Table des matières

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse aux séries de Dirichlet qui sont très importantes dans la théorie analytique des nombres.

D'abord, on rappelle les grandes notions de base de notre thème, commançons par les fonctions arithmétiques et leur relation avec les séries de Dirichlet, et nous étudions les propriétés analytiques de ces séries. Finalement, nous étudions un exemple fondamental précisément, la fonction zêta de Riemann.

Introduction

Peter Gustav Lejeune-Dirichlet en 1837 introduit les séries de Dirichlet pour montrer l'existence d'une infinité des nombres premiers dans les progressions arithmétiques. Dedekind a établi plusieur propriétés de ces séries. Le lien que nous réalisons entre l'arithmétique et l'analyse complexe passe par les séries de Dirichlet, auxquelles nous allons attacher dans la première partie, la somme d'une série associée à une fonction arithmétique donnée, peut en effet être vue comme une fonction complexe dont on peut étudier les propriétés.

En 1859, un article de Bernhard Riemann "Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une taille donnée", a prouvé un prolongement et une équation fonctionnelle de la fonction $\zeta(s)$, il a établi une relation entre ces zéros et la distribution des nombres premiers.

Nous abordons trois chapitres, le premier contient quelques notations et définitions de base, dans le deuxième, on définit les séries de Dirichlet, leur propriété, abscisse de convergence, structure algébrique, produit eulérien.

Le troisième chapitre, nous étudions un exemple simple sur les séries de Dirichlet (la fonction zêta de Riemann), on traite le prolongement et la majoration de cette fonction, sa équation fonctionnelle et ces zéros.

Chapitre 1

Notations et préliminaires

1.1 Notations

Nous donnons quelques notations qui vont nous aider dans la suite de notre travail :

1. Le mot " entier " désigne un entier naturel (les éléments de $\mathbb{N}$).
2. On désigne par p un nombre premier et P est l'ensemble des nombres premiers.
3. Les deux symboles $\sum\limits_{p\leq x}$ et $\prod\limits_{p\leq x}$ représentent respectivement une somme et un produit étendus à tous les nombres premiers $p\in[2,x]$. De plus $\sum\limits_{p}=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\sum\limits_{p\leq x}$ et $\prod\limits_{p}=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\prod\limits_{p\leq x}$.
4. Si m et n sont des entiers positifs, alors $m\mid n$ signifie m divise n, et (m,n) est le $PGCD\,(m,n)$.
5. $p^{\alpha}\parallel n$ signifie p^{α} divise n et $p^{\alpha+1}$ne divise pas n.
6. $[x]$ désigne la partie entière de x, $[x]=x-\{x\}$ tel que $\{x\}$ est la partie fractionnelle de $x, x\in\mathbb{R}$.
7. La fonction " log " représente toujours le logarithme de base e.
8. Si g est une fonction définie et positive pour $x\geq 0$ et si f est une fonction définie pour tout $x\geq x_0$, on a alors

$$f(x)=O(g(x))\text{ signifie qu'il existe } M>0 \text{ tel que pour tout } x\geq x_0,\ \frac{|f(x)|}{g(x)}\leq M.$$

   ($f(x)$ est un grand O de $g(x)$)

$$f(x) = o(g(x)) \text{ signifie } \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0 \quad (\; f(x) \text{ est un petit } o \text{ de } g(x) \;) \quad .$$

9. Le symbole $f(x) \ll g(x)$ signifie $f(x) = O(g(x))$.

1.2 Définitions et théorèmes

Définition 1.2.1 *Une fonction arithmétique est une application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ définie sur l'ensemble des entiers $n \geq 1$ autrement dit, une suite des nombres complexes.*

Définition 1.2.2 *Les fonctions aritmiques f associée à séries de Dirichlet ont une région de convergence non vide seront appelées à croissance modérée.*

Fonction holomorphe

Définition 1.2.3 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, et z_0 un point de U.*
Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe en z_0 si elle est dérivable au sens complexe en z_0 c-à-d :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z - z_0) - f(z)}{z - z_0}$$

existe et finie. On dit que f est holomorphe sur U si elle est dérivable pour tout point de U.

Fonction méromorphe

Définition 1.2.4 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, on dit que la fonction f est méromorphe sur Ω si f est holomorphe sur Ω sauf aux nombre fini des points singuliers isolés de Ω .*

Fonction analytique

Définition 1.2.5 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ et $z_0 \in U$, on dit que f est une fonction analytique en z_0, s'il existe un disque $D(z_0, r) \subset U$ et une série entière $\sum_n a_n z^n$ de rayon de convergence $\rho \geq r$ telle que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in D(z_0, r).$$

On dit que f est analytique sur U si elle est analytique en tout point de U.

Fonction entière

Définition 1.2.6 *une fonction entière est une fonction holomorphe définie sur tout le plan complexe.*

Fonction multiplicative

Définition 1.2.7 *Une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ est dite multiplicative si $f(1) = 1$ et si pour tout n, m*

$$f(nm) = f(n)f(m) \text{ si } (n, m) = 1.$$

Une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ est dite completement multiplicative si $f(1) = 1$ et pour tout n , m on a

$$f(nm) = f(n)f(m).$$

Fonction Gamma

Définition 1.2.8 *La fonction $\Gamma(s)$ d'une variable complexe s est définie par l'intégrale :*

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \exp(-x)x^{s-1}dx \text{ ou } \mathrm{Re}(s) = \sigma > 0,$$

elle satisfait la formule de Weierstrass :

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s}\exp(-\gamma s)\prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}\exp\left(\frac{s}{n}\right)$$

où

$$\gamma = \lim_{n}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{-1} - \log n\right)$$

est la constante d'Euler.

La série $\theta(\tau, \alpha)$

Définition 1.2.9 *Pour deux nombres complexe τ et α avec $\mathrm{Re}(\tau) > 0$ et α un nombre arbitraire, la série $\theta(\tau, \alpha)$ définie comme suite :*

$$\theta(\tau, \alpha) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(-\pi(n+\alpha)^2\tau)$$

cette fonction $\theta(\tau, \alpha)$ est holomorphe dans le demi_plan $\mathrm{Re}(\tau) > 0$.

Lemme 1.2.1 .
Pour τ et α deux nombres complexes, alors

$$\begin{aligned}\theta\left(\frac{1}{\tau},\alpha\right) &= \sqrt{\tau}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp(-\pi n^2\tau+2in\alpha)\\ &= \sqrt{\tau}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp(-\pi\frac{n^2}{\tau})+\theta\left(\tau,-\frac{i\alpha}{\tau}\right).\end{aligned}$$

<u>Démonstration</u> : Voir[2]
En particulier si $\alpha = 0$ alors

$$\begin{aligned}\theta\left(\frac{1}{\tau},0\right) &= \sqrt{\tau}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp(-\pi n^2\tau)\\ &= \sqrt{\tau}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp(-\pi\frac{n^2}{\tau})+\theta\left(\tau\right)\end{aligned}$$

avec $\frac{1}{\tau} = x$ impliquons

$$1+2\sum_{n\in\mathbb{N}^*}e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1+2\sum_{n\in\mathbb{N}^*}e^{-\pi\frac{n^2}{x}}\right),$$

avec la notation $\omega(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*}e^{-\pi n^2 x}$ la relation ci-dessus devient

$$1+2\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\omega(\frac{1}{x})+\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}.$$

Chapitre 2

Séries de Dirichlet

Définition 2.0.10 *Soit λ_n une suite strictement croissante des nombre réels tend vers $+\infty$ et f une fonction arithmétique, la série de Dirichlet associée à f est une série de la forme*

$$D_f(s) = \sum_{n \geq 1} f(n) e^{-\lambda_n s},$$

tel que $s = \sigma + it$ avec $\sigma = \mathrm{Re}(s)$ et t deux réels. Si $\lambda_n = \log n$ la série devient

$$D_f(s) = \sum_{n \geq 1} f(n) n^{-s}.$$

Exemple 2.0.1 *Commençant par la fonction zéta de Riemann qui est noteé par $\zeta(s)$:*

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} \qquad \mathrm{Re}(s) > 1$$

associeé à la fonction $f \equiv 1$.

Exemple 2.0.2 *Pour $\sigma \geq 1$ on a :*

$$D_\Lambda(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

telle que $\Lambda(n)$ est la fonction de Von Mangoldt

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & si\ n = p \\ 0 & si\ n \neq p^k \end{cases}.$$

Exemple 2.0.3 *Pour* $\sigma \geq 1$ *on a :*

$$D_{\mu}(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mu(n)}{n^{s}}$$

telle que $\mu(n)$ *est la fonction de Möbius*

$$\mu(n)=\begin{cases}(-1)^{k} & si\ \alpha_1=\alpha_1=\cdots=\alpha_1=1\\ 0 & si\ non\end{cases}\qquad tel\ que\ n=p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}.$$

Exemple 2.0.4 *Pour* $\sigma \geq 1$ *on a :*

$$D_{|\mu|}(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|\mu(n)|}{n^{s}}.$$

Exemple 2.0.5 *Pour* $\sigma \geq 1$ *on a :*

$$D_{d}(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d(n)}{n^{s}}$$

pour tout entier $n \geq 1$, *on note par* $d(n)$ *le nombre des diviseurs d'un entier* n *qui définit par :*

$$\begin{aligned} d(n) &= card\{d\in\mathbb{N}^{*}, d\,|n\}\\ &= \sum_{d|n}1. \end{aligned}$$

Exemple 2.0.6 *Pour* $\sigma \geq 1$ *on a :*

$$D_{\lambda}(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda(n)}{n^{s}}$$

telle que $\lambda(n)=(-1)^{\Omega(n)}$ *où* $\Omega\,(n)=p_1p_2\cdots p_k\cdots.$

2.1 La convergence d'une série de Dirichlet

On note que $s \in \mathbb{C}$, $s = \sigma + it$, ou $\sigma, t \in \mathbb{R}$, donc

$$\begin{aligned} n^s &= e^{s\log(n)} = e^{(\sigma+it)\log(n)} \\ &= n^\sigma e^{it\log(n)} \end{aligned}$$

ce qui implique

$$|n^s| = n^\sigma \quad \text{car} \quad \left|e^{i\theta}\right| = 1.$$

Définition 2.1.1 *Soit $D_f(s) = \sum_{n\geq 1} f(n)n^{-s}$ une série de Dirichlet. L'abscisse de convergence absolue σ_a est définie comme étant le plus petit nombre réel σ_a tel que si $\sigma > \sigma_a$, alors $\sum_{n\geq 1} |f(n)|\, n^{-\sigma}$ converge, donc*

$$\sigma_a = \inf \left\{ (\mathrm{Re}(s) = \sigma) : \sum_{n\geq 1} |f(n)|\, n^{-\sigma} < +\infty \right\}.$$

Le demi plan de la convergence absolue

Pour tout $s = \sigma + it$, on a

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)n^{-s} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |f(n)|\, n^{-\sigma}$$

et si $\sigma \geq a$ on obtient $\frac{1}{n^\sigma} \leq \frac{1}{n^a}$ d'où

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|f(n)|}{n^a}.$$

Théorème 2.1.1 *Si une série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} f(n)n^{-s}$ converge pour $s_0 \in \mathbb{C}$, alors elle converge dans le demi-plan $\sigma > \sigma_0$. De plus elle converge uniformément sur tout secteur du type*

$$D_\alpha(s_0) = \{ s \in \mathbb{C} \backslash \, \mathrm{Re}(s - s_0) \geq 0 \ \ et \ \ |Arg(s - s_0)| \leq \alpha \}.$$

Où $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$.

