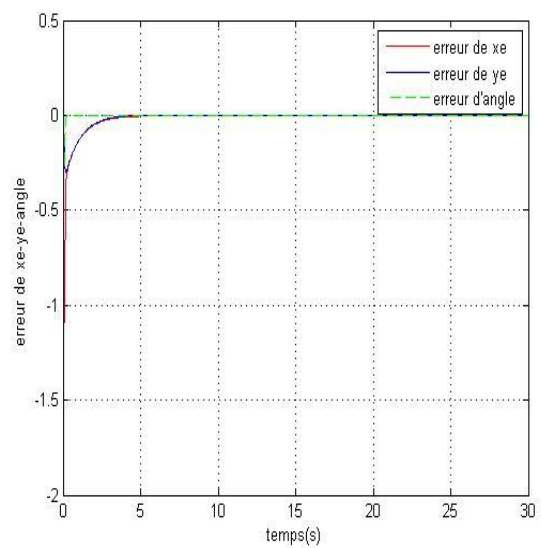


Figure 4.7: erreur de poursuite une trajectoire circulaire avec  $\alpha_2 = 8$

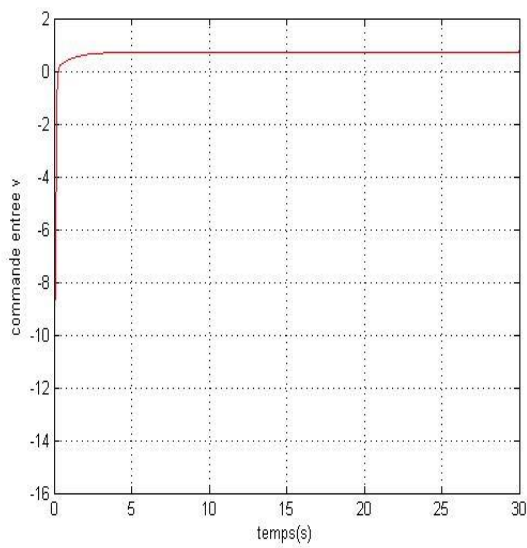


Figure 4.8 : vitesse de commande  $v$   
avec  $\alpha_2 = 8$

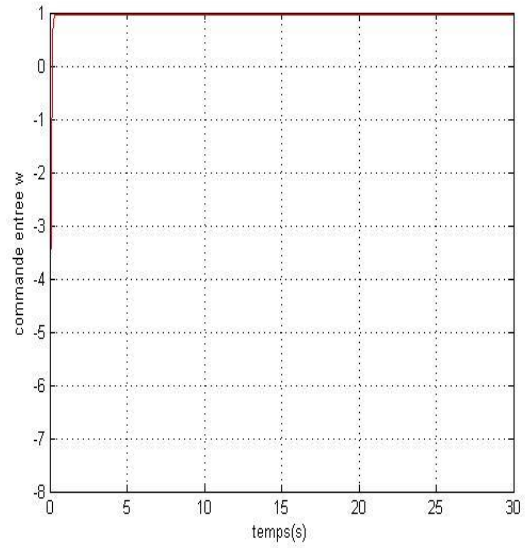


Figure 4.9 : vitesse de commande  $w$   
avec  $\alpha_2 = 8$

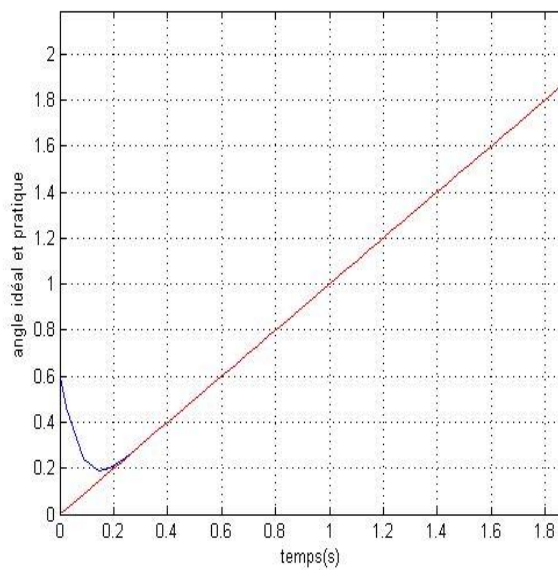


Figure 4.10: angle idéal et pratique avec  $\alpha_2 = 8$

### c. trajectoire carrée

L'équation de trajectoire carrée sous Matlab écrite come suivant :

```
if t <= 3.75
yr=0;
xr=(8/15)*t;
end
if t > 3.75 && t<= 7.5
yr=(8/15)*t-2;
xr=2;
```

```

end
if t > 7.5 && t <= 11.25
yr=2;
xr=-(8/15)*t+6;
end
if t > 11.25 && t <= 15
yr=-(8/15)*t+8;
xr=0;
end
end
    
```

