

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**  
**Université Djilali Bounaama Khemis Miliana**



**Faculté des Sciences et de la Technologie**  
**Département de la technologie**

Mémoire du Projet de Fin d'Etude  
Pour l'obtention du diplôme

**Master**

En Génie Electrique

Option : Automatique des systèmes de production

*Thème :*

Commande Adaptative Des Robots Manipulateurs Rigides

Réalisé par : ARBOUCHE Kaddour

Encadré par : KERRACI Abdelkader

Année Universitaire 2014/2015

*A mes parents,  
A mes frères et ma sœur,  
A ma femme et ma fille,  
A tous ceux qui me sont chers.*

## Remerciements

*Je remercie **ALLAH** le tout puissant de m'a donné le courage et la volonté de mener à terme ce présent travail.*

*Je remercie énormément Mr KERRACI Abdelkader d'avoir accepté de m'encadrer et je suis très reconnaissant pour ces précieuses aides pendant les moments difficiles.*

*Je remercie tout les enseignants qu'ils nous ont enseigné dans les deux années passées et le chef de département ST et aussi mes amis pour leur soutien.*

## Abstract

In the frame of this work, we are interested in the problem of adaptive control of rigid robot manipulators. We will introduce some basics concepts of this system, in order to facilitate the study and understanding. Using modified conventions of Denavit-Hartenberg, a description of the structure geometry of the robot manipulators within an open loop structure will be presented. All the stage required for the dynamic modeling of robot manipulators is explained. In particular, a detailed presentation of the Lagrange formalism, which is used for the calculation of the dynamic model of robot manipulators is made. The model of the robot manipulators SCARA will be calculated. Then, a synthesis of the classical dynamic control laws used for rigid robot manipulators will be proposed. We will present control laws used in the regulation problem such as the PD, those used for the problem of trajectory tracking based on the linearisation of the feedback (computed torque), and those based on the theory of Lyapunov (Paden and Panja). Then, a synthesis of adaptive control law used for rigid robot manipulator. All the control approaches considered in this work will be validated through the simulation results obtained in the case study of the robot manipulator SCARA with three degree of freedom.

**Key words :** non linear systems, dynamic model of robot manipulator, Robot manipulator SCARA, classical control laws, regulation problem, computer torque, trajectory problem, adaptive control, asymptotic stability.

## Résumé

Nous nous intéressons dans ce mémoire au problème de la commande adaptative des robots manipulateurs rigides. Nous introduirons tout d'abord quelques notions de bases de ces systèmes pour faciliter l'étude et la compréhension. Une description de la structure géométrique des robots manipulateurs à chaîne ouverte simple sera présentée en utilisant les conventions de Denavit-Hartenberg. Nous explicitons toutes les étapes nécessaires à la modélisation dynamique des robots manipulateurs. En particulier nous faisons une présentation détaillée du formalisme de Lagrange qui est utilisé pour le calcul du modèle dynamique des robots manipulateurs. A titre d'exemple, le modèle du robot manipulateur SCARA sera calculé. Puis, une synthèse sur les lois de commande dynamiques classiques des robots manipulateurs rigides sera proposée. Nous présentons des lois de commande qui traitent le problème de régulation telles que, la loi de commande PD et des lois de commande qui traitent le problème de poursuite de trajectoire telle que la loi de commande basée sur la linéarisation avec retour d'état (commande couple calculé) et la loi de commande basée sur la théorie de Lyapunov (commande de Paden et Panja ). Après, nous présentons une loi de commande adaptative basée sur le couple calculé. Toutes les approches considérées dans ce mémoire seront validées à travers les résultats de simulation obtenues sur le robot manipulateur SCARA à trois degré de liberté.

**Mots clés :** systèmes non linéaire, modèle dynamique des robots manipulateurs, robot manipulateur Scara, lois de commande classiques, commande point à point, commande de Paden et Panja, commande couple calculé, commande adaptative, stabilité asymptotique.

# Table des matières

## INTRODUCTION GENERALE

### **Chapitre 1. Généralité Sur Les Robots Manipulateurs Rigides**

1.1. INTRODUCTION .....	5
1.2. SYSTEME DYNAMIQUE NON LINEAIRE.....	5
1.3. ROBOT MANIPULATEUR RIGIDE.....	5
1.4. CONSTITUTION MECANIQUE DES ROBOTS.....	6
1.4.1. L'organe terminal.....	7
1.4.2. Structure mécanique articulée.....	7
1.4.3. Articulations.....	7
1.4.3.1. Articulation rotoïde.....	7
1.4.3.2. Articulation prismatique.....	8
1.5. DEGREE DE LIBERTE ET ARCHITECTURE.....	8
1.6. REDONDANCE.....	10
1.7. CONCLUSION.....	10

### **Chapitre 2. Modélisation Dynamique Des Robots Manipulateurs Rigides**

2.1. INTRODUCTION.....	12
2.2. LA STRUCTURE GEOMETRIQUE DES ROBOTS MANIPULATEURS A CHAINE OUVERTE SIMPLE .....	12
2.3. MODELISATION DYNAMIQUE D'UN ROBOT MANIPULATEUR.....	16
2.3.1. Introduction.....	16
2.3.2. Formulation de Lagrange-Euler.....	16
2.3.3. L'énergie cinétique.....	27
2.3.4. L'énergie potentielle.....	20
2.3.5. Les équations de mouvement du robot.....	21
2.4. APPLICATION A UN MANIPULATEUR A TRIOS DEGRE DE LIBERTE.....	23
2.4.1. Configuration SCARA (RRP).....	23
2.4.2. Transformation de repère.....	25
2.4.3. La matrice d'inertie.....	26

2.4.4. La matrice des forces centrifuges et de Coriolis.....	28
2.4.5. Le vecteur de gravité.....	29
2.5. CONCLUSION.....	30

### **Chapitre 3. Commandes Dynamiques Classiques**

#### **Des robots Manipulateurs Rigides**

3.1. INTRODUCTION.....	34
3.2. COMMANDE POINT-A-POINT.....	34
3.2.1. Introduction.....	34
3.2.2. Principe de la commande.....	35
3.3. PROBLEME DE POURSUITE DE TRAJECTOIRE.....	37
3.3.1. Introduction.....	37
3.3.2. Loi de commande de Paden et Panja.....	38
3.4. COMMANDE COUPLE CALCULE ( COMPUTED TORQUE CONTROL ).....	39
3.4.1. Introduction.....	39
3.4.2. Loi de commande.....	40
3.4.3. Etude de la stabilité.....	41
3.5. APPLICATION A UN ROBOT MANIPULATEUR A TROIS DEGREE DE LIBERTE.....	43
3.5.1. Introduction.....	43
3.5.2. Résultats de simulation.....	43
3.6. CONCLUSION.....	51

### **Chapitre 4. Commande Adaptative Des Robots**

#### **Manipulateurs Rigides**

4.1. COMMANDE ADAPTATIVE BASE SUR COUPLE CALCULE.....	53
4.1.1. Introduction.....	53
4.2. ALGORITHME DU GRADIENT.....	53
4.2.1. Définition.....	53
4.2.2. Propriétés de convergence.....	54
4.3. LOI DE COMMANDE ADAPTATIVE BASEE SUR LE COUPLE CALCULE DE TYPE GRADIENT.....	54

## *Tables des matières*

---

4.3.1 Analyse de la stabilité.....	57
4.3.2. Convergence de l'erreur paramétrique.....	58
4.4. RESULTATS DE SIMULATION.....	59
4.5. CONCLUSION.....	64
CONCLUSION GENERALE.....	65
REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE.....	67
ANNEXE.....	68



## Notion et Abréviations

${}^{j-1}A_j$  Matrice d'orientation de la base du repère  $R_j$

$\hat{C}$  Matrices des forces centrifuges et de Coriolis estimées

$C(q, \dot{q})$  Matrices des forces centrifuges et de Coriolis

$g$  Vecteur de gravité

$\hat{g}$  Vecteur des forces de gravité

$I_i$  Matrice pseudo-inertie du segment  $i$

$k_p$  Matrice diagonale définie positive de position

$k_v$  Matrice diagonale définie positive de vitesse

$K(q, \dot{q})$  Énergie cinétique

$L(q, \dot{q})$  Le Lagrangien

$m_{jk}(q)$  Éléments générique de la matrice d'inertie  $M(q)$

$M(q)$  Matrice d'inertie

$\hat{M}$  Matrice d'inertie estimée

${}^{j-1}P_j$  Matrice définissant les coordonnées de l'origine  $O_j$  du repère  $R_j$  dans le repère  $R_{j-1}$

$q$  Vecteur des positions articulaires

$\dot{q}$  Vecteur des vitesses articulaires

$\ddot{q}$  Vecteur des accélérations articulaires

$q_d$  Position désirée

$\dot{q}_d$  Vitesse désirée

$\ddot{q}_d$  Accélération désirée

$\tilde{q}$  Erreur de poursuite de position

$\dot{\tilde{q}}$  Erreur de poursuite de vitesse

$\ddot{\tilde{q}}$  Erreur de poursuite d'accélération

$Q$  Matrice diagonale définie positive

## *Notion et abréviations*

---

${}^i r$  Vecteur des coordonnées d'un point du segment  $i$

${}^i \bar{r}$  Vecteur des coordonnées du centre du segment  $i$

$t$  Le temps

${}^{j-1}T_j$  Matrice de transformation homogène

$U(q)$  Energie potentielle

$v$  Vecteur de vitesse

$V(x)$  Fonction candidate de Lyapunov

$\dot{V}(x)$  La dérivée de la fonction de Lyapunov

$x$  Vecteur composé par l'erreur de poursuite de position et l'erreur de poursuite de vitesse

$\dot{x}$  Dynamique de  $x$

$\alpha$  Constante scalaire

$\beta$  Constante scalaire

$\Gamma$  Matrice diagonale symétrique définie positive

$\theta$  Vecteur des paramètres réels

$\hat{\theta}$  Vecteur des paramètres estimés

$\dot{\hat{\theta}}$  La dérivée du Vecteur des paramètres estimés

$\tilde{\theta}$  Erreur paramétrique

$\tau$  Vecteur du couple appliqué aux articulations

## LISTE DES FIGURES

**Figure 1.1** Constituants mécanique des robots

**Figure 1.2** Symbole de l'articulation rotoïde

**Figure 1.3** Symbole de l'articulation prismatique

**Figure 1.4** Architecture des porteurs

**Figure 1.5** Structure générale d'un robot manipulateur

**Figure 2.1** La structure géométrique d'un robot manipulateur à chaîne ouverte simple

**Figure 2.2** La représentation de Denavit-Hartenberg

**Figure 2.3** Robot Scara

**Figure 2.4** Configuration de Denavit-Hartenberg des trois premiers degrés de liberté du robot SCARA (RRP)

**Figure 3.1** Schéma synoptique de la commande point à point

**Figure 3.2** Schéma synoptique de la commande de Paden et Panja

**Figure 3.3** Schéma synoptique de la commande du couple calculé type PD

**Figure 3.4** Les poursuites de trajectoire de position et des erreurs de position avec la loi de commande point à point

**Figure 3.5** Les poursuites de trajectoire de position et des erreurs de position avec la loi de commande de Paden et Panja

**Figure 3.6** Les poursuites de trajectoire de vitesse et des erreurs de vitesse avec la loi de commande de Paden et Panja

**Figure 3.7** Les poursuites de trajectoire de position et des erreurs de position avec la loi de commande couple calculé

**Figure 3.8** Les poursuites de trajectoire de vitesse et des erreurs de vitesse avec la loi de commande couple calculé

**Figure 4.1** Schéma synoptique de la commande adaptative du couple calculé avec mesure de l'accélération

**Figure 4.2** Les poursuites de trajectoire de position et des erreurs de position avec la loi de commande adaptative basée sur le couple calculé (loi d'adaptation du type gradient)

**Figure 4.3** Les poursuites des masses et des erreurs de poursuite des masses avec la loi de commande adaptative basée sur le couple calculé (loi d'adaptation du type gradient)

## **LISTE DES TABLEAUX**

**Tableau 2.1** Table représentant les valeurs des paramètres du robot Scara en simulation

**Tableau 2.2** Paramètres de Denavit-Hartenberg des trois premiers degrés de liberté du robot Scara

# **Introduction Générale**

Avec le nombre croissant des robots manipulateurs utilisés dans l'industrie pendant ces dernières décennies, la commande de poursuite de trajectoire des manipulateurs avec des paramètres dynamique inconnus ou variant dans le temps est devenue un domaine de recherche très important. Pour avoir une convergence asymptotiquement ou exponentielle globale de l'erreur de poursuite en tenant compte les conditions citées ci-dessus, les lois de commande classique, qui sont basées sur la supposition de la connaissance parfaite du modèle dynamique du robot ne peuvent pas être utilisées. Par conséquent, la nécessité de recourir à la commande adaptative est très importante.

Dans le langage courant, adapter signifie changer un comportement pour se conformer à des nouvelles circonstances. La commande adaptative est une commande qui peut modifier son comportement vis-à-vis des changements dans la dynamique du processus à commander et des perturbations. Pour ces différents raisons, une estimation en temps réel des paramètres de ce processus est nécessaire pour ajouter les paramètres des régulateurs. [1]

Dans le premier chapitre, En commençant par la définition du Système dynamique non linéaire et le robot manipulateur rigide, puis nous présentons les constituants mécaniques des robots. Après nous présentons quelques notions qui il est nécessaire dans la modalisation dynamique du robot.

Dans le deuxième chapitre nous donnons quelques notions de base des robots manipulateurs. Puis, nous présentons une description géométrique des systèmes articulés et plus spécialement les robots manipulateurs. En utilisant la description de Denavit-Hartenberg Standard. Après, nous abordons la modélisation dynamique des robots manipulateurs en utilisant le formalisme de Lagrange. Cette approche particulière est assez simple à mettre en œuvre et elle est bien adaptée aux techniques du calcul manuel ainsi qu'aux méthodes assistées par ordinateur. Nous terminons ce chapitre par une élaboration d'un modèle dynamique des trois premiers degrés de liberté du robot Sacra. Ce modèle est utilisé dans les autres chapitres pour valider l'étude théorique présentée dans ce mémoire.

Dans le troisième chapitre, nous étudions trois lois de commande classique, nous commençons par la commande point à point. Après nous étudions les deux lois de commande qui traitent le problème de poursuite de trajectoire, où nous allons traiter la commande de Paden et Panja et la commande nommée couple calculé type PD. A la fin de ce chapitre, nous

appliquons ces lois de commande au modèle dynamique du robot manipulateur Sacra établi dans le deuxième chapitre.

Le chapitre quatre est consacré à la loi de commande adaptative de type gradient, cette loi de commande adaptative est basée sur le couple calculé.

Cette loi de commande sera appliquée au modèle dynamique du robot manipulateur SCARA en vue d'analyser ses performances.

# **Chapitre 1**

## ***Généralités Sur Les Robots Manipulateurs Rigides***



## 1.1 Introduction

Le bras manipulateur est un système de positionnement. Pour contrôler cette position, les propriétés dynamiques de ce bras doivent être connues. Vu le nombre de degrés de liberté qui peut avoir lieu, la détermination de ces propriétés dynamiques n'est pas un processus facile [2].

Dans ce premier chapitre nous commençons par la définition du système dynamique non linéaire, Ensuite nous présentons quelques définitions de base pour faciliter la lecture de mémoire, et en terminera ce chapitre par une conclusion

## 1.2 Système dynamique non linéaire

Un système dynamique, c'est un espace de phase, l'espace des états possibles du système considéré, muni d'une équation d'évolution qui décrit la variation temporelle de l'état du système. Cette équation d'évolution prend la forme d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles, lorsque le temps est une variable continue, mais se présente aussi comme une application de l'espace de phases dans lui-même, lorsqu'on préfère traiter le temps comme une variable discrète.

La plus part des systèmes dynamiques sont non linéaires, Dans les systèmes dynamiques non linéaires (SDNL) l'évolution de chacun des constituants dépend en général de celle de plusieurs autres constituants, et ce de façon non proportionnelle ou non additive (non linéaire), qui n'admet pas le principe de superposition.

Les systèmes dynamiques non linéaires sont par exemple nécessaires à la formation de structures spontanées dans la nature.