On peut utiliser le lemme suivant pour prouver ce théorème

Lemme 2.1.1 *Soient A, B deux reéls tels que $0 \leq A < B$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $\sigma = \mathrm{Re}(z) > 0,$ on a*

$$\left|e^{-Az} - e^{-Bz}\right| \leq \frac{|z|}{\sigma}(e^{-A\sigma} - e^{-B\sigma}).$$

Démonstration :

On a

$$e^{-Az} - e^{-Bz} = z\int_A^B e^{-tz}dt$$

d'où

$$\begin{aligned} \left|e^{-Az} - e^{-Bz}\right| &\leq |z|\int_A^B \left|e^{-tz}\right|dt = |z|\int_A^B e^{-t\sigma}dt \\ &= \frac{|z|}{\sigma}(e^{-A\sigma} - e^{-B\sigma}). \end{aligned}$$

Démonstration : (du Théorème)

Posons $u_n = \sum_{n\geq 1} f(n)n^{-s_0}$ et $v_n = n^{s_0 - s}$ (s_0 un nombre complexe quelconque)

$$S_{q,p} = \sum_{n=q}^{p} u_n v_n = \sum_{n\geq 1}\sum_{n=q}^{p} f(n)n^{-s} \text{ et } U_{q,p} = \sum_{n=q}^{p} u_n = \sum_{n=q}^{p} f(n)n^{-s_0}.$$

On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon) > 0$ tel que si $p \geq q \geq N(\varepsilon)$ alors $|U_{q,p}| \leq \varepsilon$.

Pour $\mathrm{Re}\,(s) = \sigma > \sigma_0$ on a

$$|v_n| = \frac{1}{n^{\sigma - \sigma_0}} < 1.$$

En utilisant la transformation d'Abel (et par la convention que $U_{p,p-1} = 0$), on a :

$$\sum_{n=q}^{p} f(n).n^{-s} = \left|\sum_{n=q}^{p} u_n v_n\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} (U_{q,n} - U_{q,n-1})v_n\right|$$

$$\sum_{n=q}^{p} f(n).n^{-s} = \sum_{n=q}^{p} U_{q,n}v_n - \sum_{n=q}^{p} U_{q,n-1}v_n. \qquad (*)$$

Pour le changement de variable $n = k + 1$ dans le terme droite de $(*)$ trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{n=q}^{p} f(n).n^{-s} &= \sum_{n=q}^{p} U_{q,n}v_n - \sum_{k=q-1}^{p-1} U_{q,k}v_{k+1} \\
&= U_{q,p}v_p + \sum_{n=q-1}^{p-1} U_{q,n}v_n - \sum_{k=q-1}^{p-1} U_{q,k}v_{k+1} \\
&= U_{q,p}v_p + \sum_{n=q}^{p-1} U_{q,n}(v_n - v_{n+1}),
\end{aligned}$$

d'où pour $p > q \geq N(\varepsilon)$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=q}^{p} f(n).n^{-s}\right| &\leq \varepsilon\left(|v_p| + \sum_{n=q}^{p-1} |v_n - v_{n+1}|\right) \\
&\leq \varepsilon\left(1 + \sum_{n=q}^{p-1} |v_n - v_{n+1}|\right)
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
|v_n - v_{n+1}| &= \left|\frac{1}{n^{s-s_0}} - \frac{1}{(n+1)^{s-s_0}}\right| \\
&= \left|e^{-(s-s_0)\log n} - e^{-(s-s_0)\log(n+1)}\right|
\end{aligned}$$

on appliquant le lemme (2.1.1) tel que $z = s - s_0$, $A = \log(n)$, $B = \log(n+1)$. On obtient

$$\begin{aligned}
|v_n - v_{n+1}| &< \frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0}\left|e^{-(\sigma-\sigma_0)\log n} - e^{-(\sigma-\sigma_0)\log(n+1)}\right| \\
\left|\sum_{n=q}^{p} f(n).n^{-s}\right| &\leq \varepsilon\left[1 + \frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0}\sum_{n=q}^{p-1}\left(\frac{1}{n^{\sigma-\sigma_0}} - \frac{1}{(n+1)^{\sigma-\sigma_0}}\right)\right] \\
&= \varepsilon\left[1 + \frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0}\left(\frac{1}{q^{\sigma-\sigma_0}} - \frac{1}{p^{\sigma-\sigma_0}}\right)\right].
\end{aligned}$$

Ceci montre que la série $\sum_{n\geq 1} f(n).n^{-s}$ vérifie le critère de Cauchy donc elle est convergente. Il reste à montrer la convergence uniforme dans $D_{s_0}(\alpha)$.
Il existe $\theta = \theta(s)$ tel que

$$\cos(\theta) = \frac{\sigma-\sigma_0}{|s-s_0|} \quad \text{et} \quad |\theta| \leq \alpha$$

où
$$\frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0}=\frac{1}{\cos(\theta)}\leq\frac{1}{\cos(\alpha)}$$
et par le théorème (2.1.1) on a
$$\left|\sum_{n=q}^{p}f(n).n^{-s}\right|\leq\varepsilon\left(1+\frac{1}{\cos(\alpha)}\right).$$

La série $\sum_{n\geq1}f(n).n^{-s}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme, donc elle converge uniformément sur $D_{s_0}(\alpha)$.

Exemple 2.1.2 *La série $\zeta(s)$ converge absolument sur le demi-plan complexe $\Omega_1 = \{s\in\mathbb{C}\backslash \operatorname{Re}(s)>1\}$ (d'après le critère de Riemann $\alpha>1$).*

Proposition 2.1.3 *Soit $D_f(s)=\sum_{n\geq1}f(n).n^{-s}$ est une série de Dirichlet d'abscisse de convergence σ_c. Si $D_f(s)=0$ pour tout s tel que $\sigma>\sigma_c$, alors $f(n)\equiv0$.*

<u>Démonstration</u> :
Supposons que $f(n)$ n'est pas nulle. Soit $k\in\mathbb{N}^*$ le plus petit entier qui vérifie $f(k)\neq0$, et soit
$$G(s)=k^s\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{f(n)}{n^s},\ \ (\sigma>\sigma_c).$$
Par hypothèse, on a $G(s)=0$ dans le demi-plan $\sigma>\sigma_c$, et d'autre part
$$G(s)=f(k)+\sum_{n=k+1}^{+\infty}f(n)\left(\frac{k}{n}\right)^s,$$
donc si σ tend vers $+\infty$, on obtient
$$\lim_{\sigma\to+\infty}G(\sigma)=f(k)$$
ce qui donne $f(k)=0$ donc nous obtenons la contradiction.

2.1.1 Développement asymptotique

Proposition 2.1.4 *Lorsque* $\operatorname{Re}(s)\to+\infty$
$$D_f(s)=f(n_0)n_0^{-\sigma}+O\left(n_0^{-\sigma}\right).$$

Démonstration :

Nous montrons que la série de Dirichlet est un développement asymptotique de sa somme lorsque $\mathrm{Re}(s) \to +\infty$. On considère $D_f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ dont on suppose qu'elle converge sur le demi plan $\mathrm{Re}(s) \geq a$ tel que $a \in \mathbb{R}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n < n_0 \; f(n) \neq 0$. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} - \sum_{n=1}^{n_0} \frac{f(n)}{n^s} = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

et comme

$$\sum_{n=1}^{n_0} \frac{f(n)}{n^s} = \frac{f(n_0)}{n_0^s}$$

on a

$$D_f(s) - f(n_0)n_0^{-s} = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s},$$

donc

$$\left| D_f(s) - f(n_0)n_0^{-s} \right| \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{|f(n)|}{n^\sigma} = n_0^{-\sigma} \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |f(n)| \left(\frac{n_0}{n}\right)^\sigma$$

pour $n \geq n_0 + 1$ et $\sigma \geq a$, on a

$$\left(\frac{n_0}{n}\right)^\sigma \leq \left(\frac{n_0}{n}\right)^a,$$

de plus, puisque la série $n_0^a \sum \frac{|f(n)|}{n^a}$ est convergente, on a

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \left(\frac{n_0}{n}\right)^a < +\infty,$$

alors $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \left(\frac{n_0}{n}\right)^\sigma$ est normalement convergente pour $\sigma \geq a$. Donc on a

$$\begin{aligned} & \lim_{\sigma \to +\infty} \underbrace{\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |f(n)| \left(\frac{n_0}{n}\right)^\sigma}_{=A} \\ = & \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \lim_{\sigma \to +\infty} |f(n)| \left(\frac{n_0}{n}\right)^\sigma = 0, \end{aligned}$$

ainsi on montre que pour $\sigma \to +\infty$

$$\left|D_f(s) - f(n_0)n_0^{-\sigma}\right| \leq n_0^{-\sigma} \times A$$

tel que $A \to 0$ si $\sigma \to +\infty$. Donc on peut déduire que

$$D_f(s) = f(n_0)n_0^{-\sigma} + O\left(n_0^{-\sigma}\right).$$

Théorème 2.1.5 .
1.Supposons que $D_f(s) = \sum \frac{f(n)}{n^s}$ converge absolument pour $\sigma > \sigma_a$, on a les propriétés suivantes : Si $N \geq 1$ et $\sigma \geq c > \sigma_a$ on a :

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}\right| \leq N^{-(\sigma-c)} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{|f(n)|}{n^c} \tag{2.1}$$

2.Soit $D_f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ vérifiée l'égalité (2.1), alors

$$\lim_{\sigma \to +\infty} D_f(\sigma + it) = f(1)$$

Uniformément pour $t \in \mathbb{R}$

Démonstration :
1.Nous avons

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}\right| &\leq \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{|f(n)|}{n^\sigma} = \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{|f(n)|}{n^c} n^{-(\sigma-c)} \\ &\leq N^{-(\sigma-c)} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{|f(n)|}{n^c}.\end{aligned}$$

2.Soit $D_f(s) = f(1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$, nous devons seulement prouver que le second terme tend vers 0 si $\sigma \to +\infty$. Nous choisissons $c > \sigma_a$. Alors pour $\sigma > c$ (2.1) implique

$$\left|\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}\right| \leq 2^{-(\sigma-c)} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|f(n)|}{n^c} = \frac{A}{2^\sigma}$$

Comme $\frac{A}{2^\sigma} \to 0$ si $\sigma \to +\infty$, où A est indépendante de σ et t. Cela prouve le théorème.

Théorème 2.1.6 ***(Théorème d'unicité).***

Soient deux séries de Dirichlet $D_f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ et $D_g(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g(n)}{n^s}$ à la fois absolument convergente pour $\sigma > \sigma_a$, si $D_f(s) = D_g(s)$ pour chaque s avec σ suffisamment grand, alors $f(n) = g(n)$ pour tout n.

