République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de **Djilali Bonaama**

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département des Mathématiques et Informatique

MémoirePrésenté
Pour l'obtention de diplôme

master

En

Mathématiques Appliquées et Traitement du signal

Titre

Les Fraction continues

Réalisé par
Tayeb cherif Lemya

Encadré par
M :Krelifa Ali

Année Universitaire 2015/2016

Résumé

Dans ce mémoire, on étudié le problème de convergence des fractions continues et le développement de la fonction hypergéométrique en fraction continue, ainsi la relation entre les fractions continues et les polynômes orthogonaux.

Mots clés : Fractions continues, Fonction hypergéometrique, polynômes orthogonaux, J-Fraction.

Abstract

In this memory, we study the convergence of continued fractions problem and the development of the hypergeometric function in continued fraction, also the relation between continued fractions and orthogonal polynomials.

Key words : Continued Fractions, hypergeometric function, Orthogonal polynomials, J-Fraction.

Table des matières

0.1 Introduction générale

L'étude des fractions continues finies est débuté au 16*éme* siècle par **R. Bombelli** où il a utilisé pour la première fois l'espression approximative de $\sqrt{13}$ en terme de fraction continue finie, i.e : $3 + \frac{4}{6+} \frac{4}{6}$ en 1572.

Tous les coefficients des fractions continues considérées au 16*éme* siècle, sont des nombres dont l'application était l'approximation rationnelle de divers nombres algébriques. Au 17*éme* siècle, l'utilisation des fractions continues devient très importante dans la théorie des nombres.

Le développement des fractions continues en entraînant, pas seulement les nombres, mais aussi des fonctions à variable complexe introduit par Euler, est devenu un outil très important à l'approximation des certaines classes spéciales de fonctions analytiques dans les travaux d'Euler, Lambert, Lagrange et en particulier dans le développement de Gauss en 1813 des ratios des fonctions hypergéométriques une des premières contextes qui a aidé à l'apparition des polynômes orthogonaux.

L'intérêt principal de cette théorie est le développement et la convergence théorique des fractions continues dont les termes sont des fonctions linéaires à une variable complexe z. Les conséquences théoriques de cette recherche sont considérables, particulièrement dans les travaux de Stieljes qui nous a conduit à des développements considérables comme l'étude du problème des moments et la définition et l'étude de l'intégrale de Stieltjes. Le développement asymptotique commençant son apparition dans les travaux de Poincaré et Stieltjes en liant les séries divergente aux fractions continues.

D'autres auteurs, tels que Van Vleck, Wall, Perron et Thron ont donné plusieurs conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence des fractions continues.

Ce mémoire traite la théorie générale des fractions continues et les fractions continues de Jacobi dont le numérateur et le dénominateur satisfont des relations de récurrences d'ordre deux.

Le premier chapitre est réservé aux notions préliminaires et quelques importantes relations satisfaites par les fractions continues. Plusieurs exemples sont donnés.

Nous consacrons le deuxième chapitre à l'étude de l'équation hypergéométrique dont les solutions sont appelées fonctions hypergéométriques introduit par Gauss. En utilisant la théorie de Stieltjes, nous donnons la liaison entre les polynômes orthogonaux et les fonctions hypergéométriques. Ainsi, la théorie générale des polynômes orthogonaux sera étudié dans la deuxième section.

Le développement de la fonction hypergéométrique en fraction continue, nous conduit dans le troisième chapitre, de donner plusieurs méthodes de développement en fraction continue des fonctions usuelles.

Chapitre 1

Théorie générale des fractions continues

Ce chapitre est consacré aux notions préliminaires et quelques propriétés élémentaires des fractions continues. Les différentes notations des fractions continues sont juste des simplifications pour l'écriture. Une fraction continue peut converger ou non, nous donnons dans ce chapitre les conditions générales de convergence de trois type de fraction continue. Plusieurs exemples d'éclaircissement sont donnés en terme de nombre et des fonctions usuelles.

1.1 Préliminaires

Pour motiver les fraction continues, commençons par regarder un exemple avec un des plus célèbres irrationnels : le nombre **d'or**.

Soit $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ce nombre, appelé *nombre d'or*, a une valeur approximative de $1,61803$. Il est solution de l'équation quadratique :

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

Divisions cette équation par ϕ, on obtient

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$$

Remplaçans l'occurrence de ϕ au dénominateur par $1 + \dfrac{1}{\phi}$. On obtient

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\phi}},$$

On voit bien qu'on peut continuer à l'infini. Ceci suggère l'écriture de ϕ comme fraction continue

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}.$$

Définition 1.1 – *Soient* $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *et* $\{b_n\}_{n=0}^{+\infty}$ *deux suites des nombres complexes. On appel fraction continue toute expression de la forme suivante*

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n + \ddots}}}, \tag{1.1}$$

– *La quantité*

$$C_n = \frac{A_n}{B_n} = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}}, \tag{1.2}$$

est appelée la n^{ieme} *réduite, le* n^{ieme} *convergent ou le* n^{ieme} *approximant.*

– *La fraction* $(\dfrac{a_n}{b_n})$ *est appelée le* n^{ieme} *quotient partiel de la fraction continue* (1.1).

– *Dans* (1.2), A_n *et* B_n *sont appelé le numérateurs et le dénominateurs respectivement.*

Notation 1.1 *De manière évedente ces écritures sont rapidement trop lourdes et inxploitables. Pour simplifier l'écriture, quelques auteurs ont proposé divers notations pour écrire la fraction continue* (1.1). *Par exemple*

$$b_0 + \frac{a_1 \mid}{\mid b_1} + \frac{a_2 \mid}{\mid b_2} + \ldots + \frac{a_n \mid}{\mid b_n} + \ldots \quad \textit{(Pringsheim en 1898)} \tag{1.3}$$

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\cdots\frac{a_n}{b_n+}\cdots. \qquad \text{(Rogers)}$$

Exemple 1.1 *On peut mettre $\sqrt{2}$ sous forme d'une fraction continue. Pour se faire, on a*

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}.$$

Ainsi en remplaçant $\sqrt{2}$ par sa valeur on obtient la fraction continue infinie suivante

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}.$$

1.1.1 Propriétés

Quelques relations de récurrence importantes satisfaites par le numérateur et le dénominateur de la fraction continue. En outre, il existe une relation de récurrence d'ordre deux caratérisant les deux membres d'une telle fraction continue.

Théorème 1.1 *Le numérateur et le dénominteur de la fraction continue* (1.1) *satisfont des relations de récurence d'ordre 2*

$$C_{n+1} = \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} = \frac{b_{n+1}A_n + a_{n+1}A_{n-1}}{b_{n+1}B_n + a_{n+1}B_{n-1}}, \quad \forall n \geq 0$$

avec les conditions initiales $A_{-1} = 1$, $A_0 = b_0$ et $B_{-1} = 0$, $B_0 = 1$.

Preuve. La démenstration se fait par recurrence sur n. On peut écrire

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 A_0 + a_1 A_{-1} \\ b_1 B_0 + a_1 B_{-1} \end{bmatrix}, \text{ où } \begin{bmatrix} A_{-1} \\ B_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Supposons que, pour certain $n \geq 1$, on a

$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = b_n \begin{bmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{bmatrix} + a_n \begin{bmatrix} A_{n-2} \\ B_{n-2} \end{bmatrix}, \text{ où } \begin{bmatrix} A_{-1} \\ B_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

Ainsi, sachant que C_{n+1} est obtenu à partir de C_n en remplaçant b_n par $b_n + \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$, alors les relations (1.4) peut s'écrire

$$\begin{aligned}
C_{n+1} = \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} &= \frac{\left(b_n + \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) A_{n-1} + a_n A_{n-2}}{\left(b_n + \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) B_{n-1} + a_n B_{n-2}} \\
&= \frac{b_{n+1}(b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}) + a_{n+1} A_{n-1}}{b_{n+1}(b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}) + a_{n+1} B_{n-1}} \\
&= \frac{b_{n+1} A_n + a_{n+1} A_{n-1}}{b_{n+1} B_n + a_{n+1} B_{n-1}},
\end{aligned}$$

ceci termine la démonstration. ■

Corollaire 1.1 *Le numérateur et le denominateur de la fraction continue* (1.1) *satisfont les relations suivantes*

$$A_n B_{n-1} - B_n A_{n-1} = (-1)^{n+1} a_1 \dots a_n, \quad \forall n \geq 1 \tag{1.5}$$

$$\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = (-1)^{n+1} \frac{a_1 \dots a_n b_{n+1}}{B_{n+1} B_{n-1}}, \quad \forall n \geq 1 \tag{1.6}$$

$$\frac{A_n}{B_n} = b_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} a_1 \dots a_k}{B_{k-1} B_k}, \quad \textit{si } b_0 \neq 0 \textit{ et } B_i \neq 0 \ (1 \leq i \leq n) \tag{1.7}$$

Preuve. Multiplions la première équation de (1.4) par B_{n-1} et la deuxième par A_{n-1}, on obtient par soustraction

$$A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = -a_n [A_{n-1} B_{n-2} - A_{n-2} B_{n-1}],$$

et par récurrence

$$A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = (-1)^n a_1 \dots a_n [A_0 B_{-1} - A_{-1} B_0] = (-1)^{n+1} a_1 \dots a_n$$

d'où (1.5). Ainsi, divisons le dernier résultat par $B_n B_{n-1}$, on obtient

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1} a_1 \dots a_n}{B_n B_{n-1}}, \tag{1.8}$$

Sachant que $\frac{A_0}{B_0} = b_0$, alors en faisant agir la somme des deux cotés de (1.8) on en déduit la relation (1.7).