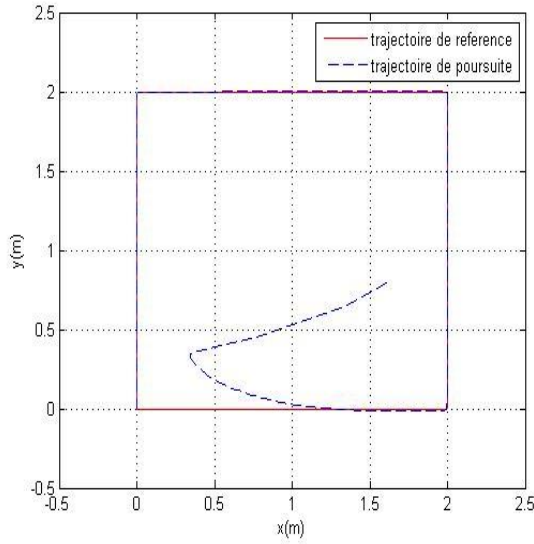


Figure 4.11 : poursuite une trajectoire carrée avec  $\alpha_2 = 8$

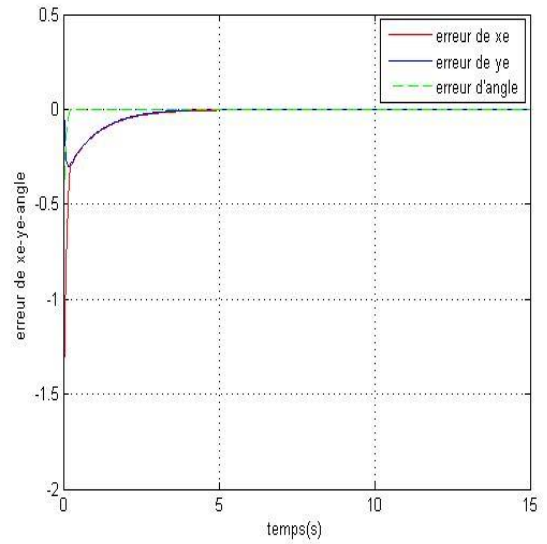


Figure 4.12: erreur de poursuite une trajectoire carrée avec  $\alpha_2 = 8$

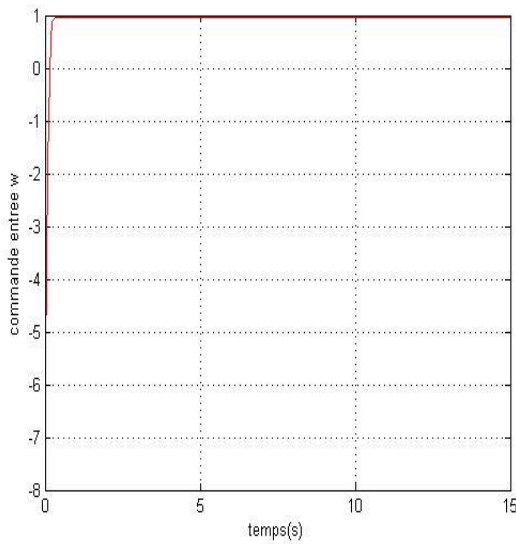


Figure 4.13 : vitesse de commande w avec  $\alpha_2 = 8$

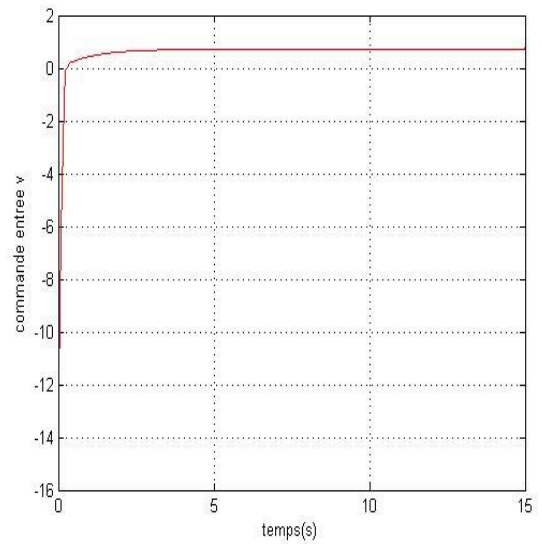


Figure 4.14 : vitesse de commande v avec  $\alpha_2 = 8$

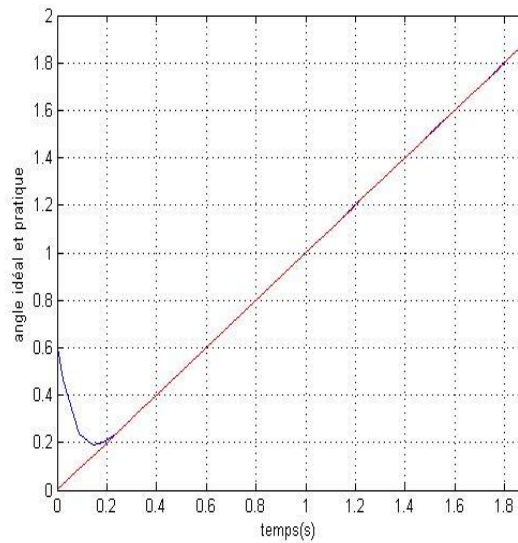


Figure 4.15: angle idéal et pratique avec  $\alpha_2 = 8$

D'après les résultats obtenus on remarque que les erreurs ( $x_e, y_e, t_e$ ), converge après un temps défini vers zéro, dont la trajectoire du robot diverge dans un premier temps et après un temps court converge vers sa référence.

- Dans la deuxième partie de nos simulations, on va jouer sur le paramètre  $\alpha$  (on fait varier sa valeur), pour tester son influence sur la commande choisie. Le choix de la valeur du  $\alpha_2$  est : en deux cas :
  - 1<sup>er</sup> cas  $\alpha_2 = 4$
  - 2<sup>ème</sup> cas  $\alpha_2 = 0.5$



1<sup>er</sup> cas :  $\alpha = 4$

a. Trajectoires paraboliques

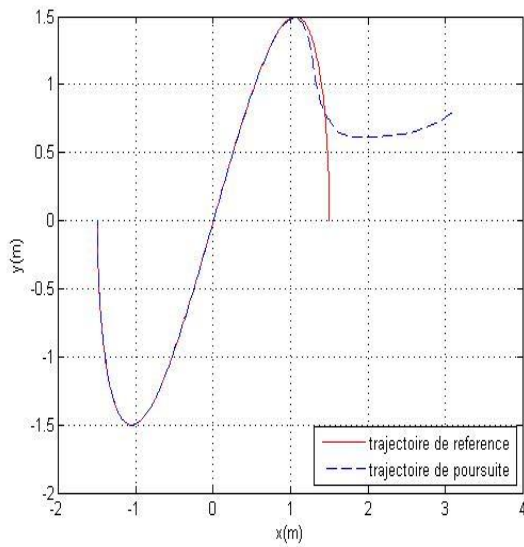


Figure 4.16 : poursuite une trajectoire parabolique avec  $\alpha_2 = 4$

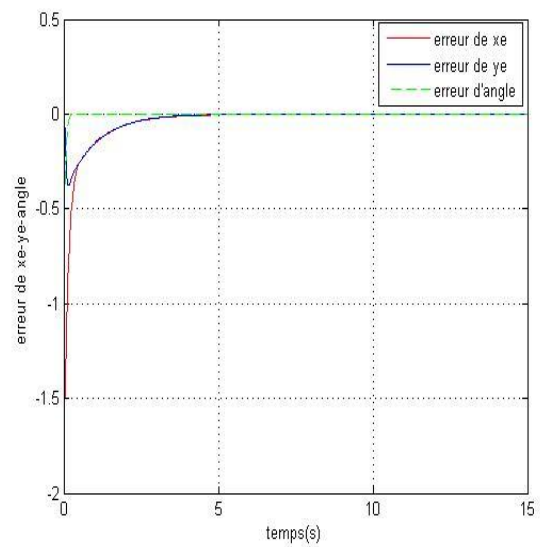


Figure 4.17: erreur de poursuite une trajectoire parabolique avec  $\alpha_2 = 4$

