République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Djilali BOUNAÂMA Khemis Miliana

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et d'Informatique

Mémoire Présenté

Pour l'obtention de diplôme de

Master en Mathématiques

Spécialité: Mathématiques Appliquées et Traitement du Signal

Titre :

Quelques outils d'analyse réelle et complexe en théorie analytique des nombres

Réalisé par : Kouache Khadidja Hibatallah

Soutenu publiquement le :01/06/2016.

Devant le jury composé de:

Mr M.Hachama	Président
Mr M.Karras	Encadreur
Mr A.Krelifa	Examinateur1
Mr B.Saadaoui	Examinateur2

Année Universitaire 2015/2016

Table des matières

Remerciements

J'exprime toute ma gratitude à ALLAH (Dieu), notre créateur de nous avoir donné la force, la volonté, le courage et la patience pour la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier mon encadreur monsieur Karras pour avoir proposé et dirigé ce thème avec une grande disponibilité.

Je remercie également tous les enseignants du département de mathématique et informatique de l'université de Khemis Miliana qui ont participé à ma formation pendant tout le cycle universitaire.

Je tiens aussi à remercier ma famille, tous les enseignants qui ont contribué à mon éducation du primaire jusqu'à l'université et mes amis pour leurs soutiens et encouragements.

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à étudier quelques outils d'analyse réelle et complexe qui jouent un rôle très important dans la théorie analytique des nombres.
D'abord, on rappelle les grandes notions de base : fonctions arithmétiques et leurs propriétés, fonctions sommatoires, produit de convolution et produit eulérien, la fonction zêta de Riemann et le prolongement analytique. . . etc.
Ensuite, on étudie quelques outils d'analyse réelle comme : les formules sommatoires d'Abel et d'Euler Mac Laurin, théorème des nombres premiers et quelques méthodes élémentaires.
Finalement, on étudie quelques outils d'analyse complexe comme : la formule de Perron, théorème d'Ikehara et théorème d'Erdös et Turán comme un résultat sur la fonction phi d'Euler.

Introduction

La théorie analytique des nombres est une branche de la théorie des nombres qui utilise les méthodes de l'analyse mathématique, pour résoudre les problèmes liés aux nombres naturels comme théorème de Dirichlet sur les nombres premiers.

Un nombre premier p est un entier ≥ 2, divisible uniquement par 1 et lui-même. Depuis Euclide, il est connu qu'il existe une infinité de nombres premiers.
À la fin du 18 siècle, Gauss 1792 et Legendre 1798 ont conjecturé que $\pi(x)$_le nombre des nombres premiers $\leq x$ était proche de $x/\ln(x)$, où ln est la fonction logarithme népérien. Plus précisément,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = 1. \tag{*}$$

Cette affirmation constitue le théorème des nombres premiers, prouvé indépendamment par Hadamard et La Vallée Poussin en 1896, grâce à la fonction zêta de Riemann. Une assertion équivalente est :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{Li(x)} = 1,$$

où $Li(x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{\ln(t)}$.
En 1949 Erdös et Selberg donnent une preuve plus élémentaire de $(*)$ sans utiliser les résultats d'analyse complexe (la fonction zêta de Riemann).

Dans ce mémoire nous avons présenté trois chapitres, le premier contient quelques outils fondamentaux et quelques définitions utiles pour l'étude de ce thème. Nous présentons dans le deuxième chapitre quelques outils utilisés dans l'analyse réelle et quelques applications de ces outils. Enfin, nous représentons quelques outils utilisés dans l'analyse complexe.

Chapitre 1

Notations et préliminaires

1.1 Notations

Nous donnons les principales notations utilisées dans notre travail :

1. Le mot " entier " désigne un entier relatif (les éléments de $\mathbb{Z}$).
2. On désigne par p un nombre premier.
3. Les deux symboles $\sum_{p \leq x}$ et $\prod_{p \leq x}$ représentent respectivement une somme et un produit étendus à tous les nombres premiers $p \in [2, x]$. De plus
$$\sum_p = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \sum_{p \leq x} \text{ et } \prod_p = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \prod_{p \leq x}.$$
4. Si m et n sont des entiers positifs, alors $m \mid n$ signifie m divise n, et (n, m) désigne le plus grand commun diviseur de n et m.
5. $p^\alpha \parallel n$ signifie p^α divise n et $p^{\alpha+1}$ ne divise pas n.
6. $[x]$ désigne l'unique entier k tel que $k \leq x < k+1$ (la partie entière de x)
$\{x\}$ désigne la partie fractionnaire de x, $\{x\} = x - [x]$ $(0 \leq \{x\} < 1)$.
7. La fonction " ln " représente toujours le logarithme népérien.
8. Si g est une fonction définie et positive pour $x \geq 0$ et si f est une fonction définie pour tout $x \geq x_0$, on a alors
$$f(x) = O(g(x)) \text{ signifie qu'il existe } M > 0 \text{ tel que pour tout } x \geq x_0 : \frac{|f(x)|}{g(x)} \leq M.$$

($f(x)$ est un grand O de $g(x)$)

$f(x) = o(g(x))$ signifie $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{|f(x)|}{g(x)} = 0$ ($f(x)$ est un petit o de $g(x)$)

$f(x) \backsim g(x)$ signifie $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$

9. $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$ signifie la factorisation de n en facteurs premiers, p_i nombre premier et $a_i \in \mathbb{N}^*$.
10. $s = \sigma + it$ désigne un nombre complexe, on note la partie réelle $\sigma := \mathrm{Re}(s)$ et la partie imaginaire $t := \mathrm{Im}(s)$.
11. La constante d'Euler est le nombre γ défini par

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln n \right) \simeq 0.577215663 \cdots .$$

12. Soit F une fonction analytique, et c un nombre réel on a :

a) $\displaystyle\int_{c-iT}^{c+iT} F(s)ds$ est signifié $\displaystyle\int_{-T}^{T} F(c+it)i.dt$ (t variable réelle)

b) $\displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)ds$ est signifié $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(c+it)i.dt$ et $\displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)ds = \lim_{T\to\infty} \int_{c-iT}^{c+iT} F(s)ds.$

1.2 Définitions et théorèmes

Les fonctions arithmétiques

Définition 1.2.1 *Une fonction arithmétique est une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$. On désigne par $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions arithmétiques.*

Exemples

1. La fonction nombre de diviseurs $d(n)$ est définie par

$$\begin{aligned} d(n) &= card\{d \in \mathbb{N}^*, d|n\} \\ &= \sum_{d|n} 1 \end{aligned}$$

pour tout entier $n \geq 1$.

2. La fonction somme de diviseurs $\sigma(n)$ est définie comme suit

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d \qquad\qquad \text{pour tout entier } n \geq 1.$$

3. La fonction de Von Mongoldt $\Lambda(n)$ est définie par :

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p \text{ si } \ n = p^{\alpha} \text{ avec } \alpha \geq 1 \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

4. La fonction de Möbius $\mu(n)$ est définie par : pour tout entier $n = \prod_{j=1}^{k} p_j^{a_j}$

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^k & \text{si } a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1 \text{ (produit des facteurs premiers distincts)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si n possède au moins un facteur carré supérieur à 1, donc $\mu(n) = 0$.

5. La fonction indicatrice d'Euler $\varphi(n)$ est définie par

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= card\{m \in \mathbb{N}^* | m \leq n \text{ et } (m,n) = 1\} \\ &= \sum_{\substack{m \leq n \\ (m,n)=1}} 1. \end{aligned}$$

Théorème 1.2.1 *Si $n > 1$, on a :*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \left[\frac{1}{n}\right] = \begin{cases} 1 \ si \ n = 1 \\ 0 \ si \ n > 1. \end{cases}$$

<u>Démonstration</u>

Pour $n = 1$ le résultat est évident.

Prenons $n \geq 2$ et montrons que la somme est nulle.

Soit $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ avec $a_i \geq 1$ $(\forall i = 0, \cdots, k)$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{d|n} \mu(d) &= \mu(1) + \mu(p_1) + \cdots + \mu(p_k) + \mu(p_1 p_2) + \cdots + \mu(p_{k-1} p_k) + \cdots + \mu(p_1 p_2 \cdots p_k) \\
&= \binom{k}{0} 1 + \binom{k}{1} (-1) + \binom{k}{2} (-1)^2 + \cdots + \binom{k}{k} (-1)^k \\
&= \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-1)^r \\
&= (1 + (-1))^k \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Théorème 1.2.2 *Si $n \geq 1$, on a :*

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}.$$

<u>**Démonstration**</u>

On peut écrire la fonction φ comme suit

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{(n,k)} \right] \qquad k \text{ est tous les entiers} \leq n.$$

Nous appliquons le théorème (1.2.1) et en remplaçant n par (n, k), on obtient

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{(n,k)} \right] = \sum_{k=1}^{n} \sum_{d|(n,k)} \mu(d) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{d|n \\ d|k}} \mu(d).$$

Pour un diviseur d fixé de n, nous devons sommer sur $1 \leq k \leq n$ qui sont multipliés par d. Si on écrit $k = qd$, alors $1 \leq k \leq n$ si et seulement si $1 \leq q \leq n/d$. D'où on peut écrire la dernière somme de $\varphi(n)$ sous la forme :

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \sum_{q=1}^{n/d} \mu(d) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{q=1}^{n/d} 1 = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}.$$

Propriétés

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.
2. Pour tout p premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$on a, $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$.

Fonction arithmétique multiplicative et complètement multiplicative

Définition 1.2.2 *On dit qu'une fonction arithmétique f est multiplicative si $f(1) = 1$ et $f(nm) = f(n)f(m)$ lorsque $(n,m) = 1$ et on désigne $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions multiplicatives. Dans ce cas pour tout entier $n = \prod_p p^{\alpha_p}$ on a :*

$$f(n) = \prod_p f(p^{\alpha_p}).$$

Une fonction arithmétique f est dite ***complètement multiplicative*** *si $f(1) = 1$ et $f(nm) = f(n)f(m)$ pour tout n et m.*

Théorème 1.2.3 *Soient f une fonction multiplicative et F une fonction sommatoire de f définie par*

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Alors la fonction F est multiplicative.

Démonstration

Soient n et m deux entiers positifs tel que $(n,m) = 1$ et $d = d_1 d_2$ où $d_1|n$ et $d_2|m$ et $(d_1, d_2) = 1$, on a

$$\begin{aligned} F(nm) &= \sum_{d|nm} f(d) = \sum_{d_1|n,\ d_2|m} f(d_1 d_2) \\ &= \sum_{d_1|n,\ d_2|m} f(d_1) f(d_2) \\ &= \sum_{d_1|n} \sum_{d_2|m} f(d_1) f(d_2) = \sum_{d_1|n} f(d_1) \sum_{d_2|m} f(d_2) \\ &= F(n)F(m). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exemples

1. Les fonctions $d(n)$ et $\sigma(n)$ sont multiplicatives.
   D'après le théorème précédent, on a
   $d(n) = \sum_{d|n} 1$ donc $f(d) = 1$, comme la fonction 1 est multiplicative alors $d(n)$ est multiplicative, de même pour $\sigma(n)$ on applique le théorème pour $f(n) = d$.