Démonstration :

Soient $h(n) = f(n) - g(n)$, $D_h(s) = D_f(s) - D_g(s)$, alors $D_h(s) = 0$. Pour prouver que $h(n) = 0$ pour tout n, supposons que $h(n) \neq 0$ pour certains n et on obtient une contradiction . Soit N le plus petit entier pour lequel $h(n) \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} D_h(s) &= \sum_{N=1}^{+\infty} \frac{h(n)}{n^s} = \frac{h(N)}{N^s} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{h(n)}{n^s} \\ h(N) &= N^s D_h(s) - N^s \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{h(n)}{n^s}, \end{aligned}$$

nous avons $D_h(s) = 0$ donc

$$h(N) = -N^s \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{h(n)}{n^s}$$

choisissons $\sigma = \sigma_0 + \lambda$ avec $\lambda \geq 0$, suivant le théorème (2.1.6) on a pour tout $n \geq N+1$

$$|h(N)| \leq N^\lambda (N+1)^{-(\lambda - c)} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{h(n)}{n^c} = \left(\frac{N}{N+1}\right)^\lambda A$$

où A est indépendante de λ, laisser $\lambda \to +\infty$ nous trouvons $\left(\frac{N}{N+1}\right)^\lambda \to 0$ donc $h(N) = 0$, une contradiction.

La dérivée de la série de Dirichlet

Théorème 2.1.7 *La somme de la série* $\sum_{n\geq 1} f(n).n^{-s}$ *dans le demi-plan* $\mathrm{Re}(s) \geq \sigma_0$ *définit une fonction holomorphe.* $D_f(s)$ *est indéfiniment dérivable et l'on a :*

$$D_f^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n).n^{-s}(-\log(n))^k \quad \mathrm{Re}(s) \geq \sigma_0.$$

Théorème 2.1.8 *.(de Weierstrass)*
Soient Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *suite de fonctions définies sur* Ω *à valeur dans* $\mathbb{C}$*, telle que :*
–$\forall n \in \mathbb{N}$*,* f_n *est holomorphe dans* Ω*.*
– La série $\sum_{n\geq 1} f_n$ *est uniformément (resp. normalement) convergente sur tout compact* K *de* Ω *vers une fonction* f*.*
Alors
–La fonction f *est holomorphe dans* Ω*.*
–La série $\sum_{n\geq 1} f_n^{'}$ *converge uniformément (resp. normalement) vers* $f^{'}$ *sur tout compact* K *inclus dans* Ω *.*

<u>Démonstration</u> :(du théorème (2.1.7))
D'après le théorème de Weierstrass, si $f(n)$ est une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω du plan complexe et si $f(n)$ converge uniformément vers f sur tout compact $K \subset \Omega$, alors la fonction f est holomorphe sur Ω et pour tout $K \geq 0$, on a :

$$f^k(s) = \lim_{n\to+\infty} f_n^k(s) \; s \in \Omega.$$

Si on fixons donc K un compact contenu dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) \geq \sigma_a$, alors $s_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Re}(s_0) \geq \sigma_a$ et $K \subset D_{s_0,\alpha}$. D'après le théorème de convergence (2.1.1), la série $\sum_{n\geq 1} f(n).n^{-s}$ converge uniformément vers $D_f(s)$.

Exemple 2.1.9 *Pour la fonction* $\zeta(s)$

$$\zeta^{(1)}(s) = \zeta'(s) = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log n}{n^s}.$$

2.2 Produit de convolution de deux séries de Dirichlet

2.2.1 Produit de convolution de deux fonctions arithmétiques

Définition 2.2.1 *Soient f et g deux fonctions arithmétiques. Le produit de convolution de f et g est la fonction $f * g$ définie par :*

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} g(d) f\left(\frac{n}{d}\right).$$

Théorème 2.2.1 *Soient f et g deux fonctions arithmétiques multiplicatives. Alors la fonction arithmétique $f * g$ est aussi multiplicative.*

La preuve de ce théorème est basée sur le lemme suivant :

Lemme 2.2.1 *Soient $(m, n) = 1$ et d est un diviseur de mn, alors d s'écrit de façon unique sous la forme $d = d_1 d_2$ ou $d_1 \,|m$ et $d_2 \,|n$.*

<u>**Démonstration**</u> :

Prouvons l'existence de d_1 et d_2 écrivons n et m comme suit :

$m = p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}$ et $n = q_1^{\alpha_{k+1}}...q_k^{\alpha_{k+r}}$ avec $(m, n) = 1$ alors

$$mn = p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k} q_1^{\alpha_{k+1}}...q_k^{\alpha_{k+r}}$$

si d est un diviseur de mn

$$d = p_1^{\beta_1}...p_k^{\beta_k} q_1^{\beta_{k+1}}...q_k^{\beta_{k+r}}$$

où $\beta_i \leq \alpha_i$, pour tout $i = 1, ..., k + r$ alors $d_1 = p_1^{\beta_1}...p_k^{\beta_k}$ et $d_2 = q_k^{\beta_{k+1}}...q_k^{\beta_{k+r}}$.

On a $d = d_1 d_2$, $d_1 \,|m$, $d_2 \,|n$.

<u>**Démonstration**</u> :**(du théorème)**

Soit$(m, n) = 1$, notons $h = f * g$ d'après le lemme précédent, on a

$$h(mn) = \sum_{d|mn} f(d) g\left(\frac{mn}{d}\right) = \sum_{d_1|m\,,d_2|n} f(d_1 d_2) g\left(\frac{mn}{d_1 d_2}\right),$$

si $(m,n)=1$ implique $(d_1,d_2)=1$ et $(\frac{m}{d_1},\frac{n}{d_2})=1$. D'ou

$$f(d_1d_2)=f(d_1)f(d_2) \text{ et } g\left(\frac{mn}{d_1d_2}\right)=g\left(\frac{m}{d_1}\right)g\left(\frac{n}{d_2}\right)$$

donc

$$\begin{aligned} h(mn) &= \sum_{d_1|m,d_2|n} f(d_1)f(d_2)g\left(\frac{m}{d_1}\right)g\left(\frac{n}{d_2}\right) \\ &= \left(\sum_{d_1|m} f(d_1)g\left(\frac{m}{d_1}\right)\right)\left(\sum_{d_2|n} f(d_2)g\left(\frac{n}{d_2}\right)\right) \\ &= h(m)h(n). \end{aligned}$$

2.2.2 Produit de convolution de deux séries de Dirichlet

Théorème 2.2.2 *Soient $D_f(s)$,$D_g(s)$ deux séries de Dirichlet avec σ_f, $\sigma_g<\infty$*

$$\begin{aligned} D_{f*g}(s) &= D_f(s)D_g(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{f*g(n)}{n^s} \\ &= \sum_{n\geq 1}\sum_{d|n}\frac{f(d)g(\frac{n}{d})}{n^s}=\sum_{n\geq 1}\frac{\sum_{ab=n}f(a)g(b)}{n^s}, \end{aligned}$$

alors $\sigma_{f*g}\leq \max(\sigma_f,\sigma_g)$ pour $\mathrm{Re}(s)>\max(\sigma_f,\sigma_g)$.

Démonstration :
Soit $\mathrm{Re}(s)>\max(\sigma_f,\sigma_g)$ alors

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1}\frac{|f*g(n)|}{|n^s|} &= \sum_{n\geq 1}\frac{|\sum_{ab=n}f(a)g(b)|}{n^\sigma} \\ &\leq \sum_{n\geq 1}\frac{\sum_{ab=n}|f(a)|\,|g(b)|}{(ab)^\sigma}=\sum_{a,b\geq 1}\frac{|f(a)|\,|g(b)|}{(ab)^\sigma} \\ &= \sum_{a\geq 1}\frac{f(a)}{a^\sigma}\sum_{b\geq 1}\frac{g(b)}{b^\sigma}<\infty, \end{aligned}$$

donc $\sigma_{f*g}\leq \max(\sigma_f,\sigma_g)$ pour $\mathrm{Re}(s)>\max(\sigma_f,\sigma_g)$.

Exemple 2.2.3 *Dans le demi plan* $\mathrm{Re}(s) \geq 1$ *on a :*

$$\begin{aligned} D_\mu(s)\zeta(s) &= \left(\sum_{n\geq 1}\mu(n)n^{-s}\right)\left(\sum_{n\geq 1}n^{-s}\right) \\ &= \sum_{n\geq 1}h(n)n^{-s}, \end{aligned}$$

avec

$$h(n) = \sum_{d|n}\mu(d).1 = \sum_{d|n}\mu(d)$$

$$= \begin{cases} 1 & si\ n = 1 \\ 0 & si\ n \geq 1 \end{cases},$$

donc

$$D_\mu(s)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{1} n^{-s} = 1.$$

Exemple 2.2.4 *Dans le demi plan complexe* $\mathrm{Re}(s) \geq 1$ *on a :*

$$\begin{aligned} \zeta(s) \times \sum_{n=1}^{+\infty}\Lambda(n)n^{-s} &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-s}\right) \times \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\Lambda(n)n^{-s}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}h(n)n^{-s}, \end{aligned}$$

tel que

$$h(n) = \sum_{d|n} 1 \times \Lambda(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n}\Lambda(d),$$

on sait que

$$\sum_{d|n}\Lambda(d) = \log(n),$$

et

$$\zeta^{'}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-\log(n))n^{-s},$$

alors

$$\zeta(s) \times \sum_{n=1}^{+\infty}\Lambda(n)n^{-s} = \sum_{n=1}^{+\infty}\log(n)n^{-s} = -\zeta^{'}(s),$$

tel que $\zeta^{'}(s) = -\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\log(n)}{n^s}$.

2.3 Structure algébrique

On définit deux lois internes sur les séries de Dirichlet :

1. L'addition $(+)$: soient deux fonctions f et g dont les séries de Dirichlet convergent absolument pour $\mathrm{Re}(s)$, nous avons

$$D_{f+g}(s) = D_f(s) + D_g(s)$$

2. La multiplication $(*)$: soient deux fonctions f et g dont les séries de Dirichlet convergent absolument pour $\mathrm{Re}(s)$, alors celle de $f * g$ est également absolument convergente, et nous avons

$$D_{f*g}(s) = D_f(s)D_g(s)$$

$$D_f(s)D_g(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{f * g(n)}{n^s}.$$

Proposition 2.3.1 *Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des séries de Dirichlet $(\mathcal{M}, +, \times)$ est une structure d'anneau unitaire :*
1-$D_f(s)D_g(s) = D_g(s)D_f(s)$.
2-$\left[D_f(s)D_g(s)\right] D_h(s) = D_f(s) \left[D_g(s)D_h(s)\right]$.
3-$\left[D_f(s) + D_g(s)\right] D_h(s) = D_f(s)D_h(s) + D_g(s)D_h(s)$.