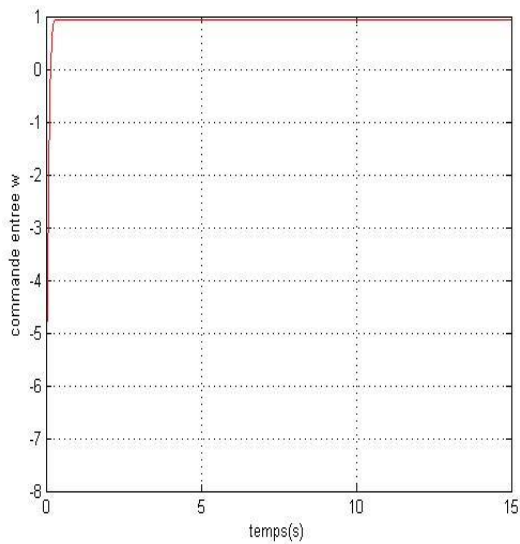


Figure 4.18 : vitesse de commande w avec  $\alpha_2 = 4$

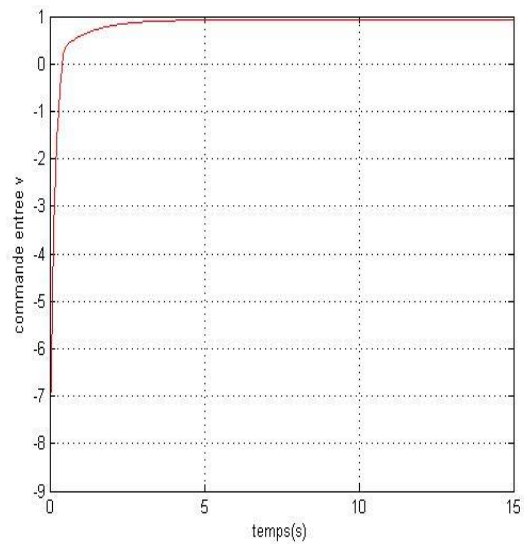


Figure 4.19 : vitesse de commande v avec  $\alpha_2 = 4$

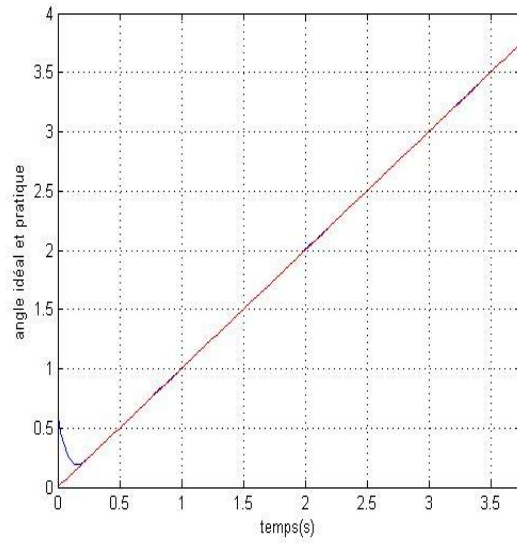


Figure 4.20: angle idéal et pratique avec  $\alpha_2 = 4$

**b. Trajectoires circulaires**

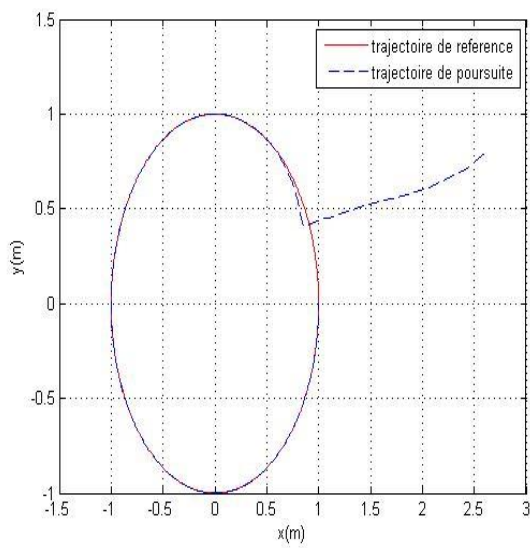


Figure 4.21 : poursuite une trajectoire circulaire avec  $\alpha_2 = 4$

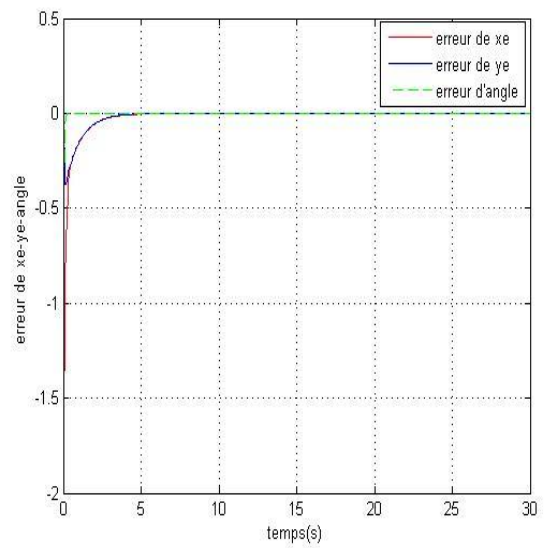


Figure 4.22: erreur de poursuite une trajectoire circulaire avec  $\alpha_2 = 4$

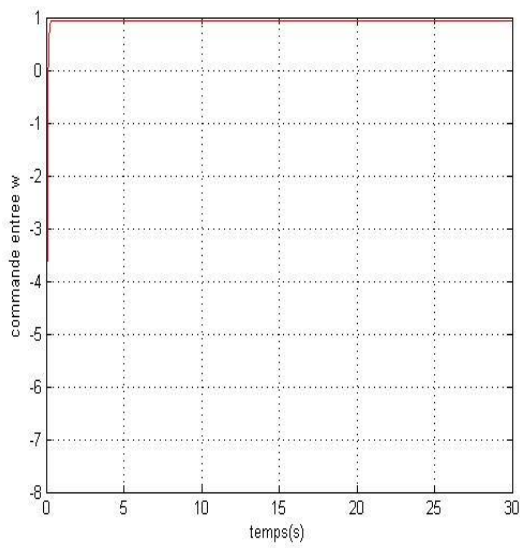


Figure 4.23: vitesse de commande  $w$   
avec  $\alpha_2 = 4$

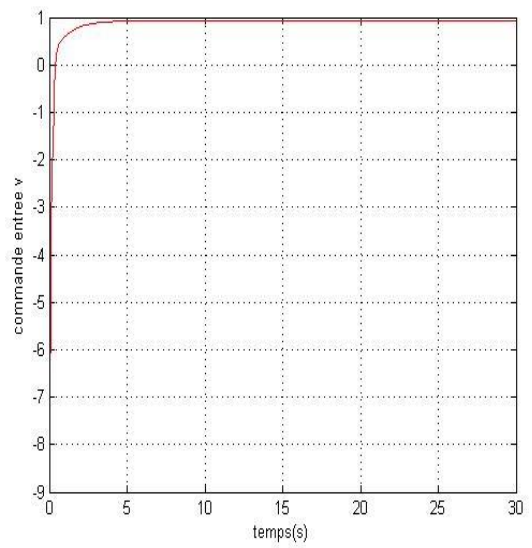


Figure 4.24: vitesse de commande  $v$   
avec  $\alpha_2 = 4$

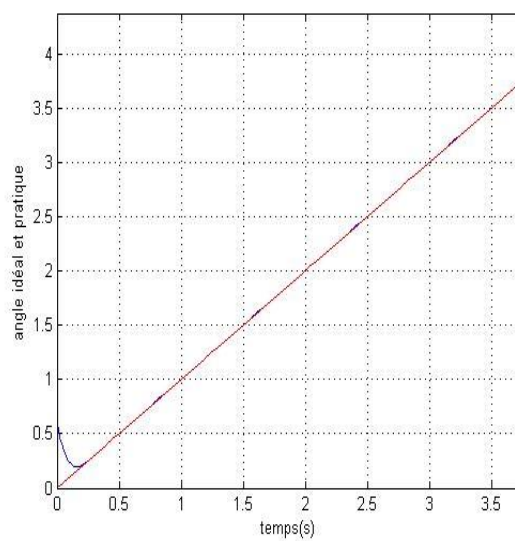


Figure 4.25: angle idéal et pratique avec  $\alpha_2 = 4$