## 1.3 Robot manipulateur rigide

Un robot est un manipulateur commandé en position, reprogrammable, polyvalent, à plusieurs degrés de liberté, capable de manipuler des matériaux, des pièces, des outils et des dispositifs spécialisés, au cours de mouvements variables et programmés pour l'exécution d'une variété de tâches, il a souvent l'apparence d'un ou plusieurs bras se terminent par un poignet. Son unité de commande utilise, notamment, un dispositif de mémoire et éventuellement de perception et d'adaptation à l'environnement et aux circonstances. Ces

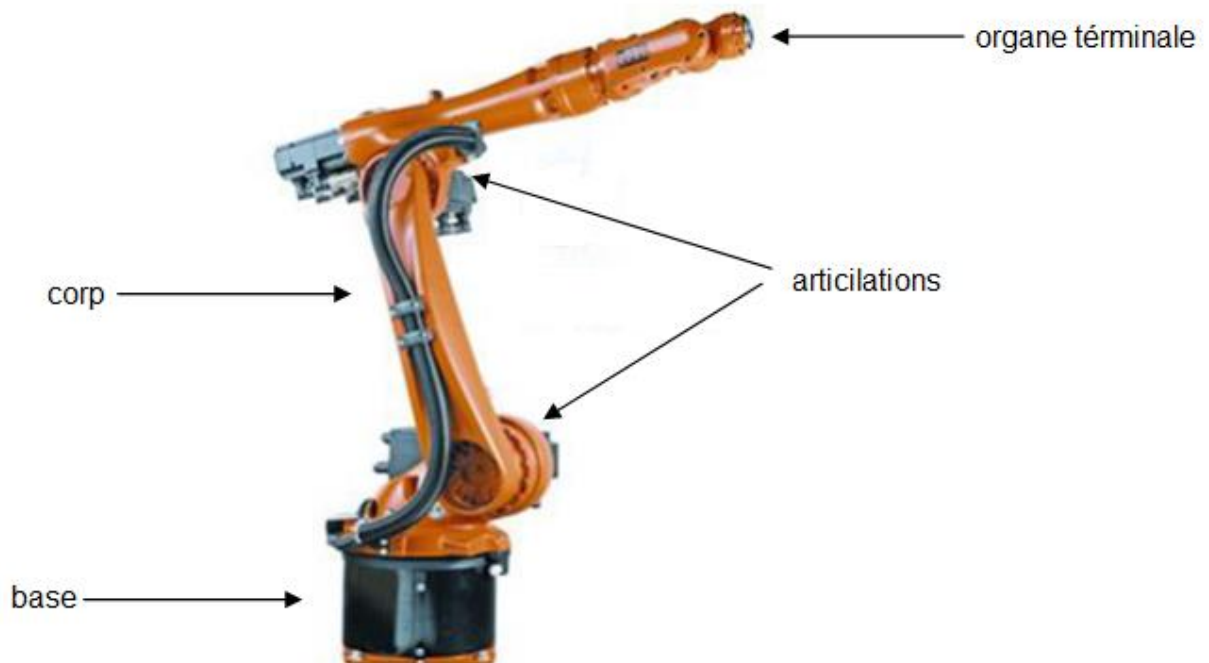
machines polyvalentes sont généralement étudiées pour effectuer la même fonction de façon cyclique et peuvent être adaptées à d'autre fonction sans modification permanente du matériel.

Cette définition est le reflet des différentes composantes d'une cellule robotisée, le mécanisme : ayant une structure plus ou moins proche de celle du bras humain, il permet de remplacer ou de prolonger son action (le terme "manipulateur" exclut implicitement les robots mobiles autonomes). Sa motorisation est réalisée par des actionnaires électriques, pneumatiques ou hydrauliques qui transmettent leurs mouvements aux articulations par des systèmes appropriés [2].

La robotique est donc une science pluridisciplinaire qui requiert des connaissances en mécanique, électrotechnique, traitement du signal, informatique, communication, automatique....

#### 1.4 Constituants mécanique des robots :

Un robot-manipulateur est constitué par deux sous-ensemble distincts : un (ou plusieurs) organe terminale et une structure mécanique articulée.



**Figure 1.1** Constituants mécanique des robots

### 1-4-1 L'organe terminale

Sous le terme organe terminal, on regroupe tous dispositif destiné à manipuler des objets (dispositifs de serrage, dispositifs magnétiques, à dépression ...) ou à les transformer (outils, torche de soudage, pistolet de peinture...). Il s'agit donc d'une interface permettant au robot d'interagir avec son environnement. Un organe terminal peut être multifonctionnel, c'est-à-dire qu'il est équipé de plusieurs dispositifs ayant des fonctionnalités différentes.

Il peut aussi être monofonctionnel mais interchangeable, un robot, enfin, peut être multi-bras, chacun des bras portant un organe terminal différent. Par la suite nous utilisons indifféremment le terme organe terminal, préhenseur, outil ou effecteur pour nommer le dispositif d'interaction fixé à l'extrémité mobile de la structure mécanique [2].

### 1.4.2. Structure mécanique articulée

Le rôle de la structure mécanique articulée est d'amener l'organe terminal dans une situation (position et orientation) donnée, selon des caractéristiques de vitesse et d'accélération donnée. Son architecture est une chaîne cinématique de corps, généralement rigides ou supposée comme tels, assemblés par des liaisons appelées articulations. Les chaînes peuvent être soit ouvertes simples, soit arborescentes, soit fermées.

### 1.4.3. Articulations

Une articulation lie deux corps successifs en limitant le nombre de degrés de liberté de l'un par rapport à l'autre. Soit  $m$  le nombre de degrés de liberté résultant de la mobilité de l'articulation. La mobilité est telle que :

$$0 \leq m \leq 6$$

Lorsque  $m = 1$ , ce qui est le cas le plus fréquent en robotique, l'articulation est dite simple, soit rotoïde, soit prismatique [2].

#### 1.4.3.1. Articulation rotoïde (notée R)

Il s'agit d'une articulation de type pivot, réduisant le mouvement entre deux corps à une rotation autour d'un axe commun. La situation relative entre les deux corps est donnée

par l'angle autour de cet axe. L'articulation rotoïde est représentée par le symbole de la figure 1.1.

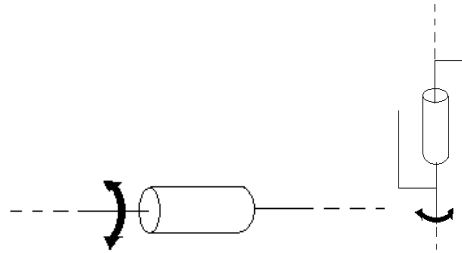


Figure 1.2 Symbole de l'articulation rotoïde

#### 1.4.3.1. Articulation prismatique (notée p)

Il s'agit d'une articulation de type glissière réduisant le mouvement entre deux corps à une translation le long d'un axe commun. La figure 1.2 donne sa représentation symbolique.

La situation relative entre les deux corps est mesurée par la distance le long de cet axe

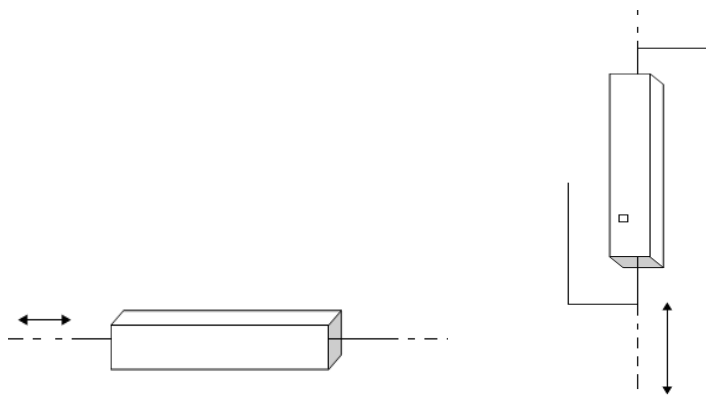


Figure 1.3 Symbole de l'articulation prismatique

### 1.5. Degrés de liberté et architecture

Un robot non redondant doit disposer de six degrés de liberté pour positionner et orienter un solide quelconque dans l'espace. toute fois, si ce solide présente une symétrie de révolution, cinq degrés de liberté suffisent puisque il n'est pas nécessaire de spécifier la rotation autour de l'axe de révolution de même pour situer un corps dans un plan, il ne faut que trois degrés de liberté : deux fixent les coordonnées dans le plan et le troisième détermine son orientation dans ce plan. A partir de ces constatations, on déduit que : les caractéristiques

des solides manipulés par le robot, donc la classe de tâches à réaliser, permettant de déterminer le nombre de degrés de liberté dont il doit disposer une condition nécessaire mais non suffisante pour qu'il y ait compatibilité entre le robot et la tâche et que le nombre de degrés de liberté de l'organe terminale du robot soit supérieure ou égale à celui de la tâche, le mécanisme peut alors placer l'organe terminale dans la situation désirée.

Afin de dénombrer les différentes architectures possibles, on ne considère que deux paramètres : le type d'articulation (rotoïde, prismatique) et l'angle que font deux axes articulaires successifs ( $0^\circ$  ou  $90^\circ$ ) [2].

L'architecture des porteurs est présentée dans la figure 1.3

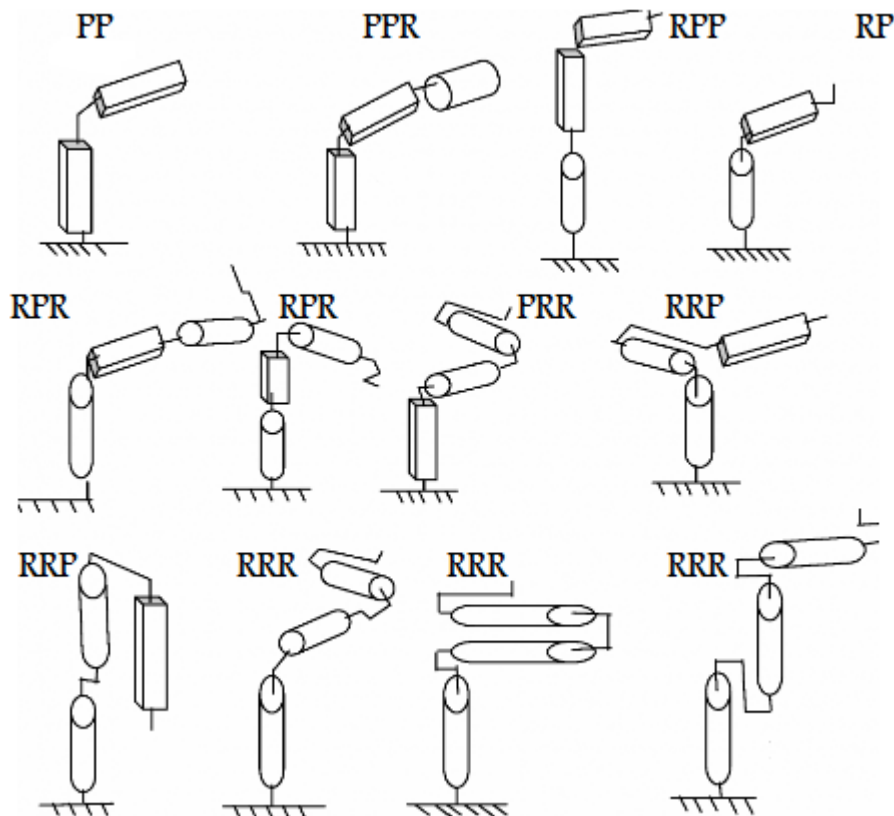


Figure 1.4 architecture des porteurs

On convient d'appeler les trois premiers degrés de liberté le porteur de robot. Les degrés de liberté résiduels forment le poignet, caractérisé par des dimensions beaucoup plus petites et des masses faibles.

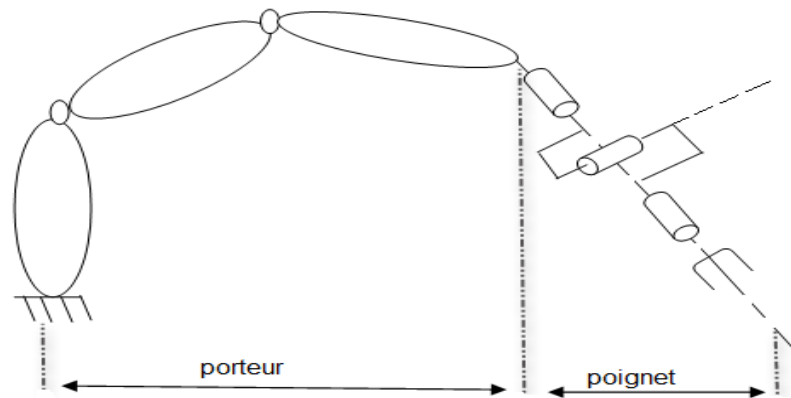


Figure 1.5 structure générale d'un robot-manipulateur

## 1.5. Redondance

Un robot est redondant lorsque le nombre de degrés de liberté de l'organe terminal est inférieur au nombre d'articulations motorisées. Cette propriété permet d'augmenter le volume du domaine accessible et de préserver les capacités de déplacement de l'organe terminal en présence d'obstacles le ou les degrés de liberté supplémentaires autorisant leur contournement.

## 1.7. Conclusion

Nous nous sommes contentés dans ce chapitre à donner quelques définitions de termes concernant plus particulièrement les domaines de la modélisation et de la commande des robots ces définitions reviendront très souvent dans ce travail.

## Chapitre 2

# *Modélisation Dynamique Des Robots Manipulateurs Rigides*

## 2.1. Introduction :

Le modèle dynamique d'un robot manipulateur est un ensemble de formulations mathématiques constituées par des équations de mouvement de ce robot. Celles-ci sont exprimées par un système d'équations différentielles décrivant le comportement dynamique du robot manipulateur. Pour construire ce système, nous devons tout d'abord faire une description géométrique du robot manipulateur à chaîne ouverte simple qui est introduite en utilisant les notations de Denavit-Hartenberg [2], [4], [5]. Cette description est une représentation matricielle des changements de repères consécutifs.

Il existe plusieurs méthodes et procédures pour obtenir le modèle dynamique d'un robot manipulateur. Parmi lesquelles nous pouvons citer le formalisme de Newton-Euler et le formalisme de Lagrange [5]. Dans notre travail, nous mettons en œuvre le formalisme de Lagrange parce qu'il est simple et systématique.

Ensuite, nous présentons quelques propriétés structurelles fondamentales du modèle dynamique du robot manipulateur qui sont essentielles dans la conception de la plupart des lois de commande.

Nous terminons ce chapitre par une élaboration d'un modèle dynamique des trois premiers degrés de liberté du robot Scara en utilisant les différentes étapes de la procédure présentée dans ce chapitre. Ce modèle du robot est obtenu en vue de la validation du développement théorique présenté dans ce mémoire [3], [4].

## 2.2. La structure géométrique des robots manipulateurs à chaîne ouverte simple

La description de la structure géométrique du robot manipulateur est l'étape de base pour avoir le modèle dynamique du robot manipulateur qui est modélisé comme une chaîne ouverte des corps rigides articulés [1], [5]. Le système, qui est le robot, est composé de  $(n)$  articulations et  $(n+1)$  corps notés par  $C_0, \dots, C_n$ . Le corps  $C_0$  est la base du robot et le corps  $C_n$  porte l'organe terminal, l'articulation  $j$  connecte le corps  $C_j$  au corps  $C_{j+1}$  (voir figure 2.1).

Pour décrire la structure géométrique de tels robots manipulateurs, plusieurs techniques peuvent être utilisées. La représentation de Denavit-Hartenberg est largement

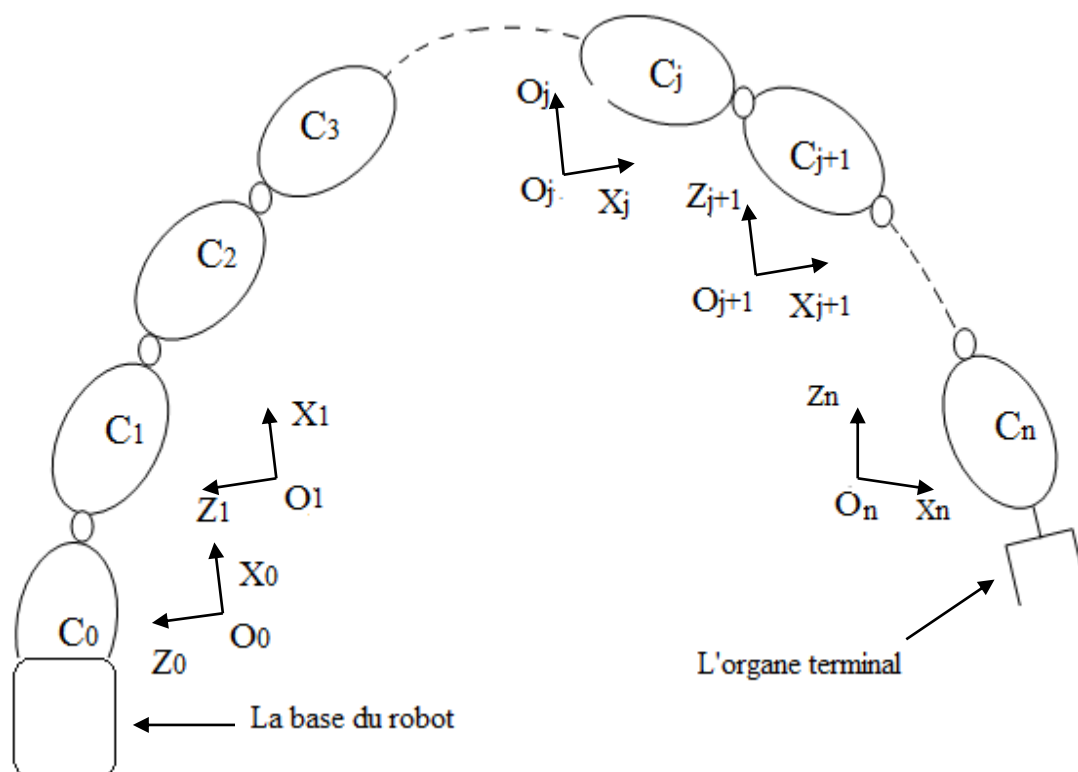


utilisée, et qui est considérée dans cette section. Cette représentation permet une description homogène, avec un minimum de paramètres, des systèmes mécaniques articulés à chaîne ouverte simple [2]. La description géométrique est basée sur les règles et les conventions suivantes :

- Les corps sont considérés parfaitement rigides ;
- Les articulations sont soit rotative soit prismatique ;
- Le repère  $R_j$  est lié au corps  $C_j$  ;
- Les paramètres définissant le repère  $R_j$  par rapport au repère  $R_{j-1}$  sont indicés (j).