Démonstration :
On a

$$D_f(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s} \text{ et } D_g(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{g(n)}{n^s} \text{ et } D_h(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{h(n)}{n^s}$$

L'élément neutre

$$\sum_{n\geq 1} \frac{u(n)}{n^s} = 1 \text{ où } u(1) = 1 \text{ et } u(n) = 0 \quad \forall\, n > 1.$$

$(A, \times)$ est commutatif

$$D_f(s)D_g(s) = D_g(s)D_f(s) \text{ tel que } (f * g = g * f)$$

puisque d un diviseur de n alors $\frac{n}{d}$ est aussi un diviseur, on peut écrit

$$\sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) g(d).$$

$(A, \times)$: est associative **:** posons $\frac{n}{d} = q$

$$\left[D_f(s)D_g(s)\right] D_h(s) = \sum_{n\geq 1}\sum_{d|n} \frac{f * g(d)h\left(\frac{n}{d}\right)}{n^s}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n\geq 1}\sum_{dq=n} \frac{(f*g)(d)h(q)}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{\sum_{dq=n}\sum_{ab=d} f(a)g(b)h(q)}{n^s} \\
&= \sum_{n\geq 1}\sum_{abq=n} \frac{f(a)g(b)h(q)}{n^s} = \sum_{\substack{a|n \\ n\geq 1}} \frac{f(a)\sum_{bq=\frac{n}{a}} g(b)h(q)}{n^s} \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{\sum_{a|n} f(a)\sum_{b\left|\frac{n}{a}\right.} g(b)h(\frac{n}{ab})}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{\sum_{a|n} f(a)\left[f*g\right](s)}{n^s} \\
&= D_f(s)\left[D_g(s)D_h(s)\right].
\end{aligned}$$

$(A, +, \times)$: est distributive **:** $\forall D_f(s), D_g(s), D_h(s) \in \mathcal{M}$

$$D_f(s)\left[D_g(s) + D_h(s)\right] = D_f(s)D_g(s) + D_f(s)D_h(s).$$

En effet ,$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
D_f(s)\left[D_g(s) + D_h(s)\right] &= \sum_{n\geq 1}\sum_{d|n} \frac{f(d)\left[g(\frac{n}{d}) + h(\frac{n}{d})\right]}{n^s} \\
&= \sum_{n\geq 1}\sum_{d|n} \frac{f(d)g(\frac{n}{d}) + f(d)h(\frac{n}{d})}{n^s} \\
&= \sum_{n\geq 1}\sum_{d|n} \frac{f(d)g(\frac{n}{d})}{n^s} + \sum_{n\geq 1}\sum_{d|n} \frac{f(d)h(\frac{n}{d})}{n^s} \\
&= D_f(s)D_g(s) + D_f(s)D_h(s).
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des séries de Dirichlet est un groupe abélien, et admet un élément neutre $\sum_{n\geq 1} \frac{u(n)}{n^s}$.
D'où l'ensemble des séries de Dirichlet avec les deux lois internes précédents est un anneau unitaire.
Élélments inversibles : Si $f(1) \neq 0$, f est inversible pour l'opération$*$, alors

$$D_f(s)D_g(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{u(n)}{n^s},$$

c'est-à-dire qu'il existe g telle que $f * g = u$. En effet, les relations $(f * g)(n) = u(n)$ déterminent g par récurrence :

$$\begin{aligned} g(1) &= \frac{1}{f(1)} \\ &\vdots \\ g(n) &= -\frac{1}{f(1)} \sum_{n\geq 1} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right). \end{aligned}$$

2.4 Séries de Dirichlet et produit eulérien

Théorème 2.4.1 *Si f une fonction arithmétique multiplicative à croissance modérée, alors pour tout s tel que $\sum_{n\geq 1} f(n)n^{-s}$ converge absolument pour $\sigma \geq \sigma_a$, on a :*

$$\begin{aligned} D_f(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} = \prod_{p^k \| n} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + ... + \frac{f(p^k)}{p^{ks}} + ...\right) \\ &= \prod_{p} \left(\sum_{k\geq 0} f(p^k)p^{-ks}\right) \quad si\ \sigma \geq \sigma_a \end{aligned}$$

si f est complètement multiplicative alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} = \prod_{p\in P} \frac{1}{1 - \frac{f(p)}{p^s}} \quad si\ \sigma \geq \sigma_a.$$

<u>**Démonstration**</u> :
Soit f une fonction arithmétique multiplicative, supposons :$|f(n)| < 1$, et on considérons une fonction auxiliaire de la forme $\frac{f(n)}{n^a}$ est aussi multiplicative et soit $y \in \mathbb{R}$. Elle définit

comme suit :

$$f_y(n) = \begin{cases} \forall p \leq y, \forall \alpha \geq 1 \quad f_y(p^\alpha) = f(p^\alpha) \\ \forall p > y, \forall \alpha \geq 1 \quad f_y(p^\alpha) = 0 \end{cases},$$

de façon symétrique :

$$f^y(n) = \begin{cases} \forall p \leq y, \forall \alpha \geq 1 \quad f^y(p^\alpha) = 0 \\ \forall p > y, \forall \alpha \geq 1 \quad f_y(p^\alpha) = f(p^\alpha) \end{cases}.$$

Notons que nous avons l'équation

$$f = f_y * f^y,$$

en effet

$$f_y * f^y = \sum_{d_1 d_2 = n} f_y(d_1) f^y(d_2),$$

sont presque tous nuls puisque l'entier n admet une unique écriture $n = \ell m$ où tous les facteurs premiers de ℓ sont inférieurs à y et tous ceux de m sont strictement supérieurs à y. La somme suivant se réduit donc :

$$\sum_{\ell m = n} f_y(\ell) f^y(m).$$

Nous posons

$$D_y^\flat(f, s) = D_{f_y}(s), \ D_y^\sharp(f, s) = D_{f^y}(s)$$

tel que $D_f(s) = D_y^\flat(f, s) D_y^\sharp(f, s)$. La série de Dirichlet $D_y^\flat(f, s)$ se réduit comme un produit pour $\sigma \geq 1$

$$D_y^\flat(f, s) = \prod_p \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \cdots + \frac{f(p^k)}{p^{ks}} + \cdots\right).$$

La série de Dirichlet $D_y^\sharp(f, s)$ tend à devenir petite lorsque y tend vers l'infini. En effet

$$\left|D_y^\sharp(f, s) - 1\right| \leq \sum_{n > y} \frac{1}{n^\sigma} \leq \frac{1}{y^\sigma} + \int_y^{+\infty} \frac{dt}{t^\sigma} \leq \frac{1}{y^\sigma} + \frac{1}{(\sigma - 1) y^{\sigma - 1}},$$

si y tend vers l'infini alors, nous obtenons la formule de $D_f(s)$sous forme d'un produit eulérien

$$D_f(s) = \prod_p \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \cdots + \frac{f(p^k)}{p^{ks}} + \cdots\right) \quad \text{pour } \sigma \geq 1.$$

Exemple 2.4.2 *On a*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{f(p^k)}{p^{ks}}\right),$$

pour $\zeta(s)$ on a $f(n) = 1$ alors

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{p^{ks}}\right) = \prod_p \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{p^s}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{p^s}}\right),$$

comme $\sigma > 1$, $\lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{p^\sigma}\right)^{N+1} = 0$, donc

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

Exemple 2.4.3 *On a*

$$D_\mu(s) = \prod_p (1 + \mu(p)p^{-s} + \mu(p^2)p^{-2s} + \cdots),$$

$\mu(p^k) = 0 \quad$ *si $k \geq 2$ et $\mu(p) = -1$ donc*

$$D_\mu(s) = \prod_p (1 - p^{-s}) = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Exemple 2.4.4 *On a*

$$\begin{aligned} D_d(s) &= \zeta(s)^2 = \prod_p (1-p^{-s})^{-2} \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{d(p)}{p^s} + \frac{d(p^2)}{p} + ...\right) \\ &= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} + \frac{2}{p^{2s}} + \frac{3}{p^{3s}} + \frac{5}{p^{5s}} + ...\right). \end{aligned}$$

Exemple 2.4.5 *On a*

$$D_{|\mu|}(s) = \prod_p (1 + |\mu(p)|\, p^{-s} + \left|\mu(p^2)\right| p^{-2s} + \cdots)$$

alors

$$\begin{aligned} D_{|\mu|}(s) &= \prod_p (1+p^{-s}) = \prod_p (1+p^{-s}) \frac{(1-p^{-s})}{(1-p^{-s})} = \prod_p \frac{(1-p^{-2s})}{(1-p^{-s})} \\ D_{|\mu|}(s) &= \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} \end{aligned}$$

Exemple 2.4.6 *On montre que*

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = D_\lambda(s) = \prod_p (1+p^{-s})^{-1}$$

si on multiplié par $\frac{(1-p^{-s})}{(1-p^{-s})}$ *donc*

$$\begin{aligned} D_\lambda(s) &= \prod_p (1+p^{-s})^{-1} = \prod_p (1+p^{-s})^{-1} \frac{(1-p^{-s})}{(1-p^{-s})} \\ &= \prod_p \frac{(1-p^{-s})}{(1-p^{-2s})} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \end{aligned}$$

Exemple 2.4.7 *Pour* $\sigma > 2$, *on a :*

$$D_\varphi(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

La fonction indicatrice d'Euler définit par

$$\varphi(n) = \sum_{\substack{m \leq n \\ (m,n)=1}} 1$$

est multiplicative, sachant que $\varphi(p^k) = p^k(1 - p^{-1})$.
Donc le produit eulérien égale :

$$\begin{aligned}
D_\varphi(s) &= \prod_p \left(1 + p^{-s}p(1-p^{-1}) + p^{-2s}p^2(1-p^{-1}) + \cdots\right) \\
&= \prod_p (1 + (1-p^{-1})(p^{1-s} + p^{2(1-s)} + \cdots)) \\
&= \prod_p \left(1 + (1-p^{-1})p^{1-s}\left(\frac{1}{1-p^{1-s}}\right)\right) \\
&= \prod_p (1 + \frac{p^{1-s} - p^{-s}}{1-p^{1-s}}) \\
&= \prod_p \frac{1-p^{-s}}{1-p^{1-s}} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}
\end{aligned}$$

2.5 La valeur moyenne de la série de Dirichlet

Théorème 2.5.1 *Soient deux séries de Dirichlet* $D_f(s)$ *et* $D_g(s)$ *avec une abscisse de convergence absolue respectivement* σ_1, σ_2 *alors pour* $a > \sigma_1$ *et* $b > \sigma_2$ *on a*

$$\lim_{T \to +\infty} \int_{-T}^{T} D_f(a+it)D_g(b-it)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)g(n)}{n^{a+b}}.$$

Démonstration :

On a

$$\begin{aligned} D_f(a+it)D_g(b-it) &= \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{f(m)}{m^{a+it}}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g(n)}{n^{b-it}}\right) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(m)g(n)}{m^a n^b}\left(\frac{n}{m}\right)^{it} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)g(n)}{n^{a+b}} + \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{\substack{n=1\\ m\neq n}}^{+\infty} \frac{f(m)g(n)}{m^a n^b}\left(\frac{n}{m}\right)^{it}. \end{aligned}$$

Maintenant

$$\left|\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{\substack{n=1\\ m\neq n}}^{+\infty} \frac{f(m)g(n)}{m^a n^b}\left(\frac{n}{m}\right)^{it}\right| \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{|f(m)|}{m^a}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|g(n)|}{n^b},$$

donc la série est absolument convergente et aussi uniformément convergente pour tout t. D'où on peut intègre terme par terme et diviser par $2T$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} D_f(a+it)D_g(b-it)dt \\ =\ & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)g(n)}{n^{a+b}} + \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{\substack{n=1\\ m\neq n}}^{+\infty} \frac{f(m)g(n)}{m^a n^b}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{it\log\left(\frac{n}{m}\right)}dt, \end{aligned}$$

mais pour $m \neq n$

$$\begin{aligned} \int_{-T}^{T} e^{it\log\left(\frac{n}{m}\right)}dt &= \left[\frac{e^{it\log\left(\frac{n}{m}\right)}}{i\log\left(\frac{n}{m}\right)}\right]_{-T}^{T} = \frac{2e^{iT\log\left(\frac{n}{m}\right)} - e^{-iT\log\left(\frac{n}{m}\right)}}{2i\log\left(\frac{n}{m}\right)} \\ &= \frac{2\sin\left[T\log\frac{n}{m}\right]}{\log\frac{n}{m}}, \end{aligned}$$

donc on obtient :

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} D_f(a+it)D_g(b-it)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)g(n)}{n^{a+b}} + \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{\substack{n=1\\ m\neq n}}^{+\infty} \frac{f(m)g(n)}{m^a n^b}\frac{\sin\left[T\log\frac{n}{m}\right]}{T\log\frac{n}{m}},$$

encore, la série double converge uniformément avec considération de T, comme $\frac{\sin x}{x}$est bornée pour tous x. Donc on peut passer vers la limite terme par terme pour obtenir l'expression de théorème.