c. Trajectoires carrées

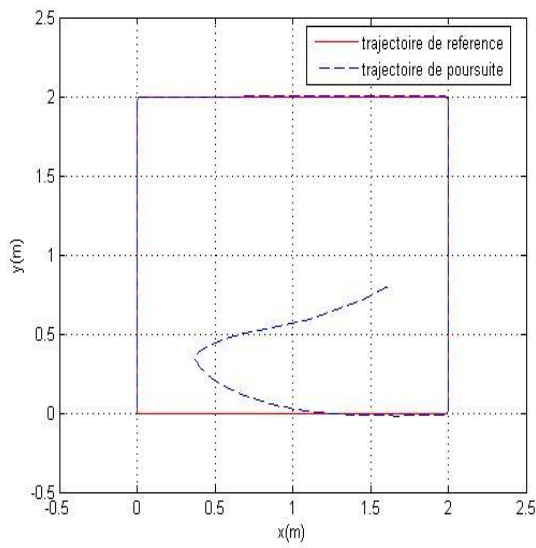


Figure 4.26 : poursuite une trajectoire carrée avec  $\alpha_2 = 4$

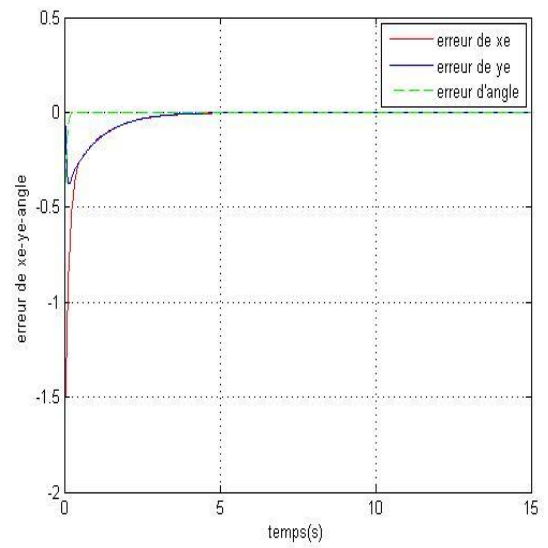


Figure 4.27: erreur de poursuite une trajectoire carrée avec  $\alpha_2 = 4$

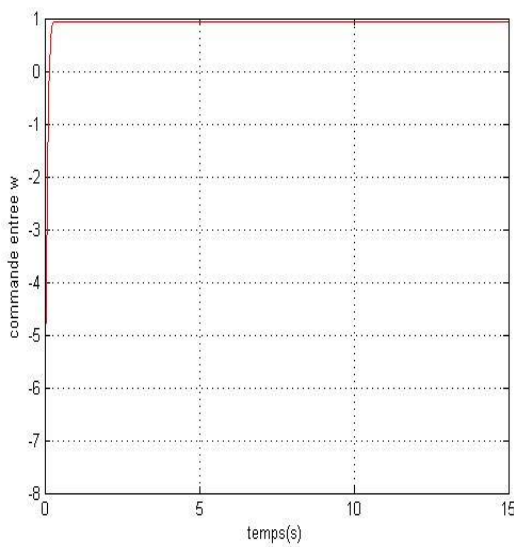


Figure 4.28: vitesse de commande w avec  $\alpha_2 = 4$

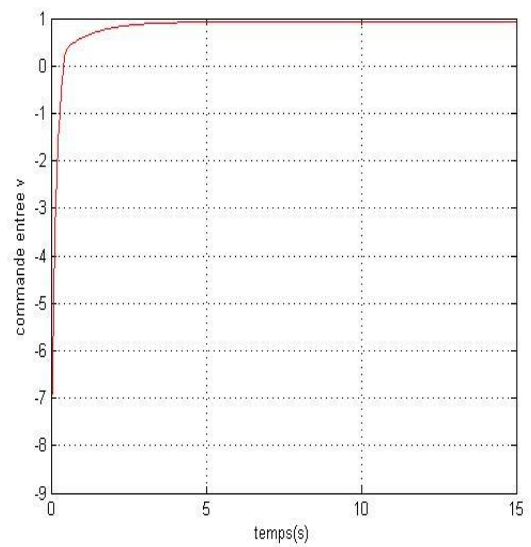


Figure 4.29: vitesse de commande v avec  $\alpha_2 = 4$

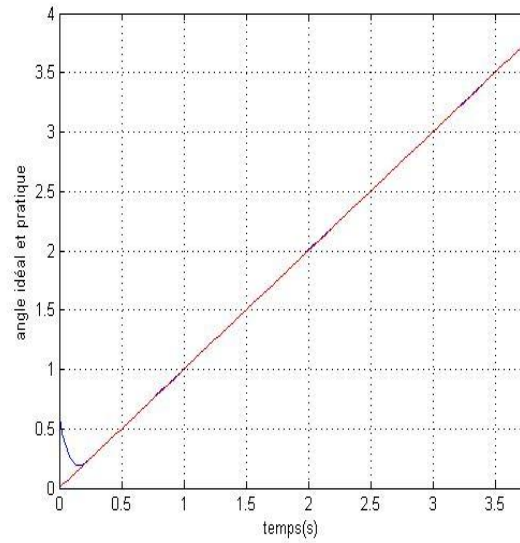


Figure 4.30: angle idéal et pratique avec  $\alpha_2 = 4$

2<sup>eme</sup> cas :  $\alpha_2 = 0.5$

a. Trajectoire parabolique

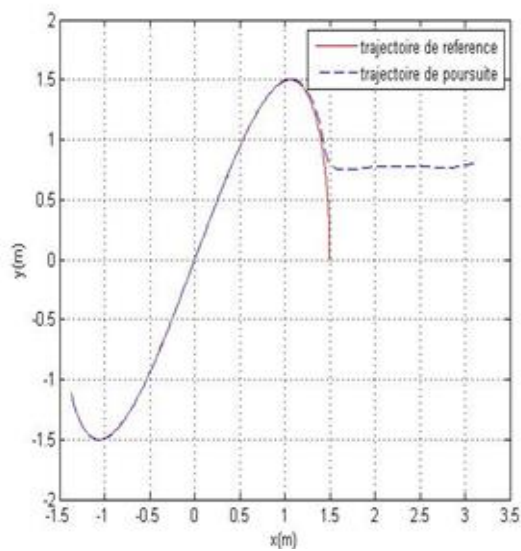


Figure 4.31 : poursuite une trajectoire parabolique avec  $\alpha_2 = 0.5$

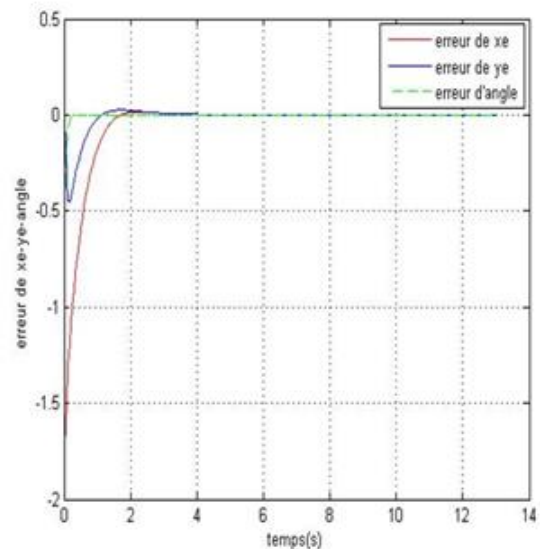


Figure 4.32: erreur de poursuite une trajectoire parabolique avec  $\alpha_2 = 0.5$