Le repère  $R_j$  est défini tels que :

- L'axe  $Z_j$  est porté par l'axe de l'articulation j ;
- L'axe  $X_j$  est porté par le perpendiculaire commun de  $Z_j$  et  $Z_{j+1}$



**Figure 2.1** La structure géométrique d'un robot manipulateur à chaîne ouverte simple.

Le passage d'un repère  $R_{j-1}$  à un repère  $R_j$  peut être déterminé complètement par les quatre paramètres de Denavit-Hartenberg suivants (voir figure 2.2) :

1.  $\alpha_j$  : l'angle entre l'axe  $Z_{j-1}$  et  $Z_j$  mesuré autour de l'axe  $X_{j-1}$  ;
2.  $d_j$  : la distance entre le centre  $O_{j-1}$  du repère  $R_{j-1}$  et l'axe  $Z_j$  ;
3.  $\theta_j$  : l'angle entre  $X_{j-1}$  et  $X_j$  autour de l'axe  $Z_j$  ;
4.  $r_j$  : La distance entre le centre  $O_j$  du repère  $R_j$  et l'axe  $X_{j-1}$ .

Les paramètres  $\alpha_j$  et  $d_j$  sont constants, un des paramètres  $\theta_j$  ou  $r_j$  varie lorsque l'articulation se déplace. Si l'articulation est rotative, le paramètre  $\theta_j$  est la variable représentant le déplacement de l'articulation. Si elle est prismatique le paramètre  $r_j$  est la variable représentant le déplacement de l'articulation, tandis que  $\theta_j$  est constant [1].

La variable articulaire  $q_j$  associée à la  $j^{ième}$  articulation est définie par :

$$q_j = (1 - \sigma_j) \theta_j + \sigma_j r_j \tag{1.1}$$

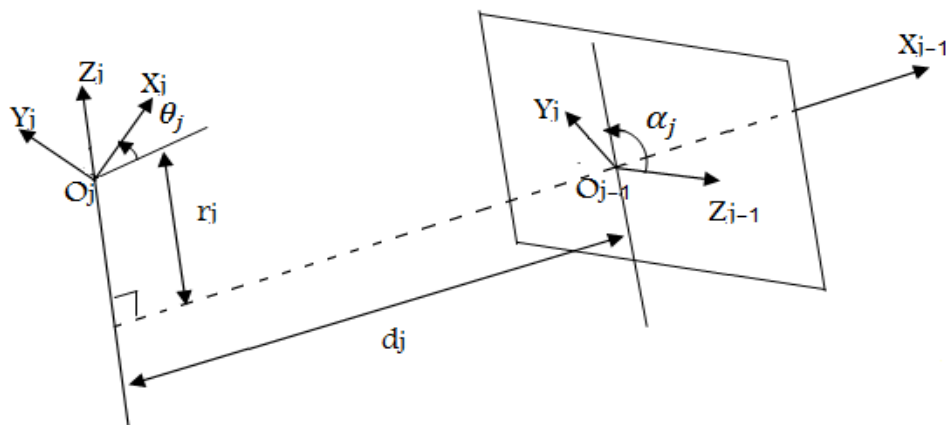


Figure 2.2 la représentation de Denavit-Hartenberg

Où

$$\sigma_j = \begin{cases} 0 & \text{si l'articulation est rotative} \\ 1 & \text{si l'articulation est prismatique} \end{cases}$$

La matrice de transformation homogène définissant le repère  $R_j$  par rapport au repère antécédent  $R_{j-1}$  peut être obtenue ainsi :

$${}^{j-1}T_j = Rot(x, \alpha_j) TRANS(x, d_j) Rot(Z, \theta_j) TRANS(z, r_j) \tag{1.2}$$

Avec :

$$Rot(x, \alpha_j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_j & -\sin(\alpha_j) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_j) & \cos \alpha_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

$$Rot(Z, \theta_j) = \begin{bmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j & 0 & 0 \\ \sin \theta_j & \cos \theta_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$$TRANS(x, d_j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_j \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

$$TRANS(z, r_j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Alors :

$${}^{j-1}T_j = \begin{bmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j & 0 & d_j \\ \cos \alpha_j \sin \theta_j & \cos \alpha_j \cos \theta_j & -\sin \alpha_j & -r_j \sin \alpha_j \\ \sin \theta_j \sin \alpha_j & \cos \theta_j \sin \alpha_j & \cos \alpha_j & r_j \cos \alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Nous pouvons remarquer que la matrice de transformation homogène a la forme générale

$${}^{j-1}T_j = \begin{bmatrix} {}^{j-1}A_j & {}^{j-1}P_j \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Où  ${}^{j-1}A_j$  est une matrice  $\in R^{3 \times 3}$  qui définit l'orientation de la base du repère  $R_j$  par rapport à celle du repère  $R_{j-1}$ , et  ${}^{j-1}P_j$  est une matrice  $\in R^{3 \times 3}$  qui définit les coordonnées de l'origine  $O_j$  du repère  $R_j$  dans le repère  $R_{j-1}$ .

## 2.3. Modélisation dynamique d'un robot manipulateur

### 2.3.1 Introduction

Le modèle dynamique d'un robot manipulateur est constitué par des formulations mathématiques des équations de mouvement de ce robot. Les équations de mouvements sont un ensemble d'équations différentielles décrivant le comportement dynamique du robot manipulateur.

Il existe deux types de modèle dynamique : le modèle dynamique inverse utilisé dans les applications de la commande, ce modèle fournit les couples articulaires, exercés par les actionneurs, en fonction des positions, vitesses et accélérations articulaires, et le modèle dynamique direct utilisé en simulation, qui fournit les accélérations articulaires en fonction des positions, vitesses et couples articulaires.

Plusieurs méthodes sont utilisées pour obtenir le modèle dynamique inverse [4], [5]. Nous citons la formulation de Newton-Euler et la formulation de Lagrange-Euler. Nous utilisons la formulation de Lagrange-Euler parce qu'elle est simple et systématique et décrit le modèle dynamique du système en termes de travail et d'énergie en utilisant les coordonnées généralisées.

### 2.3.2 Formulation de Lagrange-Euler

Pour obtenir le modèle dynamique avec le formalisme de Lagrange-Euler, nous devons tout d'abord déterminer l'énergie cinétique  $K(q, \dot{q})$  et l'énergie potentielle  $U(q)$  parce que le Lagrangien est défini comme suit :

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - U(q) \quad (1.9)$$

En utilisant le lagrangien donné par (1.9), les équations de mouvement du robot manipulateur sont donnée par :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau \quad (1.10)$$

Où  $q$  et  $\dot{q} \in R^n$  sont respectivement les coordonnées et les vitesses généralisées,  $\tau \in R^n$  vecteur des couples généralisées

### 2.3.3 L'énergie cinétique

Etant donné un point du corps "i" avec le vecteur de coordonnées  ${}^i r$  par rapport au repère associé au corps considéré, les coordonnées de ce point dans le repère  $R_0$  s'écrivent :

$$r = {}^0 T_i^i r \quad (1.11)$$

Avec  ${}^0 T_i = {}^0 T_1 {}^1 T_2 \dots {}^{i-1} T_i$  une transformation homogène  $\in R^{4 \times 4}$  qui est une fonction des variables articulaires  $q_1, q_2, \dots, q_i$  par conséquent, dans le repère  $R_0$  est donné par l'expression :

$$v = \frac{dr}{dt} = \sum_i^{j-1} \left\{ \frac{\partial {}^0 T_i}{\partial q_i} \dot{q} \right\} {}^i r \quad (1.12)$$

Puisque  $\frac{\partial {}^0 T_i}{\partial q_i} = 0$  pour  $j > i$ , nous pouvons remplacer la limite supérieure de la sommation par "n" qui est le nombre d'articulations.

L'énergie cinétique d'une masse infinitésimal  $dm$  à  ${}^i r$  ayant une vitesse

$v = [v_x \ v_y \ v_z]^T$  est :

$$\begin{aligned} dk_i &= \frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) dm \\ &= \frac{1}{2} (v^T v) dm \end{aligned} \quad (1.13. a)$$

En utilisant l'expression de la vitesse "v" donnée par l'équation (1.12), nous obtenons :

$$dk_i = \frac{1}{2} \left\{ \sum_j^n \sum_k^n \left( \frac{\partial {}^0 T_i}{\partial q_i} \right) ({}^i r \ {}^i r^T dm) \frac{\partial {}^0 T_i^T}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right\} \quad (1.13. b)$$

L'énergie cinétique du corps et donnée par :

$$K_i = \int dK_i \quad (1.14)$$

En substituant  $dk_i$  par l'expression (1.13.b), nous pouvons déplacer le symbole d'intégration à l'intérieur des sommations. Alors, la matrice pseudo-inertie  $\in R^{n \times n}$  pour le corps "i" est donnée par :

$$I_i = \int {}^i r \ {}^i r^T dm \quad (1.15)$$

L'énergie cinétique du corps "i" peut s'écrire :

$$K_i = \frac{1}{2} \text{trace} \left\{ \sum_j^n \sum_k^n \left( \frac{\partial {}^0 T_i}{\partial q_i} \right) I_i \frac{\partial {}^0 T_i^T}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right\} \quad (1.16)$$

Trouvons la matrice pseudo-inertie avant de déterminer l'énergie cinétique totale.

Soit  ${}^i r = [x \ y \ z \ 1]$ , les coordonnées dans le repère  $R_i$  de la masse infinitésimale  $dm$ .

Alors, le développement de la relation (1.15) donne :

$$I_i = \begin{bmatrix} \int x^2 dm & \int yx dm & \int zx dm & \int x dm \\ \int xy dm & \int y^2 dm & \int zy dm & \int y dm \\ \int xz dm & \int yz dm & \int z^2 dm & \int z dm \\ \int x dm & \int y dm & \int z dm & \int dm \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Où les intégrales sont prises sur le volume du corps "i". C'est une matrice constante qui est évaluée une fois pour chaque corps. Elle dépend de la géométrie et la distribution de la masse du corps "i". En effet, elle est exprimée en termes des moments d'inertie du corps "i" :

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int (y^2 + z^2) dm \\ I_{yy} &= \int (x^2 + z^2) dm \\ I_{zz} &= \int (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \quad (1.18)$$

Produits croisés de l'inertie

$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= \int xy \, dm \\
 I_{xz} &= \int xz \, dm \\
 I_{yz} &= \int yz \, dm
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Et des moments premiers

$$\begin{aligned}
 m\bar{x} &= \int x \, dm \\
 m\bar{y} &= \int y \, dm \\
 m\bar{z} &= \int z \, dm
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Avec " $m$ " est la masse totale du corps " $i$ " et  ${}^i\bar{r} = [\bar{x} \ \bar{y} \ \bar{z} \ 1]^T$  représente le vecteur des coordonnées de centre de gravité du corps " $i$ " dans le repère  $R_i$ , nous pouvons écrire :

$$I_i = \begin{bmatrix} \frac{-I_{xx}+I_{yy}+I_{zz}}{2} & I_{xy} & I_{xx} & m\bar{x} \\ I_{xy} & \frac{I_{xx}-I_{yy}+I_{zz}}{2} & I_{yz} & m\bar{y} \\ I_{xz} & I_{yz} & \frac{I_{xx}+I_{yy}-I_{zz}}{2} & m\bar{z} \\ m\bar{x} & m\bar{y} & m\bar{z} & m \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

Ces grandeurs sont soit données par les spécifications du constructeur, soit peuvent calculées à partir des autres grandeurs.

L'énergie cinétique du bras manipulateur est :

$$k = \sum_{i=1}^n k_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{trace} \left\{ \sum_j^n \sum_k^n \left( \frac{\partial {}^0T_i}{\partial q_i} \right) I_i \frac{\partial {}^0T_i^T}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right\} \tag{1.22. a}$$

Puisque la trace d'une somme des matrices est la somme des traces individuelles, nous pouvons interchanger les sommations et l'opérateur de la trace pour obtenir :

$$k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (1.22. b)$$

Où

$$k = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (1.22. c)$$

Où la matrice d'inertie du bras  $M(q) \in R^{n \times n}$  a les éléments génériques définis comme suit :

$$m_{jk}(q) = \sum_{i=1}^n \text{trace} \left\{ \left( \frac{\partial {}^0T_i}{\partial q_i} \right) I_i \frac{\partial {}^0T_i^T}{\partial q_k} \right\} \quad (1.23. a)$$

et  $\dot{q}$  est le vecteur de vitesses articulaires  $\in R^n$

Puisque  $\frac{\partial {}^0T_i}{\partial q_i} = 0$  pour  $j > i$ , nous pouvons écrire :

$$m_{jk}(q) = \sum_{i=\max(j,k)}^n \text{trace} \left\{ \left( \frac{\partial {}^0T_i}{\partial q_i} \right) I_i \frac{\partial {}^0T_i^T}{\partial q_k} \right\} \quad (1.23. b)$$

L'équation (1.22.c) fournit une expression de l'énergie cinétique du bras en fonction des grandeurs connues et des variables articulaires  $q_i$ . Puisque  $m_{jk} = m_{kj}$ , la matrice d'inertie  $M(q)$  est symétrique. L'énergie cinétique est toujours positive, elle s'annule seulement lorsque les vitesses généralisées  $\dot{q}$  deviennent nulles, donc la matrice d'inertie  $M(q)$  est aussi définie positive.

### 2.3.4 L'énergie potentielle

Si le corps  $i$  a une masse  $m_i$  est un centre de gravité  ${}^i\bar{r}$  exprimé dans les coordonnées du repère  $R_i$  l'énergie potentielle du corps est donnée par :

$$U_i = -m_i {}^0g^T {}^0T_i {}^i\bar{r} \quad (1.24)$$

Où  ${}^0g^T$  est le vecteur de gravité exprimé avec les coordonnées de repère de base  $R_0$  ainsi :

$$g^T = [g_x \ g_y \ g_z]$$

L'énergie potentielle totale du bras est alors :



$$U = \sum_{i=1}^n U_i = - \sum_{i=1}^n m_i {}^0g^T {}^0T_i {}^i\bar{r} \quad (1.25)$$

Puisque seule  ${}^0T_i$  est fonction de  $q$  alors  $U$  est fonction seulement de  $q$ .

### 2.3.5 Les équations de mouvement du robot

En utilisant l'expression (1.22.c) de l'énergie cinétique qui est fonction de  $q$  et  $\dot{q}$  et l'expression (1.25) de l'énergie potentielle qui est fonction seulement de  $q$ , les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial K}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = \tau \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \sum_i^n m_{ik}(q) \dot{q}_i + \frac{1}{2} \sum_j^n m_{ik}(q) \dot{q}_j \right\} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_j^n m_{kj}(q) \dot{q}_j \right\} \\ &= \sum_j^n m_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{i,j}^n \frac{d m_{kj}(q)}{dt} \dot{q}_j \\ &= \sum_j^n m_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{i,j}^n \frac{d m_{kj}(q)}{dq_i \dot{q}_i} \dot{q}_j \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial K}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^n \frac{d m_{ij}(q)}{dq_k \dot{q}_i} \dot{q}_j \quad (1.28)$$

Donc les équations de Lagrange peuvent s'écrire :

$$\sum_j^n m_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{i,j}^n \left\{ \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \sum_{i,j}^n \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial U}{\partial q_k} = \tau_k \quad (1.29)$$

Avec :  $k = 1, 2, 3, \dots, n$

En interchangeant les ordres de sommation et profitant de l'avantage de symétrie de  $M(q)$ , nous pouvons démontrer que :

$$\sum_{i,j}^n \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^n \left\{ \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (1.30)$$

Donc

$$\sum_{i,j}^n \left\{ \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{i,j}^n \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (1.31)$$

Les termes

$$C_{ij,k} = \left\{ \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \right\} \quad (1.32)$$

Sont appelés symboles de Christoffel. Nous remarquons que, pour un  $k$  donné, nous avons

$C_{ij,k} = C_{j,i,k}$ . Finalement, nous avons les termes :

$$G_k = \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (1.33)$$

Alors nous pouvons écrire les équations de Lagrange ainsi :

$$\sum_j^n m_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{i,j}^n C_{ijk}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + G_k(q) = \tau_k \quad (1.34)$$

Dans l'équation ci-dessus, il y a trois types de termes. Les premiers comportent la dérivée seconde des coordonnées généralisées. Les seconds peuvent être classifiés en deux types, des termes concernant un produit de type  $q_i^2$  sont appelés centrifuges, par contre, les termes concernant un produit de type  $q_i q_j$ , où  $i \neq j$ , sont appelés des termes de Coriolis. Les troisième type de terme et fonction seulement de  $q$  qui est issu de la dérivation de l'énergie potentielle et qui est appelé vecteur des forces de gravité. Il est habituel d'écrire (1.34) sous la forme matricielle suivante :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (1.35)$$

Où

$\tau$  : vecteur des couples appliqués aux articulations  $\in R^n$  ;

$\ddot{q}$  : vecteur des accélérations articulaires  $\in R^n$  ;

$\dot{q}$  : vecteur des vitesses articulaires  $\in R^n$  ;

$q$  : vecteur des positions articulaires  $\in R^n$  ;

$M(q)$  : matrice d'inertie  $\in R^{n \times n}$  ;

$G(q)$  : vecteur de forces de gravité  $\in R^n$  ;

$C(q, \dot{q})$  : matrice des forces centrifuges et de Coriolis  $\in R^{n \times n}$  dont les éléments sont :

$$C_{kj} = C_{ikj}(q)\dot{q}_i$$

$$= \sum_i^n \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \quad (1.36)$$

## 2.4 Application à un manipulateur à trois degrés de liberté

Pour faire la simulation et illustrer le développement mathématique présenté dans ce mémoire et pour des raisons de simplification de travail, nous avons choisi les trois premiers degrés de liberté du robot Scara [6]. Puisque ceux-ci suffisent pour permettre de positionner l'organe terminal (l'effecteur) en un point quelconque de l'espace atteignable du robot.

