Numéro d'ordre : 10/2010-E/MT

:

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE KHEMIS-MILIANA

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématique et informatique

$deKarima/O7FTK001.wmf$

Présenté par

Bakdi sara

Pour obtenir

LE DIPLOME DE MASTER

En Mathématique

Option

Mathématique appliquée et traitement du signale

Intitulé

Introduction sur les solutions de viscosité des équations aux dérivées partielles

Soutenu le , devant les membres du jury :

Mr.	Université de Khemis Miliana.	Président
Mr. Said Abd El Rezzak	Université de Khemis Miliana	Encadreur
Mr.	Université de Khemis Miliana	Examinateur
Mr.	Université de Khemis Miliana	Examinateur

Année Universitaire 2015/2016

Table des matières

Dédicace

Ce travail est dédié

À mon cher père : qui *a toujours cru en moi et a mis a ma disposition tous les moyens nécessaires pour que je réussisse dans mes études.*

À ma chère mère : *que je ne cesse de remercier pour tout ce qu'elle m'a donné. Elle m'a supporté dans son ventre 9 mois. Qu'Allah le récompense pour tous ces bienfaits.*

À mes très chers frères et sœurs Riad, abd EL kadare, *Mohamed, Samira, fayza : je ne peux exprimer à travers ses lignes tous mes sentiments d'amour et de tendresse envers vous. Puisse l'amour et la fraternité nous unissent à jamais. Je vous souhaite la réussite dans votre vie, avec tout le bonheur qu'il faut pour vous combler. Merci pour votre précieuse aide à la réalisation de ce travail.*

À mes chèrs amis : *fathiha, Amina, Soumia, Zahira, Zakia, Khaoula, Karima, Nasira Zahra, Cherifa, Dounia, Khadija, , : En souvenir des moments agréables passés ensemble, veuillez trouver dans ce travail l'expression de ma tendre affection et mes sentiments les plus respectueux avec mes voeux de succes, de bonheur et de bonne santé.*

A tous ceux ou celles qui me sont chers et que j'ai omis involontairement de citer.

À tous Mes enseignants tout au long de mes études.

*À tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce tra*vail.

À tous ceux qui ont cette pénible tâche de soulager les gens et diminuer leurs souffrances.

Remerciements

Je remercie Allah, Le tout puissant, Le Miséricordieux, qui nous a donne l'opportunité de mener à bien ce travail.

J'exprime ma gratitude, mes remerciements à mes parents qui ont fait de leur mieux pour m'aider.

C'est avec un grand plaisir que, j'adresse mes sincères remerciements à mon encadreur, `Monsieur Said Abd El Rezzak` pour ces conseils et son suivi durant la réalisation de mon travail.

Je tiens remercie également les nombres du jury qui ont bien voulu d'examiner ce travail.

Je remercie également les nombreux professeurs du département mathématique et informatique.

Mes remerciements aussi à tous mes professeurs qui ont contribué à mon information.

Je ne terminai pas sans avoir exprimé des remerciements envers toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Résumé

Dans ce mémoire nous nous intéressons aux solutions de viscosité des équations aux dérivées partielles, nous avons commencé par donner des généralités sur les équations aux dérivées partielles.

En suite, nous donnons la définition de solution de viscosité du problème

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0 \text{ dans } \Omega$$

Et enfin, nous étudions l'unicité et l'existence des solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi sous certaines hypothèses.

Mots clés : Équation aux dérivées partielles (EDP), Solution de viscosité, équation de Hamilton-Jacobi.

Abstract

In this memory we are interested by the solution of viscosity and partial differential equations, we had started by giving generalities about the partial differential equations.

Then, we had giving the definition of solution of viscosity of problems

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0 \text{ dans } \Omega$$

Finally, we had study the unicity and existence of solution of viscosity of equations which refer to Hamilton-Jacobi by using certain hypotheses.

Keywords : partial differentail equations (PDE), viscosity solutions. Hamilton-Jacobi equations

Notations

- $\exists$: quantificateur existentiel ; $\exists x$: il existe un x
- $\forall$: Quantificateur universel ; $\forall x$: quelque soit x où pour tout x.
- Ω : est un ouvert non vide.
- $\mathbb{R}$: Ensembles du nombre naturel.
- $\mathbb{R}^n$: Espace réel euclidien de dimension n.
- C^K : L'espace des fonctions continues de classe C^K.
- $\varnothing$: Ensemble vide.
- $|.|$: Désigne la valeur absolue de x.
- $||.||$: Norme euclidienne d'un vecteur ou d'une matrice.
- $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \partial_{x_i} u(x) = \partial_i u(x) = u_{x_i}(x)$.
- $D^\alpha u = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n} u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u$.
- $D_1 u(x) = \nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right)_{1 \,\leq\, i \,\leq\, n}$.
- $D_2 u(x) = \Delta u(x) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) \right)_{1 \,\leq\, i \,\leq\, n}$.
- scs : Semi continu supérieure.
- sci : Semi continu inférieure.
- $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Introduction

La modélisation d'un problème réel utilise les lois de la physique (mécanique, électromagnétisme, etc.), ces lois sont, généralement, écrites sous la forme de bilans qui se traduisent mathématiquement par des Équations Différentielles Ordinaires ou par des Équations aux Dérivées Partielles.

Les équations aux dérivées partielles interviennent aussi dans beaucoup d'autres domaines : en chimie pour modéliser les réactions, en économie pour étudier le comportement des marchés et en finance pour étudier les produits dérivées.

Les équations aux dérivées partielles sont un sujet de recherche très actif en mathématiques et elles sont à l'origine de la création de beaucoup de concepts mathématiques comme, par exemple, la transformée de Fourier et la théorie des distributions.

Dans la plupart des cas il est très difficile, voir impossible d'exhiber les solutions d'une équation aux dérivées partielles.
Dans certaines cas on arrive à montrer que le problème est bien posé (c-à-d qu'il admet une solution unique) pour certain types des solutions et non pour certaine d'autres, et on parfois on ne calculer des approximations numériques des solutions.

Il y a plusieurs types des solutions types des solutions par exemple solution classique, solution presque partout, solution de viscosité.

La notion de "solutions de viscosité" a été introduite en 1981 par M. G. Crandall et P. L. Lions, où ils ont donné la théorie de base des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre en dimension finie en démontrant l'existence et l'unicité de solutions de viscosité.

Un an plus tard M. G . Crandall, L .C . Evans et P. L. Lions ont reformulé et simplifié ce travail. Après, plusieurs auteurs se sont intéressés à ce sujet, en particulier H. Ishii, I. Capuzzo Dolcetta et d'autres.

Quelques années plus tard, M. G. Crandall et P. L. Lions ont remarqué que ces équations peuvent être étudiées aussi en dimension infinie. En fait, en dimension fine, pour comparer les sous-solutions aux sur-solutions de viscosité, l'astuce était de maximiser après pénalisation une fonction semi-continue supérieurement dite fonction auxiliaire. Ainsi, ils ont supposé des hypothèses techniques d'uniformité sur le Hamiltonien, sur les sous-solutions et les sur-solutions de viscosité, ce qui a été justifié par l'utilisation des jeux différentiels pour l'existence.

Le but de ce mémoire est de présenter les idées fondamentales et les principaux résultats de la théorie des solutions de viscosité. On va alors s'intéresser aux solutions de viscosité d'équations d'ordre 1 ou 2 dites "elliptiques " ou "paraboliques". Les équations elliptiques ont la forme générale

$$F(x,u,Du,D^2u) = 0 \text{ dans } \Omega$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, donné, $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'inconnue, $Du(x)$ et $D^2u(x)$ désignant le gradient et la matrice hessienne de u au point x et où $F : \Omega\times \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times S_n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application donnée (S_n désignant l'ensemble des matrices symétriques de format $n\times n$).

Dans le cas parabolique, l'équation prend la forme

$$u_t(t,x) + F(x,u(t,x),Du(x,t)) = 0 \quad (t,x) \in]0,T[\times\Omega$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, donné, $u :]0,T[\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'inconnue, $u_t(t,x)$ désigne la dérivée partielle de u par rapport à t, $Du(x,t)$ étant le gradient de u par rapport à la variable x. Enfin, $F :]0,T[\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times S_n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres, ils sont organisés comme suit :

Dans le premier chapitre on rappelle quelques définitions concernant les équations aux dérivées partielles, on donne alors les types des EDP et aussi les définitions des types différents des solutions (solution classique, solution presque partout,....).

Dans le deuxième chapitre, on commence par donner la définition des solutions de viscosité et ses propriétés du problème

$$F(x,u,Du,D^2u) = 0 \text{ dans } \Omega$$

en suite on étudie l'existence et l'unicité par la méthode de Perron.

Dans le dernier chapitre, on va étudier les équations de Hamilton-Jacobi et on donne des résultats d'unicité et d'existence pour ce type d'équations. On termine par donner une forme de ces solutions sous certaines hypothèses.

Chapitre 1

Définitions préliminaires

Dans ce chapitre, on va introduire quelques définitions concernant les équations aux dérivées partielles et leurs solutions.

1.1 Qu'est-ce qu'une équation aux dérivées partielles ?

Définition 1.1 *Soit $u = u(x_1, \dots x_n)$ une fonction de plusieurs variables indépendantes en nombre fini. Une équation aux dérivées partielles (EDP) pour la fonction u est une relation qui lie :*

- Les variables indépendantes $x = (x_1, \dots x_n)$.
- La fonction "inconnue" u (variable dépendante).
- Un nombre fini de dérivées partielles de u.

elle est donc de la forme :

$$F(x_1, \dots x_n,\ u,\ D_1 u, \dots D_n u,\ D_1 D_1 u,\ D_1 D_2 u, \dots,\ D^\alpha u, \dots) = 0. \tag{1.1}$$

On rappelle que

$$D^\alpha u = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n} u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u.$$

telle que

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Exemple 1.1 *Soit*

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \text{ avec } u = u(x_1, x_2),$$

est une équation aux dérivées partielles.

L'ordre d'une équation aux dérivées partielles

Définition 1.2 *L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est celui de la dérivée partielle d'ordre le plus élevé.*

Exemple 1.2 *Soit L'équation des ondes :*

$$u_{tt} - \Delta u = 0,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

est une EDP d'ordre 2.

L'équation aux dérivées partielles linéaire

Définition 1.3 *Une équation aux dérivées partielles de la forme (1.1) est linéaire si F est linéaire par rapport à u et ses dérivées partielles. Si m l'ordre de l'équation aux dérivées partielles, l'équation est donc de la forme*

$$\sum_{|\alpha|\leq m} A_\alpha(x) D^\alpha u(x) = B(x). \tag{1.2}$$

Exemple 1.3 *.*

1. L'équation de Chaleur

$$u_t - \Delta u = 0,\ t > 0,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

est une EDP linéaire d'ordre 2.

2. L'équation de Poisson

$$\Delta u = f(x),\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

est une EDP linéaire d'ordre 2.

Exemple 1.4 *Soit l'équation eikonal*

$$|Du| = f(x),\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

est une EDP non linéaire du premier ordre.

Définition 1.4 *Si $B = 0$ dans* (1.2) *on a une équation linéaire homogène.*

Exemple 1.5 *Soit l'équation de la Chaleur :*

$$u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = 0, t > 0\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

est une EDP linéaire homogène d'ordre 2, mais l'équation de Poisson est une EDP linéaire non homogène.

Exemple 1.6 *Soit l'équation de Laplace :*

$$-\Delta u(x) = f(x),\ t > 0\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

est une EDP linéaire non homogène d'ordre 2.