Pour démontrer (1.6), remplaçons n par $n+1$ dans (1.8) on obtient

$$\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n} = (-1)^n \frac{a_1 \dots a_{n+1}}{B_{n+1} B_n}, \tag{1.9}$$

car $(-1)^{n+2} = (-1)^n$. Additionnons (1.8) à (1.9) en on déduit

$$\begin{aligned}
\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} &= (-1)^n \frac{a_1 \dots a_n}{B_n} \left(\frac{a_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{1}{B_{n-1}} \right) \\
&= (-1)^n \frac{a_1 \dots a_n}{B_{n+1} B_n B_{n-1}} (a_{n+1} B_{n-1} - B_{n+1}) \\
&= (-1)^n \frac{a_1 \dots a_n}{B_{n+1} B_n B_{n-1}} (a_{n+1} B_{n-1} - (b_{n+1} B_n + a_{n+1} B_{n-1}) \\
&= (-1)^{n+1} \frac{a_1 \dots a_n b_{n+1}}{B_{n+1} B_{n-1}},
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Remarque 1.1 *Dans la théorie des nombres, on montre que tout nombre réel positif S admet une écriture unique comme fraction continue*

$$S = b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \dots$$

et que l'écriture est finie si et seulement si le nombre est rationnel.

On voit une première différence avec le développement décimal. le développement décimal d'un nombre rationnel est fini ou périodique. cependant, le développement en fraction continue d'un nombre rationnel est toujours fini. Une deuxième différence réside dans le fait que le développement décimal n'est pas toujours unique, alors que le développement en fraction continue est unique.

Exemple 1.2 *Le nombre rationnel*

$$\frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{2}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}.$$

Cependant, si en prend un nombre irrationnel, on doit avoir une fraction continue infinie. En effet, soit par exemple

$$\sqrt{13} = 3 + (\sqrt{13} - 3) = 3 + \frac{4}{3 + \sqrt{13}} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{3 + \sqrt{13}}{4}},$$

et puisque

$$\frac{\sqrt{13} + 3}{4} = 1 + \frac{\sqrt{13} - 1}{4} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1 + \sqrt{13}}{3}},$$

alors

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{1 + \sqrt{13}}{3}}}.$$

De même, on remarque que

$$\frac{1+\sqrt{13}}{3} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{13}+2}{3}},$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{13}+2}{3}}}}.$$

Remarquons finalement que

$$\frac{\sqrt{13}+2}{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{13}+3}{4}}}},$$

d'où la fraction continue infinie

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6+\ddots}}}}}.$$

Remarque 1.2 *Cette dernière fraction continue nous conduit à la deuxième question suivante : peuton avoir un développement en fraction continue périodique ? La réponse et positive ! On a vu que le développement en fraction continue de $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est périodique puisque tous les b_n sont égaux à* 1. *Les seuls nombres dont le développement en fraction continue devient périodique sont les nombres irrationnels quadratiques* [7].

Définition 1.2
- *Une fraction continue est périodique si et seulement si elle est infinie et a une partie qui se répète périodiquement.*
- *Un nombre irrationnel est appelé nombre irrationnel quadratique ssi est un racine d'un polynome quadratique de la forme $Ax^2 + Bx + C$ à coefficients entiers A, B, C.*

Notation 1.2 **i)** *On note les fractions continues dans les $a_n = 1$, $\forall n \geq 1$ par*

$$b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \ldots + \frac{1|}{|b_n} + \ldots := [b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots] \qquad (1.10)$$

Ce type de fractions continues se dit régulière.

ii) *On not la partie qui se répète dans les fractions continues périodiques de type* (1.10) *par une barre, i.e.*

$$[b_0, b_1, \ldots, \overline{b_r, b_{r+1}, \ldots, b_{r+s}}]. \qquad (1.11)$$

Exemple 1.3 *Le nombre irrationnel* $\sqrt{3}$

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots] := [1, \overline{1, 2}].$$

On peut vérifier aussi facilement que $\sqrt{7} = [2, \overline{1, 1, 1, 4}]$.

1.2 Théorèmes de convergence des fractions continues

L'application des fractions continues est souvent liée avec leurs convergence possible, il est important alors d'avoire un critère de convergence facile à vérifier et qui recouvre une vaste classe des fractions continues. Nous donnons quelques théorèmes essentiel qui assure la convergence des fractions continues qui sont classées, en général, en trois types selon les coefficients a_n et b_n.

Premier type le cas qui a_n et b_n sont quelconque, deuxième type le cas où tous les $a_n = 1$, et on terminer pour troisième type au cas où tous les $b_n = 1$.

Pour se faire, nous introduisons la notation suivante. La fraction continue (1.1) sera notée par

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_n|}{|b_n} + \ldots := b_0 + \mathbf{K}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}, \tag{1.12}$$

Si les a_n sont tous égaux à 1, on aura

$$b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \ldots + \frac{1|}{|b_n} + \ldots := b_0 + \mathbf{K}\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}, \tag{1.13}$$

Le symbole K vient du mot allemend "Kettenbruchs" qui correspond notre terminologie française "fractions continues", cet usage du symbole K est introduit comme $\sum$ et $\prod$.

1.2.1 Premier type

Commençant par le cas général. Donnons d'abord une définition

Définition 1.3 [2] *On dit que fraction continue* (1.12) *converge vers une valeur finie* L *si*

$$\lim_{n \to +\infty} C_n = L < \infty.$$

Remarque 1.3 *Si tous les termes de la fraction continue sont positives, avec* $b_0 = 0$ *alors*

$$C_1 = \frac{a_1}{b_1} > 0,$$
$$0 < C_2 = \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}} < C_1,$$

puisque $\dfrac{a_1}{b_1} > 0$. *En outre,sachant* $\dfrac{a_2}{b_2 + \dfrac{a_3}{b_3}} < \dfrac{a_2}{b_2}$, *alors*

$$C_3 = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3}}} > C_2.$$

En plus,

$$C_3 = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3}}} < \frac{a_1}{b_1} = C_1$$

Puisque

$$C_4 = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4}}}} \quad et \quad \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4}} < \frac{a_3}{b_3}$$

Ce implique

$$C_4 < C_3$$

aussi que

$$C_2 = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2}} < C_4 \quad car \quad \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4}}} < \frac{a_2}{b_2}.$$

ainsi de suite on obtient

$$C_2 < C_4 < C_6 < \cdots < C_5 < C_3 < C_1. \tag{1.14}$$

Théorème 1.2 (**ŚLeszyński – Pingsheim**) [8]
La fraction continue (1.12) *converge si pour tout* $n \geq 1$, *on a*

$$|b_n| \geq |a_n| + 1. \tag{1.15}$$

Sous les mêmes conditions on a

$$|C_n| < 1 \tag{1.16}$$

satisfaite pour tous les approximants C_n *et que la limite (la valeur de la fraction continue)* $|L| \leq 1$.

Preuve. Démontrons d'abord (1.16) par récurrence. Pour tout $n \geq 1$ on a

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq \frac{|a_n|}{|a_n| + 1} < 1,$$

ce qui montre (1.16) pour $n = 1$. Ensuite, pour tout $n \geq 2$, on a

$$\left|\frac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n}}\right| < \frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-1}| + 1 - 1} = 1,$$

ce qui établit (1.16) pour $n = 2$.