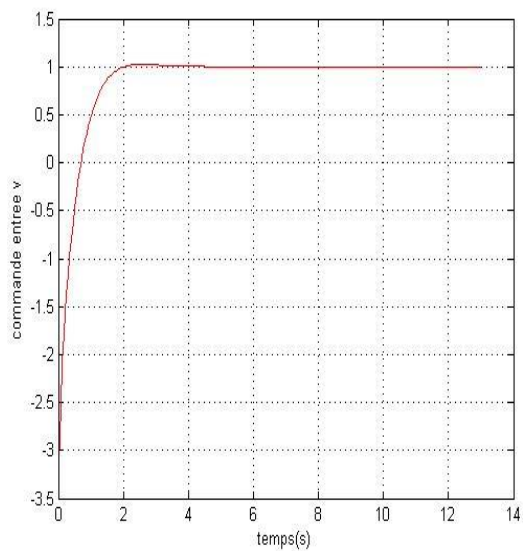


Figure 4.33 : vitesse de commande  $v$  avec  $\alpha_2 = 0.5$

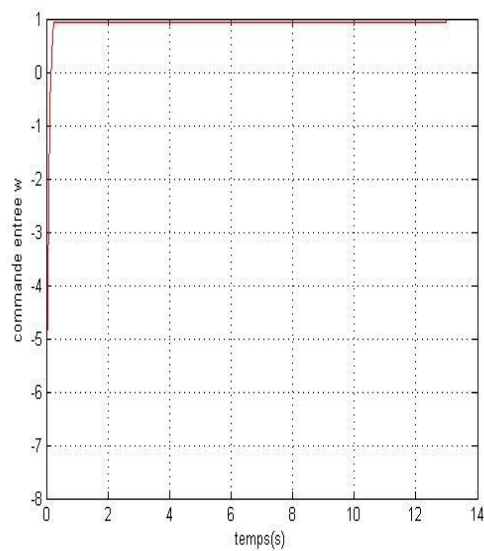


Figure 4.34 : vitesse de commande  $w$  avec  $\alpha_2 = 0.5$

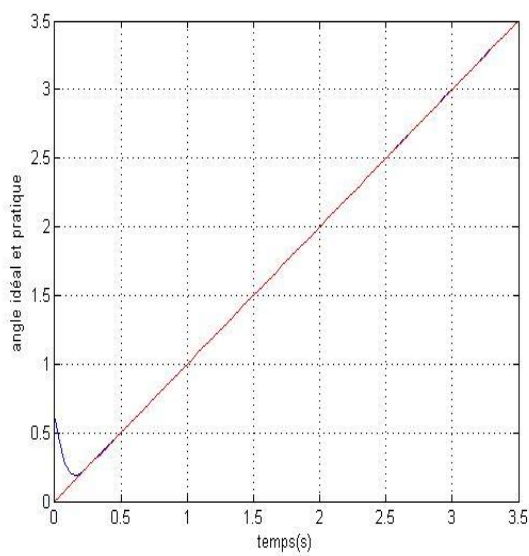


Figure 4.35 : angle idéal et pratique avec  $\alpha_2 = 0.5$

**a. trajectoire circulaire**

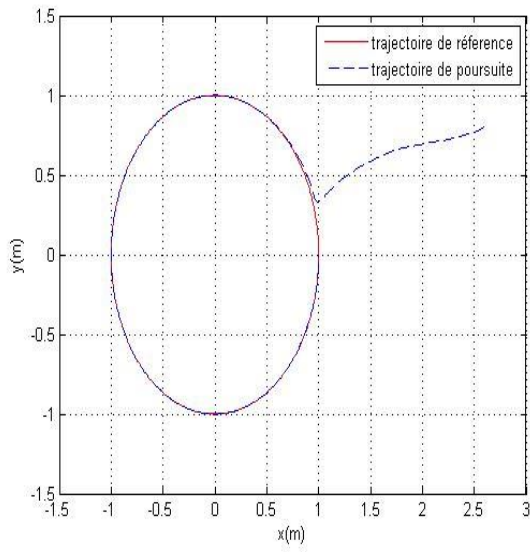


Figure 4.36 : poursuite une trajectoire circulaire avec  $\alpha_2 = 0.5$

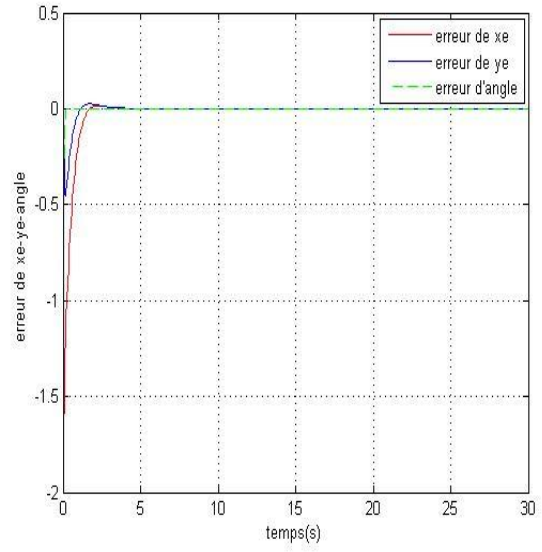


figure 4.37 :erreur de poursuite une circulaire avec  $\alpha_2 = 0.5$

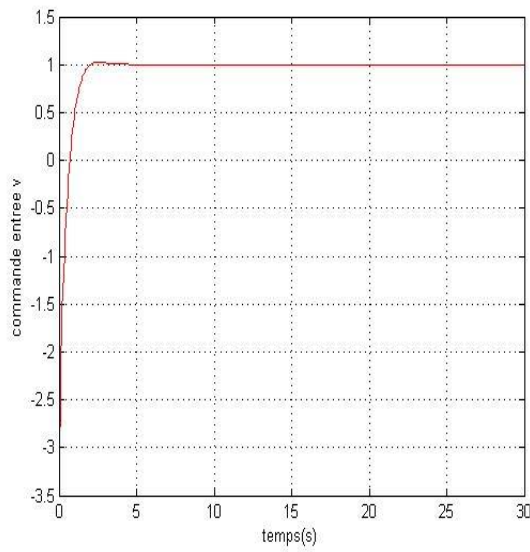


Figure 4.38 : vitesse de commande v avec  $\alpha_2 = 0.5$

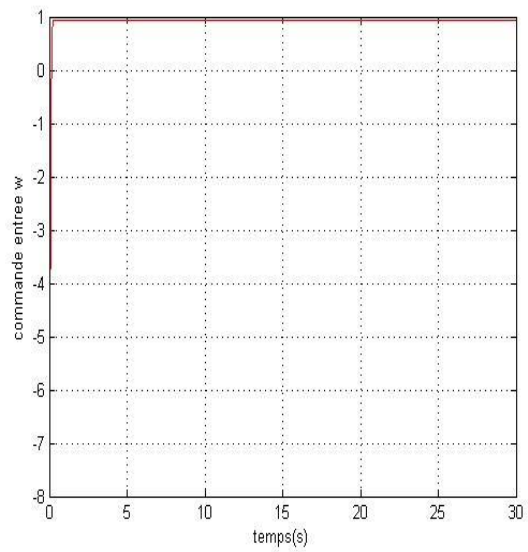


Figure 4.39 : vitesse de commande w avec  $\alpha_2 = 0.5$

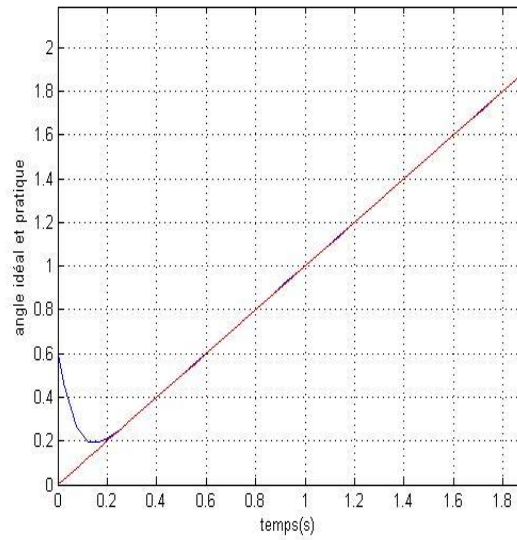


Figure 4.40: angle idéal et pratique avec  $\alpha_2 = 0.5$

**a. trajectoire carrée**

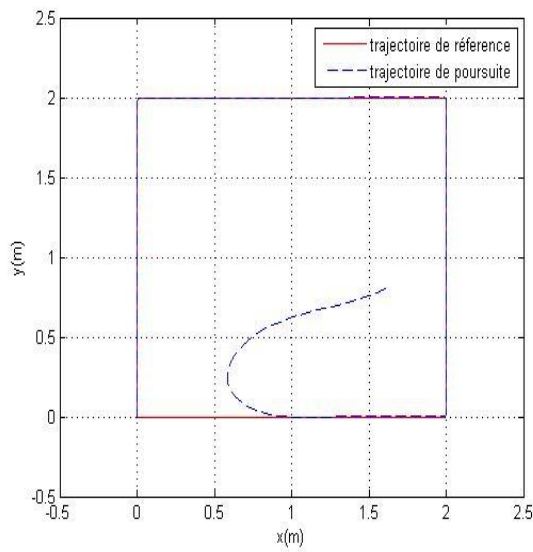


Figure 4.41 : poursuite une trajectoire carrée avec  $\alpha_2 = 0.5$

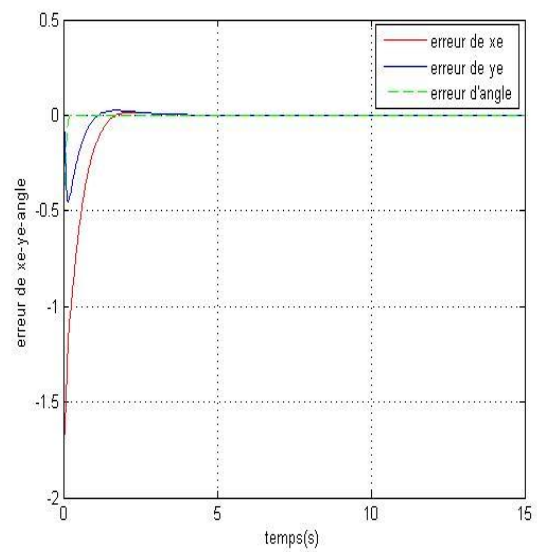


Figure 4.42: erreur de poursuite une trajectoire carrée avec  $\alpha_2 = 0.5$



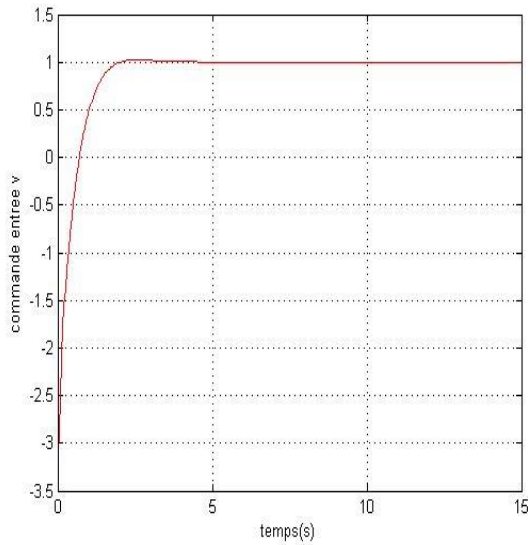


Figure 4.43 : vitesse de commande v avec  $\alpha_2 = 0.5$