L'équation aux dérivées partielles quasilinéaire

Définition 1.5 *Une équation aux dérivées partielles d'ordre* m *de la forme* (1.1) *est quasi-linéaire si* F *est linéaire en toutes les dérivées partielles d'ordre le plus élevé, c-à-d d'ordre* m*, l'équation est alors de la forme :*

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, u, D^\beta u) D^\alpha u(x) = B(x, u, D^\beta u), \text{ avec } \beta \in \mathbb{N}^n \text{ et } |\beta| < m.$$

Exemple 1.7 *Soit l'équation suivante :*

$$uu_x + u_y = 2$$

est une EDP quasilinéaire d'ordre 1.

Exemple 1.8 *Soit l'équation suivante :*

$$u_x + uu_y = u^2$$

est une EDP quasilinéaire d'ordre 1.

L'équation aux dérivées partielles semilinéaire

Définition 1.6 *Une équation aux dérivées partielles est semilinéaire si l'équation est de la forme*

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x) D^\alpha u(x) = B(x, u, D^\beta u), \text{ avec } \beta \in \mathbb{N}^n \text{ et } |\beta| < m\ .$$

Exemple 1.9 *Soit l'équation suivante :*

$$u_x + u_y = u^2$$

est une EDP semilinéaire d'ordre 1.

Exemple 1.10 *Soit l'équation suivante :*

$$u_{tt}^2 + u_{xxxx} = 0$$

est une EDP semilinéaire d'ordre 4.

Classification des EDP linéaires d'ordre 2

Définition 1.7 *Soit EDP d'ordre 2, linéaire, à deux variables :*

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \quad c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = g.$$

L'équation est elliptique si

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0,$$

L'équation est parabolique si

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0,$$

L'équation est hyperbolique si

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0,$$

Exemple 1.11 .

(i) Soit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ avec } c > 0.$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4c^2$. Ainsi l'équation des ondes est hyperbolique.

(ii) Soit

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ avec } d > 0.$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Ainsi l'équation de la chaleur est parabolique.

(iii) Soit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$\Delta = b^2 - 4ac = -4$. Ainsi l'équation de Laplace est elliptique.

(iv) Soit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

- $y > 0 \Longrightarrow$ l'EDP est hyperbolique.
- $y = 0 \Longrightarrow$ l'EDP est parabolique.
- $y < 0 \Longrightarrow$ l'EDP est elliptique.

Définition 1.8 *On dit que u est solution de l'équation aux dérivées partielles dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si, après substitution de u et de ses dérivées partielles, F s'annule pour tout*

$$(x_1, \dots x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Exemple 1.12 *Soit l'équation de diffusion :*

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ avec } u = u(x, y)$$

Donc la solution de la forme

$$u(x, y) = 2x + y^2 \text{ solution dans tout } \mathbb{R}^2$$

Proposition 1.1 .

1- Si u_1 et u_2 sont deux solutions d'une équation aux dérivées partielles linéaire homogène, alors pour α_1 et α_2 des réels quelconques, $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ est aussi solution.

2- Si u_h est solution de l'équation linéaire homogène et u_p est solution de l'équation linéaire non homogène, alors $u_p + u_h$ est solution de l' équation complet.

1.1.1 Conditions aux frontières et problème "bien posé"

Les conditions aux limites naturelles sont les conditions de Dirichlet, Neumann ou mixte sur différentes parties du bord. Pour trouver des solutions particulières d'une équation aux dérivées partielles, à partir de la solution générale, on impose des conditions restrictives sur l'ensemble des solutions.

Les contraintes les plus fréquentes sont :

1. Conditions initiales (ou conditions de Cauchy) :

Si u est fonction de $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ on donne $u(x, t_0) = \Phi_0(x)$ ou $D_2^\alpha u(x, t_0) = \Phi_\alpha(x)$, on parle aussi de conditions de Cauchy. Par exemple le Problème de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + \Delta u = 0, \ (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \\ u(t_0, x) = g(x), \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

2. Conditions au bord

Si u est fonction de $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ on a trois types de contraintes :

1. <u>Conditions de Dirichlet</u> où u est fixé sur le bord de Ω : $u|_{\partial\Omega} = g$.
Par exemple le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \\ u(x) = g(x) & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

2. <u>Conditions de Neumann</u> où la dérivée normale de u est fixé : $\frac{du}{dn}|_{\partial\Omega} = g$.
Par exemple

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ \frac{du}{dn}|_{\partial\Omega} = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

3. <u>Conditions de Robin ou mixtes :</u> $c(x)u + \tilde{c}(x)\frac{\partial u}{\partial n} = g$ sur $\partial\Omega$.
Si $g = 0$ on a des conditions homogènes au bord.

3. Conditions sur les interfaces

Si

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \text{ avec } \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2 = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega$$

et si l'on a déterminé u sur Ω_1 et Ω_2, alors pour pouvoir définir sur u on a des conditions sur u, resp.

$$\frac{du}{dn} \text{ sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2.$$

Remarque 1.1 *Les contraintes sont en général imposées par la nature du problème que l'on essaye de modéliser, l'équation aux dérivées partielles et ses conditions restrictives seront donc a priori cohérentes.*

De façon générale une équation aux dérivées partielles ne donne lieu à un problème raisonnable que si on l'associe à un certain type de conditions restrictives, par exemple des conditions initiales pour des problèmes d'évolution (équation de la chaleur, équation des ondes) ou des conditions au bord pour l'équation de Laplace.

Problème "bien posés"

Considérons une équation aux dérivées partielles sur un domaine Ω avec éventuellement des conditions auxiliaires sur la solution, on dit que le problème est bien posé si on a

1. existence d'une solution du problème,
2. unicité de cette solution,
3. stabilité par rapport aux données du problème.

Si la solution change beaucoup quand les données changent peu on dit que le problème est sensible aux données, c-à-d tous les EDP ne répondant pas aux critères ci-dessus sont dites mal posé.

Exemple 1.13 *Le problème de Cauchy pour l'équation de Chaleur avec conditions initiales :*

$$\begin{cases} u_t + \Delta u = 0,\ (t,x)\ \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = g(x),\ \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Sont des problèmes bien posés.

Remarque 1.2 *Le problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace et l'équation de la Chaleur avec spécification de conditions initiales sont des formulations bien posées.*

1.2 Les types des solutions d'une équation aux dérivées partielles

Dans ce travail, on va étudier quatre types des solutions d'une équation aux dérivées partielles (solution classique, solution presque partout, solution au sens distribution, solutions de viscosité).

1.2.1 Solution classique (ou solution forte)

Définition 1.9 *Soit une EDP d'ordre $K \geq 1$, une fonction $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est dite solution classique si :*

$$u \in C^k(\Omega) \text{ et } u \text{ solution de l'EDP à tout } x \in \Omega.$$

Exemple 1.14 *Soit $c \in \mathbb{R}$ et $u_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on cherche $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ solution de*

$$\begin{cases} \partial_t u + c\partial_x u = f(t,x), (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ \quad u(0,x) = u_0(x) \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.3}$$

Si $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, on dit que u est une solution classique (ou solution fort) de 1.3 si :

$$1 - \ u \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

$$2 - \forall t, \forall x, \partial_t u(t,x) + c\partial_x u(t,x) = f(t,x),$$

$$3 - \ \forall x \in \mathbb{R}, u(0,x) = u_0(x).$$

Exemple 1.15 *Déterminer la solution de l'équation suivante :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4x^2 y,$$

est une EDP d'ordre 2 a deux variable on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 4x^2 y \\ &\Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial u}{\partial y}] = 4x^2 y \\ &\Longleftrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4}{3}x^3 y + f(y) \\ u(x,y) &\Longleftrightarrow \frac{2}{3}x^3 y^2 + \int f(y)dy + G(x). \end{aligned}$$

Donc si F et G sont de classe C^1 alors

$$u(x,y) = \frac{2}{3}x^3 y^2 + F(y) + G(x), \ F, G \in C^2.$$

est une solution de l'EDP.

Remarque 1.3 *Les solutions classiques sont en générale unique, mais ils ne pourraient pas exister.*

Exemple 1.16 *Soit l'équation eikonal suivante :*

$$|u'(x)| = 1, \ x \in (-1,1). \tag{1.4}$$

Supposons qu'il existe une solution classique, tell que

$$u \in C^1(-1,1) \text{ solution de } (1.4),$$

avec

$$u(-1) = u(1) = 0.$$

On a

$$\exists \zeta \in (-1,1),$$

tel que

$$u'(\xi) = 0,$$

et comme

$$u \in C^1(-1,1).$$

Alors

$$u' \text{ est continue sur } (-1,1),$$

donc

$$\text{il existe une voisinage de } \xi,$$

telle que

$$\forall x \in V\xi \ |u'(x)| < 1,$$

avec

$$V\varepsilon \ = [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon],$$

alors

$$\forall x \in [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon] \ |u'(x)| < 1.$$

C-à-d

$$|u'(x)| \ \neq 1.$$

Donc contradictions de (1.4). Alors n'admet pas une solution classique.

Remarque 1.4 *Nous avons affirmé ci-dessus que les équations que nous considérons n'admettent pas de solutions régulières,*

$$\begin{cases} |u'| = 1 \text{ dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Il est clair, que ce problème n'admet pas de solution de classe C^1, on doit alors définir une notion de solution faible.

1.2.2 Solution presque partout

Une alternative à ce problème est de définir une classe de solutions faibles, celles qui résolvent l'équation presque partout. Mais cette définition n'assure pas l'unicité de la solution. En effet, le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u^2 = 0 \\ u(0,x) = 0, \end{cases}$$

admet plusieurs solutions qui résolvent le problème presque partout mais qui ne sont pas égales presque partout.

Définition 1.10 *Soit une EDP d'ordre $K \geq 1$, une fonction $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue est appelé solution presque partout si le dérivés jusqu' à l'ordre K existent presque partout et u résout le EDP presque partout.*

Remarque 1.5 *En utilisant à nouveau l'exemple de l'équation eikonale, nous montrer que la solution est le bon pour l'existence, mais très mauvais pour l'unicité*

Exemple 1.17 *Soit l'équation eikonal suivante :*

$$|u'|^2 - 1 = 0, \ \ sur \ (-1, 1),$$

avec les condition de Dirichlet

$$u(\pm 1) = 0.$$

Cette équation admet plusieurs solution continues $u : (-1, 1) \mapsto \mathbb{R}$. En effet,

$$u_1(x) = \begin{cases} x - 1, \ \text{sur} \ (-1, 0), \\ 1 - x, \ \text{sur} \ \ (0, 1), \end{cases}$$

C-à-d u_1 est une solution de

$$|u'|^2 = 1, \ \text{sur} \ (-1, 1),$$

est $u_2(x)$ est une solution de

$$|u'|^2 = 1 \ \text{sur} \ (-1, 1).$$

C-à-d

$$u_2(x) = \begin{cases} x - 1, \ \text{sur} \ (-1, -1/2), \\ -x, \ \text{sur} \ \ (-1/2, 0), \\ x, \ \ \text{sur} \ (0, 1/2), \\ 1 - x, \ \text{sur} \ \ (0, 1). \end{cases}$$

On peut déterminer une infinité de solution comme il est indiqué dans la figure -1-.