2. La fonction de Möbius $\mu(n)$ est multiplicative.
   On a $\mu(1) = 1$.
   Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que$(n, m) = 1$. Si n ou m a un facteur carré alors nm aussi et $\mu(nm) = \mu(n)\mu(m) = 0$.
   Si n et m ne sont pas des nombres de facteurs carré, on a : $n = p_1 \cdots p_r$ et $m = q_1 \cdots q_s$. Comme n et m sont premiers entre eux, les p_i et q_j sont tous distincts, donc
   $$\mu(nm) = (-1)^{r+s} \text{ et } \mu(n)\mu(m) = (-1)^r(-1)^s = (-1)^{r+s}.$$

3. La fonction φ d'Euler est multiplicative.
   On a $\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d}$
   Comme la fonction μ est multiplicative donc la fonction indicatrice d'Euler aussi est multiplicative puisque
   $$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d} = n\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}.$$
   On pose $d = d_1 d_2$ et $(d_1, d_2) = 1$, alors
   $$\begin{aligned} \varphi(nm) &= nm\sum_{d|nm} \frac{\mu(d)}{d} = nm\sum_{d_1 d_2|nm} \frac{\mu(d_1 d_2)}{d_1 d_2} \\ &= nm\sum_{d_1|n} \frac{\mu(d_1)}{d_1} \sum_{d_2|m} \frac{\mu(d_2)}{d_2} \\ &= \left(n\sum_{d_1|n} \frac{\mu(d_1)}{d_1}\right)\left(m\sum_{d_2|m} \frac{\mu(d_2)}{d_2}\right) \\ &= \varphi(n)\varphi(m). \end{aligned}$$

Fonction arithmétique additive et complètement additive

Définition 1.2.3 *On dit qu'une fonction arithmétique f est additive si pour tous n et m entiers premiers entre eux, on a*

$$f(nm) = f(n) + f(m)$$

*et si la relation tient pour tout n et m, alors on dit que la fonction **complètement additive.***

Exemples

1. La fonction nombre des facteurs premiers $\omega(n)$ distincts de n est définie par

$$\omega(n) = \sum_{\substack{p|n \\ p<n}} 1$$

   $\omega(n)$ est une fonction additive. En effet, pour tout couple (n,m) premier entre eux, on a les diviseurs premiers de n ne divisent pas m et de même pour les diviseurs premiers de m, alors $\omega(nm) = \omega(n) + \omega(m)$.

2. La fonction $\Omega(n)$ le nombre des facteurs premiers de n est définie par

$$\Omega(n) = \sum_{p^\alpha || n} \alpha \quad \text{pour } n \text{ un entier positif}$$

   est une fonction complètement additive.

Produit de convolution

Définition 1.2.4 *Soient f et g deux fonctions arithmétiques. Le produit de convolution de f et g est la fonction $f * g$ définie comme suit*

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} g(d) f\left(\frac{n}{d}\right).$$

Toute fonction arithmétique f vérifie l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (f * \delta)(n) = f(n)$$

tel que δ est la fonction indicatrice définie par

$$\delta = \begin{cases} 1 \ si \ n = 1 \\ 0 \ si \ n > 1. \end{cases}$$

Proposition 1.2.4 *Soient f, g et h trois fonctions arithmétiques, on a*
1- $f * g = g * f$ (le produit de convolution est commutatif)
2- $(f * g) * h = f * (g * h)$ (le produit de convolution est associatif)
3- $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$ (le produit de convolution est distrubitif).

Démonstration

Soient f, g et h des fonctions arithmétiques, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

1. $*$ est commutative : on pose $n = d \times d'$,alors

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} g\left(\frac{n}{d}\right) f(d) = \sum_{d|n} g(d') f\left(\frac{n}{d'}\right) = (g * f)(n).$$

2. $*$ est associative :

$$\begin{aligned} ((f * g) * h) &= \sum_{d|n} (f * g)(d) h\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{dm=n} (f * g)(d) h(m) \\ &= \sum_{dm=n} \sum_{kl=d} f(k) g(l) h(m) \\ &= \sum_{klm=n} f(k) g(l) h(m) \\ &= \sum_{k|n} f(k) \sum_{lm=n/k} g(l) h(m) \\ &= \sum_{k|n} f(k) \sum_{l|(n/k)} g(l) h\left(\frac{n}{kl}\right) \\ &= \sum_{k|n} f(k) (g * h)\left(\frac{n}{k}\right) \\ &= (f * (g * h))(n). \end{aligned}$$

3. $*$ est distributive par rapport à l'addition :

$$\begin{aligned}(f*(g+h))(n) &= \sum_{d|n} f(d)\left(g\left(\frac{n}{d}\right)+h\left(\frac{n}{d}\right)\right)\\ &= \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)+\sum_{d|n} f(d)h\left(\frac{n}{d}\right)\\ &= (f*g)(n)+(f*h)(n).\end{aligned}$$

Théorème 1.2.5 *L'ensemble $\mathcal{A}$ des fonctions arithmétiques, muni de l'addition et de la convolution, forme un anneau commutatif unitaire, c'est-à-dire que*
-$\mathcal{A}$ muni de l'addition est un groupe abélien.
-la loi interne $*$ est associative, commutative et distributive par rapport à l'addition, et il admet un élément neutre δ.

Démonstration

On a déjà vu et démontré dans la proposition précédente que la loi $(*)$ est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition, et on a par définition δ est élément neutre pour la loi $*$, ce qui prouve que $(\mathcal{A},*,+)$ est un anneau commutatif unitaire.

Inversibilité des fonctions arithmétiques

Nous avons montré dans le théorème précèdent que $(\mathcal{A},*,+)$ est un anneau commutatif unitaire et le résultat suivant caractérise les éléments inversibles de cet anneau.

Théorème 1.2.6 *Soit f une fonction arithmétique. Alors f est inversible si et seulement si $f(1)\neq 0$.*

Démonstration

Supposons que f soit inversible, c'est-à-dire qu'il existe $g\in\mathcal{A}$ tel que $f*g=\delta$.
Alors

$$(f*g)(1)=\delta(1)=1$$

et comme

$$(f*g)(1)=\sum_{d|1} f(d)g\left(\frac{1}{d}\right)=f(1)g(1).$$

donc $f(1)g(1)=1$. Alors $f(1)\neq 0$.
Réciproquement, supposons $f(1)\neq 0$ et on cherche $g\in\mathcal{A}$ telle que $f*g=\delta$, c'est-à-dire

$f(1)g(1) = 1$ et pour tout $n \geq 2$ on a

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) = 0$$

On va construire g par récurrence, et définit la fonction g par : $g(1) = \frac{1}{f(1)}$.

$$\begin{aligned} 0 &= f(1)g(n) + \sum_{\substack{1<d<n \\ d|n}} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

donc, on a

$$g(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{1<d\leq n \\ d|n}} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Alors $g \in \mathcal{A}$ telle que $f * g = \delta$.

Exemple 1.2.7 *La fonction inverse de μ est la fonction constante 1, car on a vu que le théorème(*1.2.1*)*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 \ si \ n = 1 \\ 0 \ si \ n > 1 \end{cases}$$

donc $\mu * 1 = \sum_{d|n} \mu(d) = \delta$.

Théorème 1.2.8 *Soient f et g deux fonctions arithmétiques multiplicatives, Alors la fonction arithmétique $f * g$ est aussi multiplicative.*

Démonstration

On a

$$(f * g)(1) = f(1)g(1) = 1.$$

Soit maintenant deux entiers m et n premiers entre eux. Nous avons

$$(f * g)(nm) = \sum_{d|nm} f(d)g\left(\frac{nm}{d}\right)$$

alors

$$
\begin{aligned}
(f*g)(nm) &= \sum_{d_1d_2|nm} f(d_1d_2)g\left(\frac{nm}{d_1d_2}\right) \quad \text{avec } (d_1,d_2)=1 \\
(f*g)(nm) &= \sum_{d_1|n}\sum_{d_2|m} f(d_1)f(d_2)g\left(\frac{n}{d_1}\right)g\left(\frac{m}{d_2}\right) \quad \text{car } (\frac{n}{d_1},\frac{m}{d_2})=1 \\
&= \sum_{d_1|n} f(d_1)g\left(\frac{n}{d_1}\right)\sum_{d_2|m} f(d_2)g\left(\frac{m}{d_2}\right) \\
&= (f*g)(n)(f*g)(m).
\end{aligned}
$$

Théorème 1.2.9 *(Formule d'inversion de Möbius)*
Soit f une fonction arithmétique, on a pour tout $n \geq 1$

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) \Longleftrightarrow f(n) = \sum_{d|n} F(\frac{n}{d})\mu(d).$$

Démonstration

Posons $F = f * 1$, donc

$$f * \delta = f * (\mu * 1) = (f * 1) * \mu = F * \mu.$$

Réciproquement, on pose $f = F * \mu$, d'où

$$f = f * 1 = (F * \mu) * 1 = F * (\mu * 1) = F * \delta = F.$$

Fonctions sommatoires

Définition 1.2.5 *Soit f une fonction arithmétique, et soit $x \geq 1$ la fonction $F(x)$ définie par*

$$F(x) = \sum_{n \leq x} f(n) \quad \textit{est dite fonction sommatoire de } f.$$

Exemples

1. **La fonction** $\pi(x)$: Pour tout $x \geq 0$, on désigne par $\pi(x)$ le nombre de nombres

premiers inférieurs ou égaux à x

$$\begin{aligned}\pi(x) &= card\{p, \text{ tel que } p \text{ premier et } p \leq x\}\\ &= \sum_{p\leq x} 1\end{aligned}$$

avec $\pi(x) = 0$ pour $0 \leq x < 2$.