Premièrement on représente la configuration articulaire du robot Scara des trois degrés de liberté RRP, ensuite on calcule le modèle dynamique de ce robot.

### 2.4.1 Configuration Scara (RRP)

SCARA est (Selective Compliant Articulated Robot for Assembly) montré dans la figure (2.3), est une configuration très connue. Comme son nom sous-entend il est spécialement conçu pour les opérations d'assemblage. Quoique le robot SCARA a une structure RRP figure 2.4, il est tout à fait différent de la configuration sphérique ni dans l'apparence ni dans le domaine d'application. A la différence du design sphérique qui a  $z_0, z_1, z_2$  mutuellement perpendiculaires, le robot SCARA a  $z_0, z_1, z_2$  parallèles.



**Figure 2.3** robot Scara

Les valeurs des paramètres du robot Scara, utilisées en simulation sont données par le tableau suivant :

**Tableau 2.1** table représentant les valeurs des paramètres du robot Scara en simulation.

### 2.4.2 Transformation des repères

En appliquant les règles de notions de Denavit-Hartenberg présentées dans la section 2.2, nous pouvons représenter facilement le robot manipulateur et ainsi calculer toutes les matrices de passage correspondantes.

**Figure 2.4** la configuration de Denavit-Hartenberg des trois premiers degrés de liberté du robot SCARA (RRP)

articulation $i$	$\alpha$	$d$	$r$	$\theta_{initial}$
1	0	0	0	0
2	0	L1	0	0
3	0	L2	$d_3$	0

**Tableau 2.2** paramètres de Denavit-Hartenberg des trois premiers degrés de liberté du robot Scara

Dans cette section, nous allons calculer le modèle dynamique du robot Scara en se basant sur les formules présentées dans ce chapitre et en utilisant le logiciel de calcul mathématique Maple pour déterminer les éléments de la matrice  $M$  et  $C$  et les éléments de  $G$ . Nous présentons maintenant les matrices de passage d'un repère à un autre.

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & l_1 \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

Et en utilisant les relations  ${}^0T_2 = {}^0T_1 {}^1T_2$  et  ${}^0T_3 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3$ , nous pouvons calculer les matrices suivantes :

$${}^0T_2 = \begin{bmatrix} c_1c_2 - s_1s_2 & -c_1s_2 - s_1c_2 & 0 & c_1l_1 \\ s_1c_2 + c_1s_2 & c_1c_2 - s_1s_2 & 0 & s_1l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} c_1c_2 - s_1s_2 & -c_1s_2 - s_1c_2 & 0 & (c_1c_2 - s_1s_2)l_2 + c_1l_1 \\ s_1c_2 + c_1s_2 & c_1c_2 - s_1s_2 & 0 & (s_1c_2 + c_1s_2)l_2 + s_1l_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

Avec :  $\cos(q_1) = c_1$ ,  $\sin(q_1) = s_1$ ,  $\cos(q_2) = c_2$ ,  $\sin(q_2) = s_2$

### 2.4.3 La matrice d'inertie

Trouvons tout d'abord les matrices pseudo-inertie. Pour des raisons de simplification du calcul et d'absence des valeurs des paramètres, nous considérons que les corps du bras sont

des tiges. Donc tous les produits d'inerties sont nuls, ainsi que les moments d'inertie par rapport aux axes  $x$  et  $y$ .

La matrice de pseudo- inertie du premier corps est :

#### 2.4.4 La matrice des forces centrifuges et de Coriolis

Nous déterminons maintenant les éléments de la matrice des forces centrifuges et de Coriolis suivantes :

$$C_{ij,k} = \left\{ \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \right\}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} c_{11}(q, \dot{q}) & c_{12}(q, \dot{q}) & c_{13}(q, \dot{q}) \\ c_{21}(q, \dot{q}) & c_{22}(q, \dot{q}) & c_{23}(q, \dot{q}) \\ c_{31}(q, \dot{q}) & c_{32}(q, \dot{q}) & c_{33}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

En utilisant les formules de la section (1.36), d'où

### 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la description de la structure géométrique des robots manipulateurs en utilisant la représentation de Denavit-hartenberg, qui est la première étape pour calculer le modèle dynamique pour les robots manipulateurs à chaîne ouverte simple. Ensuite nous avons présenté le formalisme de Lagrange avec lequel nous avons établi l'équation générale de mouvement des robots manipulateurs. Finalement et pour illustrer la méthode présentée pour établir le modèle dynamique des robots manipulateurs rigides, nous avons exploité un robot manipulateur qui va être utilisé dans la simulation pour valider l'étude théorique présentée dans ce mémoire.

Un bras du robot manipulateur en boucle ouverte c'est-à-dire sans commande (sans chaîne de retour) ne peut être stable donc il est sans utilité. Pour exploiter un tel système articulé, nous devons faire appel à des lois rendent ce système stable. Ces lois de commande utilisent parfois quelque éléments du modèle dynamique du robot donc les paramètres doivent être connus. Parmi ces lois de commande, nous présenterons dans le chapitre 3, la commande du couple calculé (computed torque) et la commande point à point.

## Chapitre 3

# *Commandes Dynamiques Classiques Des Robots Manipulateurs Rigides*

### 3.1 Introduction

La commande des robots manipulateurs est devenue un domaine de recherche très important et très vaste. Au cours de ces dernières décennies, plusieurs lois de commandes ont été établies.

Pour qu'un bras d'un robot manipulateur atteigne une position désirée (régulation) ou bien suive une trajectoire pré-définie (poursuite), la loi de commande doit avoir certaines propriétés (robustesse, rapidité, convergence ou stabilité) il y a plusieurs lois de commandes de type P.D ou P.I.D qui ont l'avantage de ne pas exiger ni de la structure ni des paramètres du modèle mais leur ajustement, pour avoir une stabilité asymptotique globale, est parfois très difficile ou même impossible [5]. Une autre loi de commande toujours de type P.D mais avec une compensation de l'effet de gravité ou éventuellement des frottements appelée aussi point-à-point [7]. Cependant cette commande ne peut être utilisée que lorsqu'il s'agit des problèmes de régulation.

Lorsqu'il s'agit des problèmes de poursuite, d'autres lois de commande ont été utilisées à savoir la poursuite de trajectoire basées sur la théorie de Lyapunov et celle sur la linéarisation (ou le couple calculé). Dans ce chapitre, nous allons étudier la loi de commande point-à-point et deux lois de commande qui traitent le problème de poursuite de trajectoire (la loi de commande couple calculé et la loi de Paden et Panja).

## 3.2 Commande point-à-point

### 3.2.1 Introduction

Nous pouvons remarquer de l'application d'une simple loi de commande de type PD, que la dynamique du système n'est pas utilisée. Donc, les non linéarités du système du robot ne sont pas compensés. Alors, en incluant quelques termes dynamiques non linéaires dans la commande PD va probablement donner de bons résultats. En effet, la compensation de la gravité agit comme un correcteur qui compense seulement l'ensemble des forces qui créent le dépassement et le comportement transitoire asymétrique du système.

Pour profiter de ces avantages la commande PD est remplacée par une commande PD plus le terme des forces de gravité. Ce type de loi de commande s'appelle commande point à



point. L'objectif de cette loi de commande consiste à maintenir les positions articulaires du robot manipulateur autour d'une valeur désirée constante  $q_d$  [8].

### 3.2.2. Principe de la commande

La loi de commande par découplage non linéaire consiste à transformer par retour d'état le problème de commande d'un système non linéaire en un problème de commande d'un système linéaire. Dans le cas général le problème de linéarisation par retour d'état d'un système non linéaire est difficile à résoudre et il n'existe pas toujours de solution. Cependant, dans le cas des robots manipulateurs, l'élaboration d'une loi de commande qui linéarise et découple les équations est simplifiée du fait que le modèle dont nous disposons est un modèle inverse. Dans ce qui suit nous allons développer cette méthode, tout d'abord pour le problème de régulation, puis pour le problème de poursuite de trajectoire :

$$\tau = M(q)\tau_0 + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) \quad (3.1)$$

En substituant cette commande dans l'équation dynamique (1.35) nous obtenons l'équation du système en boucle fermée comme suit :

$$M(q)(\ddot{q} - \tau_0) = 0 \quad (3.2)$$

En tenant compte du fait que la matrice  $M(q)$  est régulière, nous aurons  $n$  système linéaires découplés :

$$\ddot{q} = \tau_0 \quad (3.3)$$

Où  $\tau_0$  est une entrée auxiliaire de la commande à designer. Pour résoudre le problème de régulation, un choix possible de  $\tau_0$  est de prendre (voir figure 3.1) :

$$\tau_0 = k_p(q_d - q) - k_v\dot{q} \quad (3.4)$$

Où  $k_p$  et  $k_v$  sont des matrices diagonales de dimension  $(n \times n)$ , déterminées en fonction de la dynamique désirée.

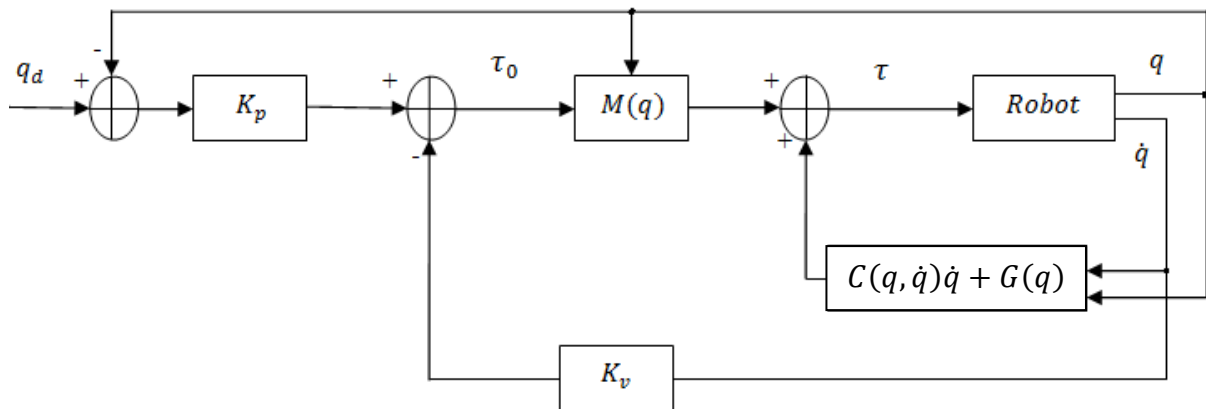
A partir des équations (3.15) et (3.16), nous déduisons que, dans le cas d'une modélisation parfaite et pour des erreurs initiales nulles, l'équation de la boucle fermée du système est donnée par :

$$\ddot{q} + k_v \dot{q} + k_p \tilde{q} = 0 \tag{3.5}$$

qui est une équation linéaire découplée du deuxième ordre.

Où

$$\tilde{q} = q - q_d \tag{3.6}$$



**Figure 3.1** schéma synoptique de commande point à point

La commande définie par l'équation (3.13) et (3.15) comporte deux parties, la première compense les forces centrifuges, les forces de Coriolis, de gravité et de frottement, alors que la deuxième est un retour de vitesse à gains variables.

L'équation d'erreur (3.17) est asymptotiquement stable par un choix convenable des matrices des gains  $k_p$  et  $k_v$ . Pour montrer cela, nous pouvons écrire l'équation d'erreur sous la forme d'espace d'état, avec  $x = (\tilde{q}^T, \dot{q}^T)^T$  :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -k_p & -k_v \end{bmatrix} x = Ax \tag{3.7}$$

$A$  est une matrice stable puisque les matrices  $k_v$  et  $k_p$  sont définies positives. Donc nous pouvons trouver, pour une matrice  $Q > 0$ , une matrice  $P$  symétrique définie Positive satisfaisant :

$$P = P^T > 0$$

$$A^T P + P A = -Q \quad (3.8)$$

Pour démontrer que le point d'équation  $x = 0$  est stable, nous choisissons la fonction candidate de Lyapunov comme suit :

$$V(x) = x^T P x \quad (3.9)$$

Qui est défini positive.

La dérivée par rapport au temps de  $V(x)$  est donnée comme suit :

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \quad (3.10)$$

En remplaçant  $\dot{x}$  par , nous obtenons :

$$\dot{V}(x) = x^T A^T P x + x^T P A x \quad (3.11. a)$$

$$= x^T (A^T P + P A) x \quad (3.11. b)$$

La substitution de l'expression (3.20) dans (3.23.b), donne :

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x \quad (3.12)$$

Qui est une fonction définie négative, ce qui implique que le point d'équilibre  $(\ddot{q}, \dot{q}) = (0, 0)$  est asymptotiquement stable.

### 3.3. Problème de poursuite de trajectoire

#### 3.3.1. Introduction

Le problème de poursuite trajectoire dans l'espace articulaire, consiste à suivre une trajectoire donnée,  $q_d(t)$  et ses dérivées successives  $\dot{q}(t)$  et  $\ddot{q}(t)$  qui décrivent la vitesse désirée et l'accélération désirée respectivement. Il y a plusieurs conception qui peuvent accomplir cet objectif et que nous pouvons les classer en deux groupes :

Commande linéarisante cherche à linéariser et découpler la dynamique du robot. Dans les coordonnées d'espace articulaire, il existe une commande unique qui satisfait ces deux propriétés ; la loi de commande couple calculé qui est un exemple facile d'utilisation de la technique de linéarisation de la dynamique du robot dans l'espace articulaire ; les linéarités tel que les forces de Coriolis et de gravité peuvent être simplement compensées par l'addition de ces forces au signal de commande[8].

Commande basée sur la théorie de Lyapunov qui ne cherche ni la linéarisation ni le découplage de la dynamique du système non linéaire mais elle cherche la stabilité asymptotique (exponentielle). Plusieurs commandes sont proposées dans la littérature.

### 3.3.2. Loi de commande de Paden et Panja [9]

Cette loi de commande appartient à la classe des commandes basées sur la théorie de Lyapunov, elle est donnée par :

$$\tau = M(q)\ddot{q}_d(t) + C(q, \dot{q})\dot{q}_d(t) + G(q) - k_p(q - q_d(t)) - k_v(\dot{q} - \dot{q}_d(t)) \quad (3.13)$$

En remplaçant le couple  $\tau$  du modèle dynamique (1.35) par la loi de commande (3.25), nous obtenons la dynamique suivante du robot manipulateur (voir figure 3.2) :

$$M(q)\ddot{\tilde{q}} + C(q, \dot{q})\dot{\tilde{q}} + k_v\dot{\tilde{q}} + k_p\tilde{q} = 0 \quad (3.14)$$

Où  $\tilde{q} = q - q_d(t)$ ,  $\dot{\tilde{q}} = \dot{q} - \dot{q}_d(t)$ ,  $\ddot{\tilde{q}} = \ddot{q} - \ddot{q}_d(t)$  désignent respectivement l'erreur de poursuite en position, en vitesse et en accélération.