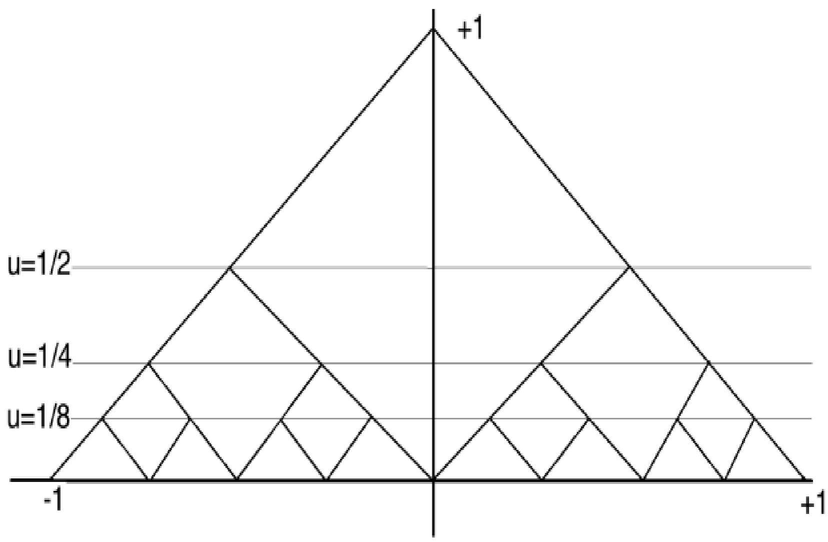


figure -1-

1.2.3 Solution au sens des distribution

Définitions des distributions

Définition 1.11 *On appelle distribution sur Ω une forme linéaire, continue sur $D(\Omega)$. On note l'espace des distributions par $D'(\Omega)$. On a :*

$$T \in D'(\Omega), \varphi \in D(\Omega)$$

telle que

$$\forall \varphi \in D(\Omega) \ \varphi \longmapsto < T, \ \varphi > = < \varphi, T > = T(\varphi).$$

Définition 1.12 *Une distribution T est dite régulière si il existe une fonction f, sommable sur tout intervalle borné telle que :*

$$\forall \varphi \in D \ \ < T, \ \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt.$$

Toute distribution qui n'est pas régulière est dite singulière.

Exemple 1.18 *La distribution de Dirac T définie par*

$$\forall \varphi \in D \ \ < T, \varphi > = \varphi(a),$$

est singulière car il n'existe pas de fonction f telle que pour tout fonction φ on ait :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt = \varphi(a).$$

Dérivation des distributions

Dans le cas d'une distribution régulière associée à une fonction f continument dérivable sur $\mathbb{R}$, On voudrait que la notion de dérivation d'une distribution corresponde à la dérivation des fonctions, on voudrait donc que $(T_f)' = T_{f'}$, donc que :

$$\forall \varphi \in D \ \ < T_{f\,'} \ , \ \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\varphi(t)dt.$$

en intégrant par parties on obtient :

$$< T_{f\,'}, \ \varphi > = [f(t)\varphi(t)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)dt = 0 - < T_f \ \ , \varphi' > .$$

La définition de la dérivation des distributions doit donc généraliser à toutes les distributions la propriété ci-dessus qui a été obtenue dans le cas des distributions régulières.

Définition 1.13 *Toute distribution T est dérivable, et sa dérivée est la distribution notée T' définie par :*

$$\forall \varphi \in D \ < T', \ \varphi >= - < T, \ \varphi' >$$

Donc toute distribution est indéfiniment dérivable et pour tout entier n, la dérivée n^{iéme} de T est définie par :

$$\forall \varphi \in D \ < T^{(n)}, \ \varphi >= (-1)^n < T, \ \varphi^{(n)} >$$

Exemple 1.19 *Soit :*

$$H(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } & x > 0 \\ 0 \text{ si } & x < 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} & < H', \ \varphi >= - < H, \ \varphi' > \\ & = \ - \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)dx \\ & = - \int_{-\infty}^{0} 0\varphi'(x)dx - \int_{-\infty}^{0} 1\varphi'(x)dx \\ & = -[\varphi(x)]_0^{+\infty} = \varphi(0) =< \delta_0, \ \varphi > . \end{aligned}$$

Remarque 1.6 *Les solutions au sens distribution d'un EDP est de bonnes propriétés d'existence et d'unicité mais elle preuve être appliquée seulement si l'EDP est linéaire au moine dans les dérivées maximale.*

Nous allons introduire une novelle notion c'est les " solutions de viscosité".

Chapitre 2

Solution de viscosité

L'objectif de ce chapitre est de présenter les idées fondamentales et les principaux résultats de la théorie des solutions de viscosité (ou pourquoi apprendre à utiliser les solutions de viscosité).

La notion de solution de viscosité est apparue comme une notion de solutions faibles bien adaptée pour les équations elliptique non linéaires, éventuellement dégénérées, du second-ordre.

2.1 Notions de solution

Soit l'équation suivante :

$$-\Delta u = 0,$$

Supposons que cette équation admet une solution classique. Soit

$$\varphi \in C^2, \text{ et si } \varphi \text{ touche } u \text{ on dessus à un point } x_0,$$

telle que

$$\varphi \geq u \text{ et } \varphi(x_0) = u(x_0).$$

Alors $u - \varphi$ admet un maximum local au point x_0, C-à-d

$$\Delta(u - \varphi)(x_0) \leq 0,$$

et comme

$$\Delta u(x_0) - \Delta\varphi(x_0) = -\Delta\varphi(x_0).$$

Alors

$$-\Delta\varphi(x_0) \leq 0.$$

Soit

$$\varphi \in C^2, \text{ et si } \varphi \text{ touche } u \text{ par le bas à un point } x_0,$$

telle que

$$\varphi \leq u \text{ et } \varphi(x_0) = u(x_0).$$

Alors $u - \varphi$ admet un minimum local au point x_0, c-à-d

$$\Delta(u - \varphi)(x_0) \geq 0,$$

et comme

$$\Delta u(x_0) - \Delta\varphi(x_0) = -\Delta\varphi(x_0),$$

alors

$$-\Delta\varphi(x_0) \geq 0.$$

Si $u \notin C^2$ nous allons utiliser les propriétés ci-dessus des fonctions φ de classe C^2 qui touchent u au dessus et par le bas pour dire si u est une solution de l'EDP au sens faible (c-à-d au sens de viscosité).

Nous pouvons maintenant présenter la définition des solutions de viscosité pour une équation de second ordre de la forme :

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

et

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times M_{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Définition 2.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et u continu en Ω*

i) On dit que u est une sous-solution de viscosité pour (2.1), si et seulement si, pour tout fonction de test $\varphi \in C^2(\Omega)$ tell que, $u - \varphi$ admet un maximum local en $x_0 \in \Omega$, on a

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq 0. \tag{2.2}$$

ii) On dit que u est une sur-solution de viscosité de (2.1), si et seulement si, pour tout fonction de test $\varphi \in C^2(\Omega)$ tell que, $u - \varphi$ admet un minimum local en $x_0 \in \Omega$, on a

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0. \tag{2.3}$$

iii) On dit que u est une solution de viscosité dans l'ouvert Ω si u est une sous-solution et une sur-solution de viscosité à tout point $x_0 \in \Omega$.

Remarque 2.1 *Pour une EDP d'ordre K, nous pouvons donner la même définition en exigeant une C^K régularité sur les fonctions test.*

Remarque 2.2 *On suppose que $\varphi(x_0) = u(x_0)$ et on remplace $\varphi(x)$ avec $\varphi(x) + |x - x_0|^4$ (où $\varphi(x) - |x - x_0|^4$) donc admet un minimum local strict (où maximum local strict) en x_0.*

Remarque 2.3 *Noter que l'équation $F = 0$ et l'équation $-F = 0$ et sont pas d'équivalent dans le sens de viscosité.*

Exemple 2.1 *"L'équation eikonal"*

Soit l'équation suivante :

$$|u'| - 1 = 0 \text{ dans}] - 1, 1[.$$

On va montrer que $u(x) = -|x| + 1$ est une solution de viscosité de cette équation mais pas de $-|u'| + 1 = 0$. (On remarque que $-(|u'| - 1) = 0 \Longleftrightarrow -|u'| + 1 = 0$) au sens classique) et pour cela on va applique la définition de solution de viscosité. Soit

$$\varphi \in C^1(] - 1, 1[),$$

tel que $u - \varphi$ admet un maximum local en $x_0 \in \,] - 1, 1[$, ou (admet un minimum local en x_0), c-à-d

$$u(x) - \varphi(x) \leq u(x_0) - \varphi(x_0) \ \forall x \in V_{x_0},$$

où

$$(\ u(x) - \varphi(x) \geq u(x_0) - \varphi(x_0) \ \forall x \in V_{x_0}).$$

Si $x_0 \neq 0$, on voit bien que

$$u(x) = -|x| + 1 \text{ est dérivable en } x_0,$$

et que :

$$u(x) = -|x| + 1 = -sgn \ x.x + 1,$$

alors

$$u'(x_0) = -sgn \ x_0,$$

c-à-d

$$|u'(x_0)| = | - sgn \ x_0| = 1,$$

et comme $u - \varphi$ admet un maximum local en x_0 et $u - \varphi \in C^1$ au voisinage de x_0, car

$$\varphi \in C^1] - 1, 1[, \ u \in C^1(V_{x_0}), \ x_0 \neq 0,$$

alors

$$u'(x_0) - \varphi'(x_0) = 0,$$

c-à-d

$$u'(x_0) = \varphi'(x_0),$$

donc

$$|\varphi'(x_0)| \ = |u'(x_0)| \ = 1.$$

Il nous reste à étudier le cas où $u - \varphi$ admet un maximum (minimum) local en $x_0 = 0$. On a

$$u(x) - \varphi(x) \leq u(0) - \varphi(0) \ \forall x \in V_0.$$

C-à-d

$$u(x) - \varphi(x) \leq u(0) - \varphi(0),$$

ainsi

$$u(x) - u(0) \leq \varphi(x) - \varphi(0),$$

telle que

$$-|x| \ \leq u(x) - u(0) = (-|x| + 1 - (|0| + 1)) = -|x|,$$

et

$$-|x| \leq \varphi(x) - \varphi(0),$$

c-à-d

$$\begin{cases} x \leq \varphi(x) - \varphi(0) \text{ si } x < 0, \\ -x \leq \varphi(x) - \varphi(0) \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \leq 1, \text{ pour } x < 0, \\ \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \geq -1, \text{ pour } x > 0. \end{cases}$$

c-à-d

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \overset{\leq}{\mapsto} 0} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} \geq 1, \\ \lim\limits_{x \overset{\geq}{\mapsto} 0} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} \leq -1, \end{cases}$$

alors

$$-1 \leq \varphi'(0) \leq 1,$$

et

$$|\varphi'(0)| \leq 1,$$

donc

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0) \leq 0.$$

Alors u est une sur-solution de viscosité de même on voir que u est sous-solution de viscosité donc u est une solution de viscosité.

on suppose qu'il existe $\varphi \in C^1(]-1,1[)$, tel que $u-\varphi$ admet un minimum local en $x_0 = 0$, c-à-d

$$u(x) - \varphi(x) \geq u(0) - \varphi(0).$$

telle que

$$-|x| \ \geq u(x) - u(0),$$

et

$$-|x| \ \geq \varphi(x) - \varphi(0).$$

alors

$$\begin{cases} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \geq 1, \text{ pour } x < 0 \\ \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \leq -1, \text{ pour } x > 0, \end{cases}$$

donc

$$D^-\varphi(0) \neq D^+\varphi(0) \Longrightarrow \varphi \text{ n'est pas dérivable en } x_0 = 0,$$

c-à-d

$$\varphi \text{ n'est pas dérivable en } x_0 = 0, \varphi \notin C^1,$$

tel que il n'existe pas une fonction $\varphi \in C^1$ tel que $u - \varphi$ a un minimum local en 0.

On va maintient montre que $u(x) = -|x| + 1$ n'est pas une solution de viscosité de l'équation $-|u'(x)| + 1 = 0$, on va montre qu'il existe une fonction $\varphi \in C^1(]-1,1[)$, tel que $u - \varphi$ admet un maximum local en x_0, mais

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0) > 0,$$

on prend

$$\varphi(x) = -x^2 + 1 \text{ on a } \varphi(x) \in C^1.$$

C-à-d

$$\begin{aligned} u(x) - \varphi(x) &= (-|x| + 1) - (-x^2 + 1) \\ &= -|x| \ + x^2 < 0, \end{aligned}$$

donc si u est solution de viscosité de

$$-|u'| + 1 = 0,$$

alors

$$-|\varphi'(0)| + 1 \leq 0,$$

mais

$$-|\varphi'(0)| + 1 = 1 \leq 0 \text{ (contradiction)},$$

donc n'est pas une solution.