Supposons que pour certain k, $1 \leq k \leq n$, la quantité

$$C_n^k = \frac{a_{k+1}|}{|b_{k+1}} + \frac{a_{k+2}|}{|b_{k+2}} \cdots + \frac{a_n|}{|b_n},$$

satisfait la condition $\left|C_n^k\right| < 1$. Alors

$$\left|C_n^{k-1}\right| = \left|\frac{a_k}{b_k + C_n^k}\right| \leq \frac{|a_k|}{|a_k| + 1 - |C_n^k|} < 1.$$

Ainsi, par induction sur n on obtient

$$|C_n| = \left|C_n^0\right| < 1.$$

Pour démontrer la convergence de la fraction continue $b_0 + \mathbf{K}\left[\frac{a_n}{b_n}\right]_{n=1}^{\infty}$, il suffit, d'aprés la formule (1.7), de démontrer la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a_1 \cdots a_n}{B_{n-1} B_n}. \tag{1.17}$$

D'aprés les relations (1.4), on a pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} |B_n| &= |b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}| \\ &\geq |b_n|\,|B_{n-1}| - |a_n|\,|B_{n-2}| \\ &\geq (|a_n| + 1)\,|B_{n-1}| - |a_n|\,|B_{n-2}|, \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} |B_n| - |B_{n-1}| &\geq |a_n|\,(|B_{n-1}| - |B_{n-2}|). \\ |B_{n-1}| - |B_{n-2}| &\geq |a_{n-1}|\,(|B_{n-2}| - |B_{n-3}|). \end{aligned}$$

En on déduit que

$$|B_n| - |B_{n-1}| \geq \prod_{K=1}^{n} |a_k| > 0$$

et que le terme génral de la série (1.17) satisfait

$$\left|\frac{(-1)^{n+1} a_1 \cdots a_n}{B_{n-1} B_n}\right| \leq \frac{1}{|B_{n-1}|} - \frac{1}{|B_n|}.$$

ceci montre que la série (1.17) converge absolument et que la somme partielle de n termes a une valeur absolue inférieure ou égal à 1

$$\frac{1}{|B_0|} - \frac{1}{|B_n|} < 1 - \frac{1}{|B_n|} < 1.$$

Ainsi, la série (1.17) est convergente vers une limite $|L| \leq 1$. ∎

Exemple 1.4 *Soit z un nombre complexe et supposons que $|a_n| \leq 1$. Alors, la fraction continue $\mathbf{K}\left[\frac{a_n}{z}\right]_{n=1}^{\infty}$ converge pour tout $|z| \geq 2$. En particulier, pour $a_n = 1$, on obtient la valeur pour*

$$f(z) = \frac{1}{z + f(z)}, \quad i.e. \quad f(z) = \frac{\sqrt{z^2+4} - z}{2}.$$

1.2.2 Deuxième type

Maintenant, on s'intéresse aux deux cas particuliers du fraction continue. Le premier cas est le cas où tous les $a_n = 1$. Les fractions continues de ce type sont traités par plusieurs auteur. D'abord on un résultat de divergence.

Théorème 1.3 ***(Stern-Stolze theorem)*** $[8, p.94]$
Si la série $\sum |b_n|$ converge, alors la fraction continue $b_0 + \mathbf{K}(1/b_n)$ diverge. En plus, les termes pairs et impairs du numérateur et dénominateur convergent vers des limites finies, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} A_{2n+p} = P_p \neq \infty \quad et \quad \lim_{n\to\infty} B_{2n+p} = Q_p \neq \infty, \tag{1.18}$$

pour $p = 0, 1$ et satisfont

$$P_1 Q_0 - P_0 Q_1 = 1. \tag{1.19}$$

Preuve. Il suffit de prouver (1.18) et (1.19). Sachant que $\{A_n\}$ et $\{B_n\}$ sont les deux solutions de la récurrence

$$X_n = b_n X_{n-1} + X_{n-2} \quad \text{pour} \quad n \geq 1, \tag{1.20}$$

on établit, par récurrence, que chaque solution satisfit la relation suivante

$$|X_n| \leq \max\{|X_{-1}|, |X_0|\} \cdot (|b_1| + 1)(|b_2| + 1) \cdots (|b_n| + 1).$$

Ainsi $\{A_n\}$ et $\{B_n\}$ sont bornées sous la condition $\sum b_n < \infty$. Par conséquent, les deux séries $\sum b_n A_{n-1}$ et $\sum b_n B_{n-1}$ sont absolument convergentes. D'aprés (1.20), on a

$$X_n - X_{n-2} = b_n X_{n-1},$$

ainsi

$$A_{2n} = \sum_{m=1}^{n} (A_{2m} - A_{2m-2}) = \sum_{m=1}^{n} b_{2m} A_{2m-1}.$$

On a aussi des résultats similaire pour A_{2n+1}, B_{2n} et B_{2n+1}. Ceci montre (1.18). Pour obtenire (1.19), remplaçons n par $2n$ dans le déterminant (1.5), on obtient

$$A_{2n} B_{2n-1} - B_{2n} A_{2n-1} = 1, \quad \forall n \geq 0.$$

■

Exemple 1.5 *La fraction continue*

$$\frac{1|}{|i} + \frac{1|}{|i} \cdots + \frac{1|}{|i} \cdots$$

où $i^2 = -1$, diverge.

Ceci montre que la divergence de la série $\sum |b_n|$ est nécessaire pour la convergence de la fraction continue (1.13). *Elle n'est pas suffisante en général.*

Théorème 1.4 (**Koch**) [4, p.32]

La convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ est suffisante pour l'existence des limites finies suivantes

$$\lim_{n\to\infty} A_{2n} = P \qquad \lim_{n\to\infty} A_{2n+1} = P', \tag{1.21}$$

$$\lim_{n\to\infty} B_{2n} = Q \qquad \lim_{n\to\infty} B_{2n+1} = Q'. \tag{1.22}$$

En plus, les limites satisfont la liaison

$$P'Q - PQ' = 1, \tag{1.23}$$

Théorème 1.5 ***(Stern-Siedel theoreme)***

Supposons que touts les éléments de la fraction continue $K(\frac{1}{b_n})$ sont positives. Alors $K(\frac{1}{b_n})$ converge si et seulement si $\sum|b_n| = \infty$.

Preuve. Si $\sum|b_n| < \infty$, alors d'aprés le théorème 1.3, la fraction $K(\frac{1}{b_n})$ diverge. Supposons que $\sum|b_n| = \infty$ et démontrons que $K(\frac{1}{b_n})$ converge. il suffit de prouver que

$$\frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}} - \frac{A_{2n}}{B_{2n}} = \frac{1}{B_{2n+1}B_{2n}}, \tag{1.24}$$

$$\text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_{2n+1}B_{2n}} = 0. \tag{1.25}$$

Sachant que

$$B_n = b_n B_{n-1} + B_{n-2} \quad \text{pour tout } n \geq 1 \text{ et } B_{-1} = 0, \quad B_0 = 1,$$

il s'ensuit que tout les $B_{2n} > B_{2n-2} > \ldots > B_0 = 1$ et $B_{2n+1} > B_{2n-1} > \ldots > B_1 = b_1$, ainsi

$$B_{2n} > b_{2n}b_1 + B_{2n-2} > b_{2n}b_1 + b_{2n-2}b_1 + B_{2n-4} > \cdots > (b_{2n} + \cdots + b_2)b_1 + 1$$

et

$$B_{2n+1} > b_{2n+1} \cdot 1 + B_{2n-1} > \cdots > b_{2n+1} + b_{2n-1} + \cdots + b_1.$$

Dans ce cas, la divergence de $\sum b_n$ montre (1.24). ■

Le théorème siuvant, donne les conditions nécessaires et suffisantes pour de la convergence de la fraction continue du type (1.13).

Théorème 1.6 (*Van Vleck theorem*) [8, p.32]

Pour tout $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, supposons que

$$-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg b_n < \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad \textit{pour tout } n \geq 1. \tag{1.26}$$

Alors tous les approximant de la fraction continue $b_0 + K\left(\frac{1}{b_n}\right)$ sont finis et satisfont

$$-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg C_n < \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad \textit{pour tout } n \geq 1. \tag{1.27}$$

En outre, les suites $\{C_{2n}\}$ et $\{C_{2n+1}\}$ converge vers deux limites finies.

En plus, la fraction continue $b_0 + K\left(\frac{1}{b_n}\right)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ diverge.

Preuve. Notons par $\overline{B_n}$ le complexe conjugué de B_n. Les relations (1.3) devient aprés multiplication par $\overline{B_{n-1}}$

$$B_n\overline{B_{n-1}} = b_n\left|B_{n-1}\right|^2 + \overline{B_{n-1}}B_{n-2},$$

i.e.

$$\mathrm{Re}(B_n\overline{B_{n-1}}) = \left|B_{n-1}\right|^2 \mathrm{Re}(b_n) + \mathrm{Re}(B_{n-1}\overline{B_{n-2}}),$$

ainsi,

$$\mathrm{Re}(B_n\overline{B_{n-1}}) = \left|B_0\right|^2 \mathrm{Re}(b_1) + \left|B_1\right|^2 \mathrm{Re}(b_2) + \ldots + \left|B_{n-1}\right|^2 \mathrm{Re}(b_n). \tag{1.28}$$

Soit b_{2v+1} le premier nombre des $b_1, b_3, \ldots$qui est non nul. Alors, $B_0 = B_2 = \ldots = B_{2v} = 1$, $B_1 = B_3 = \ldots = B_{2v-1} = 0$, et $B_{2v+1} = b_{2v+1}$.