L'expression de l'erreur de poursuite en accélération est donnée par :

$$\ddot{\tilde{q}} = -M^{-1}(q)(C(q, \dot{q})\dot{\tilde{q}} + k_v\dot{\tilde{q}} + k_p\tilde{q}) \quad (3.15)$$

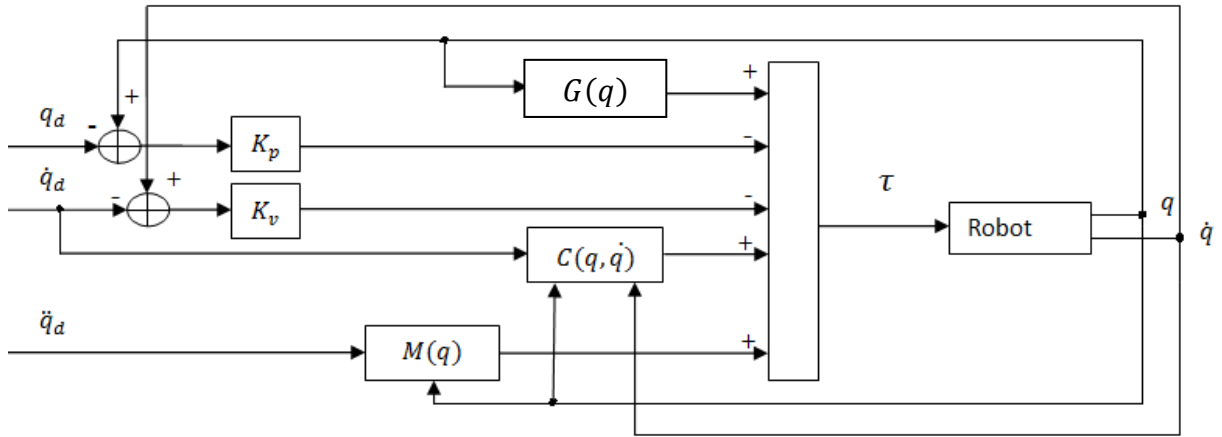


Figure 3.2 schéma synoptique de la commande de Paden et Panja

La stabilité du système bouclé est prouvée en prenant comme fonction de Lyapunov, définie positive :

$$V(\dot{\tilde{q}}, \tilde{q}, t) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M(\tilde{q} + q_d(t)) \dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T k_p \tilde{q} \quad (3.16)$$

dont la dérivée temporelle le long des trajectoires du système (3.26) est donnée par :

$$\dot{V}(\dot{\tilde{q}}, \tilde{q}, t) = \dot{\tilde{q}}^T M(\tilde{q} + q_d(t)) \ddot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T \dot{M}(\tilde{q} + q_d(t)) \dot{\tilde{q}} + \dot{\tilde{q}}^T k_p \tilde{q} \quad (3.17)$$

En substituant l'expression de  $\ddot{\tilde{q}}$  donnée par la relation (3.29), nous obtenons :

$$\dot{V}(\dot{\tilde{q}}, \tilde{q}, t) = \dot{\tilde{q}}^T k_v \dot{\tilde{q}} + \dot{\tilde{q}}^T \dot{M}(\tilde{q} + q_d(t)) - 2C(\tilde{q} + q_d(t), \dot{\tilde{q}} + \dot{q}_d(t)) \dot{\tilde{q}} \quad (3.18)$$

En exploitant la propriété 1 de la matrice  $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ , la relation (3.30) devient :

$$\dot{V}(\dot{\tilde{q}}, \tilde{q}, t) = \dot{\tilde{q}}^T k_v \dot{\tilde{q}} \leq 0 \quad (3.19)$$

Les trajectoires du système bouclé sont bornées, en utilisant le lemme de Barbalat nous pouvons montrer que le point d'équilibre  $(\dot{\tilde{q}}, \tilde{q}) = (0,0)$  est globalement asymptotiquement stable. En effet, il est clair que si :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{V}(\dot{\tilde{q}}, \tilde{q}, t) = 0$ , alors,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{\tilde{q}}(t) = 0$ . Il nous reste à montrer que la  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{q}(t) = 0$ , et si nous montrons que  $\ddot{\tilde{q}}(t)$  est uniformément continue ( $\ddot{\tilde{q}}(t)$  est bornée), alors d'après le lemme de Barbalat,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ddot{\tilde{q}}(t) = 0$ . Ainsi, en développant la dérivée temporelle de la relation (3.31), nous remarquons que  $\ddot{\tilde{q}}(t)$  est bornée (donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ddot{\tilde{q}}(t) = 0$ ). En remplaçant  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{\tilde{q}}(t) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ddot{\tilde{q}}(t) = 0$  dans la

relation (3.31), nous pouvons conclure que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{q}(t) = 0$  (car  $k_p \in R^{n \times n} > 0$ ). Le seul point d'équilibre globalement asymptotiquement stable est donc  $(\ddot{q}, \dot{q}) = (0, 0)$ .

### 3.4. Commande couple calculé (Computed Torque Control)

#### 3.4.1. Introduction

La commande couple calculé a été développée au début des années soixante dix, dite aussi linéarisante puisqu'elle est considérée comme une application spéciale de la linéarisation en boucle fermée des systèmes non linéaires. Donc elle repose sur l'annulation des termes non linéaires et le découplage de chaque segment [4], [6]. Son utilisation pour les robots manipulateurs dépend de l'inversion de quelques termes du modèle dynamique du robot, et pour cette raison elle s'appelle aussi la dynamique inverse [10].

#### 3.4.2. Loi de commande

Pour linéariser et découpler chaque segment du robot, la loi de commande suivante a été proposée : (figure 3.1)

$$\tau = M(q)\tau_0 + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (3.20)$$

En appliquant cette loi de commande au modèle dynamique du robot donné par l'équation (2.37), nous aurons l'équation en boucle fermée suivante :

$$M(q)(\ddot{q} - \tau_0) = 0 \quad (3.21)$$

En prenant en considération que la matrice  $M(q)$  est régulière (invertible), nous obtenons "n" systèmes linéaires découplés :

$$\ddot{q} = \tau_0 \quad (3.22)$$

Où  $\tau_0$  est un terme auxiliaire de la commande avec une unité d'accélération, qui peut être défini par un terme de compensation dynamique linéaire  $k(p)$  en fonction de  $p$  de type P.I.D ou P.D et est exprimé ainsi :

$$\tau_0 = \ddot{q}_d - M(q)\tilde{q} \quad (3.23)$$

avec  $\tilde{q} = q - q_d$  est l'erreur de poursuite de position et  $q$  et  $q_d \in R^n$  sont respectivement la position réelle et désirée où  $p$  est l'opérateur de Laplace.

En substituant l'expression de  $\tau_0$  par l'équation (2.4), l'équation (2.3) devient

$$\ddot{q} = \ddot{q}_d - k(p) \tilde{q}$$

$$\ddot{\tilde{q}} + k(p) \tilde{q} = 0 \tag{3.24}$$

Le choix typique de  $k(p)$  est comme suit :

$$k(p) = k_v p + k_p \tag{3.25}$$

C'est-à-dire un compensateur proportionnel-dérivé (P.D), où  $p$  est l'opérateur de Laplace, les équations (3.5) et (3.6) donnent l'équation d'erreur dynamique du second ordre suivante :

$$\ddot{\tilde{q}} + k_v \dot{\tilde{q}} + k_p \tilde{q} = 0 \tag{3.26}$$

Où  $k_p$  et  $k_v$  sont des matrices diagonales définies positives appartenant à  $\mathbb{R}^{n \times n}$  donc le système en boucle fermée devient linéaire découplé. Ces matrices sont choisies d'une façon appropriée pour avoir un temps convenable de convergence de l'erreur de poursuite.

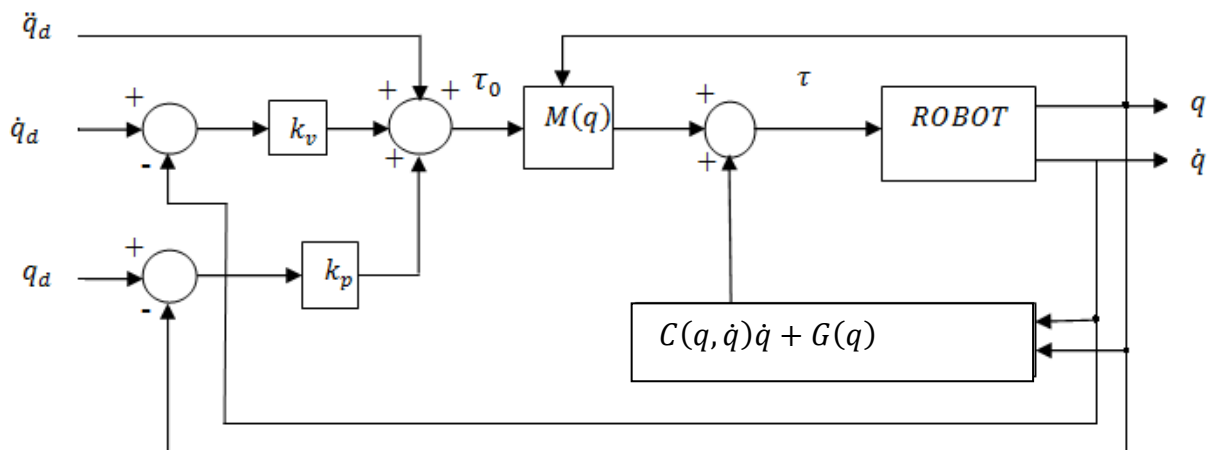


Figure 3.3 schéma synoptique de la commande du couple calculé type PD

### 3.4.3. Etude de la stabilité

L'équation de l'erreur (3.7) est asymptotiquement stable par un choix convenable des matrices  $k_p$  et  $k_v$ . Pour montrer cela, nous pouvons réécrire le système donné par l'équation (3.7) sous forme d'espace d'état-à-dire [6] :

$$\dot{x} = A(x) \quad (3.27)$$

Où  $x$  est un vecteur défini  $\in R^{2n}$  comme suit  $x^T = [\tilde{q}^T, \dot{\tilde{q}}^T]$  et  $\dot{x}$  est sa dynamique  $\in R^{2n}$  défini ainsi  $\dot{x}^T = [\dot{\tilde{q}}^T, \ddot{\tilde{q}}^T]$  et  $A$  matrice  $\in R^{2n \times 2n}$  défini par :

$$A = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -k_p & -k_v \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Nous pouvons remarquer que  $A$  est stable puisque les matrices  $k_v$  et  $k_p$  sont définies positives. Donc nous pouvons trouver, pour une matrice  $Q > 0$ , une matrice  $P$  symétrique définie  $P = P^T > 0$  positive satisfaisant :

$$A^T P + P A = -Q \quad (2.28)$$

Choisissons une fonction candidate de Lyapounov de la forme suivante :

$$V(x) = x^T P x \quad (3.29)$$

qui est défini positive.

La dérivée de  $V(x)$  est donnée comme suit :

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \quad (3.30. a)$$

En remplaçant  $\dot{x}$  par , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T A^T P x + x^T P A x \\ &= x^T (A^T P + P A) x \end{aligned} \quad (3.30. b)$$

En utilisant l'expression (3.10), la dérivée de  $\dot{V}$  devient

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x \quad (3.31. c)$$

qui est une fonction définie négative. Donc, l'équation (3.26) est globalement asymptotiquement stable. C'est-à-dire pour n'importe position initiale, l'erreur de poursuite va converger asymptotiquement.

La commande du couple calculé est une bonne approche pour commander les robots manipulateurs lorsque les paramètres sont parfaitement connus et elle nécessite un calculateur



suffisamment puissant. Cependant, les paramètres du robot sont toujours connus partiellement donc les performances du système n'atteignent jamais l'idéal.

### 3.5. Application à un robot manipulateur à trois degrés de liberté

#### 3.5.1. Introduction

Pour simuler ces lois de commande avec le modèle dynamique du robot manipulateur Scara obtenu dans le deuxième chapitre, nous avons recouru au logiciel Matlab avec l'interface Simulink qui nous facilitera l'ajustement des gains des différentes matrices.

#### 3.5.2. Résultat de simulation

Les simulations de ce chapitre ont été faites en boucle fermée avec différentes loi de commande à savoir la commande point à point la commande de poursuite trajectoire et aussi la commande de couple calculé. Nous allons faire une comparaison entre ces trois lois de commande, citées ci-dessus en tenant compte l'analyse de certaines performances, robustesse, temps de convergence ou rapidité.

Le modèle utilisé dans la simulation est : (voir titre 2.4)

Les éléments génériques  $m_{ij}$  de la matrice d'inertie sont :

Les éléments génériques  $C_{ij}$  de la matrice de force centrifuges et de Coriolis sont :

$$C_{33}(q, \dot{q}) = 0$$

Le vecteur de gravité est :

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_3 \end{bmatrix}$$

Les positions désirées utilisées dans la simulation pour la commande point à point sont :

$$q_{d1}(t) = 1 \text{ rad}$$

$$q_{d2}(t) = 1 \text{ rad}$$

$$q_{d3}(t) = 0,2 \text{ rad}$$

Les trajectoires désirées utilisées dans la simulation pour la commande poursuite trajectoire et la commande couple calculé sont :

$$q_{d1}(t) = 2 + \sin(3t) - \cos(4t) \text{ rad}$$

$$q_{d2}(t) = 1.5 + \sin(4t) - \cos(0.5t) \text{ rad}$$

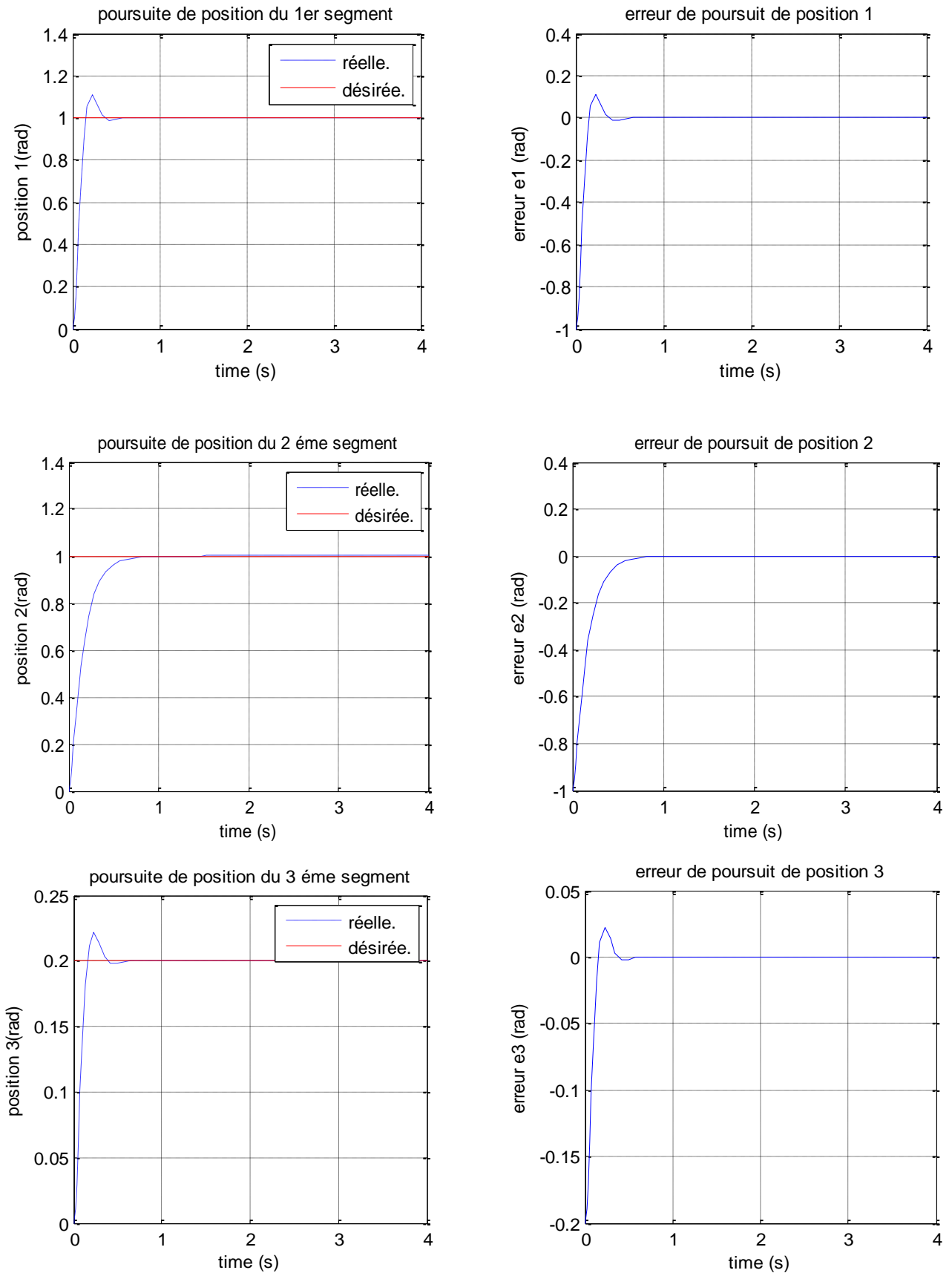
$$q_{d3}(t) = 2 + \sin(4.5t) - \cos(2.5t) \text{ rad}$$

Les paramètres convenable obtenus par simulation par exemple pour la commande du couple calculé est les suivants :