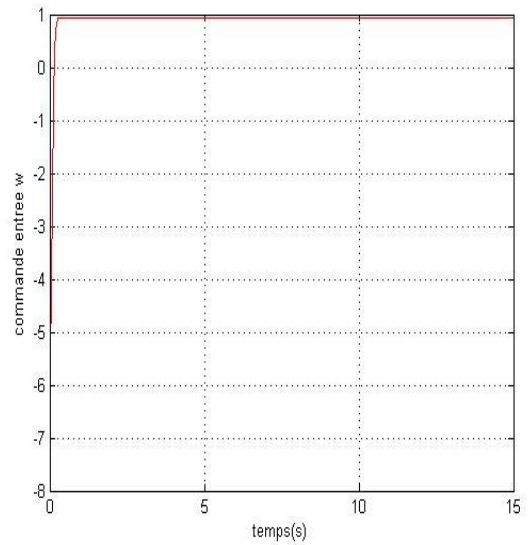


Figure 4.44 : vitesse de commande w avec  $\alpha_2 = 0.5$

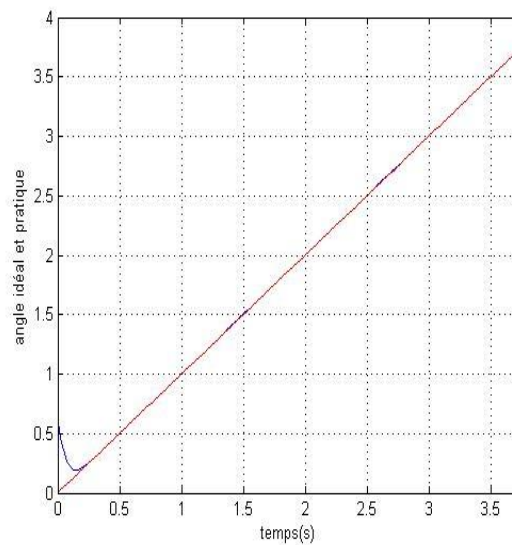


Figure 4.45: angle idéal et pratique avec  $\alpha_2 = 0.5$

#### IV.5 Calcul du temps d'arrivée (Reaching time)

A partir de l'équation (3.38) on a :

$$t_2 = \frac{p_2}{(1+\alpha_2)(p_2-q_2)} \ln \frac{(1+\alpha_2)s(0)^{(p_2-q_2)/p_2 + \beta_2}}{\beta_2}$$

On calcule le temps d'arrivée pour chaque valeur de  $\alpha$  :

➤ pour  $\alpha_2 = 0.5$  :  
 $T_s = 1.336$

➤ pour  $\alpha_2 = 4$ :  
Ts=0.814

➤ pour  $\alpha_2 = 8$  :  
Ts=0.59

D'après les résultats obtenus, on a remarqué que La commande proposée assure bien la convergence de l'erreur de position du robot vers zéro; sur les figures (4.2) et (4.7) et (4.12) et (4.17) et (4.22) et (4.27) et (4.32) et (4.37) et (4.42)

Les figures (4.1) et (4.3) (4.4) et (4.6) (4.8) et (4.9) (4.11) et (4.13) (4.14) et (4.16) (4.18) et (4.19) (4.21) et (4.23) (4.24) et (4.26) (4.28) et (4.29) (4.31) et (4.33) (4.34) et (4.36) (4.38) et (4.39) (4.41) et (4.43) (4.44) montrent la convergence des vitesses linéaire et angulaire du robot vers les vitesses de références dans un temps très court, de l'ordre d'une seconde.