D'après la condition (1.27) $\mathrm{Re}(b_n) > 0$ si $b_n \neq 0$ pour $n = 1, 2, \cdots$ En on déduit de l'égalité (1.28)

$$\mathrm{Re}(B_n\overline{B_{n-1}}) \geq \mathrm{Re}(B_{n-1}\overline{B_{n-2}}) \geq \cdots \geq \mathrm{Re}(B_{2v+1}\overline{B_{2v}}) = \mathrm{Re}(b_{2v+1}) > 0.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 2v+1$ on obtient, d'après la relation (1.6)

$$\left|\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}\right| = \left|\frac{b_{n+1}}{B_{n+1}B_{n-1}}\right|,$$

d'autre part si on note $b_n = |b_n|\, e^{i\theta_n}$, on obtient

$$|b_n| \leq |b_n|\cos\theta_n + |b_n|\sin\theta_n = \mathrm{Re}(b_n)(1 + |\tan\theta_n|),$$

et d'après la condition (1.27) on remarque que

$$|\tan\theta_n| \leq \left|\tan(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)\right| = \cot\varepsilon,$$

ceci montrer que

$$|b_n| \leq (1 + \cot\varepsilon)\,\mathrm{Re}(b_n). \tag{1.29}$$

D'arès cette dernière et selon l'églité (1.28), on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}\right| &\leq \frac{\left|B_n\right|^2(1+\cot\varepsilon)\,\mathrm{Re}(b_{n+1})}{\left|B_{n+1}\overline{B_n}\right|\left|B_n\overline{B_{n-1}}\right|} \\
&\leq \frac{\mathrm{Re}(B_{n+1}\overline{B_n}) - \mathrm{Re}(B_n\overline{B_{n-1}})}{\mathrm{Re}\left|B_{n+1}\overline{B_n}\right|\mathrm{Re}\left|B_n\overline{B_{n-1}}\right|}(1+\cot\varepsilon) \\
&= \left[\frac{1}{\mathrm{Re}\left|B_n\overline{B_{n-1}}\right|} - \frac{1}{\mathrm{Re}\left|B_{n+1}\overline{B_n}\right|}\right](1+\cot\varepsilon) \\
&\leq \left[\frac{1}{\mathrm{Re}\left|B_n\overline{B_{n-1}}\right|} - \frac{1}{\mathrm{Re}\left|B_{n+2}\overline{B_{n+1}}\right|}\right](1+\cot\varepsilon).
\end{aligned}$$

Ainsi, les deux différences

$$\frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}} - \frac{A_{2n-1}}{B_{2n-1}} \text{ et } \frac{A_{2n}}{B_{2n}} - \frac{A_{2n-2}}{B_{2n-2}},$$

sont les termes d'une série absolument convergente. Par conséquent, les limites suivantes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}} \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{A_{2n}}{B_{2n}},$$

existent.

La démonstration de la condition nécessaire est donnée dans [4, *p*.43]. ■

Exemple 1.6 *D'après le théorème convergence de Stern Siedel, l'expression suivante*

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2} \ldots + \frac{1|}{|2} \ldots$$

converge puisque la série $2 + 2 + \ldots$ *est divergente.*

1.2.3 Troisième type

Finalisons cette section par un troisième type des fractions continues correspondant au cas où tous les b_n sont égaux à 1.

Théorème 1.7 ***(Worpitzky theorem)*** [10, 8, *p*.42]

Soient $a_1, a_2, \ldots$ *des fonctions dans un domaine* D *telles que*

$$|a_n| \leq \frac{1}{4}, \; n \geq 2. \tag{1.30}$$

Alors les deux assertions suivantes sont satisfaites

1. *La fraction continue* $\mathbf{K}\left(\frac{a_n}{1}\right)$ *converge uniformément dans* D,
2. *Les valeurs de la fraction continue et tous les approximants sont dans le cercle*

$$\left| z - \frac{4}{3} \right| \leq \frac{2}{3}. \tag{1.31}$$

Exemple 1.7 *Soit la fraction continue*

$$\frac{1|}{|1} + \frac{c_1 z|}{|1} + \frac{c_2 z|}{|1} \ldots$$

où $c_1, c_2, \ldots$ *sont des constantes et* z *une variable complexe. D'après le théorème précédent, si* $|c_n| \leq M$, $n \geq 2$, *alors cette fraction continue converge uniformément et représent une fonction analytique de* z *dans le domaine* $|z| \leq (1/4M)$.

Il existe d'autre critère de convergence pour la fraction continue du type trois, i.e. $\mathbf{K}\left(\frac{a_n}{1}\right)$.

Théorème 1.8 ***(Van Koch theorem)*** [10, *p*.42]

La fraction continue $\mathbf{K}\left(\frac{a_n}{1}\right)$ *converge si*

$$\sum_{p=1}^{n} |a_{p+1}| < 1, \quad n \geq 1. \tag{1.32}$$

Théorème 1.9 [10, *p*.62]

La fraction continue $\mathbf{K}\left(\frac{a_n}{1}\right)$ *converge si*

$$|a_n - c| \leq \frac{|1+2c| - 2\,|c|}{4}, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{1.33}$$

(Notons ici que : $|1+2c| - 2\,|c| > 0$ *si et seulement si* $\mathrm{Re}(c) > -\frac{1}{4}$*).*

Théorème 1.10 [10, *P*.78]

La fraction continue $\mathbf{K}\left(\frac{a_n}{1}\right)$ *converge uniformément pour* $a_1, a_2, a_3, \ldots$*dans le domaine*

$$|z| - \mathrm{Re}(z) \leq \frac{1}{2}, \quad |z| \leq M,$$

pour toute constante M*.*

Chapitre 2

Fonction hypergéometrique et polynômes orthogonaux :

Le calcule des coefficients de la fraction continue à partir de la série pose un certain nombre des problémes, a même défini un précédé qui permet, pour certaines séries hypergéométrique, d'obtenir des valeurs trés exactes.

2.1 Les fonctions hypergéométriques :

L'origine des fonctions hypergéométriques se trouve au début du 19*ème* siècle [9], lorsque Gauss étudie l'équation différentielle suivante (appelée maintenant " l'équation différentielle hypergéométrique") :

$$z(1-z)y^{''} + (c-(a+b+1)z)y^{'} - aby = 0 \tag{2.1}$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$. Cette équation linéaire, a trois points singuliers réguliers en $z = 0, z = 1$ et $z = \infty$. Toute équation différentielle linéaire de degré 2 possédant trois points singuliers réguliers peut se mettre sous cette forme.

L'utilisation de la notation hypergéométrique permet de trouver rapidement une solution de plusieurs équations différentielles complexes.

Définition 2.1 *La fonction hypergéométrique, désigne généralement une fonction spéciale particulière, dépendant de trois paramètres a, b, c, s'exprime sous la forme suivent :*

$$F(a, b; c; z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \tag{2.2}$$

où $c \neq 0$ n'est pas un entier négatif.

La notation $(\alpha)_k$ désigne le symbole de Pochammer qui définit par :

$$(\alpha)_k = (\alpha)(\alpha+1)...(\alpha+k-1). \quad \alpha \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}^*$$
$$(\alpha)_0 = 1.$$

en partiqulier $(1)_k = k!$

D'après d'Alambert,

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(a)_{k+1}(b)_{k+1}}{(c)_{k+1}}\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}.\frac{(c)_k}{(a)_k(b)_k}\frac{(k)!}{z^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(a+k)(b+k)z}{(c+k)(k+1)}\right|$$
$$= |z|\,.$$

la série converge si $|z|<1$ *et sur le cercle, elle est absolument convergente si* $\mathrm{Re}(c-b-a)>0$.

Notation 2.1 *On a plusieurs notations sont utilisées dans la litérature. La série*

$${}_2F_1\begin{pmatrix} a & b & \\ & c & ;z \end{pmatrix} := F\begin{pmatrix} a & b & \\ & c & ;z \end{pmatrix} :=_2 F_1(a,b;c;z) := F(a,b;c;z),$$

On cas particulier $a=c$ et $b=1$ ou pour $a=1$ et $b=c$ nous donne

$$F(a,1;a;z) = F(1,b;b;z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

d'où le terme hypergéométrique.