Théorème 2.5.2 *Si* $D_f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *absolument convergente pour* $a > \sigma_a$ *on a*

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} |D_f(\sigma+it)|^2 \, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|f(n)|^2}{n^{2\sigma}}. \tag{2.2}$$

Démonstration

La formule (2.2) est vrai pour $g(n) = \overline{f(n)}$ dans le théorème (2.5.1).

Exemples :

1. On a $f(n) = 1$

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} |\zeta(\sigma+it)|^2 \, dt,$$

donc

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} |\zeta(\sigma+it)|^2 \, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\sigma}} = \zeta(2\sigma).$$

2. On a $f(n) = \mu(n)$

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} |\zeta(\sigma+it)|^{-2} \, dt,$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s} = \prod_p (1+p^{-s}) = \prod_p \frac{(1-p^{-2s})}{(1-p^{s})},$$

donc

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} |\zeta(\sigma+it)|^{-2} \, dt = \prod_p \frac{(1-p^{-2\sigma})}{(1-p^{-\sigma})} = \frac{\zeta(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)}.$$

3. On a $f(n) = (-1)^k \frac{\log^k n}{n^s}$

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} \left|\zeta^{(k)}(\sigma+it)\right|^2 dt$$

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} \left|\zeta^{k}(\sigma+it)\right|^2 dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log^{2k} n}{n^{2\sigma}} = \zeta^{(2k)}(2\sigma)$$

Chapitre 3

Quelques propriétés de la fonction zêta de Riemann

En théorie analytique des nombres, la fonction zêta de Riemann est une fonction analytique complexe introduite par Riemann en 1859 dans un article de théorie des nombres, $\zeta(s)$ est essentielle dans la théorie des nombres premiers. La position de ses zéros complexes est liée à la répartition des nombres premiers. Elle est aussi importante comme fonction modèle dans la théorie des séries de Dirichlet donnée par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots\right) \qquad \mathrm{Re}(s) = \sigma > 1$$

3.1 Prolongement de $\zeta(s)$ et sa dérivée $\zeta'(s)$

Théorème 3.1.1 .

1$-$*La fonction* $\zeta(s)$ *se prolonge analytiquement au demi plan* $\mathrm{Re}(s) > 0$. *Elle est holomorphe sauf au point* $s = 1$ *qui est un pôle simple en lequel le résidu égale* 1. *La formule de ce prolongement est connue sous le nom de la formule habituelle de la fonction* $\zeta(s)$, *elle s'exprime par l'égalité suivante tel que* $N \geq 1$ *est un entier arbitraire*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{(s-1)N^{s-1}} - \frac{1}{2N^s} - s\int_N^{+\infty} \frac{B_1(t)}{t^{s+1}} dt. \tag{3.1}$$

2$-$*La fonction* $\zeta^{'}(s)$ *se prolonge analytiquement au demi plan* $(\mathrm{Re}(s)>0)$. *Elle y est holomorphe sauf au point* $s=1$ *qui est un pôle double en lequel le résidu égale* -1. *La formule de ce prolongement s'exprime par l'égalité suivante telle que* $N\geq 1$ *est un entier arbitraire :*

$$\zeta^{'}(s)=\sum_{n=1}^{N}\frac{\log n}{n^s}-\frac{\log N}{(s-1)N^{s-1}}-\frac{\log N}{(s-1)N^{s-1}}-\frac{\log N}{2N^s}-s\int_{N}^{+\infty}\frac{B_1(t)(1-s\log t)}{t^{s+1}}dt. \tag{3.2}$$

Démonstration :

1$-$Dans le demi plan $\sigma\geq 1$ et $\forall N\geq 1$, on a

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\sum_{n\geq N}\frac{1}{n^s}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\lim_{M\to+\infty}\left(\sum_{N<n\leq M}f(n)\right),$$

l'application de théorème suivant

Théorème 3.1.2 *Soit* f *une fonction réelle continûment dérivable sur l'intervalle* $[a,b]$ *où* $a,\ b\in\mathbb{Z}$.

Pour tout n *tel que* $a<n\leq b$, *on a*

$$f(n)=\int\limits_{n-1}^{n}f(t)dt+\int\limits_{n-1}^{n}\{t\}f'(t)dt\qquad(\{t\}=t-[t])$$

Voir [5]

$$\sum_{N<n\leq M}f(n)=\int_a^b f(t)dt+\int_a^b\{t\}\,f^{'}(t)dt.$$

Posons

$$a=N,b=M,f(t)=\frac{1}{t^s},f^{'}(t)=\frac{-s}{t^{s+1}}$$

$$\sum_{N<n\leq M}f(n)=\sum_{N<n\leq M}\frac{1}{n^s}=\int_N^M\frac{1}{t^s}dt-s\int_N^M\{t\}\,\frac{1}{t^{s+1}}dt.$$

On a

$$
\begin{aligned}
B_1(t) &= t-[t]-\frac{1}{2} \text{ et } \{t\}=t-[t] \\
&\Rightarrow \{t\}=B_1(t)+\frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
\sum_{N<n\leq M} f(n) &= \frac{1}{1-s}\left[\frac{1}{t^{s-1}}\right]_N^M - s\int_N^M \frac{B_1(t)}{t^{s+1}}dt+\frac{1}{2}\int_N^M \frac{-s}{t^{s+1}}dt \\
&= \frac{1}{(1-s)}\left[\frac{1}{M^{s-1}}-\frac{1}{N^{s-1}}\right]-\frac{1}{2N^s}+\frac{1}{2N^s}-s\int_N^M \frac{B_1(t)}{t^{s+1}}dt.
\end{aligned}
$$

Puisque $\sigma>1$, alors$\int_N^M \frac{B_1(t)}{t^{s+1}}dt$ est convergente et si $M\to+\infty$, nous impliquons :

$$
\lim_{M\to+\infty}\frac{1}{M^{s+1}},\lim_{M\to+\infty}\frac{1}{2M^s}
$$

$$
\lim_{M\to+\infty}\sum_{N<n\leq M} f(n)=\frac{1}{(1-s)\,N^{s-1}}-\frac{1}{2N^s}-s\int_N^M \frac{B_1(t)}{t^{s+1}}dt,
$$

donc la formule est égale :

$$
\zeta(s)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\frac{1}{(1-s)\,N^{s-1}}-\frac{1}{2N^s}-s\int_N^M \frac{B_1(t)}{t^{s+1}}dt.
$$

2−La formule (3.2) s'obtient par dérivation de la formule (3.1) par rapport à la variable s ou par une application du théorème (1.5.1) [5] posons

$$
a=N,b=M,f(t)=\frac{\log t}{t^s},f^{'}(t)=\frac{1-s\log t}{t^{s+1}}
$$

$$
\zeta^{'}(s)=\sum_{n=1}^{N}\frac{\log N}{n^s}+\sum_{n\geq N}\frac{\log N}{n^s}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\lim_{M\to+\infty}\left(\sum_{M<n\leq N} f(n)\right)
$$

$$
\zeta^{'}(s)=-\sum_{n=1}^{N}\frac{\log N}{n^s}-\lim_{M\to+\infty}\left(s\int_N^M \frac{\log t}{t^s}dt+\frac{1}{2}\int_N^M \frac{(1-s\log t)\left(B_1(t)+\frac{1}{2}\right)}{t^{s+1}}dt\right)
$$

Nous utilisons l'intégrale par partie avec $M \to +\infty$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\sum_{N<n\leq M} f(n) &= \int_N^M \frac{\log t}{t^s}dt + \frac{1}{2}\int_N^M \frac{1}{t^{s+1}}dt + s\int_N^M \frac{B_1(t)\log t}{t^{s+1}}dt + \frac{1}{2}\int_N^M \frac{-s\log t}{t^{s+1}}dt \\ &= \frac{\log N}{(1-s)\,N^{s-1}} - \frac{1}{(1-s)^2N^{s-1}} + \int_N^{+\infty} \frac{B_1(t)(1-\log t)}{t^{s+1}}dt + \frac{\log N}{t^{s+1}},\end{aligned}$$

donc

$$\zeta^{'}(s) = -\sum_{n=1}^{N}\frac{\log N}{n^s} - \frac{\log N}{(s-1)N^{s-1}} - \frac{1}{(s-1)^2N^{s-1}} + \frac{\log N}{2N^s} - s\int_N^{+\infty}\frac{B_1(t)(1-s\log t)}{t^{s+1}}dt.$$

3.2 Majoration de $\zeta(s)$ et de $\zeta^{'}(s)$ dans le domaine $D = \{s = \sigma + it/\ \sigma \geq 1$ et $|t| \geq 2\}$

Théorème 3.2.1 *Uniformément pour $s \in D$, on a :*

$$|\zeta(s)| \leq A\log|t| \quad et \quad |\zeta'(s)| \leq M\log^2|t|$$

tel que

$$A = 1 + \frac{4+\sqrt{5}}{2\log 2} = 5.498\cdots$$

et

$$M = 1 + \frac{\log 2 + (3+2\sqrt{5})(1+\log 2)}{4\log^2 2} = 7.9437\cdots.$$

Démonstration :

Majoration de $\zeta(s)$

On a la formule habituelle de $\zeta(s)$ implique

$$|\zeta(s)| \leq \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\sigma} + \frac{1}{|s-1|\,N^{\sigma-1}} + \frac{1}{2N^\sigma} + |s|\int_N^{+\infty}\frac{|B_1(x)|}{x^{s+1}}dx,$$

on sait que

$$B_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |B_1(x)| \leq \left|x - [x] - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2},$$

alors

$$\begin{aligned}
|s|\int_N^{+\infty}\frac{|B_1(x)|}{x^{\sigma+1}}dx &\leq |s|\,\frac{1}{2}\int_N^{+\infty}\frac{1}{x^{\sigma+1}}dx=\frac{|s|}{2\sigma N^\sigma}\\
&\leq \frac{\sqrt{\sigma^2+t^2}}{2\sigma N^\sigma}.
\end{aligned}$$