2. **La fonction** $\theta(x)$: Pour tout $x \geq 0$, on définit la première fonction de Tchebychev $\theta(x)$ par
$$\theta(x) = \sum_{p\leq x} \ln p \quad \text{avec } \theta(x) = 0 \text{ pour } 0 \leq x < 2.$$

3. **La fonction** $\psi(x)$: Pour tout $x \geq 0$, on définit la deuxième fonction de Tchebychev $\psi(x)$ par
$$\psi(x) = \sum_{p^v\leq x} \ln p \quad \text{avec } \psi(x) = 0 \text{ pour } 0 \leq x < 2.$$

   et l'on a

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{p^v\leq x} \ln p = \sum_{p\leq x} \ln p + \sum_{p^2\leq x} \ln p + \sum_{p^3\leq x} \ln p + \cdots + \sum_{p^m\leq x} \ln p\\ &= \sum_{p\leq x} \ln p + \sum_{p\leq x^{1/2}} \ln p + \sum_{p\leq x^{1/3}} \ln p + \cdots + \sum_{p\leq x^{1/m}} \ln p\\ &= \theta(x) + \theta(x^{1/2}) + \cdots + \theta(x^{1/m}) \quad \text{où } m = \left[\frac{\ln x}{\ln 2}\right].\end{aligned}$$

Expression élémentaire de la fonction $\psi_1(x)$

La fonction $\psi_1(x)$ est définie par

$$\psi_1(x) = \int_1^x \psi(u)du \ \ (x \in \mathbb{R}) \ \text{ avec } \psi_1(x) = 0 \text{ pour } x \leq 2$$

Soient $x \geq 2$ et p^n et q^m $(n,\, m \in \mathbb{N}^*)$ les deux puissances successives des nombres p et q tels que $p^n \leq x \leq q^m$. On aura alors

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &= \int\limits_1^{p^n} \psi(u)du + \int\limits_{p^n}^{x} \psi(u)du = \psi_1(p^n) + \psi(p^n)\,(x - p^n) \\
\psi_1(x) &= (\psi(p^n))\, x + (\psi_1(p^n) - p^n\psi(p^n))\,.
\end{aligned}$$

Exemples Soit $\psi(x) = \sum\limits_{p^v \leq x} \ln p$, alors

Si $2 \leq x < 3$,

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &= (\psi(p^n))\, x + (\psi_1(p^n) - p^n\psi(p^n)) \\
&= (\psi(2))\, x + (\psi_1(2) - 2\psi(2)) \\
&= x \ln 2 - 2\ln 2
\end{aligned}$$

donc $\psi_1(3) = \ln 2$.

Si $3 \leq x < 4$, $\psi_1(x) = (\ln 2 + \ln 3)x - 2\ln 2 - 3\ln 3$, $\psi_1(4) = 2\ln 2 + \ln 3$.

Si $4 \leq x < 5$, $\psi_1(x) = (2\ln 2 + \ln 3)x - 6\ln 2 - 3\ln 3$, $\psi_1(5) = 4\ln 2 + 2\ln 3$.

Les polynômes et nombres de Bernoulli

Les nombres de Bernoulli

Définition 1.2.6 *Les nombres de Bernoulli sont défini par $B_0 = 1$, et par la relation de récurrence :*

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} B_k = 0 \quad \textit{pour tout } n \geq 1.$$

Les polynômes de Bernoulli

Définition 1.2.7 *Les polynômes de Bernoulli sont l'unique suite de polynômes* $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que :*

$$\begin{cases} p_0(x) = 1 \\ p_n(x) = n\int\limits_0^x p_{n-1}(t)dt + B_n \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, p_n'(x) = np_{n-1}(x) \\ \int\limits_0^1 p_n(t)dt = 0 \quad (n \geq 1) \end{cases}.$$

On appelle nième nombre de Bernoulli le nombre $B_n = p_n(0)$.

Les premiers polynômes et nombres de Bernoulli sont :
$p_0(x) = 1$, $B_0 = 1$
$p_1(x) = x - \frac{1}{2}$, $B_1 = p_1(0) = -\frac{1}{2}$
$p_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$, $B_2 = p_2(0) = \frac{1}{6}$
$p_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$, $B_3 = p_3(0) = 0$.

Les fonctions de Bernoulli

Définition 1.2.8 *La nième fonction de Bernoulli* $B_n(x)$ *définie par* $B_n(x) = p_n(x-[x])$.

Abscisse de convergence

Définition 1.2.9 *Soit* $F(s) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ *est une série de Dirichlet, on note*
$\sigma_c = \inf\{\sigma = \mathrm{Re}(s) | \sum\limits_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s} < \infty\}$ *est l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet, et* $\sigma_a = \inf\{\sigma | \sum\limits_{n\geq 1} |a_n| n^{-\sigma}$ *converge absoluement*$\}$ *est l'abscisse de convergence absolue d'une série de Dirichlet.*
Alors
1- Si $\sigma > \sigma_c$*, la série* $F(s)$ *est converge.*
2- Si $\sigma > \sigma_a$*, la série* $F(s)$ *est converge absolument.*

Théorème 1.2.10 *Soit* $F(s) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s} (s \in \mathbb{C})$ *est une série de Dirichlet convergente en point* $s_0 \in \mathbb{C}$*. Alors, elle converge dans le demi plan* $\sigma > \sigma_0$*. De plus, elle converge* *uniformément sur tout domaine de la forme*

$$D_\alpha(s_0) = \{\sigma - \sigma_0 \geq 0,\ |\arg(s - s_0)| \leq \alpha \quad \textit{avec } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\}.$$

Pour la démonstration voir [1].

La fonction Φ d'Euler

Pour $m \geq 1$, on considère a_m le nombre de solutions de l'équation $\varphi(n) = m$, alors

$$a_m = \sum_{\varphi(n)=m} 1 = card\{n : \varphi(n) = m\}.$$

Il est donc tout à fait naturel de considérer la fonction

$$\Phi(x) = \sum_{m \leq x} a_m = \sum_{\varphi(n) \leq x} 1.$$

La fonction ζ de Riemann

La fonction $\zeta(s)$ est très importante en arithmétique puisqu'elle fait donc un lien entre les entiers naturels et les nombres premiers. C'est aussi la série de Dirichlet la plus simple puisqu'elle est associée à la fonction constante 1.

Définition 1.2.10 *La fonction zêta de Riemann est la fonction complexe*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Cette série converge absolument sur le demi-plan $\sigma > 1$.

Produit eulérien

Théorème 1.2.11 *Soit f une fonction multiplicative telle que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ est absolument convergente.*
1. Pour tout nombre premier p, la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(p^n) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} f(p^n) \quad \textit{est absolument convergente.}$$

2. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ *est égale au produit infini des séries* $\sum_{n=0}^{+\infty} f(p^n)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \prod_p \left\{1 + f(p) + f(p^2) + \cdots \right\}.$$

Pour la démonstration voir[7]

Remarque 1.2.12 *La fonction zêta de Riemann s'écrit comme suit*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Prolongement analytique de la fonction $\zeta(s)$

La fonction ζ définie dans le demi-plan $(\sigma > 1)$ par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

La fonction $\zeta(s)$ se prolonge analytiquement au demi-plan $(\sigma > 0)$. Elle y est holomorphe sauf au point $s = 1$ qui est un pôle simple et dont le résidu vaut 1. Elle s'exprime par l'égalité suivante

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \{x\} \frac{dx}{x^{s+1}}$$

Pour la démonstration voir [6].

Fonction méromorphe

Définition 1.2.11 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, on dit que la fonction f est méromorphe sur Ω si f est holomorphe sur Ω sauf aux nombre fini des points singuliers isolés de Ω .*

Chapitre 2

Les outils d'analyse réelle

2.1 Formules sommatoires

2.1.1 La formule sommatoire d'Abel

Théorème 2.1.1 *Soit* $\{a(n)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de nombres complexes et soit* $A(t) = \sum\limits_{1\leq n\leq t} a(n)$ *avec* $A(t) = 0$ *pour* $t < 1$, x *et* y *deux nombres réelles tels que* $0 < y < x$ *et* $f : [y, x] \to \mathbb{C}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$. *Alors, on a*

$$\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)dt$$

<u>**Démonstration**</u>

On pose $m = [y]$ et $k = [x]$. Alors on a

$$A(y) = A(m), A(x) = A(k) \text{ et } \sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = \sum_{n=m+1}^{k} a(n)f(n)$$

On a

$$a(n) = \sum_{i=1}^{n} a(i) - \sum_{i=1}^{n-1} a(i) = A(n) - A(n-1) \text{ pour tout } n \geq 1 \ (A(0) = 0).$$

Cela implique

$$\begin{aligned}
\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) &= \sum_{y<n\leq x} \{A(n)-A(n-1)\}f(n)\\
&= \sum_{y<n\leq x} A(n)f(n) - \sum_{y<n\leq x} A(n-1)f(n)\\
&= \sum_{n=m+1}^{k} A(n)f(n) - \sum_{n=m+1}^{k} A(n-1)f(n)
\end{aligned}$$

sachant que

$$\sum_{n=m+1}^{k} A(n-1)f(n) = \sum_{n=m}^{k-1} A(n)f(n+1)$$

donc

$$\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = \sum_{n=m+1}^{k} A(n)f(n) - \sum_{n=m}^{k-1} A(n)f(n+1)$$

On a encore

$$\sum_{n=m+1}^{k} A(n)f(n) = \sum_{n=m+1}^{k-1} A(n)f(n) + A(k)f(k)$$

et

$$\sum_{n=m}^{k-1} A(n)f(n+1) = \sum_{n=m+1}^{k-1} A(n)f(n+1) + A(m)f(m+1)$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) &= \sum_{n=m+1}^{k-1} A(n)f(n) + A(k)f(k) - \sum_{n=m+1}^{k-1} A(n)f(n+1) + A(m)f(m+1)\\
&= \sum_{n=m+1}^{k-1} A(n)\{f(n)-f(n+1)\} + A(k)f(k) - A(m)f(m+1)\\
&= -\sum_{n=m+1}^{k-1} A(n)\int_{n}^{n+1} f'(t)dt + A(k)f(k) - A(m)f(m+1)
\end{aligned}$$

Puisque $n \leq t < n+1$ on a $A(t) = A(n)$, alors

$$A(n)\int_{n}^{n+1} f'(t)dt = \int_{n}^{n+1} A(t)f'(t)dt$$

d'où

$$\begin{aligned}\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) &= -\sum_{n=m+1}^{k-1}\int_{n}^{n+1} A(t)f'(t)dt + A(k)f(k) - A(m)f(m+1)\\ &= -\int_{m+1}^{k} A(t)f'(t)dt + A(k)f(k) - A(m)f(m+1)\end{aligned}$$

on écrit $A(k)f(k)$ et $A(m)f(m+1)$ sous les formes suivantes :

$$A(k)f(k) = A(k)(f(k)+f(x)-f(x)) = -\int_{k}^{x} A(t)f'(t)dt + A(x)f(x) \qquad (\text{car } A(x) = A(k))$$

et

$$-A(m)f(m+1) = -A(m)(f(m+1)+f(y)-f(y)) = -\int_{y}^{m+1} A(t)f'(t)dt - A(y)f(y) \quad (\text{car } A(y) = A(m)).$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) &= -\int_{m+1}^{k} A(t)f'(t)dt - \int_{k}^{x} A(t)f'(t)dt + A(x)f(x) - \int_{y}^{m+1} A(t)f'(t)dt - A(y)f(y)\\ &= A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_{y}^{x} A(t)f'(t)dt.\end{aligned}$$

L'utilisation de la formule sommatoire d'Abel pour étudier quelques fonctions arithmétiques