2.1.1 L'équation différentielle hypergéométrique :

Pour cherchons une solution formelle du l'équation différentielle hypergéométrique (2.1) Posons

$$y(z) = z^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k z^k$$

ρ un nombre à choisir convenablement, telle que

$$y^{'}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(\rho+k)\alpha_k z^{\rho+k-1}$$

et

$$y^{''}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(\rho+k)(\rho+k-1)\alpha_k z^{\rho+k-2}$$

et on remplaçant ces équations dans (2.1), on obtient

$$z(1-z)\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(\rho+k)(\rho+k-1)z^{\rho+k-2} + (c-(a+b+1)z)$$

$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(\rho+k)z^{\rho+k-1} - ab\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k z^{k+\rho} = 0,$$

nous donnons

$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(\rho+k)(\rho+k-1+c)z^{\rho+k-1} - \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(\rho+k)(\rho+k)z^{k+\rho}$$

$$\textstyle -(a+b)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(\rho+k)z^{k+\rho} - ab\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k z^{k+\rho} = 0,$$

donc

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k z^{\rho+k-1}(\rho+k)(\rho+k-1+c)-\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k z^{\rho+k}(\rho+k+a)(\rho+k+b)=0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}[\alpha_k(\rho+k)(\rho+k-1+c)-\alpha_{k-1}(\rho+k-1+a)(\rho+k-1+b)]z^{\rho+k-1}=0,$$

Alors, le système d'équation suivant ce qui nous permet de déterminer l'exposant ρ et le coefficient α_k

$$\alpha_k(\rho+k)(\rho+k-1+c)-\alpha_{k-1}(\rho+k-1+a)(\rho+k-1+b)=0,$$

et

$$\alpha_0\rho(\rho-1+c)=0.$$

Les deux dernières équations nous permet de déterminer le coefficient α_k . En fixant $\alpha_0=1$, on obtient $\rho=0$ ou $\rho=1-c$.

Pour $\rho=0$, nous sopposons que $c\neq 0,-1,-2,...$ On a

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{(k-1+a)(k-1+b)}{k(k-1+c)}\alpha_{k-1}, \qquad k\geq 1.\\ &= \frac{(k-1+a)(k-2+a)\cdots a\cdot(k-1+b)(k-2+b)\cdots b}{k\cdot(k-1)\cdots 1\cdot(k-1+c)(k-2+c)\cdots c}\alpha_0\\ &= \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k k!}, \quad k\geq 1.\end{aligned}$$

Donc la première solution particulière de (2.1) est définée par

$$y_1(z)=F(a,b;c;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k k!}z^k, \quad |z|<1.$$

Et pour le cas $\rho=1-c$ telle que $c\neq 2,3,4,\dots$, nous donne

$$\alpha_k=\frac{(k-c+a)(k-c+b)}{k(k+1-c)}\alpha_{k-1}, \qquad k\geq 1.$$

$$\alpha_k=\frac{(1-c+a)_k(1-c+b)_k}{k!(2-c)_k}, \qquad k\geq 0.$$

On voit que la deuxième solution particulière de (2.1) est donnée par

$$\begin{aligned}y_2(z) &= z^{1-c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-c+a)_k(1-c+b)_k}{(2-c)_k k!}z^k, \quad |z|<1.\\ &= z^{1-c}F(1-c+a,1-c+b;2-c;z), \quad |z|<1, |\arg z|<\pi,\end{aligned}$$

Lorsque c n'est pas un entier, les deux solutions sont linéarement indépendants, donc la solution générale de (2.1) prend la forme suivante

$$y(z)=AF(a,b;c;z)+Bz^{1-c}F(1-c+a,1-c+b;2-c;z),$$

Pour $|z|<1$, $|\arg z|<\pi$, et A, B sont des constantes arbitraires

Remarque 2.1 *1. Rappelons que la fonction Γ est défini pour $z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(a) > 0$, par :*

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} \exp(-t) dt.$$

Elle vérifie aussi la relation :

$$\begin{array}{rr} \forall z, \mathrm{Re}(a) > 0, & \Gamma(a+1) = a\Gamma(a). \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, & \Gamma(k) = (k-1)!. \end{array}$$

2 *La fonction Beta B est défini pour* $\mathrm{Re}(a), \mathrm{Re}(b) > 0$,

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt.$$

Elle vérifie la relation :

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Définition 2.2 *Le symbole de Pochammer définit aussi par :*

$$(\alpha)_k = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}^*.$$

La fonction hypergeométrique vérifie aussi l'expression intégrale suivante :

Théorème 2.1 *La représentation intégrale de fonction hypergéométrique définie pour $|z| < 1$ et $0 < \mathrm{Re}(b) < \mathrm{Re}(c)$ par*

$$F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a} dt.$$

Preuve. Pour $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{(b)_k}{(c)_k} = \frac{\Gamma(b+k)\Gamma(c)}{\Gamma(c+k)\Gamma(b)} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \cdot \frac{\Gamma(b+k)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+k)},$$

D'apré la remarque (2.1) on a

$$\frac{\Gamma(b+k)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+k)} = \int_0^1 t^{b+k-1}(1-t)^{c-b-1} dt,$$

pour $|z| < 1$,

$$\begin{aligned} F(a,b;c;z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} \int_0^1 t^{b+k-1}(1-t)^{c-b-1} z^k dt \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (zt)^k}{k!} dt, \end{aligned}$$

En utilisons la formule du binôme

$$\begin{aligned}(1-y)^{-a} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)(-a-1)...(-a-k+1)(-1)^k(y)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)(a+1)...(a+k-1)(y)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(y)^k}{k!} = F(a,b;b;y).\end{aligned}$$

Donc, en utilisant cette identité pour $y = zt$ et on obtient la représentation integrale du $F(a,b;c;z)$. ■

Théorème 2.2 *Si* $\mathrm{Re}(c-b-a) > 0$ *et* $c > 0$*, alors*

$$F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Preuve. D'aprés la théorème précedent on a :

$$\begin{aligned}F(a,b;c;1) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-t)^{-a}dt \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-a-b-1}dt \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \cdot \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)} \\ &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c-a)}.\end{aligned}$$

■

2.1.2 Fraction continue de Gauss

Lemme 2.1 *La fonction hypergéométrique* (2.2) *verifie la relation contigu suivant :*

1. $$F(a,b+1;c+1;z) - F(a,b;c;z) = \frac{a(c-b)}{c(c+1)} zF(a+1,b+1;c+2;z),$$

2. $$F(a+1,b;c+1;z) - F(a,b;c;z) = \frac{b(c-a)}{c(c+1)} zF(a+1,b+1;c+2;z),$$

Preuve. on démontré une seule relation car elle est symétrique, on a

$$\begin{aligned}
&F(a,b+1;c+1;z)-\frac{a(c-b)}{c(c+1)}zF(a+1,b+1;c+2;z)\\
&=\frac{(a)_n(b+1)_n}{(c+1)_n n!}-\frac{a(c-b)}{c(c+1)}\frac{(a+1)_{n-1}(b+1)_{n-1}}{(c+2)_{n-1}(n-1)!}\\
&=\frac{(a+1)_{n-1}(b+1)_{n-1}}{(c+2)_{n-1}n!}\left[\frac{a(b+n)}{c+1}-\frac{a(c-b)n}{c(c+1)}\right]\\
&=\frac{(a+1)_{n-1}(b+1)_{n-1}}{(c+2)_{n-1}n!}\frac{ab(c+n)}{c(c+1)}\\
&=\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}\\
&=F(a,b;c;z),
\end{aligned}$$

■

Théorème 2.3 *Á la fonction hypergéométrique de Gauss on associe la fraction continue de Gauss*

$$\begin{aligned}
G(z)=G(a,b,c;z)&=F(a,b+1;c+1;z)/F(a,b;c;z)\\
&=\frac{1|}{|1}-\frac{g_1z|}{|1}-\frac{g_2z|}{|1}-\cdots
\end{aligned}$$

à coéfficients

$$\begin{aligned}
g_{2n-1}&=\frac{(a+n-1)(c-b+n-1)}{(c+2n-2)(c+2n-1)},\\
g_{2n}&=\frac{(b+n)(c-a+n)}{(c+2n-1)(c+2n)},\qquad \textit{pour } n\geq 1.
\end{aligned}$$

Preuve. *On a tout d'abord la relation suivant*

$$\frac{F(a,b+1;c+1;z)}{F(a,b;c;z)}=\frac{1}{1-\dfrac{a(c-b)}{c(c+1)}z\dfrac{F(a+1,b+1;c+2;z)}{F(a,b+1;c+1;z)}}\tag{2.3}$$

Et pour $\alpha=a,\beta=b+1$ et $\gamma=c+1$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{F(a+1,b+1;c+2;z)}{F(a,b+1;c+1;z)}&=\frac{F(\alpha+1,\beta;\gamma+1;z)}{F(\alpha,\beta;\gamma;z)}\\
&=\frac{1}{1-\dfrac{\beta(\gamma-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)}z\dfrac{F(\alpha+1,\beta+1;\gamma+2;z)}{F(\alpha+1,\beta;\gamma+1;z)}},\\
&=\frac{1}{1-\dfrac{(b+1)(c+1-a)}{(c+1)(c+2)}z\dfrac{F(a+1,b+2;c+3;z)}{F(a+1,b+1;c+2;z)}}
\end{aligned}\tag{2.4}$$