On a pour $\sigma=\mathrm{Re}(s)\geq 1$ la fonction $\frac{\sqrt{\sigma^2+t^2}}{2\sigma N^\sigma}$ est décroissante, donc

$$|s|\int_N^{+\infty}\frac{|B_1(x)|}{x^{\sigma+1}}dx\leq\frac{\sqrt{\sigma^2+t^2}}{2\sigma N^\sigma}\leq\frac{\sqrt{1+t^2}}{2\sigma N^\sigma},$$

pour $\sigma\geq 1$, on a aussi

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\sigma}\leq\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}<1+\log N.$$

Pour le choix $N=[|t|]$ et $(1\leq|t|-1\leq N<|t|)$ on a

$$\frac{1}{2N^\sigma}<\frac{1}{2N}<\frac{\log|t|}{2(|t|-1)\log|t|}<\frac{\log|t|}{2\log 2},$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|s-1|\,N^{\sigma-1}} &\leq \frac{1}{|t|}\frac{\log|t|}{\log|t|}\leq\frac{\log|t|}{2\log 2}\\
1+\log N &\leq \left(1+\frac{18}{\log|t|}\right)\log|t|\leq\left(1+\frac{1}{\log 2}\right)\log|t|\\
|s|\int_N^{+\infty}\frac{|B_1(x)|}{x^{\sigma+1}}dx &\leq \frac{\sqrt{1+t^2}}{2\sigma N^\sigma}\leq\frac{\sqrt{1+t^2}}{2(|t|-1)\log|t|}\leq\frac{\sqrt{5}\log|t|}{2\log 2}.
\end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
|\zeta(s)| &\leq \left(1+\frac{1}{\log 2}\right)\log|t|+\frac{\log|t|}{2\log 2}+\frac{\log|t|}{2\log 2}+\frac{\sqrt{5}\log|t|}{2\log 2}\\
|\zeta(s)| &\leq \left(1+\frac{4+\sqrt{5}}{2\log 2}\right)\log|t|\,.
\end{aligned}$$

La formule habituelle de $\zeta^{'}(s)$ tel que $(|t| \geq 2)$ et $(\mathrm{Re}(s) \geq 1)$ implique

$$\left|\zeta^{'}(s)\right| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{\log n}{n^{\sigma}} + \frac{\log N}{|s-1| N^{\sigma-1}} + \frac{\log N}{2N^{\sigma}} + \frac{1}{(s-1)^{2} N^{\sigma-1}} + |s| \int_{N}^{+\infty} \frac{|B_1(x)| (1 + |s| \log x)}{x^{s+1}} dx,$$

alors

$$|s| \int_{N}^{+\infty} \frac{|B_1(x)| (1 + |s| \log x)}{x^{\sigma+1}} dx \leq \frac{1}{2} \int_{N}^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx + |s| \frac{1}{2} \int_{N}^{+\infty} \frac{\log x}{x^{\sigma+1}} dx$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\log n}{n^{\sigma}} \leq \log^2 N, \frac{\log N}{|s-1| N^{\sigma-1}} \leq \frac{\log N}{|t|}, \frac{1}{(s-1)^{2} N^{\sigma-1}} \leq \frac{1}{|t|^{2}}, \frac{\log N}{2N^{\sigma}} \leq \frac{\log N}{2(|t|-1)}.$$

L'intégration par partie avec $u = \log(x)$ et $u^{'} = \frac{1}{x}$, $v = -\frac{1}{\sigma x^{\sigma}}$et $v^{'} = x^{-\sigma-1}$ nous donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{N}^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx + |s| \frac{1}{2} \int_{N}^{+\infty} \frac{\log x}{x^{\sigma+1}} dx &= \frac{1}{2\sigma N^{\sigma}} - \frac{|s| \log N}{2\sigma N^{\sigma}} - \frac{|s|}{2\sigma^2 N^{\sigma}} \\ &= \frac{\sigma + |s| (1 + \log N)}{2\sigma^2 N^{\sigma}} = \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + t^2}(1 + \log N)}{2\sigma^2 N^{\sigma}}. \end{aligned}$$

Pour $\sigma = \mathrm{Re}(s) \geq 1$, la fonction $\sigma \longmapsto \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + t^2}(1+\log N)}{2\sigma^2 N^{\sigma}}$ est décroissante, alors

$$\frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + t^2}(1 + \log N)}{2\sigma^2 N^{\sigma}} \leq \frac{1 + \sqrt{1 + t^2}(1 + \log N)}{2N},$$

avec le choix $N = [|t|]$ et $1 \leq |t| - 1 \leq N < |t|$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \frac{\log n}{n^{\sigma}} &\leq \log^2 N \leq \log^2 |t| \\ \frac{\log N}{2N^{\sigma}} &< \frac{\log N}{2N} < \frac{\log^2 |t|}{2(|t|-1) \log^2 |t|} < \frac{\log 2 \log^2 |t|}{2 \log^2 2}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{|s-1| N^{\sigma-1}} &\leq \frac{\log |t|}{|t|} = \frac{1}{|t|} \frac{\log^2 |t|}{\log |t|} \leq \frac{\log^2 |t|}{2 \log 2} \\ \frac{1}{(s-1)^{2} N^{\sigma-1}} &\leq \frac{1}{|t|^{2}} = \frac{1}{|t|^{2} \log^2 |t|} \log^2 |t| \leq \frac{1}{2^2 \log^2 2} \log^2 |t| \\ \frac{1 + \sqrt{1 + t^2}(1 + \log N)}{2N} &\leq \frac{1 + \sqrt{1 + t^2}(1 + \log |t|)}{2(|t|-1) \log^2 |t|} \log^2 |t| \leq \frac{1 + \sqrt{5}(1 + \log 2)}{2 \log^2 2} \log^2 |t|. \end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
M &= 1+\frac{2\log 2}{2^2\log^2 2}+\frac{1}{2^2\log^2 2}+\frac{2\log 2}{2^2\log^2 2}+\frac{2+2\sqrt{5}(1+\log 2)}{2^2\log^2 2} \\
&= 1+\frac{\log 2+3(1+\log 2)+2\sqrt{5}(1+\log 2)}{2^2\log^2 2} \\
&= 1+\frac{\log 2+\left(3+2\sqrt{5}\right)(1+\log 2)}{2^2\log^2 2}.
\end{aligned}$$

Lemme 3.2.1 *Pour* $\mathrm{Re}\,(s)=\sigma>1$ *on a*

$$\zeta(s)=O(\sigma-1)^{-1}.$$

<u>Démonstration</u> :

On a pour tout $\sigma>1$

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}\right| &\leq \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\sigma}\leq 1+\int_1^{+\infty}t^{-\sigma}dt \\
&= \frac{1}{1-\sigma}\left[t^{1-\sigma}\right]_1^N=\frac{N^{1-\sigma}}{1-\sigma}+\frac{1}{\sigma-1},
\end{aligned}$$

si $N\to\infty$ alors

$$\zeta(s)=O(\sigma-1)^{-1}.$$

3.3 Equation fonctionnelle pour la fonction ζ de Riemann

Théorème 3.3.1 *Pour toute* $s\neq 1$, *on a la fonction*

$$Z(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s), \tag{3.3}$$

admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ *tout entier. Elle satisfait à l'équation fonctionnelle*

$$Z(1-s)=Z(s),$$

alors

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{(1-s)}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s), \tag{3.4}$$

ses seuls pôles sont en 0 *et* 1*, ils sont simples, de résidus respectifs* -1 *et* 1*. Tous les zéros de* Z *sont tel que* $0<\mathrm{Re}(s)\leq 1$.

<u>Démonstration</u>

Nous calculons l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1}e^{-n^2\pi x}dx$, avec le changement de variable $u=n^2\pi x$, on a alors $dx=\frac{du}{n^2\pi}$, donc

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1}e^{-n^2\pi x}dx &= \int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{n^2\pi}\right)^{\frac{s}{2}-1}e^{-u}\frac{du}{n^2\pi}\\ &= n^2\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)n^{-s}.\end{aligned}$$

Pour $\sigma>1$

$$Z(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{n^{-s}}=\sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1}e^{-n^2\pi x}dx$$

et

$$\sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty}\left|x^{\frac{s}{2}-1}e^{-n^2\pi x}\right|dx\leq \pi^{-\frac{\sigma}{2}}\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)\zeta(\sigma)$$

donc on peut changer la somme avec l'intégrale

$$Z(s)=\int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\sum_{n\geq 1}e^{-n^2\pi x}dx$$

d'après le lemme (1.2.1)

$$Z(s)=\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\omega(x)dx+\int_1^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\omega(x)dx$$

$$\begin{aligned}&= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\omega\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\right]dx+\int_1^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\omega(x)dx\\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1-\frac{1}{2}}dx-\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}dx\right)+\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\omega\left(\frac{1}{x}\right)dx+\int_1^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\omega(x)dx.\end{aligned}$$

Posons $x = \frac{1}{u}$, alors $dx = -\frac{du}{u^2}$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}}{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right]_0^1 + \left[\frac{x^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}}\right]_0^1\right) + \int_0^1 \frac{1}{u^2}^{\frac{s}{2}+\frac{1}{2}} \omega\left(u\right) du + \int_1^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\omega(x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{s-1}{2}} - \frac{1}{\frac{s}{2}}\right) + \int_1^{+\infty} \left(u^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + u^{\frac{s}{2}-1}\right)\omega(u)du$$

$$Z(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^{+\infty} \left(x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}\right)\omega(x)dx,$$

l'intégrale converge pour toute valeur de s

$$\omega(x) = \sum_{n\geq 1} e^{-n^2\pi x} = o\left(e^{-\pi^2 x}\right),$$

en effet

$$e^{\pi^2 x}\omega(x) = \sum_{n\geq 0} e^{-n^2\pi x},$$

et $\left|e^{-n^2\pi x}\right| \leq e^{-n^2\pi^2}$ si $x > 1$ la série converge uniformément et donc

$$\lim_{x\to\infty} e^{\pi^2 x}\omega(x) = 0,$$

alors

$$\left|\left(x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}\right)\omega(x)\right| \leq \left(x^{\frac{\sigma}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{\sigma}{2}-1}\right)\omega(x).$$

D'après cette majoration, l'intégrale définit une fonction holomorphe sur tout compact K de $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{C}$. La fonction $Z(s) - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$ holomorphe sur $\sigma > 1$ avec la fonction $g(x) = \int_1^{+\infty}\left(x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}\right)\omega(x)dx$, holomorphe sur $\mathbb{C}$. La fonction (3.3) est valable pour tout $s \in \mathbb{C}$, $Z(s)$ est donc méromorphe avec deux pôles simples en 0 et 1. Cette formule est invariante dans le changement $s \leftrightarrow 1-s$ donc donne l'équation fonctionnelle

$$Z(s) = Z(1-s).$$

3.4 Les zéros de zêta de Riemann

Proposition 3.4.1 .

1_ La fonction zêta s'annulle pour $s = -2n$.

*2_* $\zeta(s) \neq 0$ *pour* $\mathrm{Re}(s) = \sigma > 1$.