La variation de la valeur, a donné des résultats différents dont le temps d'arrivée calculé est aussi différent. D'après le temps calculé on a trouvé que pour  $\alpha = 8$  la surface converge vers le manifold dans un temps très court, mais cette valeur n'interprète pas que l'erreur converge vers zéro dans un temps très court que les autres valeurs de  $\alpha$ . Donc on peut dire que la valeur  $\alpha$  accélère la convergence de la surface ( $x_e = y_e$ ) ; mais n'accélère pas la convergence des erreurs vers zéro ( $x_e = y_e = 0$ ) ou le cas de  $\alpha = 0.5$ .

## IV.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une nouvelle approche pour le suivi de trajectoires pour un robot mobile non-holonome a été développée. Cette méthode est basée sur la théorie de la commande par mode de glissement, l'avantage principal de cette technique par rapport à la plupart des approches existantes dans la littérature est de permettre au robot de pouvoir suivre des trajectoires de références, tout en considérant la fonction de Lyapunov dans le domaine de l'espace d'état dans le but de permettre au système d'être asymptotiquement stable.

L'approche proposée du mode glissant est composée d'une loi de commande basée sur la fonction de commutation pour la deuxième surface de glissement choisie qui est en fonction de  $x_e$  et  $y_e$  ainsi que la première surface de glissement qui est en fonction de  $\theta_e$ . Cette dernière est choisie par une fonction non linéaire proposée par Park dans le but de faire accélérer l'état du système pour rejoindre la surface dans un temps fini.

Cette commande proposée démontre une bonne performance de suivi en dépit de la grande erreur initiale. La posture du robot converge vers la trajectoire souhaitée en des temps très courts et cette commande permet d'obtenir de bons résultats en termes de poursuite de trajectoires.

Les résultats des simulations ont démontré la robustesse de l'approche proposée et permettent non seulement de garantir la précision élevée des suivis, mais aussi de garder une grande stabilité du robot mobile.

# CONCLUSION GENERALE

Les travaux présentés dans ce mémoire portent sur le suivi de trajectoires d'un robot mobile non holonome de type unicycle.

Notre travail est essentiellement axé sur les lois de commande classiques et améliorées étudiées par Utkin, Gao et al, Park et al, Liu et Wang et enfin Hung. On a pensé qu'il est intéressant de retrouver ces lois de commande sous le contexte de la géométrie différentielle ou dans les approches de la commande par modes glissants, basée sur la loi d'arrivée, avec une vitesse d'arrivée constante ou avec une puissante vitesse d'arrivée.

On a commencé notre travail de recherche par une modélisation des différents types de robots mobiles et à leur étude cinématique. Ensuite, nous avons développé les différents formalismes mathématiques des systèmes à structure variables et nous avons fait une étude sur les différentes lois de commandes par mode de glissement qui sont convenablement exploitées. Nous avons proposé une commande robuste par mode de glissement de type FTSM qui contient des fonctions non linéaires dans la conception de la surface de glissement et qui accélère l'état du système pour la rejoindre dans un temps fini tout en éliminant le phénomène de broutement (chattering).

Dans la phase finale, on a développé et implémenté un algorithme permettant la stabilisation asymptotique des erreurs de suivi de trajectoires. Il est intéressant de synthétiser une loi de commande robuste garantissant la stabilisation en temps fini des erreurs de suivi. Les résultats de la simulation développée ont montré clairement l'efficacité de la commande par mode glissant de type GFTSM et que les erreurs de poursuite convergent vers zéro en un temps fini, tout en garantissant la stabilité du système à l'aide d'une fonction de Lyapunov. Les résultats des diverses applications entreprises pour une poursuite de trajectoires et présentées dans ce travail montrent la fidélité de la réponse de ce type de commande.

En ce qui concerne les perspectives, nous envisageons, dans nos prochains travaux, de nous focaliser sur les directives suivantes :

- Recourir vers les outils de l'intelligence artificielle dans le but d'Optimisations des paramètres de système de commande.
- Application de la commande sur un modèle dynamique en tenant compte des perturbations et des retards sur les mesures.

- Réaliser le suivi de trajectoire par l'utilisation d'une commande avec un observateur mode glissant.
- Appliquer l'approche proposée sur des robots manipulateurs mobiles.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. I. Utkin, “V.S.S. with sliding modes”, IEEE transactions on automatic control, volume AC-22, n°2, pp. 212-222, 1977.
- [2] K.K.D. Young and V.I. Utkin, “Methods for constructing discontinuity planes in multidimensional variable structure systems”, Automatic Remote Control, volume 39,n°10, pp. 1466-1470, 1978.
- [3] J.J.E Slotine, “Sliding controller design for nonlinear systems”, International Journal of Control, volume 40, n°2, pp. 421-434, 1984.
- [4] S.S. Sastry and J.J.E Slotine, “Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators”, International Journal of Control, volume 38, n°2, pp.465- 492, 1983.
- [5] H. Asada and J.J.E. Slotine, “Robot analysis and control”, John Wiley and sons, ISBN-10: 0471830291, April 25 1986.
- [6] J.Y. Hung, W.B. Gao and J.C. Hung, “Variable structure control: A survey”, IEEE Transactions on Industrial Electronics, volume 40, n°1, pp. 2-21, 1993.
- [7] H. Habbi, M. Zelmat and B, OuldBouamama, “A dynamic fuzzy model for a drumboiler-turbine system”, Automatica, volume 39, pp. 1213-1219, 2003.
- [8] H. Harashima, H. Hashimoto and K. Maruyama, “Practical robust control of robot arm using variable structure system”, Proceedings of IEEE Conference, pp: 532-539.
- [9] A. Levant, “Principles of 2-Sliding mode design”, Automatica, volume 43, pp. 576-586, 2007.
- [10] J.-Y. Fourquet et M. Renaud. « Coordinated Control of a Non-Holonomic Mobile Manipulator”. In ISER’1999, pages 115–125, Sydney, Australie, mars 1999.
- [11] G. Campion, G. Bastin et B. D’Andréa-Novel. « Structural Properties and Classification of Kinematic and Dynamic Models of Wheeled Mobile Robots”. IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 12, no. 1, pages 47–62, 1996
- [12] F. W. Warner. “Foundations of differentiable manifolds and lie groups”. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1983.
- [13] G. Giralt, R. Chatilaet M. Vaisset. “An Integrated Navigation and Motion Control System for Autonomous Multisensory Mobile Robot”’s. In First International Symposium on Robotics Research, pages 191–214, Cambridge, 1984.
- [14] K-team. Khepera II user manual, 2002.