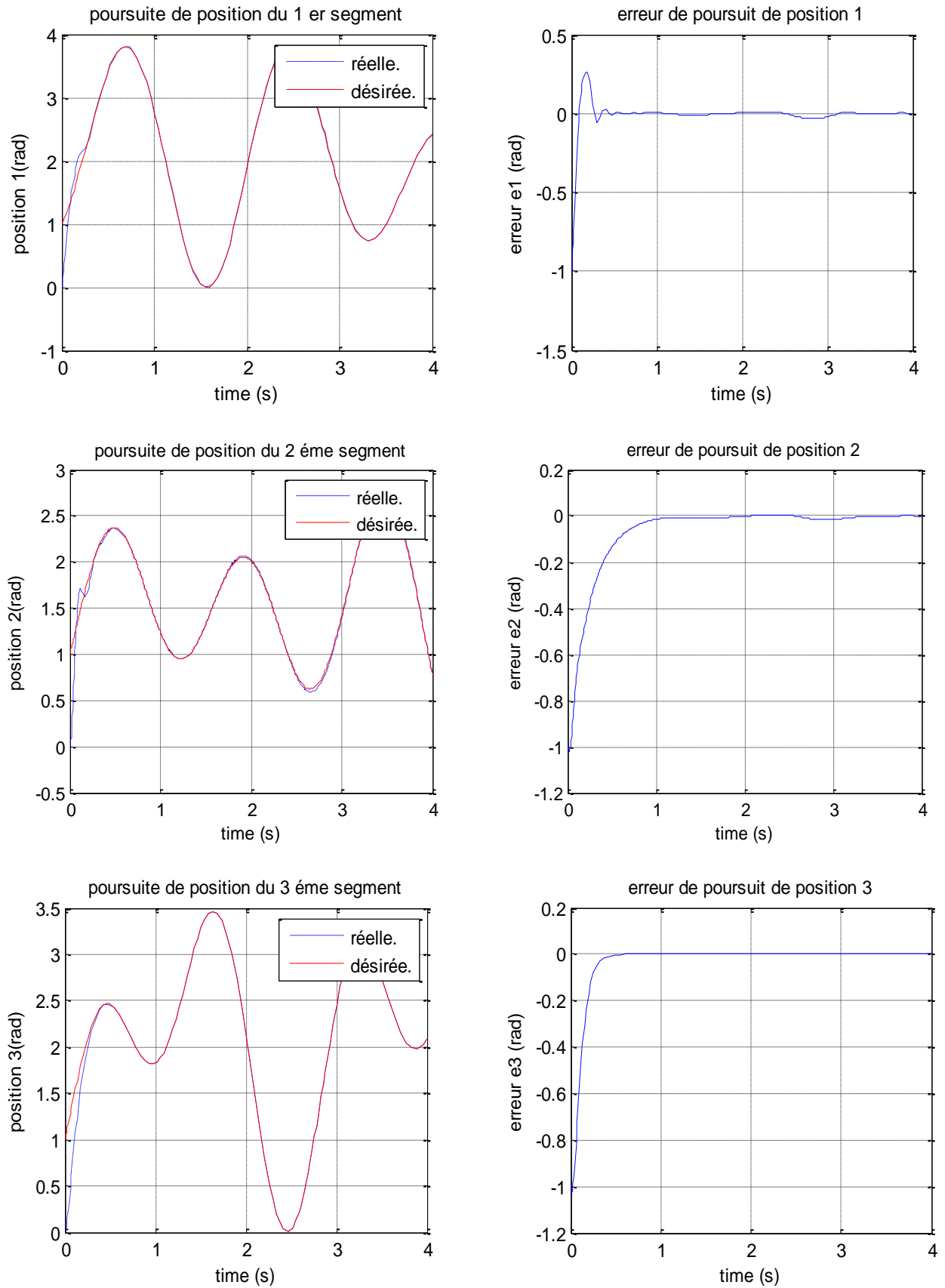
$$k_p = \begin{bmatrix} 1155 & 0 & 0 \\ 0 & 900 & 0 \\ 0 & 0 & 1960 \end{bmatrix}; k_v = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix}$$

Nous remarquons que les valeurs des gains  $k_p$  et  $k_v$  sont acceptables et peuvent être réalisables.

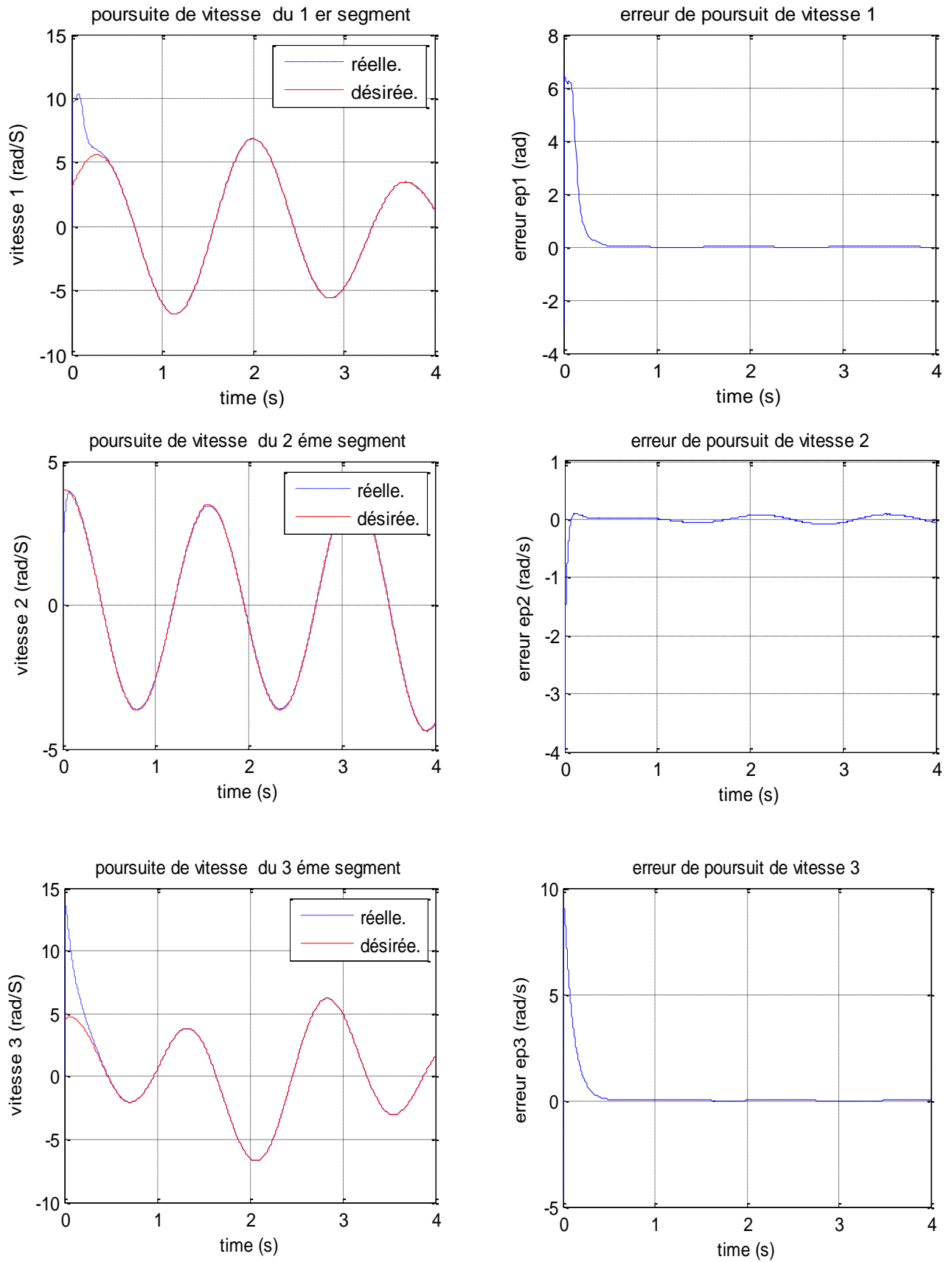
Les figures (3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8) sont issues des simulations faites en boucle fermée avec les trois lois de commande, qui sont la commande point à point, et la poursuite de trajectoire de Padan et Panja et la commande de couple calculé dans le cas où les paramètres sont considérés connus parfaitement (sans perturbation extérieure) et les variables de sorties ne contiennent aucun bruit de mesure. Les simulations dans ce cas, considéré comme le cas idéal, sont effectuées pour étudier, l'influence de ces conditions sur les performances de chaque loi de commande.



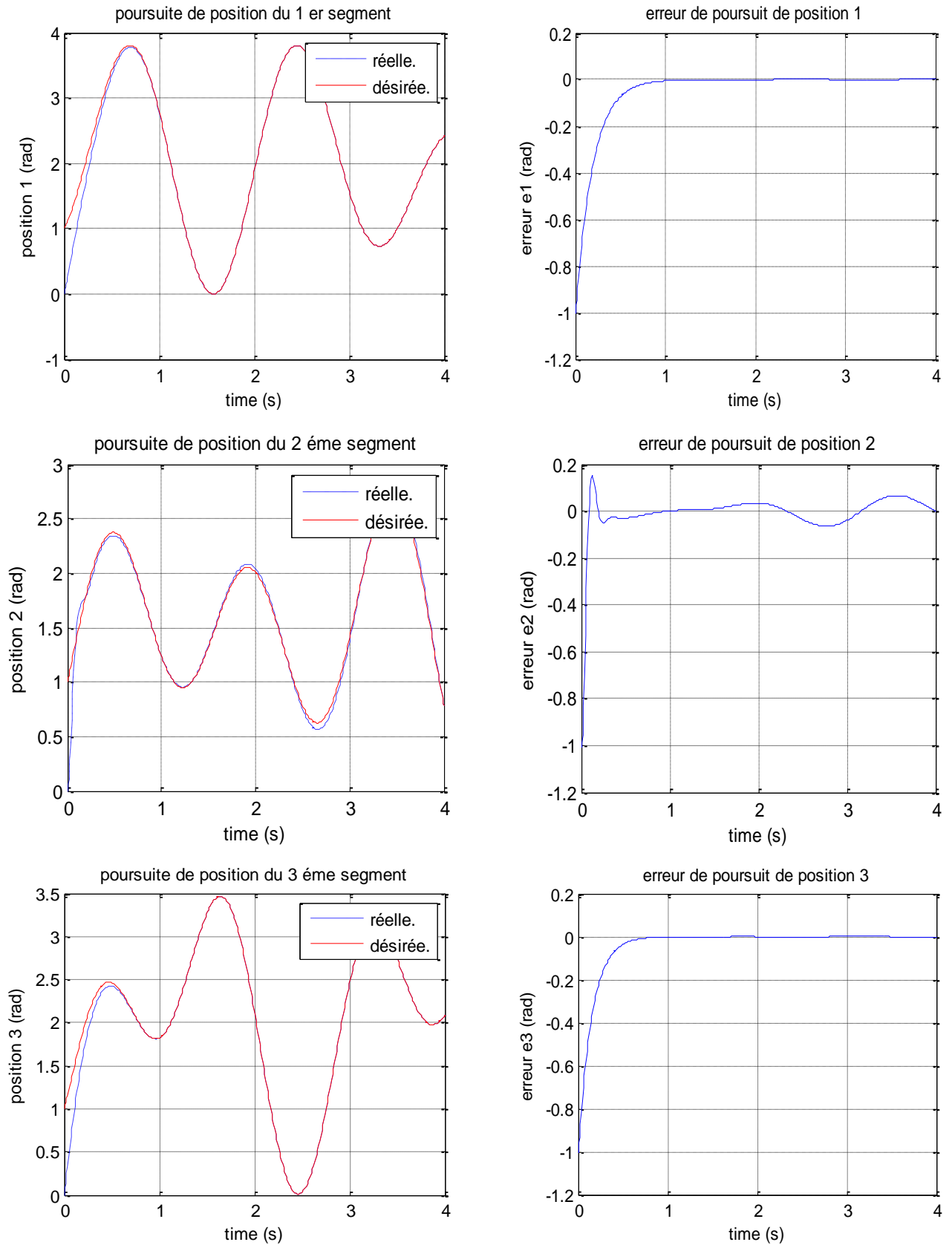
**Figure 3.4** les poursuites de trajectoire de position et des erreurs de position avec la loi de commande point à point.



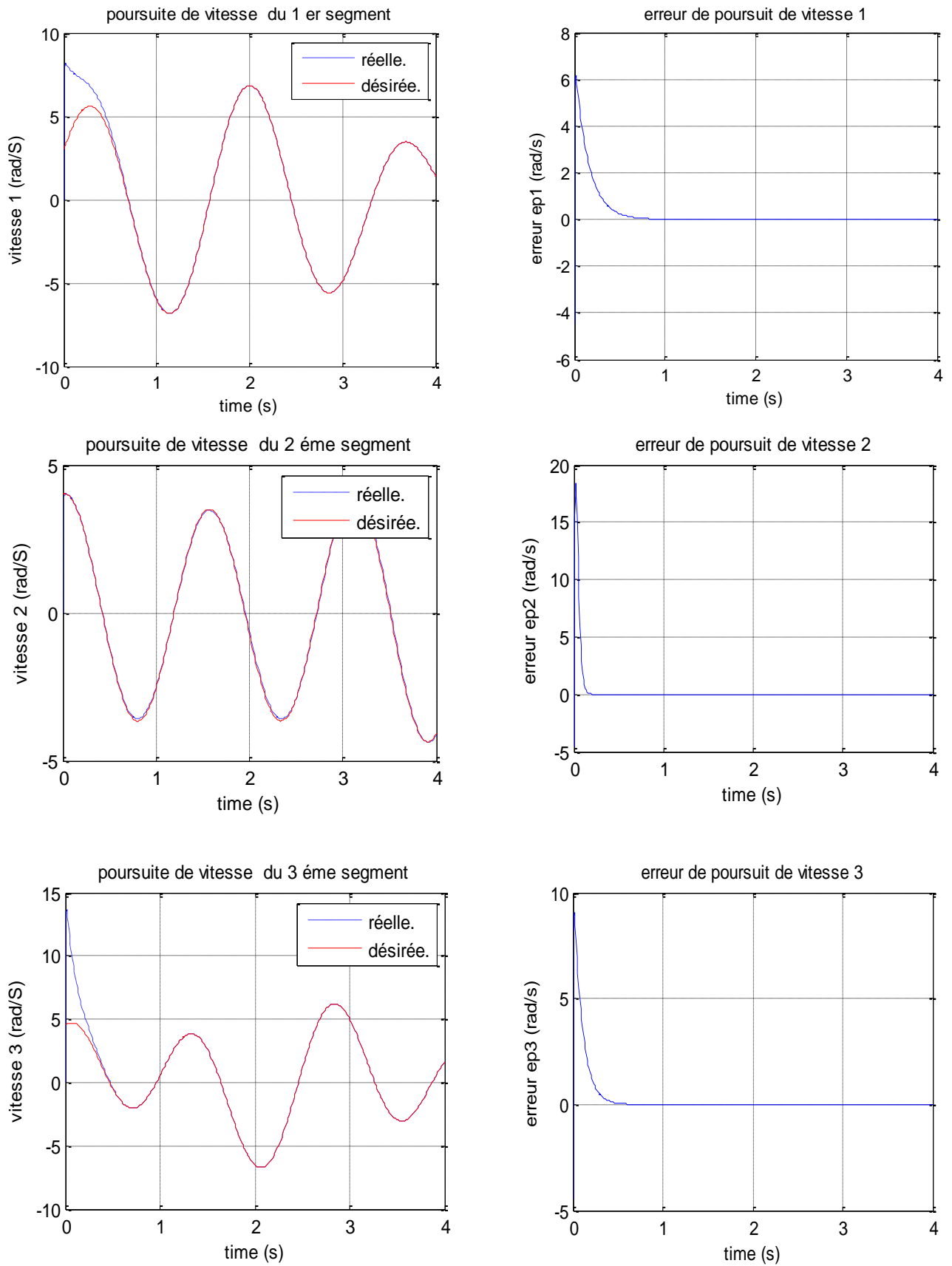
**Figure 3.5** les poursuites de trajectoire de position et des erreurs de position avec la loi de commande de Paden et Panja.



**Figure 3.6** les poursuites de trajectoire de vitesse et des erreurs de vitesse avec la loi de commande de Paden et Panja.



**Figure 3.7** les poursuites de trajectoire de position et des erreurs de position avec la loi de commande couple calculé.



**Figure 3.8** les poursuites de trajectoire de vitesse et des erreurs de vitesse avec la loi de commande couple calculé.

Il est clair d'après les figures précédentes que les performances de poursuite de ces lois de commande donnent des bons résultats, c'est-à-dire la convergence des erreurs de poursuite du système à zéro est garanti à cause de l'absence des perturbations externes.

### 3.6. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté trois lois de commandes dynamiques classiques appliquées aux robots manipulateurs rigides, soient celle qui traitent le problème de régulation, telle que la commande point à point, soient celles qui traitent le problème de poursuite de trajectoire, telle que la commande linéarisante (couple calculé de type PD), et la commande de Paden et Panja. A la fin du chapitre, nous avons fait des applications de ces lois de commandes au modèle dynamique du robot manipulateurs rigides SCARA, où nous avons validé notre étude théorique.