Remarque 2.4 *Soit $u \in C^K$, la solution de viscosité d'une EDP d'ordre K alors cette solution est une solution classique, pour le montrer on choisit une fonction de test u, et de la même pour sous-solution et sur-solution.*

Remarque 2.5 *Solutions de viscosités sont aussi uniques que les solutions classiques.*

Remarque 2.6 *Solution de viscosité forme une théorie générale faible (c-à-d non différentielle), solution applique à certains EDP non linéaire du premier et second ordre. Les solutions classiques sont toujours des solutions de viscosité.*

Proposition 2.1 *Supposons que $u \in C^2$ est une solution classique de l'EDP si l'une des deux suivante satisfaites :*

1- L'EDP ne dépend pas de D^2u.
2- F satisfait les hypothèses suivantes,

$$F(x, z, p, M) \leq F(x, z, p, N), \ \ M \geq N. \tag{2.4}$$

Alors elle est aussi solution de viscosité.

Preuve: Soit $\varphi \in C^2$, tel que $u - \varphi$ admet un maximum local en $x_0 = 0$. C-à-d

$$u(x) - \varphi(x) \leq u(x_0) - \varphi(x_0),$$

de plus

$$Du(x_0) = D\varphi(x_0),$$

et comme

$$D^2u(x_0) \leq D^2\varphi(x_0).$$

Si (2.1) est une EDP d'ordre 1. C-à-d

$$F(x, u, Du) = 0.$$

Alors

$$0 = F(x_0, u(x_0), Du(x_0)) = F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0)).$$

Donc u est une sous-solution de viscosité pour vérifier que u est une sur-solution exactement le même.

Si (2.1) est une EDP d'ordre 2. C-à-d

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0.$$

C-à-d

$$0 = F(x_0, u(x_0), Du(x_0), D^2u(x_0)) \geq F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)).$$

On peu supposer que, $u - \varphi$ admet un minimum local en $x_0 = 0$. C-à-d

$$u(x) - \varphi(x) \geq u(x_0) - \varphi(x_0),$$

donc

$$D^2u(x_0) \geq D^2\varphi(x_0).$$

On obtient l'autre inégalité

$$0 = F(x_0, u(x_0), Du(x_0), D^2u(x_0)) \leq F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)).$$

Remarque 2.7 *Les résultats précédents disent que la notion de solution de viscosité est conformé avec les solutions classiques.*

Remarque 2.8 *L'hypothèse* (2.4) *signifie que F est dégénéré elliptique.*

Exemple 2.2 *Soit l'EDP suivante :*

$$-\Delta u = f(x),$$

c'est une équation dégénéré et on a

$$F(x, z, p, M) = -Tr(M) - f(x).$$

Proposition 2.2 *Soient F_ε et F deux fonctions continues par rapport à toutes les variables, tel que*

$$F_\varepsilon \longrightarrow F \text{ si } \varepsilon \longrightarrow 0^+,$$

et u_ε est une solution de viscosité de l'équation :

$$F_\varepsilon(x, u_\varepsilon, Du_\varepsilon, D^2u_\varepsilon) = 0,$$

et

$$u_\varepsilon \longrightarrow u \text{ si } \varepsilon \longrightarrow 0^+, \text{(Localement uniformément)},$$

alors u est une solution de viscosité de

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0.$$

Preuve: Tout d'abord, si la convergence est uniforme alors u est continue.

Soit $\varphi \in C^2$, tel que $u - \varphi$ admet un maximum local strict en x_0 et on prend la boule $B_R(x_0)$, de plus

$$u(x) - \varphi(x) \leq u(x_0) - \varphi(x_0).$$

On considère

$$K = \bar{B}_{\frac{R}{2}}(x_0),$$

et soit x_ϵ est un point maximum de $u_\varepsilon - \varphi$ dans K, c-à-d

$$u_\varepsilon(x) - \varphi(x) \leq u_\varepsilon(x_\varepsilon) - \varphi(x_\varepsilon) \text{ dans } K.$$

On va montrer que

$$x_\varepsilon \longrightarrow x_0, \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0^+,$$

soit

$$x_\varepsilon \in K,\ \exists y \in K \text{ tel que } x_\varepsilon \longrightarrow y,$$

et $u_\varepsilon - \varphi$ admet un maximum local en x_ϵ, tel que

$$u_\varepsilon(x_0) - \varphi(x_0) \leq u_\varepsilon(x_\varepsilon) - \varphi(x_\varepsilon),$$

si $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, alors

$$u(x_0) - \varphi(x_0) \leq u(y) - \varphi(y).$$

Donc, x_0 maximum local strict, c-à-d
$$x_0 = y.$$
Alors u_ε est un solution de viscosité de
$$F_\varepsilon(x_\varepsilon, u_\varepsilon(x_\varepsilon), D\varphi(x_\varepsilon), D^2\varphi(x_\varepsilon)) = 0.$$
Soit
$$\varphi \in C^2 \text{ et } \; F_\varepsilon \text{ continu si } \varepsilon \longrightarrow 0^+,$$
alors
$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) = 0.$$
Donc u est une sous-solution de viscosité.

On va montrer que u est une sur-solution de viscosité

Soit $\varphi \in C^2$, tel que $u - \varphi$ admet un minimum local strict en x_0 et on prend la boule $B_R(x_0)$, c-à-d
$$u(x) - \varphi(x) \geq u(x_0) - \varphi(x_0).$$
On considère
$$K = \bar{B}_{\frac{R}{2}}(x_0)$$
et soit x_ϵ est un point minimum de $u_\varepsilon - \varphi$ dans K, c-à-d
$$u_\varepsilon(x) - \varphi(x) \geq u_\varepsilon(x_\varepsilon) - \varphi(x_\varepsilon) \text{ dans } K.$$
On va montrer que
$$x_\varepsilon \longrightarrow x_0, \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0^+,$$
soit
$$x_\varepsilon \in K, \; \exists y \in K \;\text{ tel que } x_\varepsilon \longrightarrow y,$$
et $u_\varepsilon - \varphi$ admet un minimum local en x_ϵ, tel que
$$u_\varepsilon(x_0) - \varphi(x_0) \geq u_\varepsilon(x_\varepsilon) - \varphi(x_\varepsilon),$$
si $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, alors
$$u(x_0) - \varphi(x_0) \geq u(y) - \varphi(y).$$
Donc, x_0 minimum local strict, c-à-d
$$x_0 = y.$$
Alors u_ε est un solution de viscosité de
$$F_\varepsilon(x_\varepsilon, u_\varepsilon(x_\varepsilon), D\varphi(x_\varepsilon), D^2\varphi(x_\varepsilon)) = 0.$$
Soit
$$\varphi \in C^2 \text{ et } F_\varepsilon \text{ continu si } \varepsilon \longrightarrow 0^+,$$

alors

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) = 0.$$

Donc u est une sur-solution de viscosité.

2.2 Existence d'une solution de viscosité par la méthode de Perron

En 1987, H.Ishii a utilisé pour la première fois la méthode de Perron pour résoudre des équations non linéaire du premier ordre (méthode de perron pour les équations de Hamilton-Jacobi). Cette méthode a été introduite en 1923 par Oskar Perron.

2.2.1 Solution de viscosité discontinue

Nous expliquons dans cette partie comment construire une solution de viscosité d'une équation lorsque l'on en connait une sur et sous-solution et que l'on sait que l'équation possède un "principe de comparaison ". En fait, le procédé d'écrit ici permet, de construire des solutions "très faibles" : des solutions dites discontinues.

Définition 2.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On appelle enveloppe (scs) la plus petite fonction scs supérieure à u. cette fonction est notée u^* et est donnée par*

$$u^*(x) = \limsup_{x' \mapsto x} u(x')$$

On appelle enveloppe (sci) la plus grande fonction sci inférieure à u. cette fonction est notée u_* et est donnée par

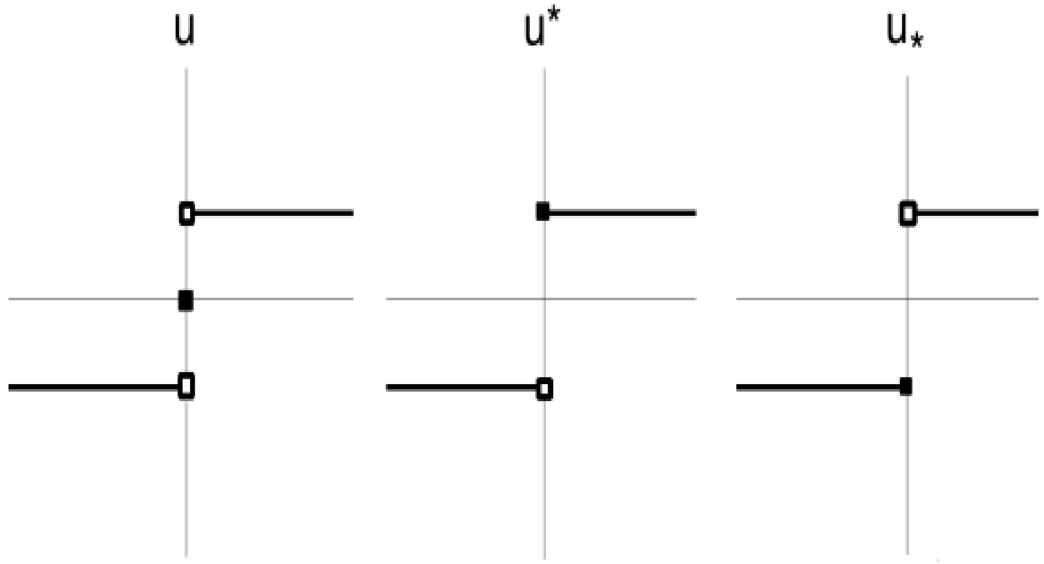
$$u_*(x) = \liminf_{x' \mapsto x} u(x')$$

Remarque 2.9 *Notons que $u_* = -(-u)^*$ et u une fonction continue si et seulement si $u^* = u_*$.*

Exemple 2.3 *Soit la fonction suivante :*

$$u(x) = \begin{cases} -1, \; x < 0 \\ \;\; 0, \; x = 0 \\ +1, \;\; x > 0 \end{cases}$$

Donc semi continues supérieurs et inférieures comme la figure suivante :



Définition 2.3 *On dit qu'une fonction $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution de viscosité discontinue de (2.1) si u^* est une sous-solution de (2.1) tandis que u_* est une sur-solution de cette équation.*

Exemple 2.4 *Soit u sous-solution de viscosité de (2.1). On va montrer que $-u$ est sur-solution de viscosité de :*

$$\tilde{F}(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \; x \subset \Omega.$$

Où

$$\tilde{F}(x, s, p, X) = -F(x, -s, -p, -X) \; \forall (x, s, p, X) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Soit $\varphi \in C^2$, tel que $u - \varphi$ admet un maximum local en x_0, c-à-d

$$u(x) - \varphi(x) \leq u(x_0) - \varphi(x_0),$$

donc u sous-solution de (2.1), alors

$$u \text{ est semi continu supérieure (scs),}$$

et comme

$$-u \text{ est semi continu inférieure (sci)},$$

c-à-d

$$-u \text{ est sur-solution de (2.1)},$$

tel que

$$(-u(x)) - \varphi(x) \geq (-u)(x_0) - \varphi(x_0),$$

alors

$$u(x) - (-\varphi(x)) \leq u(x_0) - (-\varphi(x_0)).$$

Donc, puisque u est sous-solution de (2.1), on a

$$\tilde{F}(x_0, (-u)(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) = -F(x_0, u(x_0), -D\varphi(x_0), -D^2\varphi(x_0)) \geq 0$$

2.2.2 La méthode de perron

Théorème 2.1 *On suppose que $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une sous-solution de* (2.1) *tandis que $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une sur-solution de cette équation.*

On suppose de plus

$$u \leq v \text{ dans } \Omega.$$

Alors il existe une solution de viscosité discontinue

$$w : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \; u \leq w \leq v.$$

Preuve: Soit $\varepsilon = \{z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid z^*$ est une sous-solution de (2.1) et $u \leq z \leq v\}$.Notons que

$$\varepsilon \neq \emptyset \text{ puisque } u \in \varepsilon.$$

posons

$$w(x) = \sup_{z \in \varepsilon} z(x) \; \forall x \in \Omega.$$

On va montrer que w est bien la solution cherchée. Remarquons d'abord que

$$w \in \varepsilon \text{ puisque } u \leq w \leq v \text{ et } w^* \text{ est une sous-solution de } (2.1).$$

Reste à prouver que w_* est une sur-solution de(2.1) .