Théorème 2.1.2 *On considère la fonction de Von Mongoldt définie par :*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p \ \ si \ \ n = p^{\alpha} \ \ avec \ \alpha \geq 1 \\ 0 \qquad sinon \end{cases}$$

On a

$$\psi_1(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(x)(x-n), \ avec \ \psi_1(x) = \int_{1}^{x} \psi(u)du \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Démonstration

La fonction $\psi_1(x)$ est sous la forme $\sum\limits_{y<n\leq x} a(n)f(n)$ pour $x \geq 1$, tels que
$y = 1$, $f(t) = (x-t)$, $f'(t) = -1$, $a(n) = \Lambda(x)$
$A(t) = \sum\limits_{n\leq x} \Lambda(n) = \psi(t)$, $A(t) = 0$ pour $t < 2$
$f(x) = x - x = 0$, $A(y)f(y) = \psi(1)f(1) = 0$.
D'après la formule d'Abel, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} \Lambda(x)(x-n) &= \psi(x)f(x) - \psi(y)f(y) - \int_1^x \psi(t)f'(t)dt \\ &= \int_1^x \psi(t)dt \\ &= \psi_1(x).\end{aligned}$$

2.1.2 La formule sommatoire d'Euler-Mac Laurin

Théorème 2.1.3 *[5]Soit $k \geq 0$, et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $[a,b]$ où a et $b \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)dt + \sum_{r=0}^{k} \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!}(f^{(r)}(b) - f^{(r)}(a))B_{r+1} + \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\int_a^b B_{k+1}(t)f^{(k+1)}(t)dt.$$

La preuve utilise le lemme suivant

Lemme 2.1.1 *Soit f une fonction réelle continûment dérivable sur l'intervalle $[a,b]$où a, $b \in \mathbb{Z}$.*
(a) Pour tout n tel que $a < n \leq b$, on a

$$f(n) = \int_{n-1}^{n} f(t)dt + \int_{n-1}^{n} \{t\}f'(t)dt \qquad (\{t\} = t - [t])$$

(b) Il existe un nombre réel $\theta = \theta(a, b)$, $0 \leq \theta < 1$ tel que

$$\begin{aligned}\sum_{a<n\leq b} f(n) &= \int_a^b f(t)dt + \theta(f(b) - f(a)) \\ &= \int_a^b f(t)dt + \frac{f(b) - f(a)}{2} + \int_a^b B_1(t)f'(t)dt.\end{aligned}$$

avec $B_1(t) = t - [t] - \frac{1}{2}$ est la première fonction de Bernoulli.

Démonstration

(a) La démonstration est basée sur l'évaluation des deux intégrales suivantes

$$\int_{n-1}^{n} f(t)dt \text{ et } \int_{n-1}^{n} [t]f'(t)dt \text{ pour } a < n \leq b$$

Par intégration par parties

$$\begin{aligned} u &= f(t) & \quad u' = f'(t) \\ v' &= dt & \quad v = t \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_{n-1}^{n} f(t)dt &= tf(t)|_{n-1}^{n} - \int_{n-1}^{n} tf'(t)dt \\ &= nf(n) - (n-1)f(n-1) - \int_{n-1}^{n} tf'(t)dt\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{n-1}^{n} [t]f'(t)dt &= (n-1)\int_{n-1}^{n} f'(t)dt = (n-1)(f(n) - f(n-1)) \\ &= (nf(n) - (n-1)f(n-1)) - f(n)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
f(n) &= (nf(n)-(n-1)f(n-1)) - \int_{n-1}^{n} [t]f'(t)dt \\
&= (nf(n)-(n-1)f(n-1)) - \int_{n-1}^{n} (t-\{t\})f'(t)dt \\
&= (nf(n)-(n-1)f(n-1)) - \int_{n-1}^{n} tf'(t)dt + \int_{n-1}^{n} \{t\}f'(t)dt \\
&= \int_{n-1}^{n} f(t)dt + \int_{n-1}^{n} \{t\}f'(t)dt.
\end{aligned}$$

(b) On peut introduire l'intégrale de Stieltjes de f par rapport à la mesure $d[t]$. On a

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_{a}^{b} f(t)d([t])$$

L'évaluation de la différence $\sum_{a<n\leq b} f(n) - \int_{a}^{b} f(t)dt$, donne

$$\begin{aligned}
\sum_{a<n\leq b} f(n) - \int_{a}^{b} f(t)dt &= \int_{a}^{b} f(t)d([t]) - \int_{a}^{b} f(t)dt \\
&= \int_{a}^{b} f(t)d(t-\{t\}) - \int_{a}^{b} f(t)dt \\
&= -\int_{a}^{b} f(t)d(\{t\}).
\end{aligned}$$

Par l'intégration par parties

$$\begin{aligned}
u &= f(t) & u' &= f'(t) \\
v' &= d(\{t\}) & v &= \{t\}
\end{aligned}$$

On obtient

$$\int_a^b f(t)d(\{t\}) = [\{t\}f(t)]_a^b - \int_a^b \{t\}f'(t)dt \qquad \big([\{t\}f(t)]_a^b = 0 \text{ car } a,b \in \mathbb{Z}\big).$$

Donc

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b \{t\}f'(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \theta(f(b)-f(a)) \qquad (0 \leq \theta = \theta(a,b) < 1)$$

Ensuite, si $a < n \leq b$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{a<n\leq b} f(n) &= \sum_{a<n\leq b} \int_{n-1}^{n} f(t)dt + \sum_{a<n\leq b} \int_{n-1}^{n} \{t\}f'(t)dt \\
&= \sum_{n=a+1}^{b} \int_{n-1}^{n} f(t)dt + \sum_{n=a+1}^{b} \int_{n-1}^{n} \{t\}f'(t)dt \\
&= \int_a^b f(t)dt + \int_a^b \{t\}f'(t)dt \\
&= \int_a^b f(t)dt + \int_a^b (t-[t])f'(t)dt.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{a<n\leq b} f(n) &= \int_a^b f(t)dt + \int_a^b \left(t-[t]-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) f'(t)dt \\
&= \int_a^b f(t)dt + \int_a^b \left(t-[t]-\frac{1}{2}\right) dt + \frac{1}{2}\int_a^b f'(t)dt \\
&= \int_a^b f(t)dt + \frac{f(b)-f(a)}{2} + \int_a^b B_1(t)f'(t)dt.
\end{aligned}$$

<u>Démonstration</u> (du théorème)

D'après le lemme précèdent pour tout n tel que $a < n \leq b$, on a

$$f(n) = \int_{n-1}^{n} f(t)dt + \int_{n-1}^{n} \{t\} f'(t)dt$$

ce qui donne, en sommant sur les n de $a+1$ jusqu'à b,

$$\begin{aligned}
\sum_{a<n\leq b} f(n) &= \sum_{a<n\leq b} \int_{n-1}^{n} f(t)dt + \sum_{a<n\leq b} \int_{n-1}^{n} (t-[t])\, f'(t)dt \\
&= \int_{a}^{b} f(t)dt + \int_{a}^{b} (t-[t]) f'(t)dt.
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\sum_{a<n\leq b} f(n) &= \int_{a}^{b} f(t)dt + \int_{a}^{b} \left(t-[t]+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) f'(t)dt \\
&= \int_{a}^{b} f(t)dt + \frac{f(b)-f(a)}{2} + \int_{a}^{b} B_1(t) f'(t)dt
\end{aligned}$$

d'après l'intégration par partie de $\int_{a}^{b} B_1(t) f'(t)dt$ ($B_1(t)$ est la fonction de Bernoulli), on a

$$\begin{aligned}
u &= f^{(1)}(t) & du &= f^{(2)}(t)dt \\
dv &= B_1(t)dt & v &= \frac{1}{2} B_2(t)
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\int_{a}^{b} B_1(t) f^{(1)}(t)dt &= \left[\frac{1}{2} f^{(1)}(t) B_2(t)\right]_{a}^{b} - \frac{1}{2}\int_{a}^{b} B_2(t) f^{(2)}(t)dt \\
&= \frac{f^{(1)}(b)B_2(b) - f^{(1)}(a)B_2(b)}{2} - \frac{1}{2}\int_{a}^{b} B_2(t) f^{(2)}(t)dt.
\end{aligned}$$

et on a

$$B_2(b) = B_2(a) = B_2(1) = B_2(0) = B_2.$$

Donc

$$\int_a^b B_1(t) f^{(1)}(t)dt = \frac{f^{(1)}(b) - f^{(1)}(a)}{2!} B_2 - \frac{1}{2}\int_a^b B_2(t) f^{(2)}(t)dt.$$

Alors pour $k = 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{a<n\leq b} f(n) &= \int_a^b f(t)dt + \frac{f(b) - f(a)}{2} + \frac{B_2}{2!}(f^{(1)}(b) - f^{(1)}(a)) - \frac{1}{2}\int_a^b B_2(t) f^{(2)}(t)dt \\
&= \int_a^b f(t)dt + \sum_{r=0}^{1} \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!}(f^{(r)}(b) - f^{(r)}(a))B_{r+1} + + \frac{(-1)^1}{2!}\int_a^b B_2(t) f^{(2)}(t)dt.
\end{aligned}$$

Pour démontrer la formule sommatoire d'Euler Mac Laurin on intégrer k-fois($k \geq 2$) par parties en posant

$$u = f^{(r)}(t) \text{ et } dv = B_r(t)dt \quad \left(du = f^{(r+1)}(t)dt \text{ et } v = \frac{1}{r+1}B_{r+1}(t)\right)$$

Exemple

On utilise la formule d'Euler Mac Laurin pour démontrer l'inégalité suivante
Pour tout $n \geq 2$, on a

$$\ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} \leq \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} \leq \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{64n^4}$$

tel que γ est la constante d'Euler.
On a

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = 1 + \sum_{1<m\leq n} \frac{1}{m}.$$

Nous appliquons la formule d'Euler Mac Laurin pour

$$f(t) = \frac{1}{t},\ k = 3,\ a = 1,\ b = n \text{ et } f^{(r)}(t) = \frac{(-1)^r r!}{t^{r+1}}$$

donc

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m} &= 1+\sum_{1<m\leq n}\frac{1}{m}\\
&= 1+\int_1^b f(t)dt+\sum_{r=0}^{3}\frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!}(f^{(r)}(b)-f^{(r)}(a))B_{r+1}+\frac{(-1)^k}{(k+1)!}\int_1^b B_{k+1}(t)f^{(k+1)}(t)dt.\\
&= 1+\int_1^n\frac{dt}{t}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-1\right)+\frac{1}{12}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{120}\left(\frac{1}{n^4}-1\right)-\int_1^n\frac{B_4(t)}{t^5}dt\\
\sum_{m\leq n}\frac{1}{m} &= 1+\ln n+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2}-\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{120n^4}-\frac{1}{120}-\int_1^n\frac{B_4(t)}{t^5}dt\\
&= \ln n+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{120n^4}+\frac{23}{40}-\int_1^n\frac{B_4(t)}{t^5}dt.
\end{aligned}$$