En remplace (2.4) *dans* (2.3) *et on obtient*

$$\frac{F(a,b+1;c+1;z)}{F(a,b;c;z)} = \cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{a(c-b)}{c(c+1)}z}{1-\frac{(b+1)(c+1-a)}{(c+1)(c+2)}z\frac{F(a+1,b+2;c+3;z)}{F(a+1,b+1;c+2;z)}}}, \tag{2.5}$$

Et pour $\alpha = a+1, \beta = b+1$ *et* $\gamma = c+2$, *on a*

$$\begin{aligned}\frac{F(a+1,b+2;c+3;z)}{F(a+1,b+1;c+2;z)} &= \frac{F(\alpha,\beta+1;\gamma+1;z)}{F(\alpha,\beta;\gamma;z)} \\ &= \frac{1}{1-\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}z\frac{F(\alpha+1,\beta+1;\gamma+2;z)}{F(\alpha,\beta+1;\gamma+1;z)}}, \\ &= \frac{1}{1-\frac{(a+1)(c+1-b)}{(c+2)(c+3)}z\frac{F(a+2,b+2;c+4;z)}{F(a+1,b+2;c+3;z)}}\end{aligned} \tag{2.6}$$

En remplace (2.6) *dans* (2.5), *on obtient*

$$\frac{F(a,b+1;c+1;z)}{F(a,b;c;z)} = \cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{a(c-b)}{c(c+1)}z}{1-\cfrac{\frac{(b+1)(c+1-a)}{(c+1)(c+2)}z}{1-\frac{(a+1)(c+1-b)}{(c+2)(c+3)}z\frac{F(a+2,b+2;c+4;z)}{F(a+1,b+2;c+3;z)}}}}, \tag{2.7}$$

Ainsi de suite on continue par le même changement, et on obtient

$$\frac{F(a,b+1;c+1;z)}{F(a,b;c;z)} = \cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{a(c-b)}{c(c+1)}z}{1-\cfrac{\frac{(b+1)(c-a+1)}{(c+1)(c+2)}z}{1-\cfrac{\frac{(a+1)(c-b+1)}{(c+2)(c+3)}z}{1-\cfrac{\frac{(b+2)(c-a+2)}{(c+3)(c+4)}z}{1-\ddots}}}}}. \tag{2.8}$$

■

2.1.3 Dérivées de la fonction hypergéométrique

Proposition 2.1 *La dérivé de fonction du type hypergéométrique dit que est une fonction de type hypergéométrique.*

Preuve. On montre ça par récourence, la première dérivé

$$\frac{d}{dz}F(a,b;c;z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(k-1)!(c)_k} z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_{k+1}(b)_{k+1}}{k!(c)_{k+1}} z^k$$
$$= \frac{ab}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+1)_k(b+1)_k}{k!(c+1)_k} z^k = \frac{ab}{c} F(a+1,b+1;c+1;z)$$

La deuxième dérivé

$$\frac{d^2}{dz^2}F(a,b;c;z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(k-2)!(c)_k} z^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_{k+2}(b)_{k+2}}{k!(c)_{k+2}} z^k$$
$$= \frac{a(a+1)b'b+1)}{c(c+1)} F(a+2,b+2;c+2;z)$$

Dans le cas général (la dérivée quelconque), on a

$$\frac{d^m}{dz^m}F(a,b;c;z) = \frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m} F(a+m,b+m;c+m;z).$$

■

Proposition 2.2 [9] *Les fonctions hypergéométrique sont solution des équations différentielles hypergéométrique.*

Preuve. Pour l'operateur $\theta = z(\frac{d}{dz})$ nous posons $y = F(a,b;c;z)$. On obtient

$$\theta(\theta+c-1)y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k+c-1)(a)_k(b)_k}{k!(c)_k} z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(k-1)!(c)_{k-1}} z^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_{k+1}(b)_{k+1}}{k!(c)_k} z^{k+1} = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+k)(b+k)(a)_k(b)_k}{k!(c)_k} z^{k+1}$$
$$= z(\theta+a)(\theta+b)y.$$

Donc

$$(\theta(\theta+c-1) - z(\theta+a)(\theta+b))y = 0. \tag{2.9}$$

En utilisant les propriétés suivantes

$$\theta y = z\frac{d}{dz}y = zy^{'} \qquad \text{et} \qquad \theta(\theta-1)y = z^2y^{''},$$

L'équation (2.9) est mettre la forme suivant

$$z(1-z)y^{''} + (c-(a+b+1)z)y^{'} - aby = 0,$$

■

Exemple 2.1 *Plusieur fonctions de l'analyse mathématiques sont des cas particuliers de la fonction hypergéométrique. Voici quelques représentations en terme des fonctions hypergéométrique*

$$\begin{aligned}
\ln(1+z) &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{z^k}{k} = z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^k}{k+1} = z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1)_k(1)_k}{(2)_k k!}(-z)^k \\
&= zF(1,1;2;-z), \\
\ln(1-z) &= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{k+1} = -z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1)_k(1)_k}{(2)_k k!}z^k \\
&= -zF(1,1;2;z), \qquad \textit{pour } |z|<1 \\
\ln(\frac{1+z}{1-z}) &= 2zF\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};z^2\right).
\end{aligned}$$

On peut voir le meme manière que

$$\begin{aligned}
\arctan z &= zF\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};-z^2\right) \\
\arcsin z &= zF\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};z^2\right)
\end{aligned}$$

2.1.4 Fonction hypergoémétrique généralisée

Les fonctions hypergéométriques de Gauss sont des cas particuliers d'une famille plus vaste, formée des fonctions hypergéométriques généralisées

Définition 2.3 *Une fonction hypergéométrique généralisée est définie par la série*

$${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1,a_2,...,a_p; \\ b_1,b_2,...,b_q; \end{matrix} z\right) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(a_1)_k(a_2)_k\cdots(a_p)_k}{(b_1)_k(b_2)_k\cdots(b_q)_k}\frac{z^k}{k!},$$

dans laquelle aucun paramètre du dénominateur b_j n'est nul on un entier négatif. [9] *Le test de convergence des séries montre que*

1. *Si $p \leq q$, la série converge pour toute valeur de z.*
2. *Si $p = q+1$, la série converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| > 1$,*
3. *Si $p > q+1$, la série diverge pour toute $z \neq 0$.*
4. *Si $p = q+1$, la série converge absolument dans le cercle $|z| = 1$ si*

$$\mathrm{Re}(\sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{i=1}^{p} a_i) > 0.$$

Exemple 2.2 *Soit la fonction sinus*

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

Sachant que $(2k+1)! = (2)_{2k} = 2^{2k}(\frac{3}{2})_k k!$, *[9, P. 22], alors*

$$\begin{aligned}\sin(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{2^{2k}(\frac{3}{2})_k k!} = z\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(\frac{3}{2})_k}\left(\frac{z^2}{4}\right)^k \\ &= z\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(\frac{3}{2})_k}\left(\frac{-z^2}{4}\right)^k = z\,{}_0F_1\left(-,\frac{3}{2};-\frac{z^2}{4}\right).\end{aligned}$$

sont algébriques. La fonction de Bessel, est définit par ,

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = {}_0F_1\left(-,1;-\frac{z^2}{4}\right).$$

2.2 Géneralité sur l'orthogonalité

Le domaine des polynômes orthogonaux a été développé durant le 19*éme* siècle par Stieltjes, comme outil de la théorie analytique des fractions continues.

2.2.1 Fonctionnelle moment et orthogonalité

Nous désignerons par $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des polynômes à une variable complexe et par $\mathcal{P}_n$ l'espace des polynômes de degré n. Notons par $\mathcal{P}'$ le dual algébrique de $\mathcal{P}$, où $\langle .,. \rangle$ est le crochet de dualité entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Définition 2.4 *Soit* $\{\mathcal{L}_n\}_{n\geq 0}$*une suite de nombres complexes et* $\mathcal{L}$ *une forme linéaire à valeurs complexes définie sur l'espaces des polynômes par :*

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}, x^n \rangle := \mathcal{L}(x^n) := \mathcal{L}_n, \quad n \geq 0 \\ \mathcal{L}(\alpha\pi_1(x) + \beta\pi_2(x)) := \alpha\mathcal{L}(\pi_1(x)) + \beta\mathcal{L}(\pi_2(x)),\end{aligned}$$

pour tous nombres complexes α *et* β *et tout polynomes* $\pi_i(x)$ $(i = 1, 2)$*. On appele* $\mathcal{L}$ *fonctionnelle moment* (FM) *sur* $\mathcal{P}$ *et le nombre* $\mathcal{L}_n$ *est dit moment d'ordre* n *de* $\mathcal{L}$*.*

Il résulte immédiatement que, si

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$$

alors

$$\langle \mathcal{L}, \pi(x) \rangle = \sum_{k=0}^{n} c_k \mathcal{L}(x^k) = \sum_{k=0}^{n} c_k \mathcal{L}_k.$$

Définition 2.5 *Soit* $\mathcal{L}$ *une fonctionnelle moment. On dit que la suite de polynômes* $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ *est une suite de polynômes orthogonaux par rapport à* $\mathcal{L}$*, que l'on abrège par SPO si*

1. $P_n(x)$ *est un polynôme de dégrè* n*.*
2. $\langle \mathcal{L}, P_n(x)P_m(x) \rangle = 0, \quad n \neq m, \; n, m \geq 0.$
3. $\langle \mathcal{L}, P_n(x)P_m(x) \rangle \neq 0, \quad n = m, \quad n \geq 0.$

Définition 2.6 *Une suite de polynôme* $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ *est dite libre si* $\deg P_n = n$, *pour tout* $n \geq 0$.