- [15] G. Dudek et M. Jenkin. “*Computational principles of mobile robotics*”. Cambridge University Press, 2000.
- [16] Chatterjee, R., Matsuno, F., « *Use of single side reflex for autonomous navigation of mobile robots in unknown environments* » ; Robotics and Autonomous Systems, Volume 35, Issue 2, 31 May 2001, Pages 77-96
- [17] P. Morin et C. Samson. « *Introduction à la commande par retour d’état des systèmes non-holonomes* ». Ecole des Mines de Paris, 2003.
- [18] T. Kanade, C. Thorpe et W. Whittaker. « *Autonomous Land Vehicle Project at CMU*”. In ACM Annual Computer Science Conference, pages 71–80. ACM Press, 1986.
- [19] C. Urmson, J. Anhalt, M. Clark, T. Galatali, J.P. Gonzalez, J. Gowdy, A. Gutierrez, S. Harbaugh, M. Johnson-Roberson, H. Kato, P.L. Koon, K. Peterson, B.K. Smith, S. Spiker, E. Tryzelaar et W. L. “*Whittaker. High Speed Navigation of Unrehearsed Terrain*”: Red Team Technology for Grand Challenge 2004.
- [20] H. Sira-Ramirez, “*Differential Geometric Methods in Variable Structure Control*”, International Journal of Control, Vol.48, N°4, pp. 1359-1380, 1988.
- [21] R.B. Fernandez, J.K. Hedrick, “*Control of multivariable nonlinear systems by sliding mode control*”, International Journal of Control, volume 46, n°3, pp. 1019-1040, 1987.
- [22] J.J.E. Slotine and W. Li, “*Applied Non linear control*”, Englewood cliffs, New jersey, Prentice Hill, 1991.
- [23] R.A. Decarlo, S.H. Zak and G.P. Matthews, “*Variable Structure Control of nonlinear multivariable systems: A tutorial*”, IEEE, volume 76, n°3, pp. 212-232, 1988.
- [24] AbdelmalikBachtarzi. “*Commande des systèmes a structure variable applications à un générateur de vapeur*”. Thèse de doctorat. Université de Constantine, Algérie.3 juillet 2011.
- [25] M. Fliess, “*Automatique et corps différentiels*”, Forum Math., volume 1, pp.227-238, 1989.
- [26] J.X. Xu, H. Hashimoto and F. Harashima, “*On the Design of a VSS Observer for Nonlinear Systems*”, Transactions of the SICE, volume 25, n°2, pp. 211-217, 1989.
- [27] J. Guldner and V.I. Utkin, “*Stabilization of non-holonomic mobile robots using Lyapunov functions for navigation and sliding mode control*”, In Decision and Control, Proceedings of the 33rd IEEE, pp. 2967-2972, Florid, December 1994.

- [28] Y.T. Tian and S. Li., “*Exponential stabilization of nonholonomic dynamic systems by smooth time-varying control*”, *Automatica*, vol. 38, no. 7, pp. 1139-1146, 2002.
- [29] C. Samson. “*Control of chained systems application to path following and timevaryingpoint-stabilization of mobile robots*”, *IEEE Transactions on AutomaticControl*, volume 40, n°1, pp. 64-77, January 1995.
- [30] L. Caracciolo, A. de Luca and S. Iannitti, “*Trajectory tracking control of a four-wheel deferentially driven mobile robot*”, In *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 4, pp. 2632-2638, 1999.
- [31] Z.P. Wang, C.Y. Su, T.H. Lee and S.S. Ge, “*Robust adaptive control of a wheeled mobile robot violating the pure nonholonomic constraint*”, In *Control, Automation, Robotics and Vision Conference, ICARCV*, volume 2, pp. 987-992, December 2004.
- [32] R. Lenain, “*Contribution à la modélisation et à la commande de robots mobiles en présence de glissement*”, PhD. Thesis, Université Blaise Pascal-Clermont II, 14 November 2005.
- [33] Floquet, T., Barbot, J-P.andPerruquetti, W., “*Higher-order sliding mode stabilization for a class of nonholonomic perturbed systems*”, *Automatica*, volume 39, n°6, pp. 1077-1083, 2003.
- [34] W.M. Haddad, V. Chellaboina, “*Nonlinear Dynamical Systems and Control*”, Princeton University Press, USA, 2008.
- [35] S.H. Li, Y.P. Tian, “*Finite-time stability of cascaded time-varying systems*”, *Int. J. Contr.* 80 (4) (2007) 646–657.
- [36] M. Vidyasagar, “*Decomposition techniques for large-scale systems with nonadditive interactions: stability and stability*”, *IEEE Trans. Autom. Contr.* 25 (4) (1980) 773–779.
- [37] E. Panteley, A. Loría,” *On global uniform asymptotic stability of nonlinear time-varying systems in cascade*”, *Syst. Contr. Lett.* 33 (2) (1998) 131–138.
- [38] E. Panteley, A. Loría, “*Growth rate conditions for uniform asymptotic stability of cascaded time-varying systems*”, *Automatica* 37 (3) (2001) 453–460.
- [39] M.Y. Ou, S.H. Li, C.L. Wang, “*Finite-time tracking control for nonholonomic mobile robots based on visual servoing*”, *Asian J. Contr.* 16 (3) (2014) 1–13.
- [40] M.Y. Ou, H.B. Du, S.H. Li, “*Finite-time tracking control of multiple nonholonomic mobile robots*”, *J. Franklin Inst.* 394 (9) (2012) 2834–2860.
- [41] D. Chwa, “*Sliding-mode tracking control of nonholonomic wheeled mobile robots in polar coordinates*”, *IEEE Trans. Contr. Syst. Technol.* 12 (4) (2004)637–644.



- [42] C.Y. Chen, T.H.S. Li, Y.C. Yeh, “*EP-based kinematic control and adaptive fuzzy sliding-mode dynamic control for wheeled mobile robots*”, Inform. Sci. 179 (1–2) (2009) 180–195.
- [43] C.J. Fallaha, M. Saad, H.Y. Kanaan, “*Sliding-mode robot control with exponential reaching law*”, IEEE Trans. Ind. Electron. 58 (2) (2011) 600–610.
- [44] M.J. Mahmoodabadi, S. Momennejad, A. Bagheri,” *Online optimal decoupled sliding mode control based on moving least squares and particle swarm optimization*”, Inform. Sci. 268 (1) (2014) 342–356.
- [45] B.S. Park, S.J. Yoo, J.B. Park, Y.H. Choi, “*Adaptive neural sliding mode control of nonholonomic wheeled mobile robots with model uncertainty*”, IEEE Trans. Contr. Syst. Technol. 17 (1) (2009) 207–214.
- [46] J. Yang, S. Li, X. Yu, “*Sliding-mode control for systems with mismatched uncertainties via a disturbance observer*”, IEEE Trans. Ind. Electron. 60 (1) (2013) 160–169.
- [47] Z. Zhu, Y. Xia, M. Fu, Adaptive sliding mode control for attitude stabilization with actuator saturation, IEEE Trans. Ind. Electron. 58 (10) (2011) 4898–4907.
- [48] YangmingZhang ,Guorong Liu , Biao Luo . “*Finite-time cascaded tracking control approach for mobile robots*”.V284, 2014, P 31-43.
- [49] W.BENAZIZA « *Commande par modes glissants du suivi de trajectoires pour un robot mobile* ».Thèse de magister en électronique . université de Batna-2015