Donc on montre par l'absurde, Supposant

$$\exists \; x_0 \in \Omega \text{ et } \phi \in C^2,$$

tel que $w_* - \phi$ admet un minimum local strict en x_0, c-à-d

$$w_*(x) - \phi(x) \geq w_*(x_0) - \phi(x_0),$$

et

$$F(x_0, w_*(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0) < 0 \quad . \tag{2.5}$$

Quitte à remplacer

$$\phi \text{ par } \phi - \phi(x_0) + w_*(x_0),$$

on peu supposer que

$$\phi(x_0) = w_*(x_0),$$

on montre d'abord que

$$w_*(x_0) < v(x_0).$$

En effet, sinon

$$w \leq v \Longrightarrow w_*(x_0) < v(x_0),$$

donc

$$v(x) - \phi(x) \geq v(x_0) - \phi(x_0).$$

Mais alors (2.5) contredirait que l'hypothèse que v est une sur-solution de (2.1) . Donc

$$w_*(x_0) < v(x_0).$$

Choisissons maintenant $r > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\bar{B}_r(x_0) \subset \Omega$ et

i)

$$F(x, \phi(x) + \varepsilon, D\phi(x), D^2\phi(x)) \leq 0 \ \forall x \in B_r(x_0),$$

(ce qui est possible d'après (2.5) et par continuité de F)

ii)

$$(w_* - \phi)(x) > \varepsilon \ \forall x \in \partial B_r(x_0).$$

(ce qui est possible car $w_* - \phi$ possède un minimum local strict en et $\phi(x_0) = w_*(x_0)$)

iii)

$$\phi(x) < v(x) - \varepsilon \ \forall x \in B_r(x_0),$$

(ce qui est possible puisque est sci et $\phi(x_0) = w_*(x_0) < v(x_0)$).

On pose

$$z(x) = \begin{cases} w(\ x) & \text{si } x \in \Omega \setminus B_r(x_0), \\ \max\{w(x), \phi(x) + \varepsilon\} & \text{si } \quad x \in B_r(x_0). \end{cases}$$

On affirme que $z \in \varepsilon$. En effet, d'après (iii),

$$z \leq v, \text{ de plus } u \leq z \leq v.$$

Montrons que z^* est une sous-solution de (2.1) .

Soit ψ une fonction-test telle que

$$z^*(x) - \psi(x) \leq z^*(x_1) - \psi(x_1).$$

Si

$$z^*(x_1) = \psi(x_1).$$

Alors

$$w^*(x) - \psi(x) \leq w^*(x_1) - \psi(x_1),$$

donc

$$F(x_1, z^*(x_1), D\psi(x_1), D^2\psi(x_1)) \leq 0 \text{ puisque } w^* \text{ est sous-solution.}$$

Supposons maintenant que
$$z^*(x_1) > w^*(x_1).$$
Alors d'après la définition de z, On a
$$x_1 \subset \bar{B}_r(x_0).$$
Notons que, dans $\bar{B}_r(x_0)$,
$$z^* = \max\{w^*, \phi + \varepsilon\}.$$
Donc
$$z^*(x_1) = \phi(x_1) + \varepsilon,$$
et (ii) implique $x_1 \in B_r(x_0)$. Par conséquent,
$$(\phi + \varepsilon)(x) - \psi(x) \leq (\phi + \varepsilon)(x_1) - \psi(x_1).$$
Ce qui entraîne que
$$D\phi(x_1) = D\psi(x_1) \text{ et } D^2\phi(x_1) \leq D^2\psi(x_1).$$
Alors
$$0 \geq F(x_1, \phi(x_1) + \varepsilon, D\phi(x_1), D^2\phi(x_1)) \geq F(x_1, z^*(x_1) + \varepsilon, D\psi(x_1), D^2\psi(x_1)).$$
Nous avons donc prouvé que Z^* est une sous-solution de (2.1),et que $z \in \varepsilon$.

Prouvons finalement que
$$z \neq w.$$
Soit(x_n) une suite qui converge vers x_0, tel que
$$w(x_n) \text{ tend vers } w_*(x_0).$$
Alors
$$z(x_n) \geq \phi(x_n) + \varepsilon.$$
De plus
$$(\phi(x_n) + \varepsilon) \text{ converge vers } \phi(x_0) + \varepsilon,$$
Avec
$$\phi(x_0) + \varepsilon > w_*(x_0).$$
Donc, pour assez
$$z(x_n) > w(x_n).$$
Nous avons donc prouvé que
$$\begin{cases} z \in \varepsilon \\ \text{et} \\ z \neq w. \end{cases}$$
Ceci est contradiction avec la construction même de w. L'hypothèse de départ (2.5) est donc impossible. Ceci montre que w est une sur-solution, et donc une solution de (2.1).

2.2.3 Existence d'une solution de viscosité continue

Définition 2.4 *On dit que l'équation* (2.1) *vérifie un principe de comparaison dans* Ω *si, pour toute sous-solution* u *et pour toute sur-solution* v *de* (2.1), *si*

$$u \leq v \text{ dans } \partial\Omega,$$

Alors

$$u \leq v \text{ dans } \Omega.$$

Remarque 2.10 *Dans toute la suite, l'inégalité*

$$u \leq v \text{ dans } \partial\Omega$$

signifie par abus de notation :

$$\lim_{x' \longrightarrow x} \sup_{x' \in \Omega} u(x') \leq \lim_{x' \longrightarrow x} \inf_{x' \in \Omega} v(x') \quad \forall x \subset \partial\Omega.$$

Nous étudions maintenant le problème de Dirichlet pour l'équation (2.1).

Soit

$$g : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ une fonction continue.}$$

Corollaire 2.1 *Supposons que l'équation* (2.1) *vérifie un principe de comparaison dans* Ω. *Supposons également qu'il existe deux applications* u *et* v *telles que*

- u est une sous-solution de (2.1) et

$$\lim_{x' \longrightarrow x,\ x' \in \Omega} u(x') = g(x) \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

- v est une sur-solution de (2.1) et

$$\lim_{x' \longrightarrow x,\ x' \in \Omega} v(x') = g(x) \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Alors il existe une unique solution de viscosité w de l'équation (2.1) telle que

$$w = g \text{ dans } \partial\Omega.$$

Autrement dit, le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} F(x, u(x), Du(x), D^2u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u = g & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Possède une unique solution de viscosité.

Preuve: Par la méthode de Perron, on construit une solution discontinue w telle que

$$u \leq w \leq v.$$

On va montrer que

$$w_* = w^* = g \text{ sur } \partial\Omega.$$

En effet, pour tout $x \in \partial\Omega$, on a u est une sous-solution et v est une sur-solution, c-à-d

$$g(x) = \lim_{x' \longrightarrow x,\ x' \in \Omega} u(x') \quad \forall x \in \partial\Omega$$

et

$$g(x) = \lim_{x' \longrightarrow x,\ x' \in \Omega} v(x') \ \ \forall x \in \partial\Omega,$$

alors

$$g(x) = \lim_{x' \longrightarrow x,\ x' \in \Omega} u(x') \ \leq \lim_{x' \longrightarrow x,\ x' \in \Omega} v(x') \ = g(x),$$

donc

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{x' \longrightarrow x,\ x' \in \Omega} u(x') \\ &\leq \liminf_{x' \longrightarrow x,\ x' \in \Omega} w(x') \\ &\leq w_*(x) \leq w^*(x) \\ &\leq \limsup_{x' \longrightarrow x,\ x' \in \Omega} w(x') \\ &\leq \lim_{x' \longrightarrow x,\ x' \in \Omega} v(x') \ = g(x). \end{aligned}$$

D'où

$$w_* = w^* \text{ sur } \partial\Omega.$$

C-à-d w_* est une sur-solution et w^* est une sous-solution, et comme

$$w_* = w^* \text{ sur } \partial\Omega,$$

le principe de comparaison affirme que

$$w_* \geq w^*,$$

cela preuve que

$$w_* = w^*,$$

et donc que w est en fait une solution de viscosité continue. ■

Remarque 2.11 *La méthode de perron est une bonne méthode pour prouver des résultats d'existence pour des EDP générale (c-à-d d'ordre 1 et du second ordre), seul son problème c'est qu'elle ne donne n'i la formule de la solution et ni des informations de la régularité sur la solution.*

2.2.4 Quelque propriété des solutions de viscosité

Proposition 2.3 *Soit* $\phi \in C^2(\mathbb{R})$, *avec* $\phi' > 0$ *et* $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,*Si* u *est une sous-solution de viscosité (ou sur-solution de viscosité) de l'équation* (2.1) , *alors* $v = \phi \circ u$ *est une sous-solution de viscosité (où sur-solution de viscosité) de l'équation*

$$F(x,\ \psi(v(x)),\ \psi'(v(x))Dv,\ \psi''(v(x))DvDv^T + \psi'(v(x)D^2v) = 0, \tag{2.6}$$

avec

$$\psi = \phi^{-1}.$$

Preuve: Soit $\phi' > 0$ alors $\psi' > 0$, On va montrer que v est une sous-solution de viscosité de (2.6).

Soit $\varphi \in C^2$, telle que $v - \varphi$ admet un maximum local en x_0, c-à-d

$$v(x) - \varphi(x) \leq v(x_0) - \varphi(x_0),$$

alors

$$v(x) \leq \varphi(x) \text{ et } v(x_0) = \varphi(x_0),$$

et comme

$$u(x) \leq \psi \circ \varphi(x) \text{ et } u(x_0) = \psi \circ \varphi(x_0),$$

de plus

$$\tilde{\phi} = \psi \circ \varphi \in C^2,$$

est une fonction de test, et $\tilde{\phi}$ touche u par le haut à un point x_0, donc

$$F(x_0, u(x_0), D\tilde{\phi}(x_0), D^2\tilde{\phi}(x_0)) \leq 0,$$

alors

$$D\tilde{\phi}(x_0) = \psi'(\varphi(x_0))D\varphi(x_0),$$

et

$$D^2\tilde{\phi}(x_0) = \psi"(\varphi(x_0))D\varphi(x_0)D\varphi^T(x_0) + \psi'(\varphi(x_0))D^2\varphi(x_0) \quad et \quad v(x_0) = \varphi(x_0).$$

On va montrer que v est une sur-solution de viscosité de (2.6).