Remarque 2.2 – *En génerale, on peut représenter le fonctionnelle moment* $\mathcal{L}$ *sous forme d'intégrale ou d'une somme par*

$$\langle \mathcal{L}, P_n(x)P_m(x)\rangle = \int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = \alpha_n\delta_{nm}, \qquad \alpha_n \neq 0.$$

Où δ_{nm} *est le symble de Kronecker qui défini par*

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0 & si\ n = m \\ 1 & n \neq m \end{cases}$$

Pour $w(x)$ *une fonction intégrable sur l'intervalle* $]a, b[$, *qui appelée fonction de poids*

- *Lorsque le cofficient de* x^n *est* 1 *on dit que la suit, est la suite de polynômes normalisée sera abrégé par* $SPON$.
- *Lorsqu'en plus nous avons* $\langle \mathcal{L}, P_n(x)^2\rangle = 1$ *pour tout* n, *nous disons que la* SPO *est orthonormale.*
- *Dans* $\mathbb{C}$,*l'orthgonalitè est définie sur le contour* C *par*

$$\langle \mathcal{L}, P_n(z)P_m(z)\rangle = \int_C P_n(z)\overline{P_m(z)}dz.$$

Exemple 2.3 *Les polynômes* $P_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{2\pi r^{2n+1}}}, n \geq 0$ *sont orthogonaux sur le cercle* $|z| = r$. *Puisque*

$$\int_{|z|=r} P_n(z)\overline{P_m(z)}dz = \int_{|z|=r} \frac{z^n}{\sqrt{2\pi r^{2n+1}}}\frac{z^{-m}}{\sqrt{2\pi r^{2m+1}}}dz$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}d\theta = \delta_{nm}.$$

Définition 2.7 *Une suite de polynôme* $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ *est dite faiblement orthogonale (en abréviation* $SPOF$*), s'il existe une fonctionnelle moment* $\mathcal{L}$ *non identiquement nul telle que*

$$\langle \mathcal{L}, P_n(x)P_m(x)\rangle = 0, \quad pour \ \ n \neq m.$$

Proposition 2.3 [2] *Soient* $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ *une suite de polynômes et* $\mathcal{L}$ *une* FM, *alors on a les équivalences suivantes*

Corollaire 2.1 (a) $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ *est une* SPO *par rapport à* $\mathcal{L}$.

(b) *pour tout polynôme* π *de degré* m, $\langle \mathcal{L}, \pi(x)P_n(x)\rangle = C_m\delta_{nm}$, $C_m \neq 0$.

(c) $\langle \mathcal{L}, x^m P_n(x)\rangle = A_n\delta_{nm}$, $A_n \neq 0$ $0 \leq m \leq n$.

Théorème 2.4 *Soit* $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$*une* SPO *par rapport à* $\mathcal{L}$, *alors pour tout polynôme* $\pi(x)$ *de dégré* n, *on a :*

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x), \qquad avec \tag{2.10}$$
$$c_k = \frac{\langle \mathcal{L}, \pi(x)P_k(x)\rangle}{\langle \mathcal{L}, [P_k(x)]^2\rangle} \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

Preuve. Si $\pi(x)$ est un polynôme de dégré n, alors $\pi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x)$,

On multiplions les deux cotés par $P_m(x)$, et en appliquant $\mathcal{L}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}, \pi(x)P_m(x)\rangle &= \sum_{k=0}^{n} c_k \langle \mathcal{L}, P_k(x)P_m(x)\rangle, \quad k \le m \le n. \\ &= c_m \left\langle \mathcal{L}, [P_m(x)]^2 \right\rangle.\end{aligned}$$

et puisque $\langle \mathcal{L}, [P_m(x)]^2\rangle \neq 0$ la relation (2.10) est vérifier. ■

2.2.2 Existence des SPO

Afin de discuter de théorème d'existence pour SPO, nous introduisons le déterminant de Hankel d'ordre n, Δ_n

$$\Delta_n = \det(\mathcal{L}_{i+j})_{i,j=0}^{n} = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_0 & \mathcal{L}_1 & \cdots & \mathcal{L}_n \\ \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_2 & \cdots & \mathcal{L}_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{L}_n & \mathcal{L}_{n+1} & \cdots & \mathcal{L}_{2n} \end{vmatrix}.$$

Définition 2.8 *Une FM $\mathcal{L}$ dont la suite des moments notée $\{\mathcal{L}_n\}_{n\geq 0}$ est dit admissible, quasi-définie ou bien régulière, si elle vérifie le critère de Humburger i.e.*

$$\Delta_n = \det(\mathcal{L}_{i+j})_{i,j=0}^{n} \neq 0, \quad n \geq 0.$$

Théorème 2.5 *Soit une FM $\mathcal{L}$ dont la suite des moments est notée $\{\mathcal{L}_n\}$, condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un SPO pour $\mathcal{L}$ est*

$$\Delta_n \neq 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Preuve. Nous ecrivons $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{nk}x^k$, et on remarquons que les conditions d'orthogonalités

$$\langle \mathcal{L}, x^m P_n(x)\rangle = \sum_{k=0}^{n} c_{nk}\mathcal{L}_{k+m} = k_n\delta_{nm}, \quad k_n \neq 0, \quad m \le n \tag{2.11}$$

sont équivalentes au système

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_0 & \mathcal{L}_1 & \cdots & \mathcal{L}_n \\ \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_2 & \cdots & \mathcal{L}_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{L}_n & \mathcal{L}_{n+1} & \cdots & \mathcal{L}_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{n0} \\ c_{n1} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}.$$

Maintenant, si SPO existe pour $\mathcal{L}$, donc elle est déterminée uniquement par le constantes k_n dons (2.11), lorsque (2.11) admet une solution unique ssi $\Delta_n \neq 0$, $(n \geq 0)$. ■

Définition 2.9 *Une fonctionnelle moment $\mathcal{L}$ est dite définie positive si $\mathcal{L}[\pi(x)] > 0$ pour tout polynômes non identiquement nul tel que $\pi(x) \geq 0$ pour tout x.*

2.2.3 La forme de récurence fondamentale

La plus importante caractérisation des polynômes orthogonaux est que chaque trois polynômes consécutifs sont liés par la relation de récurrence suivante.

Théorème 2.6 [2]*Soit* $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$*la SPON par rapport à une FM régulière* $\mathcal{L}$*. Alors la suite* $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$*vérifie la récurrence d'ordre 2 suivante*

$$\begin{cases} P_{n+1}(x) = (x - c_n)P_n(x) - \lambda_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 0 \\ P_{-1}(x) = 0, \quad P_0(x) = 1, \end{cases} \tag{2.12}$$

Où λ_0*est une constante arbitraire et* $\lambda_n \neq 0$, $\forall n \geq 1$.

Si on écrit $P_n(x) = x^n + \theta_n x^{n-1} + R(x)$, *alors*

$$\begin{cases} c_n = \theta_n - \theta_{n+1}, \quad n \geq 0 \\ \textit{avec} \\ \theta_0 = 0, \end{cases} \tag{2.13}$$

De plus,

$$\lambda_n = \frac{\langle \mathcal{L}, P_n^2 \rangle}{\langle \mathcal{L}, P_{n-1}^2 \rangle}, \quad n \geq 1. \quad c_n = \frac{\langle \mathcal{L}, xP_n^2 \rangle}{\langle \mathcal{L}, P_n^2 \rangle}, \quad n \geq 0. \tag{2.14}$$

$$\begin{cases} \langle \mathcal{L}, P_n^2 \rangle = \lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_n, \ \forall n \geq 0 \\ \textit{avec} \\ \lambda_0 = \mathcal{L}_0 = \langle \mathcal{L}, 1 \rangle, \end{cases}$$

si de plus, $\mathcal{L}$ *est définie positive, alors les* c_n *sont réels et les* $\lambda_n > 0$, $\forall n \geq 1$.