Les commandes étudiées dans ce chapitre ne sont efficaces que dans le cas où, les paramètres du système à commander (robot) sont bien définis. Dans le cas contraire, nous allons présenter une loi de commande adaptative de type gradient, qui prend en considération les variations des paramètres, cette loi de Commande est conçue à partir de la loi de commande couple calculer



## **Chapitre 4**

### ***Commande Adaptative Des Robots Manipulateurs Rigides***

## 4.1. Commande adaptative du couple calculé

### 4.1.1. Introduction

Deux types de commandes adaptatives basées sur le couple calculé à savoir la commande adaptative nécessitant la mesure de l'accélération et la bornitude de la matrice d'inertie estimée et la commande adaptative nécessitant seulement la bornitude de la matrice d'inertie estimée. Dans cette section nous présentons une loi de commande qui nécessite la mesure de l'accélération.

Avec la loi de commande qui nécessite la mesure de l'accélération, nous présentons une loi de commande de type gradient. Puis nous analysons la stabilité en boucle fermée et la convergence de l'erreur de poursuite quand le vecteur des paramètres estimé est borné et finalement nous allons voir la condition de la convergence de l'erreur paramétrique et la notion de la persistance de l'excitation.

## 4.2. Algorithme du gradient

### 4.2.1 Définition

Supposons que

$$y(t) = \Psi(t)\theta(t) \quad (4.1)$$

Définissons l'erreur :

$$\begin{aligned} e(t) &= y(t) - \Psi(t)\hat{\theta}(t) \\ &= \Psi(t)\theta(t) - \Psi(t)\hat{\theta}(t) \\ &= \Psi(t)\tilde{\theta}(t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Avec :

$$\tilde{\theta}(t) = \theta(t) - \hat{\theta}(t) \quad (4.3)$$

Soit :

$$V_1(t) = \left[ e \left( \tilde{\theta}(t) \right) \right]^2 \quad (4.5)$$

Alors en dérivant  $V_1(t)$ , nous obtenons :

$$\dot{V}_1(t) = \frac{\partial e^T(t)e(t)}{\partial \tilde{\theta}(t)} \dot{\tilde{\theta}}(t) \quad (4.6)$$

Pour que  $e^2(t)$  décroît le plus possible, il faut choisir  $\dot{\tilde{\theta}}(t)$  de la forme :

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = -\frac{\Gamma}{2} \left[ \frac{\partial e^T(t)e(t)}{\partial \tilde{\theta}(t)} \right]^T \quad (4.7)$$

Où  $\Gamma$  est une matrice  $\in R^{r \times r}$  et  $r$  est le nombre de paramètres à estimer.

De l'équation (4.2), nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e^T(t)e(t)}{\partial \tilde{\theta}(t)} &= 2 \frac{\partial e(t)^T}{\partial \tilde{\theta}(t)} e(t) \\ &= 2 \Psi^T(t)e(t) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Finalement l'algorithme du gradient en continu est donné par :

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = -\Gamma \Psi^T(t)e(t) \quad (4.9)$$

### 4.2.2. Propriétés de convergence

L'algorithme du gradient possède les propriétés de convergence suivantes :

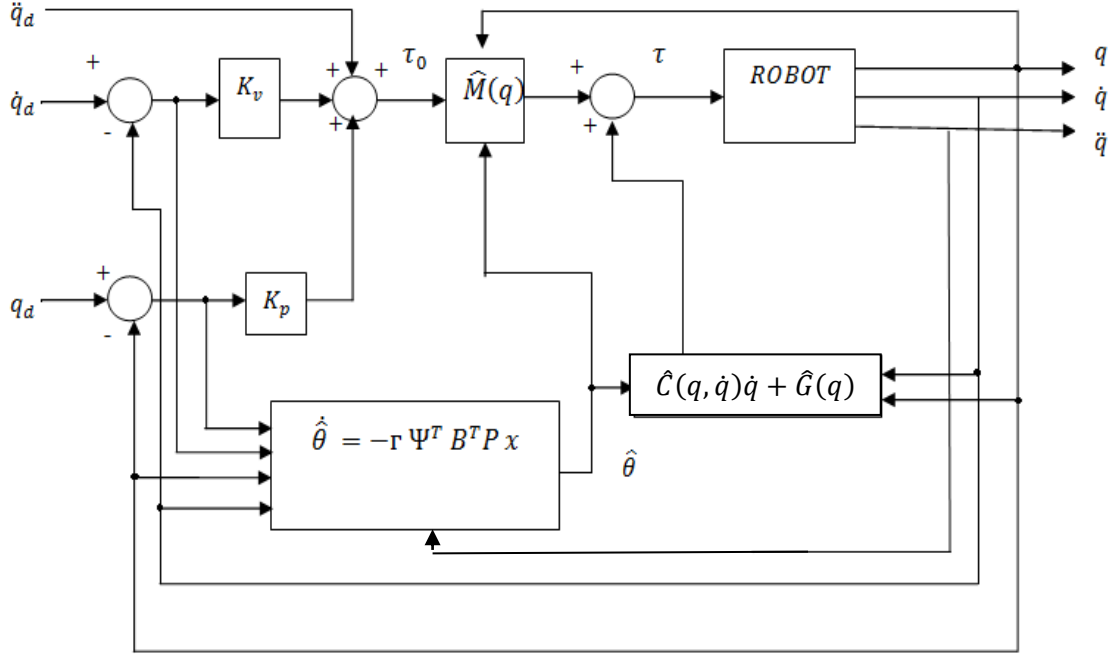
1.  $\|\tilde{\theta}\|$  est non croissante ;
2.  $e \in L_2$  c'est-à-dire  $\int_0^t e^2(t)dt < \infty, \forall t \in R^+$  ;

### 4.3. Loi de commande Adaptative basé sure le couple calculé de type gradient

Puisque nous allons utiliser les paramètres estimés, la loi de commande sera constituée par des quantités estimées. Alors la loi de commande exprimée par (3.1) sera remplacée par l'expression suivante (voire figure 4.1)

$$\tau = \hat{M}(q)\tau_0 + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q) \quad (4.10)$$

Où  $\hat{M}$ ,  $\hat{C}$ ,  $\hat{G}$  sont les estimés respectivement de la matrice d'inertie, la matrice des forces centrifuges et de Coriolis, le vecteur de gravité. Avec  $\tau_0 = \ddot{q}_d - K_v \dot{\tilde{q}} - K_p \tilde{q}$ . où  $\tilde{q} = q - q_d$  et  $\dot{\tilde{q}} = \dot{q} - \dot{q}_d$  sont respectivement l'erreur de position, de vitesse et d'accélération[4].



**Figure 4.1** schéma synoptique de la commande adaptative du couple calculé avec mesure de l'accélération.

La paramétrisation linéaire donne :

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta \quad (4.11)$$

$$\hat{M}(q)\tau_0 + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\hat{\theta} \quad (4.12)$$

En remplaçant le couple  $\tau$  par l'expression (4.1) nous aurons

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \hat{M}(q)\tau_0 + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q) \quad (4.13)$$

En ajoutant et en retranchant  $\hat{M}(q)\ddot{q}$  du deuxième membre de l'équation (4.4), nous obtenons

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \hat{M}(q)(\tau_0 - \ddot{q}) + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q) \quad (4.14)$$

En utilisant l'expression (4.2) et (4.3), l'expression (4.5) devient :

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\hat{\theta} - Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta = \hat{M}(q)(\ddot{q} - \tau_0)$$

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\tilde{\theta} = \widehat{M}(q)(\ddot{q} + k_v\dot{\tilde{q}} + k_p\tilde{q}) \quad (4.15)$$

D'où l'erreur dynamique :

$$\ddot{q} + k_v\dot{\tilde{q}} + k_p\tilde{q} = \widehat{M}^{-1}(q)Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\tilde{\theta} \quad (4.16)$$

Où  $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$  est l'erreur paramétrique.

Nous pouvons écrire le système (4.7) sous forme d'espace d'état ainsi :

$$\dot{x} = Ax + B\Psi\tilde{\theta} \quad (4.17)$$

où  $\Psi = \widehat{M}^{-1}(q)Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\tilde{\theta}$  et  $x$  est l'erreur de poursuite qui est donnée par :

$$x = \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$\text{et } b = \begin{bmatrix} 0_n \\ I_n \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -k_p & -k_v \end{bmatrix}$$

avec  $I_n$  est une matrice  $\in R^{n \times n}$  et  $0_n$  est une matrice des zéros  $\in R^{n \times n}$ .

Après avoir formé le système d'erreur de poursuite, nous utilisons l'analyse de la stabilité de Lyapunov pour montrer que cette erreur est asymptotiquement stable avec le choix convenable de la loi d'adaptation.

Tout d'abord, nous choisissons une fonction candidate de Lyapunov définie positive ainsi :

$$V = x^T P x + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \quad (4.19)$$

Où  $P$  est une matrice symétrique constante définie positive  $\in R^{2n \times 2n}$  et  $\Gamma$  est une matrice diagonale définie positive  $\in R^{r \times r}$ . C'est-à-dire  $\Gamma$  peut s'écrire ainsi :

$$\Gamma = \text{diag} (y_1, y_2, \dots, y_r)$$

ou  $r$  est le nombre des paramètres à estimer du robot et  $y_i$  sont des constantes scalaires positives à trouver par simulation.

La dérivation de la fonction de Lyapunov (4.10), par rapport au temps, donne.

$$\dot{V} = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x + 2\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \quad (4.20)$$

en substituant  $\dot{x}$  par l'expression (4.17), nous obtenons

$$\begin{aligned}\dot{V} &= x^T P(Ax + B\Psi\tilde{\theta}) + (Ax + B\Psi\tilde{\theta})^T Px + 2\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \\ &= -x^T Qx + 2\tilde{\theta} \left( \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} + \Psi^T B^T Px \right)\end{aligned}$$

où  $Q$  est une matrice symétrique définie positive satisfaisant l'équation de Lyapunov

$$A^T P + PA = -Q$$

Pour que  $\dot{V}$  soit au moins semi définie négative, qui est la condition de la stabilité, la loi d'adaptation doit s'écrire comme suite :

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma \Psi^T B^T Px \quad (4.21)$$

donc l'expression de  $\dot{V}$  devient

$$\dot{V} = -x^T Qx$$

Nous avons d'après l'expression de l'erreur paramétrique  $\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\hat{\theta}}$  puisque  $\dot{\theta} = 0$  donc l'expression (4.21) s'écrit ainsi :

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma \Psi^T B^T Px \quad (4.22)$$

### 4.3.1. Analyse de la stabilité

Dans cette section, nous allons étudier le type de la stabilité de l'erreur de poursuite puisque  $\dot{V}$  est semi définie négative et  $V$  est minorée par zéro,  $V$  reste majorée dans l'intervalle de temps  $[0, \infty)$  ; donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V = V_\infty$$

où  $V_\infty$  est un scalaire positif. Puisque  $V$  est majorée, il est évident à partir de la définition de  $V$  donnée par (4.19) que  $x$  et  $\tilde{\theta}$  sont bornés.

Maintenant, à partir de l'équation dynamique du robot (2.35), il est clair que

$$\ddot{q} = M^{-1}(q)(\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q))$$

donc  $\ddot{q}$  est borné puisque  $\ddot{q}$  et  $\tau$  dépendent seulement des grandeurs bornées  $q$  et  $\dot{q}$  et  $\tilde{\theta}$ . Alors

$\dot{x}$  est bornée. Donc, nous pouvons conclure à partir de (4.20) que  $\dot{V}$  est borné. Nous avons maintenant  $V$  est minorée par 0,  $\dot{V}$  est indéfini négative et  $\dot{V}$  est borné alors en utilisant le lemme de Barbalat suivant :

Soit  $f(t)$  une fonction dérivable de  $t$

Première version : si  $\dot{f}(t)$  est uniformément continue et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) < \infty$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{f}(t) = 0$$

Deuxième version : si  $f(t) \geq 0$ ,  $\dot{f}(t)$  est bornée alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{f}(t) = 0$

Donc nous aurons :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{V} = 0$$

Ce qui implique  $x \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  c'est-à-dire  $\tilde{q} \rightarrow 0$  et  $\dot{\tilde{q}} \rightarrow 0$  donc l'erreur de poursuite  $\tilde{q}$  est asymptotiquement stable.

### 4.3.2. Convergence de l'erreur paramétrique

A partir de la loi d'adaptation présentée par l'équation (4.22), nous pouvons conclure que l'erreur paramétrique est borné s'il existe toujours l'inverse de  $\widehat{M}(q)$ . Pour analyser la convergence de l'erreur paramétrique, nous allons considérer le système complet (4.17) et (4.22) ainsi :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B\Psi \\ -\Gamma\Psi B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

où  $\Psi = \widehat{M}^{-1}(q)Y$ . Plusieurs chercheurs ont étudié la stabilité asymptotiquement de (4.23). pour que ce système soit uniformément asymptotiquement stable il faut que le système linéaire  $(A, B, B^T P)$  soit réel strictement positif et  $\Psi$  satisfaire la condition de la persistance de l'excitation suivante :

$$\alpha I_r \leq \int_{t_0}^{t_0+p} \Psi^T \Psi dt \leq \beta I_r \quad (4.24)$$

Pour tous  $t_0$  où  $\alpha$  et  $\beta$  et  $p$  sont positifs. La condition signifie (4.24) que l'intégral de  $\Psi^T \Psi$  doit être définie positive et bornée sur tout l'intervalle de longueur  $p$ . Puisque  $\widehat{M}(q)$  est

inversible et bornée et définie et  $Y$  est bornée alors l'inégalité (4.24) est satisfaite s'il existe  $y > 0$  tel que :

$$yI_r \leq \int_{T_0}^{T_0+p} YY^T dt \quad (4.25)$$

est satisfait.

Cette condition de la persistance de l'excitation vérifiée si les trajectoires désirées satisfont :

$$yI_r \leq \int_{T_0}^{T_0+p} Y_d Y_d^T dt$$

où  $Y_d$  est le régresseur  $Y$  évalué le long des variables désirées.

#### 4.4. Résultat de simulation

La loi de command adaptative présentée dans ce chapitre, est simulée avec le modèle dynamique du robot manipulateur présenté dans le deuxième chapitre. Le logiciel utilisé est le logiciel Matlab.

Avec l'utilisation de cette loi de commande, nous avons supposé que les valeurs des longueurs des segments  $l_1$ ,  $l_2$  et la constante de gravité  $g$  sont connues. Les paramètres considérés comme inconnus dans ce chapitre, sont les masses des segments  $m_1$ ,  $m_2$ , et  $m_3$ . Donc le vecteur des paramètres peut s'écrire ainsi :

$$\theta = [m_1 \ m_2 \ m_3]^T \quad (4.26)$$

Les trajectoires utilisées dans la simulation pour les deux premières articulations sont de la forme :

$$q_{d1}(t) = \sin(t) - \cos(t) \text{ rad}$$

$$q_{d2}(t) = \sin(t) - 0.5 \cos(t) \text{ rad}$$

$$q_{d3}(t) = 1.3 t \text{ rad}$$



Pour cette loi de commande, le régresseur utilisé est le suivant :

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{22} & y_{33} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Où

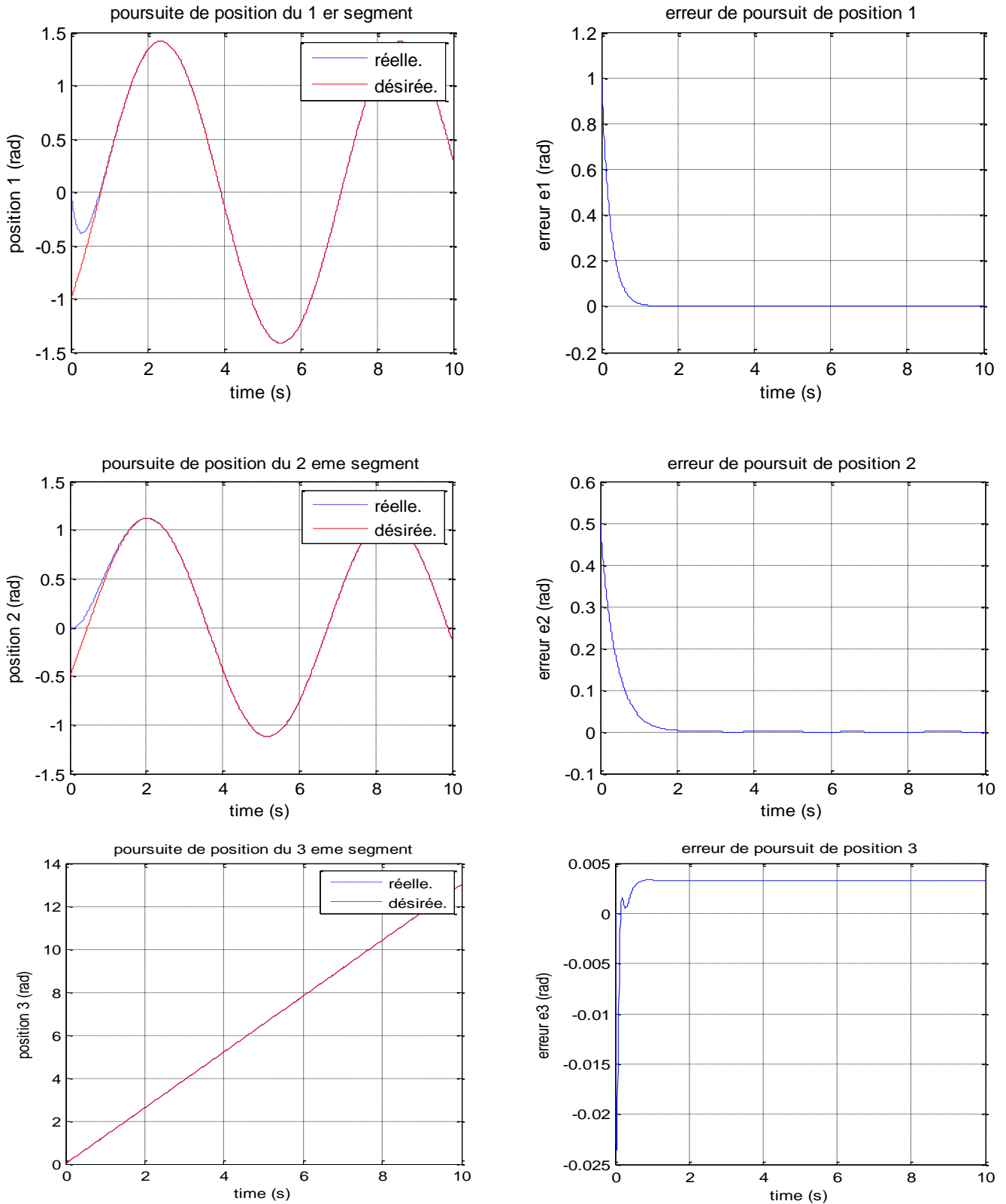
$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta$$