Soit $\varphi \in C^2$, telle que $v - \varphi$ admet un minimum local en x_0, c-à-d

$$v(x) - \varphi(x) \geq v(x_0) - \varphi(x_0),$$

alors

$$v(x) \geq \varphi(x) \text{ et } v(x_0) = \varphi(x_0),$$

et comme

$$u(x) \geq \psi \circ \varphi(x) \text{ et } u(x_0) = \psi \circ \varphi(x_0),$$

de plus

$$\tilde{\phi} = \psi \circ \varphi \in C^2,$$

est une fonction de test, et $\tilde{\phi}$ touche u par le bas à un point x_0, donc

$$F(x_0, u(x_0), D\tilde{\phi}(x_0), D^2\tilde{\phi}(x_0)) \geq 0,$$

Donc

$$v = \phi \circ u,$$

est une solution de viscosité de (2.6) .

Proposition 2.4 *Soit u une solution de viscosité de*

$$F(x, u, Du) = 0,$$

et $\phi \in C^1$ diffeomorphism, alors $v = u \circ \phi$ est une solution de viscosité de

$$F(y, v(\phi^{-1}(y)), (D\phi^{-1})^T(y)Dv(\phi^{-1})(y))) = 0. \tag{2.7}$$

Preuve: On va montrer que v est une sous-solution de viscosité (2.7).

Soit $\varphi \in C^1$, telle que $v - \varphi$ admet un maximum local en x_0, c-à-d

$$v(x) - \varphi(x) \leq v(x_0) - \varphi(x_0),$$

et comme

$$u(\phi(x)) - \varphi(x) \leq u(\phi(x_0)) - \varphi(x_0),$$

alors

$$u(y) - \varphi \circ \phi^{-1}(y) \leq u(y_0) - \varphi \circ \phi^{-1}(y_0),$$

avec

$$y = \phi(x) \text{ et } y_0 = \phi(x_0).$$

et

$$\varphi = \varphi \circ \phi^{-1} \in C^1, \text{ est une fonction de test,}$$

de plus

$$u = v \circ \varphi,$$

et

$$D\tilde{\varphi}(y) = (D\ \phi^{-1})^T(y)D\varphi(\phi^{-1}(y)).$$

On va montrer que v est une sur-solution de viscosité (2.7).

Soit $\varphi \in C^1$, tel que $v - \varphi$ admet un minimum local en x_0, c-à-d

$$v(x) - \varphi(x) \geq v(x_0) - \varphi(x_0),$$

et comme

$$u(\phi(x)) - \varphi(x) \geq u(\phi(x_0)) - \varphi(x_0),$$

et

$$u(y) - \varphi \circ \phi^{-1}(y) \geq u(y_0) - \varphi \circ \phi^{-1}(y_0),$$

avec

$$y = \phi(x) \text{ et } y_0 = \phi(x_0).$$

de plus

$$\varphi = \varphi \circ \phi^{-1} \in C^1, \text{ est une fonction de test,}$$

alors

$$u = v \circ \varphi.$$

et

$$D\tilde{\varphi}(y) = (D\ \phi^{-1})^T(y) D\varphi(\phi^{-1}(y)).$$

Donc

$$v = u \circ \phi,$$

est une solution de viscosité de (2.7) .

Chapitre 3

Les solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi

Les équations de Hamilton-Jacobi sont de la forme :

$$\partial_t u + H(t, x, u, Du) = 0.$$

Ces équations apparaissent naturellement dans de nombreux domaines. En physique, en économie, ou encore en épidémiologie.

Le lien entre ces équations et la théorie du control optimal est aussi une raison de leur importance. Mais ce type d'équations ne nous permet pas d'espérer avoir des solutions classiques qui résolvent le problème partout.

Ceci a amené pierre Louis Lions un mathématicien français, professeur à l'université paris Dauphine à développer avec son collègue Michael G. Crandall la théorie des solutions de viscosités au début des années 1980.

Ces solutions ont résolu beaucoup de difficultés et restent aujourd'hui au centre de domaines de recherche actifs.

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'équation :

$$\partial_t u + H(t, x, u, Du) = 0.$$

Où

$$H : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;\text{ est le Hamiltonien.}$$

Définition 3.1 *Soit l'équation suivante :*

$$\partial_t u + H(t, x, u, Du) = 0, \tag{3.1}$$

avec condition initiale

$$u_0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}. \textit{ Donc } \; u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

telle que

$$u(0, x) = u_0(x) \textit{ et } H : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}?$$

est une fonction continue.

Définition 3.2 *Soit* $u \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

i) On dit que u est une sous-solution de viscosité pour (3.1) si pour tout $\varphi \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on a : $u - \varphi$ admet un maximum local en (t, x) un point de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$, alors

$$\partial_t \varphi(t, x) + H(t, x, u(t, x), D\varphi(t, x)) \leq 0. \tag{3.2}$$

ii) On dit que u est une sur-solution de viscosité pour (3.1) si pour tout $\varphi \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on a : $u - \varphi$ admet un minimum local en (t, x) un point de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$, alors

$$\partial_t \varphi(t, x) + H(t, x, u(t, x), D\varphi(t, x)) \geq 0. \tag{3.3}$$

iii) u est une solution de viscosité si elle vérifie à la fois (3.2) et (3.3) .

Remarque 3.1 *Si une solution de viscosité est différentiable en* (t, x) *alors elle vérifiée exactement* (3.4) *.*

Dans la suite on va montrer des résultats d'existence et d'unicité dans le cas

$$\begin{cases} \partial_t u + H(t, x, u, Du) = 0, \\ u(0, .) = u_0. \end{cases} \tag{3.4}$$

3.1 Existence des solutions de viscosité par l'équation Hamilton-Jacobi

Dans cette partie nous allons présenter la méthode dite en anglais "vanishing viscosity" qui est à l'origine du nom des solutions de viscosité et qui garantit l'existence de ce type de solution.

Comme on l'a vu, le problème (3.4) n'admet pas en général des solutions classiques. Fixons $\varepsilon > 0$ et ajoutons un terme à notre équation qui va nous permettre de la régulariser :

$$\partial_t u_\varepsilon + H(t, x, u_\varepsilon, Du_\varepsilon) = \varepsilon \Delta u_\varepsilon, \tag{3.5}$$

et

$$\Delta u_\varepsilon \text{ désigne la Laplace de } u_\varepsilon.$$

Avec des conditions initiales régulières, ce problème admet une solution C^2.

L'objectif de cette méthode est de faire tendre $\varepsilon \longrightarrow 0$ et espérer qu'il existe u limites de cette suite de fonctions qui sera une solution au moins de viscosité pour notre problème.

On aimerait, en fait, que cette convergence se fausse de manière uniforme sur tout compact car dans ce cas on a un résultat d'existence.

Théorème 3.1 *Soient $(\phi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs convergents vers 0 et $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions C^2 solution de (3.5) pour $\varepsilon = \phi(n)$ telle qu'il existe u :*

$$u_{\phi(n)} \underset{n\mapsto\infty}{\longrightarrow}^{||\cdot||_\infty} u,$$

sur tout compact.

Alors u est une solution de viscosité du problème (3.4).

Lemme 3.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle qu'il existe $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $u - \varphi$ admet un maximum local strict en x.*

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonction convergent uniformément vers u, alors il existe une suite de point $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} x_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} x \\ u_{\phi(n)}(x_n) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} u(x) \\ u_n - \varphi \text{ admet un maximum local en } x_n, \text{ à partir d'un certain rang.} \end{cases}$$

Preuve: (du Théorème)

On va montrer que pour tout $\varphi \in C^1$ telle que $u - \varphi$ admet un maximum local en (t, x) on ait

$$\partial_t \varphi(t, x) + H(t, x, D\varphi(t, x)) \leq 0, \tag{3.6}$$

soit

$$u - \varphi \text{ admet un maximum local strict en } (t, x),$$

on pose

$$\text{pour tout } (s, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n,\ \zeta(s, y) = \varphi(s, y) + |y - x|^2 + |s - t|^2,$$

on a que $u - \zeta$ admet un maximum local strict en (t, x). De plus

$$\partial_x \zeta(t, x) = \partial_x \varphi(t, x) \text{ et } \partial_t \zeta(t, x) = \partial_t \varphi(t, x),$$

donc dans la suite de la preuve on suppose que $u - \varphi$ admet un maximum local strict en (t, x). On suppose que $\varphi \in C^2$, soit

$$\varepsilon > 0, \text{ comme } u_{\phi(n)} \text{ converge vers } u \text{ uniformément sur tout compact.}$$

On peut donc appliquer le lemme précédent et donc il existe $(t_n, x_n)_{n \in N}$ tel que :

$$\begin{cases} (t_n, x_n) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} (t, x) \\ u_{\phi(n)}(t_n, x_n) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} u(t, x) \\ u_{\phi(n)} - \varphi \text{ admet un maximum local en } (t_n,\ x_n), \text{à partir d'un certain rang.} \end{cases}$$

Ainsi

$$\partial_\star u_{\phi(n)}(t_n, x_n) = \partial_\star \varphi(t_n, x_n) \text{ où } \star \in \{t, x\},$$

et

$$\Delta u_{\phi(n)}(t_n, x_n) \leq \Delta \varphi(t_n, x_n).$$

De plus comme $u_{\phi(n)}$ résout (3.1) on obtient :

$$\partial_t \varphi(t_n, x_n) + H(t_n, x_{n,\partial x}\, \varphi(t_n, x_n)) \leq \phi(n) \Delta \varphi(t_n, x_n),$$

si

$$n \longrightarrow +\infty \text{ et par continuité de } H \text{ on en conclut } (3.6),$$

mais seulement pour $\varphi \in C^2$. Il reste alors à étendre ce résultat pour $\varphi \in C^1$.

Soit $\varphi \in C^1$ telle que $u - \varphi$ admet un maximum local strict en (t, x) . et comme

$$(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ une suit de fonctions } C^2 \text{ convergent uniformément vers } \varphi \text{ sur tout compact,}$$

telle que leurs dérivées convergent aussi uniformément sur tout compact vers la dérivée de φ. et par le lemme précédent, ile xiste $(t'_n, x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} (t'_n, x'_n) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} (t, x) \\ u_{\phi(n)}(t_n, x_n) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} u(t, x) \\ u_{\phi(n)} - \varphi \text{ admet un maximum local en } (t'_n, x'_n), \text{à partir d'un certain rang.} \end{cases}$$

Donc

$$\partial_t \varphi_n(t'_n, x'_n) + H(t'_n, x'_{n,\partial x}\, \varphi_n(t'_n, x'_n)) \leq 0,$$

si

$$n \longrightarrow +\infty \text{ et par continuité de } H \text{ on en conclut } (3.6).$$

On peut raisonner de la même manière pour obtenir l'inégalité inverse et en déduire que u est bien une solution de viscosité.

3.2 Unicité des solutions de viscosité par l'équation Hamilton-Jacobi

Nous allons dans cette partie présenter un résultat d'unicité des solutions de viscosité. Dans un premier temps on va le montrer dans le cas où

$$H = H(x, p),$$

et ensuit étendre ce résultat où

$$H = H(t, x, p).$$

Théorème 3.2 *Supposons que le Hamiltonien H satisfait les conditions de continuité de Lipschitz*

$$\begin{cases} |H(x,p) - H(x,q)| \leq C|p-q| \\ |H(x,p) - H(y,p)| \leq C|x-y|(1+|p|). \end{cases} \quad (C > 0)$$

Alors, il existe au plus une solution de viscosité uniformément continue et bornée du problème (3.4) .