*3_* $\zeta(s)$ *ne s'annulle pas sur la ligne* $\mathrm{Re}(s) = 1$.

Démonstration

1. Les zéros de la fonction zêta situés dans le demi-plan des nombres complexes de partie réelle strictement négative, sont les entiers pairs strictement négatifs, appelés les zéros triviaux.
   Si on pose $\mathrm{Re}(s) < 0$, alors $\mathrm{Re}(1-s) > 1$, rappelons l'équation fonctionnelle de (3.4) remarquons que le côté droite ne s'annule pas. Mais $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ ayant des pôles en les points $\frac{s}{2} = -n$ tel que $n = 1, 2, ...,$ donc $\zeta(s)$ est nulle pour $s = -2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Afin de vérifié que $\zeta(s) \neq 0$ pour $\mathrm{Re}(s) > 1$. On utilise le développement en série de Taylor pour justifier que pour $|u| < 1$

$$\log(1-u) = -\sum_{k\geq 1} \frac{u^k}{k},$$

si on pose $u = p^{-s}$, on obtient

$$\log(1-p^{-s}) = -\sum_{k\geq 1} \frac{p^{-sk}}{k},$$

pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, on trouve

$$\sum_{p} -\log(1-p^{-s}) = \sum_{p}\sum_{k\geq 1} \frac{p^{-sk}}{k}$$

$$\zeta\left(s\right) = \prod_{p} \frac{1}{(1-p^{-s})} = \exp(\sum_{p}\sum_{k\geq 1} \frac{p^{-sk}}{k})$$

$$\forall s \in \Omega_1 \ \zeta(s) = \prod_{p\in P} (1-p^{-s})^{-1}.$$

Lemme 3.4.1 *Pour tout $t \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\zeta(1+it) \neq 0$.*

La preuve de lemme repose sur les théorèmes suivants :

Théorème 3.4.2 *(de La Vallé_Poussin).*
Soit une série de Dirichlet $D_f(s) = \sum_n \frac{f(n)}{n^s}$ à coefficients positifs ou nuls d'abscisse de convergence σ_c, alors on a pour $\sigma > \sigma_c$

$$3D_f(\sigma) + 4\,\mathrm{Re}\,(D_f(\sigma+it)) + \mathrm{Re}\,(D_f(\sigma+2it)) \geq 0. \tag{3.5}$$

Démonstration

Posons $v(\alpha) = 3 + 4\cos\alpha + 2\cos\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}
3 + 4\cos\alpha + 2\cos\alpha &= 3 + 4\cos\alpha + \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) \\
&= 3 + 4\cos\alpha - (1 - \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha \\
&= 2 + 4\cos\alpha + 2\cos^2\alpha \\
&= 2(1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha) = 2(1+\cos\alpha)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Or $3D_f(\sigma) + 4\,\mathrm{Re}\,(D_f(\sigma+it)) + \mathrm{Re}\,(D_f(\sigma+2it))$, alors

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{f(n)v(t\log(n))}{n^\sigma}$$

implique

$$3D_f(\sigma) + 4\,\mathrm{Re}\,(D_f(\sigma+it)) + \mathrm{Re}\,(D_f(\sigma+2it)) \geq 0$$

Théorème 3.4.3 *Pour* $\mathrm{Re}(s) > 1$, *on a*

$$\left|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+it)\zeta(\sigma+2it)\right| \geq 1. \tag{3.6}$$

Démonstration

Sur le domaine $\sigma > 1$, on peut définir

$$\begin{aligned}
\log(\zeta(s)) &= \sum_{p\in P} \log(1-p^{-s})^{-1} \\
&= \sum_{p\in P} -\log(1-p^{-s}),
\end{aligned}$$

comme $|p^{-s}| < 1$, on a

$$\begin{aligned}
\log\left(\zeta(s)\right) &= \sum_{p\in P}\sum_{n\geq 1}\frac{p^{-ns}}{n} \\
\zeta(s) &= \exp\left(\sum_{p\in P}\sum_{n\geq 1}\frac{p^{-ns}}{n}\right),
\end{aligned}$$

si $s = \exp(z)$ alors $|s| = \exp\left(\mathrm{Re}(z)\right)$, donc

$$\begin{aligned}
|\zeta(s)| &= \exp\left(\mathrm{Re}\left(\sum_{p\in P}\sum_{n\geq 1}\frac{p^{-ns}}{n}\right)\right) \\
&= \exp\left(\sum_{p\in P}\sum_{n\geq 1}\mathrm{Re}\left(\frac{p^{-ns}}{n}\right)\right),
\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}
\frac{p^{-ns}}{n} &= \frac{p^{-n\sigma}p^{-int}}{n} = \frac{p^{-n\sigma}}{n}\exp(itn\log p) \\
&= \frac{p^{-n\sigma}}{n}\left(\cos(n\log(p)t - i\sin(n\log(p)t)\right),
\end{aligned}$$

donc

$$|\zeta(s)| = \exp\left(\sum_{p\in P}\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(n\log(p))}{np^{n\sigma}}\right)$$

pour tout $k\in\mathbb{N}$ on a donc

$$|\zeta(s)|^k = \exp\left(\sum_{p\in P}\sum_{n\geq 1}\frac{k\cos(n\log(p))}{np^{n\sigma}}\right),$$

grâce aux propriétés de l'exponentielle on a :

$$\begin{aligned}
\left|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+it)\zeta(\sigma+2it)\right| &= |\zeta(\sigma)|^3\,|\zeta(\sigma+it)|^4\,|\zeta(\sigma+2it)| \\
&\quad \exp\left(\sum_{p\in P}\sum_{n\geq 1}\frac{3+4\cos(n\log(p))+\cos(2n\log(p))}{np^{n\sigma}}\right).
\end{aligned}$$

D'après le théorème (2.4.2), or $\alpha = n\log(p)t$ alors l'argument est positif d'où

$$\left|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+it)\zeta(\sigma+2it)\right| \geq e^0 = 1.$$

Démonstration : (de Lemme)
D'après la formule habituelle de la fonction $\zeta(s)$, donc on peut montrer que pour $s=\sigma$

$$\zeta(\sigma) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\sigma} + \frac{1}{(1-\sigma)\,N^{\sigma-1}} - \frac{1}{2N^\sigma} - \sigma \int_N^M \frac{B_1(t)}{t^{\sigma+1}} dt,$$

$\zeta(\sigma)$ tend vers l'infini si $\left(\sigma \underset{\rightarrow}{\geq} 1\right)$ et $(1-\sigma)\,\zeta(\sigma) \rightarrow 1$ si $\left(\sigma \underset{\rightarrow}{\geq} 1\right)$.
Donc $\zeta(1+it) \neq 0$ pour $t=0$, et pour $t \neq 0$. On utilise le théorème (2.4.2), donnant l'inégalité

$$\left|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+it)\zeta(\sigma+2it)\right| \geq 1,$$

implique

$$\left((1-\sigma)\,\zeta(\sigma)\right)^3 \left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{(1-\sigma)}\right|^4 \left|\zeta(\sigma+2it)\right| \geq \frac{1}{(1-\sigma)} \quad \text{pour } \sigma > 1,$$

supposons que $\exists t \neq 0, \zeta(1+it) = 0$, donc si $\left(\sigma \underset{\rightarrow}{\geq} 1\right)$, alors

$$\lim_{\sigma \underset{\rightarrow}{\geq} 1} \left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{(1-\sigma)}\right|^4 = \lim_{\sigma \underset{\rightarrow}{\geq} 1} \left|\frac{\zeta(\sigma+it) - \zeta(1+it)}{1-\sigma}\right|^4 = \left|\zeta'(\sigma+it)\right|^4,$$

ainsi

$$\lim_{\sigma \underset{\rightarrow}{\geq} 1} \left((1-\sigma)\,\zeta(\sigma)\right)^3 = 1,$$

et

$$\lim_{\sigma \underset{\rightarrow}{\geq} 1} \left|\zeta(\sigma+2it)\right| = \left|\zeta(1+2it)\right|,$$

finalement

$$\lim_{\sigma \underset{\rightarrow}{\geq} 1} \left((1-\sigma)\,\zeta(\sigma)\right)^3 \left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{(1-\sigma)}\right|^4 \left|\zeta(\sigma+2it)\right| = \left|\zeta'(\sigma+it)\right|^4 \left|\zeta(1+2it)\right|,$$

d'autre part on a $\lim_{\sigma \underset{\rightarrow}{\geq} 1} \frac{1}{(1-\sigma)} = +\infty$, ce qui implique que $\left|\zeta^{'}(\sigma+it)\right|^{4} |\zeta(1+2it)| \geq +\infty$, contradiction avec l'hypothèse.

zêta de Riemann sur la bande critique $\mathbf{0} < \boldsymbol{\sigma} < 1$

Conjecture 3.4.4 *(de Riemann)*
Tous les zéros non triviaux de la fonction $\zeta(s)$ sont sur la ligne critique $\sigma = \frac{1}{2}$.

Théorème 3.4.5 *Les zéros non triviaux de $\zeta(s)$, s'ils existent, se trouvent dans le domaine* $0 < \sigma < 1$.

<u>**Démonstration**</u>

Faisons quelques observations sur les zéros de la fonction zêta dans la bande critique. On note

$$\overline{\frac{1}{n^s}} = \overline{e^{-s\log(n)}} = e^{\overline{-s\log(n)}} = \frac{1}{n^{\overline{s}}},$$

donc

$$\zeta(\overline{s}) = \overline{\zeta(s)}.$$

Par conséquent si $s = \sigma + it$ est un zéro de la fonction zêta dans la bande critique, le conjugué $s = \sigma - it$ un zéro aussi et d'après l'équation fonctionnelle $Z(s) = Z(1-s)$ de la fonction zêta de Riemann, si $\rho = \beta + i\gamma$ est un zéro non trivial de $\zeta(s)$, alors $1-\rho$ est aussi un zéro, donc les zéros non triviaux de $\zeta(s)$ sont sur la ligne critique $\sigma = \frac{1}{2}$ et aussi

$$\rho = \beta + i\gamma, \quad \overline{\rho} = \beta - i\gamma, \quad 1-\rho = (1-\beta) - i\gamma, \quad \overline{1-\rho} = (1-\beta) + i\gamma.$$

Le schéma suivant donne l'ensemble des zéros de la fonction zêta qui nous obtenue