Cela implique

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n=\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{120n^4}+\frac{23}{40}-\int_1^n\frac{B_4(t)}{t^5}dt$$

si n tend vers $+\infty$, donc

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n\right) &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{120n^4}+\frac{23}{40}-\int_1^n\frac{B_4(t)}{t^5}dt\right)\\
\gamma &= \frac{23}{40}-\int_1^{+\infty}\frac{B_4(t)}{t^5}dt\\
&= \frac{23}{40}-\int_1^n\frac{B_4(t)}{t^5}dt-\int_n^{+\infty}\frac{B_4(t)}{t^5}dt
\end{aligned}$$

on obtient

$$\gamma+\int_n^{+\infty}\frac{B_4(t)}{t^5}dt=\frac{23}{40}-\int_1^n\frac{B_4(t)}{t^5}dt.$$

Alors

$$\sum_{m\leq n}\frac{1}{m}=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{120n^4}+\int\limits_n^{+\infty}\frac{B_4(t)}{t^5}dt.$$

Sachant que

$$-\frac{1}{30}\leq B_4(t)\leq\frac{7}{240}\quad(\forall t\in\mathbb{R})$$

donc

$$-\frac{1}{30}\int\limits_n^{+\infty}\frac{1}{t^5}dt\leq\int\limits_n^{+\infty}\frac{B_4(t)}{t^5}dt\leq\frac{7}{240}\int\limits_n^{+\infty}\frac{1}{t^5}dt$$

$$-\frac{1}{120n^4}\leq\int\limits_n^{+\infty}\frac{B_4(t)}{t^5}dt\leq\frac{7}{960n^4}$$

enfin

$$\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}\leq\sum_{m\leq n}\frac{1}{m}\leq\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{64n^4}.$$

2.2 Etude élémentaire de la fonction $\psi_1(x)$

Théorème 2.2.1

1. Pour toute fonction réelle strictement positive $h=h(x)>0$ ($\forall x\in\mathbb{R}$), on a

$$\frac{\psi_1(x)-\psi_1(x-h)}{h}\leq\psi(x)\leq\frac{\psi_1(x+h)-\psi_1(x)}{h},\tag{2.1}$$

avec

$$\psi_1(x)=\int\limits_1^x\psi(u)du\ (x\in\mathbb{R}).$$

2. On suppose $\psi_1(x)\sim\frac{1}{2}x^2$ si $x\to+\infty$.

(a) ($\forall\varepsilon>0$) il existe deux fonctions réelles $g(x)$ et $f(x)$ telles que

$$-\frac{\varepsilon}{2}+g(x)\leq\frac{\psi(x)}{x}-1\leq\frac{\varepsilon}{2}+f(x)\ \text{avec}\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=0.$$

(b) $\psi(x)\sim x$ si $x\to+\infty$.

<u>**Démonstration**</u>

1. La croissance de la fonction $\psi(x)$ implique

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}\psi(u)du &\leq \frac{\psi(x)}{h}\int_{x-h}^{x}du=\psi(x)\\ \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}\psi(u)du &\geq \frac{\psi(x)}{h}\int_{x}^{x+h}du=\psi(x).\end{aligned}$$

Donc, on a

$$\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}\psi(u)du\leq\psi(x)\leq\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}\psi(u)du.$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_{x-h}^{x}\psi(u)du &= \int_{1}^{x}\psi(u)du-\int_{1}^{x-h}\psi(u)du=\psi_1(x)-\psi_1(x-h)\\ \int_{x}^{x+h}\psi(u)du &= \int_{1}^{x+h}\psi(u)du-\int_{1}^{x}\psi(u)du=\psi_1(x+h)-\psi_1(x).\end{aligned}$$

2. (a) On suppose $\psi_1(x)\sim\frac{1}{2}x^2$ est équivalent par définition à l'existence d'une fonction $\delta(x)$ telle que

$$\psi_1(x)=\frac{1}{2}x^2+\delta(x)\text{ avec }\delta(x)=o(x^2). \tag{2.2}$$

Alors pour toute fonction réelle strictement positive $h=h(x)$ telle que

$$x-h\to+\infty\text{ et }x+h\to+\infty\ (x\to+\infty),$$

on peut écrire

$$\begin{cases}\psi_1(x-h)=\frac{1}{2}(x-h)^2+\delta(x-h)\ \left(\frac{\delta(x-h)}{(x-h)^2}\to0(x\to+\infty)\right)\\ \psi_1(x+h)=\frac{1}{2}(x+h)^2+\delta(x+h)\ \left(\frac{\delta(x+h)}{(x+h)^2}\to0(x\to+\infty)\right).\end{cases} \tag{2.3}$$

Soit $\varepsilon>0$, on a deux cas

Si $0 < \varepsilon < 1$ on pose $h = h(x) = \varepsilon x$ $(x \geq 1)$

$$\begin{aligned} x - h &= x - \varepsilon x = x(1-\varepsilon) \to +\infty \text{ si } x \to +\infty \\ x + h &= x(1+\varepsilon) \to +\infty \text{ si } x \to +\infty \end{aligned}$$

Alors les relations (2.1), (2.2) et(2.3) impliquent

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2}x^2 + \delta(x) - \frac{1}{2}(x-h)^2 - \delta(x-h)}{h} &\leq \psi(x) \leq \frac{\frac{1}{2}(x-h)^2 + \delta(x+h) - \frac{1}{2}(x+h)^2 - \delta(x)}{h} \\ x - \frac{1}{2}h + \frac{\delta(x) - \delta(x-h)}{h} &\leq \psi(x) \leq x + \frac{1}{2}h + \frac{\delta(x+h) - \delta(x)}{h}. \end{aligned}$$

D'où

$$-\frac{h}{2x} + \frac{\delta(x) - \delta(x-h)}{xh} \leq \frac{\psi(x)}{x} - 1 \leq \frac{h}{2x} + \frac{\delta(x+h) - \delta(x)}{xh}$$

En remplaçant h par εx, on obtient

$$-\frac{\varepsilon}{2} + g(x) \leq \frac{\psi(x)}{x} - 1 \leq \frac{h}{2x} + f(x)$$

avec

$$g(x) = \frac{\delta(x) - \delta(x(1-\varepsilon))}{\varepsilon x^2} \text{ et } f(x) = \frac{\delta(x(1+\varepsilon)) - \delta(x)}{\varepsilon x^2}.$$

On a

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\delta(x)}{x^2}\right) - \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon}\left(\frac{\delta(x(1-\varepsilon))}{((1-\varepsilon)x)^2}\right) \to 0 \ (x \to +\infty) \\ g(x) &= -\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\delta(x)}{x^2}\right) + \frac{(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon}\left(\frac{\delta(x(1+\varepsilon))}{((1+\varepsilon)x)^2}\right) \to 0 \ (x \to +\infty). \end{aligned}$$

Si $\varepsilon \geq 1$, Sachant que

$$0 \leq \varepsilon - 1 < \varepsilon$$

On considère un nombre c dans $]\varepsilon - 1, \varepsilon[$

$$0 \leq \varepsilon - 1 < c < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < \varepsilon - c < 1 \ (0 < 1 - (\varepsilon - c) < 1)$$

et on pose $h = h(x) = (\varepsilon - c)x$ $(x \geq 1)$. On a alors

$$0 < x - h = x - (\varepsilon - c)x = x(1 - (\varepsilon - c)) \to +\infty (x \to +\infty).$$

Donc les inégalités (2.1), (2.2) et(2.3) impliquent

$$1-\frac{h}{2x}+\frac{\delta(x)-\delta(x-h)}{xh}\leq\frac{\psi(x)}{x}\leq 1+\frac{h}{2x}+\frac{\delta(x+h)-\delta(x)}{xh}$$

En remplaçant h par $(\varepsilon-c)x$, nous obtenons

$$\frac{1}{2}c-\frac{\varepsilon}{2}+g(x)\leq\frac{\psi(x)}{x}-1\leq\frac{\varepsilon}{2}-\frac{1}{2}c+f(x),$$

avec

$$g(x)=\frac{\delta(x)-\delta(x(1-(\varepsilon-c)))}{x^2(\varepsilon-c)} \text{ et } f(x)=\frac{\delta(x(1+(\varepsilon-c)))-\delta(x)}{x^2(\varepsilon-c)}.$$

Puisque $c>0$, alors

$$-\frac{\varepsilon}{2}+g(x)\leq\frac{\psi(x)}{x}-1\leq\frac{\varepsilon}{2}+f(x).$$

On a

$$g(x)=\left(\frac{1}{\varepsilon-c}\right)\frac{\delta(x)}{x^2}-\frac{(1-(\varepsilon-c))^2}{\varepsilon-c}\left(\frac{\delta(x(1-(\varepsilon-c)))}{((1-(\varepsilon-c))x)^2}\right)\to 0 \text{ si } x\to+\infty$$

car $(\varepsilon-c)>0$ et $(1-(\varepsilon-c))>0$.
On a même pour $f(x)$

$$f(x)=\frac{(1+(\varepsilon-c))^2}{\varepsilon-c}\left(\frac{\delta(x(1+(\varepsilon-c)))}{((1+(\varepsilon-c))x)^2}\right)-\frac{1}{\varepsilon-c}\left(\frac{\delta(x)}{x^2}\right)\to 0 \text{ si } x\to+\infty.$$

Alors l'inégalité est vraie pour tout $\varepsilon>0$.
(b) Est une conséquence directe de (a) : D'après (a) on a

$$-\frac{\varepsilon}{2}+g(x)<\frac{\psi(x)}{x}-1<\frac{\varepsilon}{2}+f(x)\ \forall\varepsilon>0$$

où $g(x)\to 0$ et $f(x)\to 0$ si $x\to+\infty$.
Alors $\forall x_0>0$ il existe $x_0=x_0(\varepsilon)>0$ tel que

$$x>x_0\Rightarrow|g(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

donc

$$\left|\frac{\psi(x)}{x}-1\right|<\varepsilon \text{ pour } x>x_0.$$

D'où
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{x}=1\ (\psi(x)\sim x\ (x\to+\infty)).$$

2.3 Théorème des nombres premiers

Théorème 2.3.1 *(Théorème des nombres premier)*
Pour $x\to+\infty$ on a
$$\pi(x)\sim\frac{x}{\ln x}$$

Pour la démonstration voir [9].