Preuve: On suppose qu'il existe deux solutions de viscosité uniformément continues et bornées du problème (3.4) différentes, u et $\bar{u}$. On va dans un premier temps montrer que $u \leq \bar{u}$ par l'absurde : on suppose qu'il existe

$$(t^*, x^*) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n, \text{ telle que } u(t^*, x^*) > \bar{u}(t^*, x^*).$$

Etape 1

On pose

$$\sigma = \sup\{u(t,x) - \bar{u}(t,x) \,|\, (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n\} > 0.$$

Soit $(\varepsilon, \lambda) \in]0,1[^2$, on pose

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{2n}, \forall (t,s) \in [0,T]^2,$$
$$\phi(t,s,x,y) = u(t,x) - \bar{u}(s,y) - \lambda(t+S) - \frac{1}{\varepsilon^2}\left(|x-y|^2 + (t-S)^2\right) - \varepsilon\left(|x|^2 + |y|^2\right).$$

Et comme u et $\bar{u}$ sont bornées, il existe (t_0, s_0, x_0, y_0) telle que :

$$\phi(t_0, s_0, x_0, y_0) = \max\{\phi(t,s,x,y) \,|\, (t,s,x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^2\}.$$

Etape 2

On a :

$$\phi(t_0, s_0, x_0, y_0) \geq \sup\{\phi(t,t,x,x) \,|\, (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\}. \tag{3.7}$$

On peut fixer ε et λ assez petit pour avoir :

$$\sup\{\phi(t,t,x,x) \,|\, (t,x) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^2\} \geq \frac{\sigma}{2}. \tag{3.8}$$

D'autre part,

$$\phi(t_0, s_0, x_0, y_0) \geq \phi(0,0,0,0),$$

d'où :

$$\bar{u}(0,0)-u(0,0)+u(t_0,x_0)-\bar{u}(s_0,y_0) \geq \lambda(t_0+s_0)+\frac{1}{\varepsilon^2}\left(|x_0-y_0|^2+(t_0-s_0)^2+\varepsilon\left(|x_0|^2+|y_0|^2\right)\right). \tag{3.9}$$

Maintenant en faisant tendre ε vers 0 par l'inégalité (3.9) on en déduit :

$$\begin{cases} |x_0-y_0| = O(\varepsilon) \\ |t_0-s_0| = O(\varepsilon) \end{cases} \text{(quand } \varepsilon \longrightarrow 0). \tag{3.10}$$

De même

$$\begin{cases} \varepsilon|x_0|^2 = O(1) \\ \varepsilon|y_0|^2 = O(1) \end{cases} \text{(quand } \varepsilon \longrightarrow 0).$$

D'où,

$$\begin{cases} \varepsilon^{\frac{1}{2}}|x_0|^2 = O(1) \\ \varepsilon^{\frac{1}{2}}|y_0|^2 = O(1) \end{cases} \text{(quand } \varepsilon \longrightarrow 0).$$

Donc

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(|x_0|+|y_0|\right) = O(1),$$

ainsi :

$$\varepsilon(|x_0|+|y_0|) = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}). \tag{3.11}$$

Etape 3

Comme

$$\phi(t_0,s_0,x_0,y_0) \geq \phi(t_0,t_0,x_0,x_0),$$

on a

$$\begin{aligned} u(t_0,x_0)-\bar{u}(s_0,y_0)- \quad \lambda(t_0+s_0) \quad &-\frac{1}{\varepsilon^2}(|x_0-y_0|^2+(t_0-s_0)^2)-\varepsilon\left(|x_0|^2+|y_0|^2\right) \\ \geq u(t_0,x_0)-\bar{u}(s_0,y_0)-2\lambda t_0-2\varepsilon|x_0|^2, \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \bar{u}(t_0,x_0)-\bar{u}(s_0,y_0)+\varepsilon(x_0+y_0).(x_0-y_0) \geq \frac{1}{\varepsilon^2}(|x_0-y_0|^2+(t_0-s_0)^2). \tag{3.12}$$

Et en prenant en compte (3.10) et (3.11) en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz[1], on déduit de (3.12) que

$$\varepsilon(x_0+y_0).(x_0-y_0) \underset{\varepsilon\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0,$$

D'autre part, par uniforme continuité de $\bar{u}$ on a

$$\bar{u}(t_0,x_0)-\bar{u}(s_0,y_0) \longrightarrow 0.$$

[1]Dans le cas $x, y \in \mathbb{R}^n$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Donc :

$$\begin{cases} |x_0 - y_0| = o(\varepsilon) \\ |t_0 - s_0| = o(\varepsilon). \end{cases}$$

Etape 4

On note w le module de continuité de u et $\bar{w}$ celui de $\bar{u}$. On a donc $w(r) \longrightarrow 0$ quand $r \longrightarrow 0$ (de même pour $\bar{w}$) et par (3.7) et (3.8) on a :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{2} &\leq \phi(t_0, s_0, x_0, y_0) \\ &\leq u(t_0, x_0) - \bar{u}(s_0, y_0) \\ &= u(t_0, x_0) - u(0, x_0) + u(0, x_0) - \bar{u}(0, x_0) \\ &+ \bar{u}(0, x_0) - \bar{u}(t_0, x_0) + \bar{u}(t_0, x_0) - \bar{u}(s_0, y_0) \\ &\leq w(t_0) + \bar{w}(t_0) + \bar{w}(o(\varepsilon)) + 0. \end{aligned}$$

Ainsi pour ε assez petit on déduit que

$$\frac{\sigma}{4} \leq w(t_0) + \bar{w}(t_0),$$

et donc il existe $0 < \mu < t_0$. On raisonne de la même manière pour obtenir $0 < \mu < s_0$ quitte à réduire μ.

Cela prouve que $t_0 > 0$ et que $s_0 > 0$.

Etape 5

Considérons la fonction

$$h : (t, x) \longmapsto \phi(t, s_0, x, y_0).$$

On sait qu'elle admet un maximum en (t_0, x_0). Maintenant on pose $v = u - h$. On peut remarquer que $v \in C^1$ et que $u - v$ admet un maximum en (t_0, x_0). De plus, comme $t_0 > 0$ et que u est une solution, en particulier une sous-solution de viscosité du problème (3.1) on en déduit :

$$\partial_t v(t_0, x_0) + H(x_0, v, Dv(t_0, x_0) \leq 0.$$

D'où :

$$\lambda + 2\frac{t_0 - s_0}{\varepsilon^2} + H(x_0, \frac{2}{\varepsilon^2}(x_0 - y_0) + 2\varepsilon x_0) \leq 0. \tag{3.13}$$

On refait maintenant

$$\bar{h} : (s, y) \longmapsto -\phi(t_0, s, x_0, y) \text{ qui admet un minimum en } (s_0, y_0).$$

On pose $\bar{v} = \bar{u} - \bar{h}$ et comme tout à l'heure, comme $\bar{u}$ est une solution, en particulier une sur-solution de viscosité on en déduit que :

$$-\lambda + 2\frac{t_0 - s_0}{\varepsilon^2} + H(x_0, \frac{2}{\varepsilon^2}(x_0 - y_0) + 2\varepsilon x_0) \geq 0. \tag{3.14}$$

Etape 6

Au vu des relations (3.13) et (3.14) , on a

$$2\lambda \leq H(y_0, \frac{2}{\varepsilon^2}(x_0 - y_0) + 2\varepsilon y_0) - H(x_0, \frac{2}{\varepsilon^2}(x_0 - y_0) + 2\varepsilon x_0) \geq 0,$$

et donc par hypothèse sur H,

$$\lambda \leq C\varepsilon\left(|x_0| + |y_0|\right) + C|x_0 - y_0|\left(1 + \frac{|x_0 - y_0|}{\varepsilon^2} + \varepsilon\left(|x_0| + |y_0|\right)\right).$$

Et la quantité de droite converge vers 0 quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ donc on aboutit à la contradiction $0 < \lambda = 0$ ainsi $u \leq \bar{u}$. On prouver alors l'inégalité inverse en inversant le rôle de u et $\bar{u}$. Et donc $u = \bar{u}$.

3.3 Quelques résultats d'unicité classiques

Nous commençons par expliquer comment un tel principe se démontre, d'abord dans le cas des équations du premier ordre, puis, au dans le cas des équations du second ordre.

3.3.1 Equations du premier ordre

Soit l'équation suivante :

$$H(x, u, Du) = 0 \ x \in \Omega, \tag{3.15}$$

où Ω est un ouvert borné et où $H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait les hypothèses suivantes : ils existe des constantes $\gamma > 0$ et $C \geq 0$ telles que

i) $H(x, s_1, p) - H(x, s_2, p) \geq \gamma\,(s_1 - s_2)\ \forall\,(x, s_1, s_2, p) \in \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,$

ii) $|H(x, s, p) - H(y, s, p)| \ \leq C\ (1+|p|)|y-x|\ \forall\,(x, s_1, s_2, p) \in \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n.$

Voici le résultat que nous allons démontrer :

Théorème 3.3 *Si u est une sous-solution de* (3.15) *est v une sur-solution de* (3.15) , *et si*

$$u \leq v \ \textit{dans}\ \partial\Omega,$$

alors

$$u \leq v \ \textit{dans}\ \Omega.$$

Preuve: La démonstration d'un principe de comparaison se fait (presque toujours) par l'absurde. On suppose donc

$$\exists\ x \in \Omega \text{ tel que } \ u(x) > v(x).$$

On considère alors
$$M = \sup_{x\in\Omega}(u-v)(x) > 0.$$

Notons que le sup est en fait un max puisque l'ouvert Ω est borné. En effet, en tout point x_0 de maximum de $u-v$, on a

$$Du(x_0) = Dv(x_0) \text{ et } u(x_0) > v(x_0).$$

Or u et v étant respectivement sous- et sur-solution, alors

$$0 \geq H(x_0, u(x_0), Du(x_0)) - H((x_0, v(x_0), Dv(x_0)) \geq \gamma(u(x_0) - v(x_0)),$$

d'après l'hypothèse (i), ce qui est absurde.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose

$$w_\varepsilon(x,y) = u(x) - v(x) - \frac{1}{\varepsilon^2}|x-y|^2 \quad (x,y) \in \Omega \times \Omega.$$

Notons que w_ε est scs dans $\Omega \times \Omega$. Nous la prolongeons à $\bar\Omega \times \bar\Omega$ en posant

$$w_\varepsilon(x,y) = \limsup_{(x',y')\longrightarrow(x,y),(x',y')\in\Omega\times\Omega} w_\varepsilon(x',y') \ \ \forall\,(x,y) \in \left(\bar\Omega\times\bar\Omega\right)\setminus(\Omega\times\Omega)\,.$$

Le lemme suivant affirme que la fonction w_ε, au voisinage de son maximum et lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, se comporte comme la fonction $u-v$.

Lemme 3.2 *Soit* $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ *un maximum de* w_ε *dans* $\bar\Omega\times\bar\Omega$ *. Alors*

1. $\lim_{\varepsilon\longrightarrow0^+} w_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon) = M,$

2. $\lim_{\varepsilon\longrightarrow0^+} \frac{2}{\varepsilon}|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2 = 0,$

3. Il existe $\theta > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que, pour tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0[$, $d_{\partial\Omega}(x_\varepsilon) \geq \theta$ et $d_{\partial\Omega}(y_\varepsilon) \geq \theta$. ∎

preuve du théorème : Comme la fonction w_ε a un maximum au point $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \Omega\times\Omega$, la fonction

$$x \longrightarrow u(x) - [v(y_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2}|x-y_\varepsilon|^2] \text{ a un maximum au point } x_\varepsilon.$$

En utilisant la fonction-test
$$\varphi(x) = v(y_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2}|x-y_\varepsilon|^2,$$

et le fait que u est une sous-solution, on obtient

$$H(x_\varepsilon, u(x_\varepsilon), \frac{2}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon - y_\varepsilon)) \leq 0. \tag{3.16}$$

De même, la fonction

$$y \longrightarrow v(y) - [u(x_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2}|y - x_\varepsilon|^2] \text{ a un minimum en } y_\varepsilon,$$

et donc, comme v est une sur-solution,

$$H(y_\varepsilon, v(y_\varepsilon), \frac{2}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon - y_\varepsilon)) \geq 0. \tag{3.17}$$

On fait la différence entre (3.16) et (3.17) et on utilise l'hypothèse (i) pour parvenir à

$$\begin{aligned}
0 &\geq H(x_\varepsilon, u(x_\varepsilon), \frac{2}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon - y_\varepsilon)) - H(y_\varepsilon, v(y_\varepsilon), \frac{2}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon - y_\varepsilon)) \\
&\geq \gamma(u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon)) + H(x_\varepsilon, v(y_\varepsilon), \frac{2}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon - y_\varepsilon)) - H(y_\varepsilon, v(y_\varepsilon), \frac{2}{\varepsilon^2}(x_\varepsilon - y_\varepsilon)) \\
&\geq \gamma M_\varepsilon - C(1 + \frac{2}{\varepsilon^2}|x_\varepsilon - y_\varepsilon|)|x_\varepsilon - y_\varepsilon|.
\end{aligned}$$

Lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, on obtient, grâce au lemme, que $0 \geq \gamma M_\varepsilon$, ce qui est impossible.