Avec logiciel de calcul mathématique Maple, on peut déterminer les éléments du vecteur des couples appliqués aux articulations :

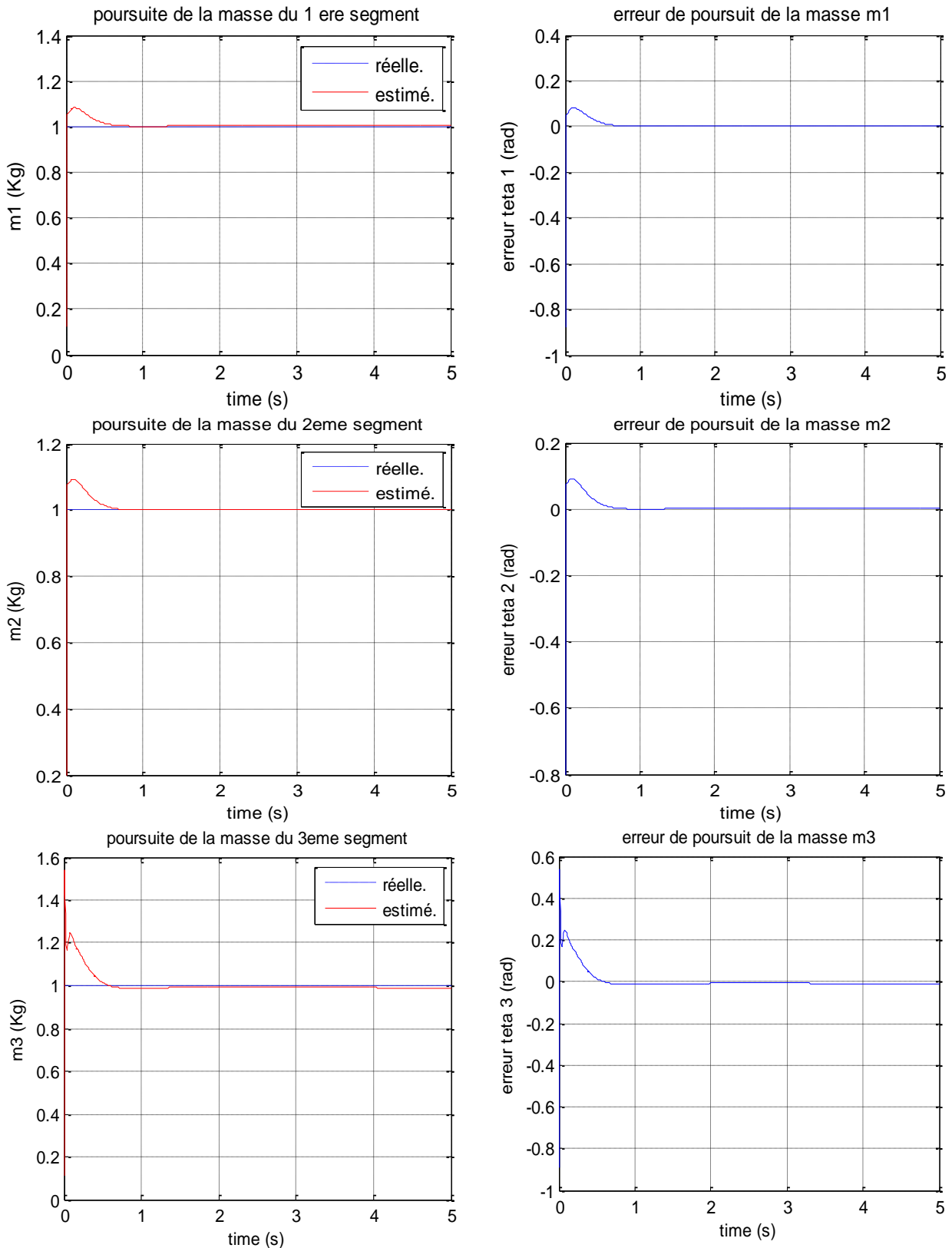
et les paramètres obtenus par simulation sont :

$$k_p = \begin{bmatrix} 1374.5 & 0 & 0 \\ 0 & 483 & 0 \\ 0 & 0 & 70 \end{bmatrix}; k_v = \begin{bmatrix} 320 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}; \Gamma = \begin{bmatrix} 96.5 & 0 & 0 \\ 0 & 8.83 & 0 \\ 0 & 0 & 10.55 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 2.2656 & 0 & 0 & 0.0004 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4170 & 0 & 0 & 0.0010 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3976 & 0 & 0 & 0.0071 \\ 0.0004 & 0 & 0 & 0.0016 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0010 & 0 & 0 & 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0071 & 0 & 0 & 0.0169 \end{bmatrix}$$



**Figure 4.2** les poursuites de trajectoire de position et des erreurs de position avec la loi de commande adaptative base sure le couple calculé (loi d'adaptation de type gradient).



**Figure 4.3** les poursuites des masses et des erreurs de poursuite des masses avec la loi de commande adaptative basée sur le couple calculé (loi d'adaptation de type gradient).

Les figures (4.2-4.3) montrent les résultats de simulation effectuées dans le cas considéré parfait (ni perturbation extérieures ni bruit de mesure). Dans ce cas, nous remarquons que la loi d'adaptation de type gradient a permis aux paramètres de converger très rapidement vers leurs valeurs réelles puis aux erreurs de poursuite de converger aussi vers zéro. Nous remarquons que les paramètres peuvent prendre n'importe quelle valeur non nulle et convergent avec ces valeurs vers leurs valeurs réelles.

#### **4.5. Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons étudié une loi de commande adaptative basée sur le couple calculé avec une loi d'adaptation de type gradient en absence des paramètres (les masses des corps).

A partir des résultats de simulation obtenus dans ce chapitre, nous pouvons remarquer que la loi de commande adaptative nous a permis d'avoir une convergence des paramètres estimés et des erreurs de poursuite très rapide dans le cas idéal (ni perturbation extérieures ni bruit de mesure).

# **Conclusion Générale**

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués dans le but de connaître où on peut appliquer les lois de commande classique et les lois de commande adaptative (dans ce mémoire nous avons appliquée la commande adaptative basée sur le couple calculé de type gradient).

Dans le chapitre 1 a été présenté quelque notions de base sur le robot manipulateur rigide, premièrement nous avons donné quelque définitions (système dynamique non linéaire, robot manipulateur rigide). Ensuite, la description mécanique des robots manipulateurs rigides. Nous avons terminé ce chapitre par la présentation de quelques notions qui sont nécessaires dans la modalisation dynamique des robots.

Le chapitre 2 a été consacré à l'étape de base pour simuler une commande d'un robot manipulateur rigide qui est l'étape de la modélisation. Premièrement, nous avons montré la description de la structure géométrique des robots manipulateurs rigides à chaîne ouverte simple, y compris l'application des notions de Denavit-Hartenberg, ensuite, la formulation de Lagrange, qui est nécessaire pour établir les équations de mouvement des robots manipulateurs à  $n$  degrés de liberté, a été détaillée. Nous avons terminé ce chapitre par une élaboration d'un modèle dynamique d'un robot manipulateur à trois degrés de liberté afin de l'utiliser en simulation pour valider les résultats développés dans les autres chapitres.

Dans le chapitre 3, trois lois de commande classiques ont été présentées, à savoir la commande point à point, la commande Paden et Panja et la commande nommée couple calculé type PD, pour illustrer les différentes performances d'une loi de commande (rapidité de convergence, robustesse dans le cas où les paramètres du robot sont considérés connus. Nous avons appliqué l'étude théorique au modèle dynamique présenté dans le chapitre 1. Nous avons déduit que les performances de poursuite de ces lois de commande donnent des bons résultats, c'est-à-dire la convergence des erreurs de poursuite du système à zéro est garanti à cause de l'absence des perturbations externes.

Dans le chapitre 4. Une loi de commande adaptative basée sur le couple calculé de type gradient a été présentée et appliquée au robot Scara. A partir des résultats de simulation obtenus dans ce chapitre. Nous pouvons conclure que cette loi de commande d'adaptation permet une convergence des paramètres estimés et des erreurs de poursuite très rapide.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Negrache Bensaouag « Commande dynamique et Adaptative des robots manipulateurs rigides en utilisant l'algorithme des moindres carrés et du gradient application à un robot à 3ddl, Puma » université d'Oran Es-Sénia, 23 octobre 2004.
- [2] Etienne Dombre et Wisama Khalil « Modélisation et commande des robots » Editions Hermes paris, 1988.
- [3] Samson C, Michel Le Borgne and Bernard Espiau « Robot Control» Clarendon press-oxford, 1991.
- [4] Spong M.W. and M. Vidyasagar « Robot Dynamics and Control» John Willey and sons, New York, 1989.
- [5] Canudas De Wit C, B. Brogliato, A. De Luca, B. Siciliano, P. Tomel, C. and R. Ortega, R. Lazano, G. Bastin, G. Campion, B. D'adrea Novel, and W. Khalil «Théories de la Commande des Robots » Laboratoire d'Automatique de Grenoble, 1992.
- [6] F. L. Lewis and C. T. Abdullah and D. M. Dawson « Control of robot manipulators» New York, Macmillan, 1993
- [7] Regilio Lozano and Damia Taoutaou « Identification et Commande Adaptative » Herms, Paris, 2001.
- [8] Kerraci Abdelkader « Synthèse des commande robustes des robots manipulateurs rigides » université d'Oran Es-Sénia, 23 octobre 2004.
- [9] Paden B. et R. Panja « Globally Aasymptotically Stable ' PD+' Controller For Robot Manipulators» Int Journal on Control, Vol. 47, P. 1697-1712.
- [10] Kemal M. Citiz and Kumpati S. Narendra. « Adaptive Control of Robotic Manipulators Usig Multiple Models and Switching » The International Journal of Robotics Research, 15(6):592-610, MIT December 1996.

**Annexe A**

Propriétés d'une matrice et la stabilité



## A-1 Propriétés d'une matrice

Quelques propriétés de la matrice jouent un rôle important dans l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques. Les propriétés utilisées dans ce mémoire sont résumées dans cette section.

### Définition A.1

Une matrice réelle  $A \in R^{n \times n}$  est dite définie positive si  $x^T A x > 0$  pour tous  $x \in R^n$ , et  $x \neq 0$ .

Une matrice réelle  $A \in R^{n \times n}$  est dite semi définie positive si  $x^T A x \geq 0$  pour tous  $x \in R^n$ .

Une matrice réelle  $A \in R^{n \times n}$  est dite définie négative si  $x^T A x < 0$  pour tous  $x \in R^n$  et  $x \neq 0$ .

Une matrice réelle  $A \in R^{n \times n}$  est dite semi définie négative si  $x^T A x \leq 0$  pour tous  $x \in R^n$ .

Une matrice réelle  $A \in R^{n \times n}$  est dite indéfinie si  $x^T A x > 0$  pour quelque  $x \in R^n$  et  $x^T A x < 0$  pour les autres  $x \in R^n$ .

### Théorème A.2

Soit  $A = [a_{ij}]$  une matrice réelle symétrique  $\in R^{n \times n}$ . Par conséquent, toutes les valeurs propres de  $A$  sont réelles. Nous avons :

Une matrice réelle  $\in R^{n \times n}$  est définie positive si toutes ses valeurs propres sont positives.

Une matrice réelle  $\in R^{n \times n}$  est semi définie positive si toutes ses valeurs propres sont non négatives.

Une matrice réelle  $\in R^{n \times n}$  est définie négative si toutes ses valeurs propres sont négatives.

Une matrice réelle  $\in R^{n \times n}$  est semi définie négative si toutes ses valeurs propres sont non positives.

Une matrice réelle  $\in R^{n \times n}$  est indéfinie si quelques de ses valeurs propres sont positives et les autres sont négatives.

## A-2 la théorie de stabilité de Lyapunov

La théorie de stabilité de Lyapunov traite du comportement des systèmes non linéaires libres décrits par les équations différentielles suivantes :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad (\text{A.1})$$

$t \geq 0, x \in R^n$ , et  $f(.,.): R_+ \times R^n \rightarrow R$  est continue. L'idée de base de cette théorie est que si nous considérons un système isolé dans le sens qu'il n'y a aucune forces externes agissant sur ce système, comme l'équation (A.1), où sans perte de généralité, l'origine est un point d'équilibre. Alors, nous supposons qu'il soit possible de définir une fonction, telle qu'elle soit nulle à l'origine et positive ailleurs, et décrit, en quelque sorte, l'énergie totale du système. Si le système originalement à l'équilibre, est perturbé à un nouvel état initial non nul, alors il y a plusieurs possibilités. Si les dynamiques du système sont telle que l'énergie du système est non croissante avec le temps, alors suivant la fonction de l'énergie, ça peut être suffisant pour conclure que l'origine est stable. Si les dynamiques sont telle que l'énergie devient nulle avec le temps, alors il peut être suffisant de décider que le point d'équilibre est asymptotiquement stable. Finalement si les dynamiques sont telles que l'énergie croît au-delà de sa valeur initiale, alors il est possible de conclure que le système est instable.

Lyapunov était capable d'extraire à partir de ce raisonnement une théorie générale qui est applicable à n'importe quelle équation différentielle. Cette théorie demande de chercher une fonction qui satisfait quelques propriétés. Cette fonction est une généralisation de l'énergie des systèmes mécanique et elle est maintenant appelée la fonction de Lyapunov.

La théorie de Lyapunov nous permettra de déterminer la stabilité d'un point d'équilibre particulier sans la résolution actuelle de l'équation différentielle (A.1). En plus, elle nous fournira des résultats qualitatifs de la stabilité discutée, qui peut être utilisée dans la conception des régulateurs stabilisants les systèmes dynamique non linéaires.

Dans cette section, nous devons donner le théorème de base de Lyapunov qui est utilisée dans la stabilité, stabilité asymptotique et stabilité exponentielle.

### **Théorème A.3**

L'origine du système (A.1) est stable, s'il existe une fonction de classe  $C^1$  et localement définie positive  $V : R_+ \times R^n \rightarrow R$  et une constante  $r > 0$  telle que :

$$\dot{V}(x, t) \leq 0, \forall t \geq t_0 \text{ et } \forall x \in B_r$$

Où  $\dot{V}$  est évaluée le long des trajectoires de (A.1).

### **Théorème A.4**

L'origine du système (A.1) est uniformément stable, s'il existe une fonction de  $C^1$  définie positive localement  $V : R_+ \times R^n \rightarrow R$  et une constante  $r > 0$  telle que :

$$\dot{V}(x, t) \leq 0, \forall t \geq 0 \text{ et } \forall x \in B_r$$

### **Théorème A.4**

L'origine du système (A.1) est asymptotiquement stable, s'il existe une fonction scalaire  $V : R_+ \times R^n \rightarrow R$  telle que :

1.  $V(t, x)$  définie positive,
2.  $\dot{V}(t, x)$  est définie négative.

En plus, si  $V(t, x)$  est décroissante, alors l'origine est uniformément asymptotiquement stable.

### **Théorème A.5**

L'origine du système (A.1) est asymptotiquement uniformément globalement stable, s'il existe une fonction scalaire de  $C^1$  définie positive localement  $V : R_+ \times R^n \rightarrow R$  et une constante  $r > 0$  telle que :

1.  $V(t, x)$  définie positive,
2.  $V(t, x)$  est décroissante et radialement non bornée,
3.  $\dot{V}(t, x)$  est définie négative.