Théorème 2.3.2 *Les relations suivantes sont équivalentes*
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi(x)\ln x}{x}=1 \tag{2.4}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\theta(x)}{x}=1 \tag{2.5}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{x}=1 \tag{2.6}$$

La démonstration de ce théorème est basée sur le lemme suivant

Lemme 2.3.1 *Pour tout $x\geq 2$, on a*
$$\pi(x)=\frac{\theta(x)}{\ln x}+\int_2^x\frac{\theta(t)}{t\ln^2 t}dt \tag{2.7}$$
et
$$\theta(x)=\pi(x)\ln x-\int_2^x\frac{\pi(t)}{t}dt \tag{2.8}$$

<u>**Démonstration**</u>
On considère la fonction
$$a(n)=\begin{cases}1 \text{ si } n=p\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

D'après le théorème (2.1.1), premièrement on pose

$$\begin{aligned}
b(n) &= a(n)\ln n \ (n\in\mathbb{N}^*),\ y=\frac{3}{2}\\
A(x) &= \sum_{n\le x} b(n) = \sum_{n\le x}\ln p = \theta(x)\ (A(x)=0 \text{ pour } x<2)\\
f(x) &= \frac{1}{\ln x} \text{ continûment dérivable pour } x>1\\
f'(x) &= -\frac{1}{x\ln^2 x}\\
\sum_{n\le x} b(n)f(n) &= \sum_{p\le x} 1 = \pi(x)
\end{aligned}$$

alors, on a

$$\begin{aligned}
\pi(x) &= \sum_{n\le x} b(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int\limits_y^x A(t)f'(t)dt\\
&= A(x)f(x) - A\left(\frac{3}{2}\right) f\left(\frac{3}{2}\right) + \int\limits_{\frac{3}{2}}^x \frac{\theta(t)}{t\ln^2 t}dt \ (A(t)=\theta(t)=0 \text{ pour } t<2)\\
&= \frac{\theta(x)}{\ln x} + \int\limits_2^x \frac{\theta(t)}{t\ln^2 t}dt.
\end{aligned}$$

Ensuite on pose

$$\begin{aligned}
b(n) &= a(n)\ (n\in\mathbb{N}^*),\ y=\frac{3}{2}\\
A(x) &= \sum_{n\le x} b(n) = \sum_{n\le x} 1 = \pi(x)\ (A(x)=0 \text{ pour } x<2)\\
f(x) &= \ln x \text{ continûment dérivable pour } x>1\\
f'(x) &= \frac{1}{x}\\
\sum_{n\le x} b(n)f(n) &= \sum_{p\le x}\ln p = \theta(x).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\theta(x) &= \sum_{n\leq x} b(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)dt \\
&= A(x)f(x) - A\left(\frac{3}{2}\right) f\left(\frac{3}{2}\right) - \int_{\frac{3}{2}}^x \frac{\pi(t)}{t}dt \ (A(t) = \theta(t) = 0 \text{ pour } t < 2) \\
&= \pi(x)\ln x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt.
\end{aligned}$$

Démonstration (du théorème)
(2.4) $\Rightarrow$ (2.5) : D'après (2.8), on a

$$\theta(x) = \pi(x)\ln x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt \Rightarrow \frac{\theta(x)}{x} = \frac{\pi(x)\ln x}{x} - \frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt.$$

Donc on va montrer que

$$\left(\frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt\right) \to 0 \text{ si } x \to +\infty$$

on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x} = 1 \Rightarrow \frac{\pi(t)}{t} = O\left(\frac{1}{\ln t}\right) \text{ pour } t \geq 2,$$

alors

$$\frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt = O\left(\frac{1}{x}\int_2^x \frac{dt}{\ln t}\right).$$

Évaluons l'intégrale $\int_2^x \frac{dt}{\ln t}$. On a

$$\begin{aligned}
\int_2^x \frac{dt}{\ln t} &= \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\ln t} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\ln t} \leq \frac{1}{\ln 2}\int_2^{\sqrt{x}} dt + \frac{1}{\ln\sqrt{x}}\int_{\sqrt{x}}^x dt \\
&< \frac{\sqrt{x}}{\ln 2} + \frac{2(x-\sqrt{x})}{\ln x}
\end{aligned}$$

Ensuite
$$\frac{1}{x}\int_2^x \frac{dt}{\ln t} < \frac{\sqrt{x}}{x\ln 2} + \frac{2(x-\sqrt{x})}{x\ln x} \to 0 \ (x \to +\infty).$$
Donc
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\theta(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x} + \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_2^x \frac{dt}{\ln t}\right) = 1.$$
(2.5) $\Rightarrow$ (2.4) : d'après (2.7), on a

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t\ln^2 t}dt \Rightarrow \frac{\pi(x)\ln x}{x} = \frac{\theta(x)}{x} + \frac{\ln x}{x}\int_2^x \frac{\theta(t)}{t\ln^2 t}dt.$$

Il est nécessaire de montrer que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\theta(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\int_2^x \frac{\theta(t)}{t\ln^2 t}dt = 0$$

on a
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\theta(x)}{x} = 1 \Rightarrow \theta(t) = O(t)$$
alors
$$\int_2^x \frac{\theta(t)}{t\ln^2 t}dt = O\left(\int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t}\right).$$
Évaluons l'intégrale $\int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t}$. On a

$$\begin{aligned}\int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t} &= \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\ln^2 t} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\ln^2 t} \leq \frac{1}{\ln^2 2}\int_2^{\sqrt{x}} dt + \frac{1}{\ln^2\sqrt{x}}\int_{\sqrt{x}}^x dt \\ &< \frac{\sqrt{x}}{\ln^2 2} + \frac{4(x-\sqrt{x})}{\ln^2 x}.\end{aligned}$$

Ensuite
$$\frac{\ln x}{x}\int_2^x \frac{\theta(t)}{t\ln^2 t}dt < \frac{\ln x}{x}\left(\frac{\sqrt{x}}{\ln^2 2} + \frac{4(x-\sqrt{x})}{\ln^2 x}\right) \to 0 \ (x\to+\infty).$$
Alors
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi(x)\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\theta(x)}{x} + \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\int_2^x \frac{\theta(t)}{\ln t}dt\right) = 1.$$
Finalement, nous utilisons les définitions des fonctions $\theta(x)$ et $\psi(x)$ pour démontrer

l'équivalence (2.5) $\Leftrightarrow$ (2.6), d'après la définition on a

$$\psi(x) = \theta(x) + \theta(x^{1/2}) + \cdots + \theta(x^{1/m}).$$

Donc

$$0 \leq \psi(x) - \theta(x) = \sum_{2 \leq m \leq \left[\frac{\ln x}{\ln 2}\right]} \theta(x^{1/m}) < \sum_{2 \leq m \leq \frac{\ln x}{\ln 2}} \theta(x^{1/m}).$$

On a pour tout $x > 1$

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p \leq (\ln x) \sum_{p \leq x} 1 \leq x \ln x$$

alors

$$\sum_{2 \leq m \leq \frac{\ln x}{\ln 2}} \theta(x^{1/m}) \leq \sum_{2 \leq m \leq \frac{\ln x}{\ln 2}} x^{1/m} \ln(x^{1/m}) \leq \sqrt{x} \ln(\sqrt{x}) \sum_{2 \leq m \leq \frac{\ln x}{\ln 2}} 1 < \frac{\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}) \ln x}{\ln 2}.$$

Donc

$$0 \leq \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\theta(x)}{x} < \frac{\sqrt{x} \ln^2 x}{(2 \ln 2) x} \rightarrow 0 \text{ si } x \rightarrow +\infty.$$

D'où

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\theta(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

Chapitre 3

Les outils d'analyse complexe

3.1 La formule de Perron

Théorème 3.1.1 *Soit* $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *une série de Dirichlet d'abscisse de convergence* σ_c *et absolument convergente pour* $\sigma > \sigma_a$ *et soit* c *et* x *deux constantes strictement positives. Alors pour* $\sigma > \sigma_a - c$ *on a*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s+z) \frac{x^s}{s} ds = \sum_{n<x} \frac{a_n}{n^s} + \frac{1}{2} a_x x^{-s}.$$

avec $a_x = 0$ *si* $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}$.

Pour la démonstration de ce théorème on a besoin du lemme suivant

Lemme 3.1.1 *Soit* c *et* x *sont des constantes réelles strictement positives, on a :*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{x^s}{s} ds = \begin{cases} 1 & si \quad x > 1 \\ \frac{1}{2} & si \quad x = 1 \\ 0 & si \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

donc

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{x^s}{s} ds - 1 \right| \leq \frac{x^c}{\pi T \ln x} \qquad\qquad x > 1$$

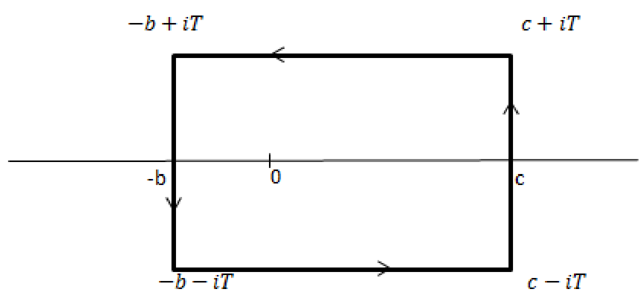
$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{x^s}{s}ds-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{c}{\pi T}\qquad\qquad x=1$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{x^s}{s}ds\right|\leq\frac{x^c}{\pi T\ln\frac{1}{x}}\qquad\qquad 0<x<1$$

Démonstration

La fonction $F(s)=\frac{x^s}{s}$ est méromorphe dans tout le plan complexe avec un pôle simple $s=0$ de résidu 1.

1. Si $x>1$: nous intégrons $F(s)$ le long du rectangle (qui contient le pôle 0) et qui a des sommets : $c+iT$, $c-iT$, $-b+iT$, $-b-iT$.