3.3.2 Equations du second ordre

Soit l'équation suivante :

$$H(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \; x \in \Omega. \tag{3.18}$$

Dans toute cette partie, nous supposerons que Ω est un sous-ensemble ouvert et borné de $\mathbb{R}^n$, que H elliptique et continue, et qu'il existe $\gamma > 0$ tel que

$$H(t,p,X) - H(s,p,X \geq \gamma\,(t-s) \quad \text{si } t > s \;\forall\,(s,t,p,X) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \quad \times M_{n,n}. \tag{3.19}$$

Rappelons d'abord le théorème que nous allons prouver :

Théorème 3.4 *Si u et v sont respectivement une sous- et une sur-solution de* (3.18) , *et si*

$$u \leq v \text{ dans } \partial\Omega,$$

alors

$$u \leq v \text{ dans } \Omega$$

La démonstration débute exactement comme la démonstration dans le premier ordre.

3.4 La forme d'une solution de viscosité

Jusqu'ici, nous avons défini les solutions de viscosité puis justifié leur existence comme leur unicité (dans certains cas).

Néanmoins, nous n'avons jamais donné une idée de leur forme, c'est que nous nous proposons de faire dans cette dernière partie.

3.4.1 La Formule de Hopf-lax

Considérons le problème aux conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} H(x,u,Du) + u_t = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \times [0,T], \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{sur} \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

Supposons que le Hamiltonien et g vérifient les conditions suivantes :

$$1 - \qquad p \longrightarrow H(p) \text{ est convexe,}$$

$$2 - \qquad \lim_{|p| \longrightarrow \infty} \frac{H(p)}{|p|} = \infty$$

$$3 - \qquad u_0 \text{ est une fonction lipchitzienne.} \tag{3.20}$$

Transformée de Legendre

Définition 3.3 *Soit $L : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ telle que :*

$$L \text{ est convexe et } \frac{L(q)}{|q|} \underset{|q| \mapsto +\infty}{\mapsto} +\infty. \tag{3.21}$$

On définit la transformée de Legendre par :

$$L^*(p) = \sup_{q \in \mathbb{R}^n} [p.q - H(q)].$$

Exemple 3.1 *On prend par exemple*

$$L(q) = \frac{1}{2} q^2.$$

Pour tout $q \in \mathbb{R}$. Dans ce cas

$$L^*(p) = \sup_{q \in \mathbb{R}} (q.p - \frac{1}{2} q^2).$$

Et par une étude de fonction le maximum est atteint pour $q = p$, ainsi :

$$L^*(p) = \frac{1}{2} q^2.$$

3.4.2 Une *forme de solution de viscosité*

Théorème 3.5 *Les solutions de viscosité sous la forme de Hopf-Lax*

Supposons qu'en plus des conditions précédentes, u_0 est bornée, dans ce cas, l'unique solution de viscosité du problème précédente est :

$$u(x,t) = \min_{y\in\mathbb{R}^n}[tL(\frac{x-y}{t}) + u_0(y)]. \tag{3.22}$$

Preuve: .

1. u est une fonction lipchitzienne égale à u_0 en 0 et bornée. Il suffit de vérifier que

$$t\min_{y\in\mathbb{R}^n}[L(\frac{x-y}{t}) + u_0(y)].$$

est bornée est lipchitzienne.

2.Soit $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,T]$ telle que $u-v$ admet un maximum local en (x_0,t_0) . Montrons alors que

$$\forall t < t_0,\ u\,(x_0,t_0) = \min_{x\in\mathbb{R}^n}[(t_0-t)L(\frac{x_0-x}{t_0-t}) + u(x,t)].$$

En effet,

$$\forall t < t_0,\ \min_{x\in\mathbb{R}^n}[(t_0-t)L(\frac{x_0-x}{t_0-t})+u(x,t)] = \min_{x\in\mathbb{R}^n,y\in\mathbb{R}^n}[(t_0-t)L(\frac{x_0-x}{t_0-t})+tL(\frac{x-y}{t})+u_0(y)] \leq u(x_0,y_0).$$

en prenant $y = x_0$ d'autre part,

$$(t_0-t)L(\frac{x_0-x}{t_0-t}) + tL(\frac{x-y}{t}) + u_0(y) \geq \sup_{p\in\mathbb{R}^n}[p.(x_0-y) - t_0H(p) + u_0(y)],$$

car

$$\sup_p U(p) + \sup_p V(p) \geq \sup_p[U(p) + V(p)].$$

Ainsi

$$(t_0-t)L(\frac{x_0-x}{t_0-t}) + tL(\frac{x-y}{t}) + u_0(y) \geq u(x_0,t_0)$$

Or $u-v$ admet un maximum local en (x_0,t_0), donc suffisamment proche de (x_0,t_0),

$$v(x_0,t_0) - v(x,t) \leq (t_0-t)L(\frac{x_0-x}{t_0-t})$$

Notons

$$\begin{cases} h = t_0 - t \\ q = \frac{x_0-x}{t_0-t} \end{cases}.$$

Alors, en divisant par h puis en faisant tendre h vers 0 :

$$v_t(x_0,t_0) + Dv(x_0,t_0).q \leq L(q).$$

Ceci étant vrai pour tout $q \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\sup_q[v_t(x_0,t_0) + Dv(x_0,t_0).q - L(q)] \leq 0,$$

alors

$$v_t(x_0,t_0)+H[Dv(x_0,t_0)]\leq 0.$$

donc u est une sous-solution de viscosité du problème considéré. Pour vérifier que u est une sur-solution exactement le même. Par conséquent, u est une solution de viscosité du problème considéré. ■

Exemple 3.2 *Si*

$$L(q)=\frac{1}{2}q^2 \text{ et } g(y)=y.$$

Alors la formule de Hopf-lax nous donne :

$$u(x,t)=\min_{y\in\mathbb{R}^d}[\frac{t}{2}L(\frac{x-y}{t})^2+y\backslash y\in\mathbb{R}].$$

Et pour x et t fixé, une étude de fonction nous montre que le minimum est atteint pour $y=x-t$. ainsi

$$u(t,x)=x-\frac{t}{2}.$$

Théorème 3.6 *Sous les hypothèses* (3.20) *et* (3.22), *avec le Hamiltonien* $H=L^*$, *u est une solution de viscosité du problème :*

$$\partial_t u+H(x,u,Du)=0,$$

avec pour condition initiale $u(0,.)=u_0$.
Preuve: On va applique la définition de solution de viscosité et $u(0,.)=u_0$ et que u est Lipchitzienne.

Soit $v\in C^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n)$ telle que $u-v$ admet un maximum local en $(t_0,x_0)\in(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n)$. Comme on veut prouver que u est un solution de viscosité, il faut montrer que

$$\partial_t v\,(t_0,x_0)+H(\partial_x v\,(t_0,x_0))\leq 0,$$

par le lemme précédent, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \forall t\in[0,t_0),\ u\,(t_0,x_0)\leq(t_0-t)\,L(\frac{x_0-x}{t_0-t})+u\,(t,x)\,, \tag{3.23}$$

d'autre partir, $u-v$ admet un maximum local en (t_0,x_0), on a

$$u\,(t,x)-v\,(t,x)\leq u\,(t_0,x_0)-v\,(t_0,x_0)\,,$$

donc par (3.23), on obtient pour $t<t_0$:

$$v\,(t_0,x_0)-v\,(t,x)\leq(t_0-t)\,L(\frac{x_0-x}{t_0-t}). \tag{3.24}$$

Maintenant posons $h=t_0-t$ et $x=x_0-h.q$ $(q\in\mathbb{R}^n)$. Avec ces notations on réécrit (3.24) :

$$v\,(t_0,x_0)-v\,(t_0-h,x_0-hq)\leq hL(q),$$

alors
$$\frac{1}{h}(v\left(t_0,x_0\right)-v\left(t_0-h,x_0-hq\right))\leq L(q).$$
En faisant tendre $h \longrightarrow 0$, on obtient :

$$\forall q\in\mathbb{R}^n,\partial_t v\left(t_0,x_0\right)+\partial_x v\left(t_0,x_0\right).q-L\left(q\right)\leq 0.$$

Donc
$$\partial_t v\left(t_0,x_0\right)+H(\partial_x v\left(t_0,x_0\right))\leq 0,$$
donc u est une sous-solution de viscosité du problème considéré. Pour vérifier que u est une sur-solution exactement le même. Par conséquent, u est une solution de viscosité. ■

Exemple 3.3 *Dans le cas on a :*

$$u_0 : x\in\mathbb{R}\mapsto -\cos(x),$$

et

$$L : p\in\mathbb{R}\mapsto \frac{1}{2}p^2.$$
Alors par le théorème précédent :

$$u(t,x)=\min\{\frac{t}{2}(\frac{x-y}{t})^2-\cos(y)/y\in\mathbb{R}.\}.$$
Est l'unique solution de viscosité du problème :

$$\begin{cases} \partial_t u+\frac{1}{2}(Du)^2=0. \\ u(0,x)=-\cos(x),\ x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Conclusion

Dans cette mémoire, nous avons montré qu'il était difficile et même impossible de construire une solution classique d'un problème faisant intervenir une équation de Hamilton-Jacobi. Par la suite, nous avons vu quelle notion de solution faible était adaptée : les solutions de viscosité, pour lesquelles nous avons des résultats d'existence et d'unicité.

De plus nous avants prouvé que cette notion concorde avec les solutions classiques quand celles ci existent.

Bibliographie

[1] Alberto Bressan, Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi Equations and Optimal Control problems

[2] Ferderica Dragoni, Introduction to viscosity solutions for Nonlinear PDEs.

[3] G. Faraud et Y. Zylberberg, Équation de Hamilton-Jacobi, 22 juin 2004.

[4] G.Koepfler, Équations aux dérivées partialles, 2001-gK@math-info.univ-paris5.fr.

[5] GUY BARLES, Solutions de viscosité et équations Elliptiques du Deuxiéme ordre, Septembre 1997 Université de TOURS.

[6] J. Droniou et C. Imbert, Solutions de viscosité et solutions variationnelles pour EDP non-linéaires, 17 mai 2004.

[7] Lawrence C.Evans, Partial Differential Equations

[8] N. Katzourakis, An Introduction to viscosity solutions for fully nonlinear PDE with applications to calcus of variations in L^∞, Department of mathematies and statistices,University of Reading UK, n. Katzourakis@reading.ac.UK, November 11, 2014.

[9] P. Cannarsa and C. Sinestrari, Semiconcave Function, Hamilton- Jacobi Equations, and optimal Control.

[10] P. Ferreira et S. Mas-Gallie, Équations aux dérivées partialles, 11 décembre 2001.

[11] Pierre Cardaliaguet, Solutions de viscosité d'équations elliptiques et paraboliques non linéaires Janvier 2004.

[12] T.Muthukurnar, Partial Differential Equations, tmk@iitk.ac.in April 18, 2014.