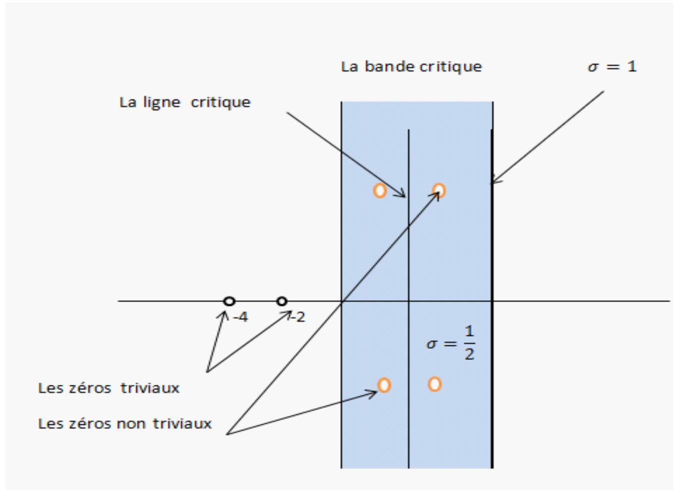

Fig : zéros de la fonction zêta

Théorème 3.4.6 *Soit $g(s)$ fonction entière dans $\mathbb{C}$, $g(s)$ est différent de zéro. Soit ϱ l'ensemble des zéros de $g(s)$ et soit $v_\rho(g)$ la multiplicité de g en ρ, supposons que*

$$\log \max_{|s|=R} |g(s)| \ll_\varepsilon (R+1)^{1+\varepsilon}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ et $R > 0$, alors

$$f(s) = \prod_{\substack{\rho \in \varrho \\ \rho \neq 0}} \left(\left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}} \right)^{v_\rho(g)},$$

et

$$g(s) = s^{v_0} e^{A+Bs} f(s) = s^{v_0} e^{A+Bs} f(s).$$

<u>Démonstration</u> (voir [2], p328)
On applique ce théorème sur la fonction $\zeta(s)$, mais on ne peut pas appliquer ce théorème directement car la fonction zêta n'est pas une fonction entière. Néanmoins, on connais que $\zeta(s)$ ayant un unique pôle $(s = 1)$ d'ordre 1. D'où $g(s) = (s-1)\,\zeta(s)$ est une fonction entière

$$\zeta(s) = \frac{1}{(s-1)} e^{A+Bs} \prod_{\substack{\rho_n \\ \rho_n \neq 0}} \left(\left(1 - \frac{s}{\rho_n}\right) e^{\frac{s}{\rho_n}} \right)^{v_\rho(g)},$$

$\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, on peut préciser A et v_0 dans l'expression précédente, on obtient

$$\zeta(s) = \frac{1}{2(s-1)} e^{Bs} \prod_{\substack{\rho_n \\ \rho_n \neq 0}} \left(\left(1 - \frac{s}{\rho_n}\right) e^{\frac{s}{\rho_n}} \right)^{v_\rho(g)} .$$

Théorème 3.4.7 *Soit $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ sont les zéros complexes de la fonction zêta, la dérivée logarithmique de la fonction zêta est donnée par l'équation suivante*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{s-1} + \sum_{\rho_n} \left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right) + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n} \right) + B. \tag{3.7}$$

<u>Démonstration</u>

On a déjà vu la formule $\zeta(s) = \frac{1}{2(s-1)} e^{A+Bs} \prod_{\substack{\rho_n \\ \rho_n \neq 0}} \left(\left(1 - \frac{s}{\rho_n}\right) e^{\frac{s}{\rho_n}} \right)^{v_\rho(g)}$, donc

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= (\log(\zeta(s))' = \left(\log \frac{1}{2(s-1)} e^{A+Bs} \prod_{\substack{\rho_n \\ \rho_n \neq 0}} \left(\left(1 - \frac{s}{\rho_n}\right) e^{\frac{s}{\rho_n}} \right)^{v_\rho(g)} \right)' \\
&= \left(c - \log(s-1) + Bs + \sum_{\rho_n} v_\rho(g) \left(\left(1 - \frac{s}{\rho_n}\right) + \frac{s}{\rho_n} \right) \right)' \\
&= \frac{1}{s-1} + B + \sum_{\rho_n} \left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right) \\
&= \frac{1}{s-1} + B + \sum_{\substack{\rho_n \\ \gamma_n \neq 0}} v_\rho(g) \left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right) + \sum_{\substack{\rho_n \\ \gamma_n = 0}} v_\rho(g) \left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right),
\end{aligned}$$

car on définit les zéros de la fonction zêta $\rho_n = -2n$ tel que $\mathrm{Im}(\rho_n) = 0$, donc on obtient

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{s-1} + B + \sum_{\substack{\rho_n \\ \gamma_n \neq 0}} \frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}.$$

Théorème 3.4.8 *Supposons que $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$, $n = 1, 2, 3, ...$, sont les zéros complexes de $\zeta(s)$. Si $T \geq 2$, on a*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + (T - \gamma_n)^2} \leq c \log(T).$$

Démonstration

Pour $s = 2 + iT$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right)\right| &\leq \left|\sum_{n\leq T}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right)\right| + \left|\sum_{n>T}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right)\right| \\
&\leq \sum_{n\leq T}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}\right) + \sum_{n\leq T}\frac{|s|}{4n^2} \\
&= \int_1^T u^{-1}du + |s|\int_T^{+\infty} u^{-2}du \\
&= O\left(\log(T) + \frac{|s|}{T}\right) = O\left(\log(T)\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right)\right| \leq c_1 \log(T).$$

On multiplie (3.7) par (-1), et on prend la partie réelle

$$\begin{aligned}
-\operatorname{Re}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{s-1} - B\right) - \operatorname{Re}\left(\sum_{\substack{\rho_n \\ \gamma_n\neq 0}}\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right) - \operatorname{Re}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right) \\
&\leq c_2\log(T) - \operatorname{Re}\left(\sum_{\substack{\rho_n \\ \gamma_n\neq 0}}\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right).
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| = \left|\sum_{n\geq 2}\frac{\Lambda(n)}{n^{2+it}}\right| \leq \sum_{n\geq 1}\frac{\log(n)}{n^2} < c_3,$$

et

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{\substack{\rho_n \\ \gamma_n\neq 0}}\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right) \leq c_4\log(T).$$

Maintenant on note que $0 \leq \beta_n \leq 1$, alors

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{s-\rho_n}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{(2-\beta_n)+i(T-\gamma_n)}\right) = \frac{2-\beta_n}{(2-\beta_n)^2+(T-\gamma_n)^2} > \frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2}.$$

et

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\rho_n}\right) = \frac{\beta_n}{\beta_n^2 + \gamma_n^2} \geq 0,$$

alors

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{(2-\beta_n) + i\,(T-\gamma_n)}\right) = \frac{2-\beta_n}{(2-\beta_n)^2 + (T-\gamma_n)^2} \leq c_4 \log(T),$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2} < c\log(T).$$

3.5 Une région sans zéros de la fonction zêta de Riemann

Théorème 3.5.1 *Il existe une constante $c > 0$, telle que la fonction zêta ne s'annulle jamais sur la région*

$$\operatorname{Re}(s) = \sigma \geq 1 - \frac{c}{\log(|t|+2)}.$$

Démonstration

$\zeta(s)$ ayant un pôle en $s = 1$, il existe un nombre positive γ_0 telle que la fonction $\zeta(s)$ ne s'annulle jamais dans le disque $|s-1| \leq \gamma_0$. Soit $\rho = \beta + i\gamma$ un zéro de $\zeta(s)$ il est claire que $|\gamma| > \gamma_0 > 0$.

Pour $\operatorname{Re}(s) = \sigma > 1$ on a

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1} \Lambda(n) n^{-\sigma} \exp(-it\log(n)),$$

implique que

$$-\operatorname{Re}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) = \sum_{n=1} \Lambda(n) n^{-\sigma} \cos(t\log(n)),$$

d'après le théorème (3.4.2), il en résulte que

$$0 \leq 3\left(-\operatorname{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}\right)\right) + 4\left(-\operatorname{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right)\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right). \tag{3.8}$$

Maintenant, nous estimons chaque terme sur le côté droite de (3.8) en utilisant (3.7) et le corollaire (5.1) dans [2], avec $s = \sigma$, $1 < \sigma < 2$, on obtient

$$\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma - 1} + B_1,$$

tel que $B_1 > 0$ une constante absolue. Dans la suite on utilise (3.7) et prenons $s = \sigma + it$, $1 < \sigma < 2$, $|t| > \gamma_0$, et d'après la corollaire (5.3) dans ([2]) nous obtenons

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} < B_2\log(|t|+2) - \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{s-\rho_k} + \frac{1}{\rho_k}\right),$$

B_2 une constante strictement positive. Les parties réelles β_k de ρ_k (zéros de la fonction zêta) sont positives et en plus $|\beta_k| > 1$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{s-\rho_k}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{(\sigma-\beta_k) + i\,(T-\gamma_k)}\right) = \frac{\sigma-\beta_k}{(\sigma-\beta_k)^2 + (T-\gamma_k)^2} > 0,$$

et

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\rho_k}\right) = \frac{\beta_k}{\beta_k^2+\gamma_k^2} \geq 0,$$

alors

$$-\operatorname{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) < B_2\log(|t|+2) - \frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(T-\gamma)^2}.$$

Pour $-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(\sigma+i2t)}{\zeta(\sigma+i2t)}$, on remplace dans la derniere inégalité t par $2t$, donc

$$-\operatorname{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right) < B_2\log(|t|+2).$$

Donc les trois termes de (3.8) sont bornées, on peut additionner les estimations en ensemble, on obtient

$$0 \leq \frac{3}{\sigma-1} + 3B_1 + \frac{4\,(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+(T-\gamma)^2} + B_2\log(|t|+2) + B_2\log(2\,|t|+2),$$

implique

$$0 \leq \frac{3}{\sigma-1} + \frac{4}{(\sigma-\beta)+(T-\gamma)^2} + B\log(|t|+2),$$

tel que $B > 1$, la dernière inégalité est vrai pour tout t, $|t| > \gamma_0$ et pour certains σ, $1 < \sigma \leq 2$, on prend

$$t = \gamma, \qquad \sigma = 1 + \frac{1}{2B\log(|\gamma| + 2)},$$

ensuite, on prend

$$0 \leq \frac{3}{\sigma - 1} + \frac{4}{(\sigma - \beta)} + B\log(|\gamma| + 2)$$

$$\frac{4}{(\sigma - \beta)} \leq \frac{3}{\sigma - 1} + B\log(|\gamma| + 2),$$

alors

$$\beta \leq 1 - \frac{1}{14B\log\left(|\gamma| + 2\right)},$$

donc pour $\beta \geq 1 - \frac{1}{14B\log(|\gamma|+2)}$ la fonction ζ ne s'annule jamais.

Bibliographie

[1] A. Derbal, *Cours de théorie Analytique des nombres*, 2009/2010.

[2] A.A.Karatsuba, A._S._Voronin, *The Riemann zeta*, Walter de Greyter Berlin Newyork, 1992.

[3] Anatoly Karatsuba, *Complex analysis in number*, steklow mathématical institute Russian academy of sciences Moscow, Russian.

[4] Emilie Kaufmann, *De l'analyse complexe à la répartition des nombres premiers*, Strasbourg, le 17 septembre 2008.

[5] G. Tenenbaum, *Introduction to analytic number theory*, Combridge university press 1995.

[6] Michele Audin, *Un cours sur les fonctions spéciales.*

[7] Michel Waldschmidt, *théorie des nombres*, université P et M Curie, Paris, 06/2008.

[8] Olivier Ramare, *Séries de Dirichlet et transformées de Mellin en théorie analytique des nombres premiers*, université de Monastir, 20_25 mai 2013.

[9] Sebestien Gaboury, *Sur les convolution de fonctions arithmétiques.* (Mémoire). (2007).

[10] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag Berlin, 1976.