D'après le théorème des résidus, on a :

$$\left(\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{x^s}{s}ds+\int_{c+iT}^{-b+iT}\frac{x^s}{s}ds+\int_{-b+iT}^{-b-iT}\frac{x^s}{s}ds+\int_{-b-iT}^{c-iT}\frac{x^s}{s}ds\right)=2\pi i$$

alors

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{x^s}{s}ds-1=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{-b+iT}^{c+iT}\frac{x^s}{s}ds+\int_{-b-iT}^{-b+iT}\frac{x^s}{s}ds+\int_{c-iT}^{-b-iT}\frac{x^s}{s}ds\right)$$

Maintenant, nous intégrons sur les côtés horizontaux($c+iT$, $-b+iT$, ensuite $c-iT$, $-b-iT$), et on a : $|s|>T$

donc
$$\left|\int_{-b+iT}^{c+iT}\frac{x^s}{s}ds\right|\leq\frac{1}{T}\int_{-b}^{c}x^\sigma d\sigma\leq\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{c}x^\sigma d\sigma=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{c}e^{\sigma\ln x}d\sigma=\frac{x^c}{T\ln x}$$
et
$$\left|\int_{c-iT}^{-b-iT}\frac{x^s}{s}ds\right|=\left|-\int_{-b-iT}^{c-iT}\frac{x^s}{s}ds\right|=\left|\int_{-b-iT}^{c-iT}\frac{x^s}{s}ds\right|\leq\frac{1}{T}\int_{-b}^{c}x^\sigma d\sigma$$
$$\leq\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{c}x^\sigma d\sigma=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{c}e^{\sigma\ln x}d\sigma=\frac{x^c}{T\ln x}$$

Ensuite, nous intégrons sur le segment $[-b-iT,-b+iT]$

$$\left|\int_{-b-iT}^{-b+iT}\frac{x^s}{s}ds\right|=\left|\int_{-T}^{T}\frac{x^{-b+it}}{(-b+it)}idt\right|\leq\int_{-T}^{T}\frac{x^{-b}}{b}dt=\frac{x^{-b}}{b}[t]_{-T}^{T}=\frac{2Tx^{-b}}{b}$$

Si b tend vers $+\infty$, alors $\frac{2Tx^{-b}}{b}$ tend vers 0.
Par conséquent
$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{x^s}{s}ds-1\right|\leq\frac{x^c}{\pi T\ln x}$$

2. Si $x=1$:

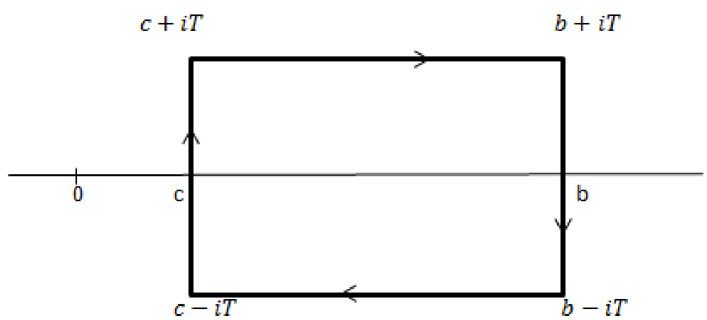
$$\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{x^s}{s}ds=\int_{-T}^{T}\frac{i}{c+it}dt=\int_{-T}^{T}\frac{i(c-it)}{c^2+t^2}dt$$
$$=\int_{-T}^{T}\frac{t}{c^2+t^2}dt+\int_{-T}^{T}\frac{ic}{c^2+t^2}dt=\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\frac{2t}{c^2+t^2}dt+2ic\int_{0}^{T}\frac{1}{c^2(1+\frac{t^2}{c^2})}dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[\ln(c^2+t^2)\right]_{-T}^{T}+\frac{2ic}{c^2}\int_{0}^{T}\frac{1}{1+(\frac{t}{c})^2}dt$$
$$=2i[\arctan\frac{t}{c}]_0^T=2i\arctan\frac{T}{c}$$

alors

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{x^s}{s}ds = \frac{2i}{2\pi i}\int_{0}^{T}\frac{1}{c^2+t^2}dt = \frac{1}{\pi}\arctan\frac{T}{c}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{c}{T}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan\frac{c}{T}$$

et on a $\arctan\frac{c}{T} < \frac{c}{T}$, donc l'inégalité est démontrer.

3. <u>Si $0 < x < 1$</u> : nous intégrons $F(s)$ le long du rectangle (qui ne contient pas le pôle 0) des sommets sont : $c+iT$, $c-iT$, $b+iT$, $b-iT$.



D'après le théorème des résidus, alors

$$\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{x^s}{s}ds + \int_{c+iT}^{b+iT}\frac{x^s}{s}ds + \int_{b+iT}^{b-iT}\frac{x^s}{s}ds + \int_{b-iT}^{c-iT}\frac{x^s}{s}ds = 0$$

$$\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{x^s}{s}ds = \int_{b+iT}^{c+iT}\frac{x^s}{s}ds + \int_{b-iT}^{b+iT}\frac{x^s}{s}ds + \int_{c-iT}^{b-iT}\frac{x^s}{s}ds$$

On a le même travail, donc

$$\left|\int_{b+iT}^{c+iT}\frac{x^s}{s}ds\right| = \left|-\int_{b+iT}^{c+iT}\frac{x^s}{s}ds\right| \leq \frac{1}{T}\int_{c}^{b}x^{\sigma}d\sigma \leq \frac{1}{T}\int_{c}^{+\infty}e^{\sigma\ln x}d\sigma = -\frac{x^c}{T\ln x} = \frac{x^c}{T\ln\frac{1}{x}}$$

et

$$\left|\int_{c-iT}^{b-iT}\frac{x^s}{s}ds\right| = \int_{c-iT}^{b-iT}\left|\frac{x^s}{s}\right|ds \leq \frac{1}{T}\int_{c}^{b}x^\sigma d\sigma \leq \frac{1}{T}\int_{c}^{+\infty}x^\sigma d\sigma = \frac{1}{T}\int_{c}^{+\infty}e^{\sigma\ln x}d\sigma = \frac{x^c}{T\ln\frac{1}{x}}$$

enfin

$$\left|\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{x^s}{s}ds\right| = \left|\int_{-T}^{T}\frac{x^{b+it}}{b+it}idt\right| \leq \int_{-T}^{T}\frac{x^b}{b}dt = \frac{x^b}{b}[t]_{-T}^{T} = \frac{x^b}{b}2T = \frac{2Tx^b}{b}$$

Si b tend vers $+\infty$, donc $\frac{2Tx^b}{b}$ tend vers 0.

Démonstration (du théorème)

Dans l'intégrale, la série F est absolument convergente sur tout compact dans le demi-plan $\sigma > \sigma_a - c$, on a donc

$$\begin{aligned}\int_{c-iT}^{c+iT}F(s+z)\frac{x^s}{s}ds &= \int_{c-iT}^{c+iT}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{s+z}}\frac{x^s}{s}ds\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^z}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}\\ &= \sum_{n<x}\frac{a_n}{n^z}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}+\sum_{n>x}\frac{a_n}{n^z}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}+\frac{a_x}{x^z}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{ds}{s}.\end{aligned}$$

D'après le lemme (3.1.1), on a $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s} = 2\pi i$

donc

$$\sum_{n<x}\frac{a_n}{n^z}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s} = 2\pi i\sum_{n<x}\frac{a_n}{n^z},$$

et on a $\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{ds}{s} = \frac{1}{2}$, alors $\frac{a_x}{x^z}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{ds}{s} = \pi i a_x x^{-z}$.

D'où

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s+z)\frac{x^s}{s}ds = \sum_{n<x}\frac{a_n}{n^z}+\frac{1}{2}a_x x^{-z}+\sum_{n>x}\frac{a_n}{n^z}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}.$$

Il reste à prouver que

$$\lim_{T\to+\infty}\sum_{n>x}\frac{a_n}{n^z}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s} = 0$$

D'après le lemme (3.1.1), on a

$$\left| \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{x^s}{s} ds \right| \leq \frac{2x^c}{T \ln \frac{1}{x}} \qquad \text{si } 0 < x < 1$$

on pose $n > x$. Si $n \geq [x] + 1$, alors $\frac{n}{x} \geq \frac{[x]+1}{x}$.
Alors

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n>x} \frac{a_n}{n^z} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} \right| &= \sum_{n>x} \left| \frac{a_n}{n^z} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} \right| \\
&\leq \sum_{n>x} \frac{|a_n|}{n^\sigma} \frac{2}{T} \left(\frac{x}{n}\right)^c \frac{1}{\ln\left(\frac{[x]+1}{x}\right)} \\
&\leq \frac{2}{T} \frac{x^c}{\ln\left(\frac{[x]+1}{x}\right)} \sum_{n>x} \frac{|a_n|}{n^{\sigma+c}} \to 0 \text{ si } T \to +\infty.
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s+z) \frac{x^s}{s} ds = \sum_{n<x} \frac{a_n}{n^s} + \frac{1}{2} a_x x^{-s}.$$

Théorème 3.1.2 *Soit* $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *une série de Dirichlet d'abscisse de convergence absolue* σ_0*, et soit* $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$ *.*
Alors, pour $c > \sigma_0 > 0$*, et pour* $x > 0$ *on a :*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s F(s)}{s(s+1)} ds = \frac{1}{x} \int_1^x A(u) du$$

Pour la démonstration de ce théorème on a besoin du lemme suivant

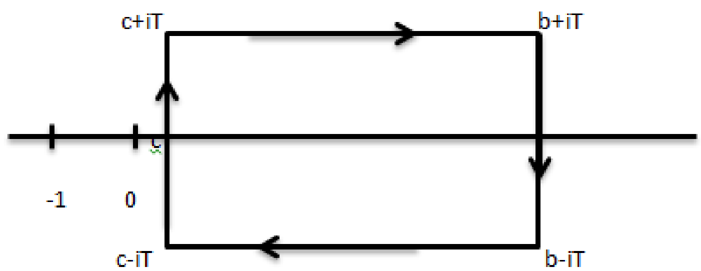
Lemme 3.1.2 *Soit* c *et* x *des constantes réelles strictement positives, on a :*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s(s+1)} ds = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Démonstration

On a $F(x) = \frac{x^s}{s(s+1)}$ est méromorphe, avec deux pôles 0 et -1 de résidus 1 et $-\frac{1}{x}$.

1. Si $x \leq 1$: On considère le rectangle des sommets : $c + iT$, $c - iT$, $b + iT$, $b - iT$ qui ne contient pas les pôles



D'après le théorème des résidus, on a

$$\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{x^s}{s(s+1)} ds + \int_{c+iT}^{b+iT} \frac{x^s}{s(s+1)} ds + \int_{b+iT}^{b-iT} \frac{x^s}{s(s+1)} ds + \int_{b-iT}^{c-iT} \frac{x^s}{s(s+1)} ds = 0$$

donc

$$\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{x^s}{s(s+1)} ds = \int_{b+iT}^{c+iT} \frac{x^s}{s(s+1)} ds + \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{x^s}{s(s+1)} ds + \int_{c-iT}^{b-iT} \frac{x^s}{s(s+1)} ds$$

alors

$$\left| \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{x^s}{s(s+1)} ds \right| = \left| \int_{-T}^{T} \frac{x^{b+it}}{(b+iT)((b+iT)+1)} idt \right| \leq \int_{-T}^{T} \frac{x^b}{b^2} dt = \frac{x^b}{b^2} \int_{-T}^{T} dt = \frac{2Tx^b}{b^2}$$

Posons $b = T$, donc pour T tend vers $+\infty$ on a le dernier terme tend vers 0.

et on a

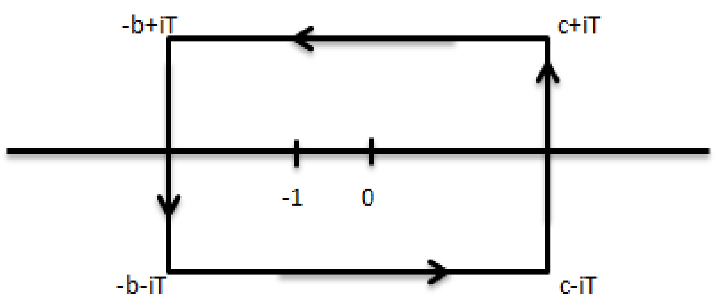
$$\left|\int\limits_{c-iT}^{b-iT} \frac{x^s}{s(s+1)} ds\right| \leq \frac{1}{T^2} \int\limits_{c}^{b} x^\sigma d\sigma$$

$$\leq \frac{1}{T^2} \int\limits_{c}^{+\infty} x^\sigma d\sigma = \frac{1}{T^2} \int\limits_{c}^{+\infty} e^{\sigma \ln x} d\sigma = \frac{x^c}{T^2 \ln \frac{1}{x}}$$

$$\left|\int\limits_{b+iT}^{c+iT} \frac{x^s}{s(s+1)} ds\right| = \left|-\int\limits_{c-iT}^{b-iT} \frac{x^s}{s(s+1)} ds\right| \leq \frac{1}{T^2} \int\limits_{c}^{b} x^\sigma d\sigma$$

$$\leq \frac{1}{T^2} \int\limits_{c}^{+\infty} x^\sigma d\sigma = \frac{1}{T^2} \int\limits_{c}^{+\infty} e^{\sigma \ln x} d\sigma = \frac{x^c}{T^2 \ln \frac{1}{x}}$$

2. Si $x \geq 1$: On considère le rectangle des sommets : $c+iT$, $c-iT$, $-b+iT$, $-b-iT$ qui contient les pôles



D'après le théorème des résidus, on a

$$\left(\int\limits_{c-iT}^{c+iT} \frac{x^s}{s(s+1)} ds + \int\limits_{c+iT}^{-b+iT} \frac{x^s}{s(s+1)} ds + \int\limits_{-b+iT}^{-b-iT} \frac{x^s}{s(s+1)} ds + \int\limits_{-b-iT}^{c-iT} \frac{x^s}{s(s+1)} ds\right) = 2\pi i \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

donc

$$\left|\int\limits_{c\pm iT}^{-b\pm iT} \frac{x^s}{s(s+1)} ds\right| \leq \frac{x^c}{T^2 \ln x}$$

$$\int_{-b+iT}^{-b-iT} \frac{x^s}{s(s+1)} ds = \left| - \int_{-b-iT}^{-b+iT} \frac{x^s}{s(s+1)} ds \right| \leq \frac{2Tx^{-b}}{b^2}$$

Posons $b = T$, pour T tend vers $+\infty$, on a $\frac{2Tx^{-b}}{b^2} \to 0$.
Alors si $T \to +\infty$ on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s F(s)}{s(s+1)} ds = 1 - \frac{1}{x}$$

<u>**Démonstration**</u> (du théorème)

On a $\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{ds}{s(s+1)}$ converge absolument et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ converge uniformément pour $\sigma = c$, donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s F(s)}{s(s+1)} ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s(s+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} ds \\
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s(s+1)} \frac{1}{n^s} ds \\
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{n^s} \frac{ds}{s(s+1)} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s(s+1)}.
\end{aligned}$$

D'après le lemme (3.1.2), on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s F(s)}{s(s+1)} ds &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \leq x} a_n \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s(s+1)} \\
&= \sum_{n \leq x} a_n \left(1 - \frac{n}{x}\right) \\
&= \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} a_n (x - n) \\
&= \frac{1}{x} \int_1^x A(u) du.
\end{aligned}$$

3.2 Théorème d'Erdös et Turán sur la fonction Φ d'Euler

3.2.1 Théorème d'Ikehara

Théorème 3.2.1 *[3] Soit* $F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$ *une série absolument convergente dans le demi-plan* $(\sigma > 1)$ *avec* $a_n \geq 0$ *pour tout* n*, s'il existe une constante* λ *tel que la différence* $F(s) - \frac{\lambda}{s-1}$ *est tend vers une limite finie quand* s *tend vers* $1 + it$ *dans* $(\sigma > 1)$*, alors pour* $x \to +\infty$ *on a*

$$\Theta(x) \sim \lambda x$$

avec $\Theta(x) = \sum_{n \leq x} a_n$.

3.2.2 Théorème d'Erdös et Turán

Pour tout entier $m \geq 1$, on pose $a_m = \sum_{\varphi(n)=m} 1$ telle que $\varphi(n)$ est l'indicatrice d'Euler, on a le théorème suivant

Théorème 3.2.2 *Si la série* $F(s) = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m m^{-s}$ *est convergente dans le demi-plan* $(\sigma \geq 1)$ *et admet un simple pôle de résidu* A *en* $s = 1$*, alors on a*

$$\Phi(x) \sim Ax.$$

avec $\Phi(x) = \sum_{m \leq x} a_m$ *et la valeur de* A *est donnée par :*

$$A = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \simeq 1,943596436\cdots.$$

Pour la démonstration, on a besoin les lemmes suivants :

Lemme 3.2.1 *La série* $F(s)$ *peut s'écrire sous la forme :*

$$F(s) = \sum_{m=1}^{+\infty} (\varphi(m))^{-s} \quad (\mathrm{Re}(s) > 1)$$

avec la fonction $F(s)$ définie par :

$$F(s) = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m m^{-s}$$

dans le demi-plan $(\sigma > 1)$.

Démonstration

On écrit la série $F(s)$ sous la forme

$$F(s) = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m m^{-s} = a_1(1)^{-s} + a_2(2)^{-s} + a_3(3)^{-s} + \cdots .$$

et on a

$$a_1 = \sum_{\varphi(n)=1} 1,\ a_2 = \sum_{\varphi(n)=2} 1,\ a_3 = \sum_{\varphi(n)=3} 1,\ \cdots .$$

Alors

$$F(s) = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m m^{-s} = \sum_{\varphi(n)=1} (1)^{-s} + \sum_{\varphi(n)=2} (2)^{-s} + \sum_{\varphi(n)=3} (3)^{-s} + \cdots$$

donc

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{m=1}^{+\infty} a_m m^{-s} = \sum_{\varphi(n)=1} (\varphi(n))^{-s} + \sum_{\varphi(n)=2} (\varphi(n))^{-s} + \sum_{\varphi(n)=3} (\varphi(n))^{-s} + \cdots \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{\varphi(n)=m}^{+\infty} (\varphi(n))^{-s} = \sum_{m=1}^{+\infty} (\varphi(m))^{-s}. \end{aligned}$$

Lemme 3.2.2 *Pour* $(\sigma > 1)$, *on a*

$$F(s) = \zeta(s)G(s)$$

avec

$$G(s) = \prod_p (1 + (p-1)^{-s} + p^{-s}) \quad et \quad \zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

Démonstration

La fonction $\varphi(n)$ est multiplicative et la séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)^{-s}$est absolument convergente, alors le produit eulérien donne :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi(n)^{-s} &= \prod_p \left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}(\varphi(p^n))^{-s}\right) \\ &= \prod_p \left(1+(\varphi(p))^{-s}+(\varphi(p^2))^{-s}+(\varphi(p^3))^{-s}+\cdots\right).\end{aligned}$$

sachant que pour tout p premier on a $\varphi(p^\alpha)=p^{\alpha-1}(p-1)$.
Alors pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^*$, nous obtenons

$$\begin{aligned}F(s) &= \prod_p \left(1+(p-1)^{-s}+p^{-s}(p-1)^{-s}+p^{-2s}(p-1)^{-s}+\cdots\right) \\ &= \prod_p 1+(p-1)^{-s}\left(p^{-s}+p^{-2s}+p^{-3s}\cdots\right) \\ &= \prod_p \left(1+(p-1)^{-s}\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)\right).\end{aligned}$$

Ceci implique

$$\begin{aligned}F(s) &= \prod_p \left(1+(p-1)^{-s}(1-p^{-s})^{-1}\right) \\ &= \prod_p \left(\frac{(1-p^{-s})^{-1}}{(1-p^{-s})^{-1}}+(p-1)^{-s}(1-p^{-s})^{-1}\right) \\ &= \prod_p \left((1-p^{-s})^{-1}(1-p^{-s}+((p-1)^{-s}\right) \\ &= \prod_p(1-p^{-s})^{-1}\prod_p(1-p^{-s}+(p-1)^{-s}) \\ &= \zeta(s)G(s).\end{aligned}$$

Démonstration (du théorème)
Le produit $G(s)$ est absolument converge dans le demi-plan $(\sigma>0)$, car

$$\left|(p-1)^{-s}-p^{-s}\right| = \left|s\int_{p-1}^{p} t^{-s-1}dt\right| \le |s|\int_{p-1}^{p} t^{-\sigma-1}dt \le |s|(p-1)^{-\sigma-1}.$$

Donc $F(s)$ est prolongeable dans le demi-plan $\sigma > 0$ avec un pôle simple $s = 1$ de résidu $G(1)$.

$$\lim_{s\to 1}(s-1)F(s) = \lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s)G(s) = G(1)$$

D'après le théorème d'Ikehara,on a $A = G(1)$
donc

$$\Phi(x) \sim G(1)x.$$

On montre que $G(1) = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}$
on a $G(s) = \prod_p \left(1 - p^{-s} + (p-1)^{-s}\right)$, donc

$$\begin{aligned} G(1) &= \prod_p (1 - p^{-1} + (p-1)^{-1}) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) \\ &= \prod_p \left(\frac{1 - p^{-1} + p^{-2}}{1 - p^{-1}}\right) \\ &= \prod_p \left(\frac{(1 - p^{-1} + p^{-2})(1 + p^{-1})(1 - p^{-3})}{(1 - p^{-1})(1 + p^{-1})(1 - p^{-3})}\right) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} G(1) &= \prod_p \left(\frac{(1 - p^{-6})}{(1 - p^{-2})(1 - p^{-3})}\right) \\ &= \prod_p \left(\frac{(1 - p^{-2})^{-1}(1 - p^{-3})^{-1}}{(1 - p^{-6})^{-1}}\right) \\ &= \frac{\prod_p (1 - p^{-2})^{-1} \prod_p (1 - p^{-3})^{-1}}{\prod_p (1 - p^{-6})^{-1}} \end{aligned}$$

donc

$$G(1) = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}$$

enfin

$$\Phi(x) \sim G(1)x.$$

Bibliographie

[1] A. BLANCHARD, *Introduction a la théorie analytique des nombres premiers,* Dunod Paris, 1990.

[2] B.MELVYN NATHANSON, *Elementary Methods in Number Theory.*

[3] D. P. Parent, *Exercises de théorie des nombres*, Gauthier-Villars, Paris, 1978.

[4] Emmanuel Kowalski, *Un cours de theorie analytique*, Société Mathématique de France, 2004.

[5] G. Tenenbaum, *Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory,* Cambridge University Press, 1995.

[6] Maruti Ram Murty, *Problems in Analytic Number Theory*, Second Edition, Septembre 2007.

[7] Olivier Bordelles, *Arithmetic Tales,* Springer-Verlag London, 2012.

[8] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag Berlin, 1976.

[9] W.J.Ellison et Michel Mendes-France, *Les Nombres Premiers*, Hermann Paris, 1975, actualités scientifiques et industriellees Numéro 1366.