Théorème 2.7 [2]***(Théorème de Favard)*** *Soient* $\{c_n\}_{n\geq 0}$ *et* $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ *2 suites de nombres complexes et* $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ *une suite définie par la récurrence*

$$\begin{cases} P_{n+1}(x) = (x - c_n)P_n(x) - \lambda_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 0 \\ P_{-1}(x) = 0, \quad P_0(x) = 1, \end{cases} \tag{2.15}$$

alors, fonctionnelle moment $\mathcal{L}$ *unique telle que* $\langle \mathcal{L}, 1 \rangle = \mathcal{L}_0 = \lambda_0$ *et*

$$\langle \mathcal{L}, P_n P_m \rangle = 0, \quad \textit{si} \ \ m \neq n \geq 0.$$

De plus, $\mathcal{L}$ *est régulière si et seulement si* $\lambda_n \neq 0, n \geq 0$, *et* $\mathcal{L}$ *est définie positive si et seulement si* c_n *sont réels et les* $\lambda_n > 0, n \geq 0$.

Preuve. Définissons la forme linéaire $\mathcal{L}$ inductivement par

$$\langle \mathcal{L}, 1 \rangle = \mathcal{L}_0 = \lambda_0 \ \text{ et } \ \langle \mathcal{L}, P_n(x) \rangle = 0, \quad n \geq 1. \tag{2.16}$$

C'est-à-dire, on définit $\mathcal{L}_1$ par la condition $\langle \mathcal{L}, P_1(x) \rangle = \mathcal{L}_1 - c_0\mathcal{L}_0 = 0$, $\mathcal{L}_2$ par $\langle \mathcal{L}, P_2(x) \rangle = \mathcal{L}_2 - (c_0 + c_1)\mathcal{L}_1 + (\lambda_2 - c_0 c_1)\mathcal{L}_0 = 0$, etc. Ecrivons (2.15) sous la forme

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + c_n P_n(x) + \lambda_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \tag{2.17}$$

on utilisons (2.16) on obtient

$$\langle \mathcal{L}, xP_n(x) \rangle = 0, \quad n \geq 2.$$

Multiplions les deux cotés de (2.17) par x et utilisons le dernier résultat on voit que

$$\left\langle \mathcal{L}, x^2 P_n(x) \right\rangle = 0, \quad n \geq 3.$$

Continuons de la même manière, on en déduit

$$\begin{aligned} &\left\langle \mathcal{L}, x^k P_n(x) \right\rangle = 0, \quad 0 \leq k < n. \\ &\left\langle \mathcal{L}, x^k P_n(x) \right\rangle = \lambda_n \left\langle \mathcal{L}, x^{n-1} P_{n-1}(x) \right\rangle, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Il résulte que pour $m \neq n$, on a $\langle \mathcal{L}, P_m(x) P_n(x) \rangle = 0$. Et

$$\left\langle \mathcal{L}, P_n^2(x) \right\rangle = \langle \mathcal{L}, x^n P_n(x) \rangle = \lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_n, \quad n \geq 0.$$

Ainsi, $\mathcal{L}$ est régulière si et seulement si $\lambda_n \neq 0$ pour $n \geq 1$. ■

2.2.4 Identité de Christoffel-Darboux

Théorème 2.8 [2] *Soit* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *une* $SPON$ *vérifie la relation de récurrence d'ordre deux* (2.15)*, alors*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle \mathcal{L}, P_n^2(x) \rangle}{\langle \mathcal{L}, P_k^2(x) \rangle} P_k(x) P_k(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_n}{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_k} P_k(x) P_k(y) \\ &= \frac{P_{n+1}(x) P_n(y) - P_n(x) P_{n+1}(y)}{x - y}. \end{aligned}$$

En particulier, si en faisant tendre $y \to x$*,on obtient la relation confluente*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle \mathcal{L}, P_n^2(x) \rangle}{\langle \mathcal{L}, P_k^2(x) \rangle} P_k^2(x) &= P'_{n+1}(x) P_n(x) - P'_n(x) P_{n+1}(x) \\ &= \begin{vmatrix} P_n & P_{n+1} \\ P'_n & P'_{n+1} \end{vmatrix} = Wronskien\ de\ (P_n, P_{n+1}). \end{aligned}$$

Si de plus $\mathcal{L}$ *est définie positive, alors la relation confluente nous donne l'inégalité suivante*

$$P'_{n+1}(x) P_n(x) - P'_n(x) P_{n+1}(x) > 0, \ \forall n \geq 0 \ \ et \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

2.2.5 Zéros des polynômes orthogonaux

Lorsque la fonctionnelle moment est définie positive, les zéros de la suite des polynômes correspondante, présentent une certaine régularité dans leurs comportement.

Théorème 2.9 [2] *Soit* $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ *une suite de polynômes orthogonaux par rapport à une fonctionnelle moment définie positive. Si le support de* $\mathcal{L}$ *est un intervalle* I*, alors*

1) *chaque polynôme* P_n *possède* n *zéros* $\{x_{n,k}\}_{k=1}^{n}$ *réels* $(n \geq 1)$*, simples et distincts à l'intérieur de* I*, qu'on supposera ordonnés d'une manière croissante i.e.*

$$x_{n1} < x_{n2} < \cdots < x_{nn}.$$

2) ***(Séparation des zéros)*** *Les zéros de $P_n(x)$ et $P_{n-1}(x)$ sont alternés, i.e. entre deux zéros de $P_n(x)$ il y a un zéro de $P_{n-1}(x)$, $n \geq 2$.*

Corollaire 2.2 *Si $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ une $SPON$ par rapport à une FM définie positive $\mathcal{L}$, alors pour tout $k \geq 1$, la suite des zéros $\{x_{n,k}\}_{n=k}^{\infty}$ est décroissante, cependant la suite $\{x_{n,n-k+1}\}_{n=k}^{\infty}$ est croissante. En particulier, les limites*

$$\xi_i = \lim_{n\to\infty} x_{n,i} \quad et \quad \eta_j = \lim_{n\to\infty} x_{n,n-j+1}, \qquad i, j \geq 1$$

existent dans $[-\infty, +\infty]$.

Définition 2.10 *L'intervalle fermé $[\xi_1, \eta_1] = [\lim_{n\to\infty} x_{n,1}, \lim_{n\to\infty} x_{n,n}]$ est appelé le vrais intervalle d'orthogonalité de la SPO ou de la forme $\mathcal{L}$ (que le noter par VIO). Alors, on peut dire que le vrai intervalle d'orthogonalité est le plus petit intervalle fermé contenant tous les zéros de $P_n(x)$.*

Chapitre 3

Développement en fraction continue des fonctions usuelles

3.1 Les polynômes orthogonaux dans les fractions continues

Les recurrences (1.4) (de Wallis) nous conduit directement à la correspondance entre les fractions continues et les polynômes orthogonaux.

Considérans la fraction continue

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n},$$

avec

$$b_0 = 0, \quad a_1 = \lambda_1 \neq 0, \quad a_{n+1} = -\lambda_{n+1} \neq 0, \quad b_n = x - c_n, \quad \forall n \geq 1,$$

On obtient, ainsi la fraction continue

$$\frac{\lambda_1|}{|x - c_1} - \frac{\lambda_2|}{|x - c_2} - \frac{\lambda_3|}{|x - c_3} - \cdots \tag{3.1}$$

Dont le nième dénominateurs partiels, noté $B_n = P_n(x)$, satisfait la récurrence d'ordre deux suivante

$$P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x), \quad n \geq 1,$$
$$\begin{cases} P_{-1}(x) = 0, \quad P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = x - c_0, \end{cases}$$

En on déduit d'après le théorème de **Favard**, que les dénominateurs de la fraction continue (3.1) forme une $SPON$ par rapport à une forme linéaire $\mathcal{L}$.

Définition 3.1 *La fraction continue* (3.1) *est appelée fraction continue de Jacobi ou tout simplement J-Fraction.*

Notons en plus, que le numérateur de (3.1) $A_n = A_n(x)$ *satisfait la récurrence suivante*

$$A_n(x) = (x - c_n)A_{n-1}(x) - \lambda_n A_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$
$$A_{-1}(x) = 1, \qquad A_0(x) = 0, \qquad A_1(x) = \lambda_1.$$

Il est facile de vérifier que $\lambda_1^{-1}A_n(x)$ est un polynôme normalisée de degré $n-1$ qui est indépendant de λ_1. Posons alors

$$P_n^{(1)}(x) = \lambda_1^{-1}A_{n+1}(x), \quad n \geq -1.$$

Dans ce cas, $\{P_n^{(1)}(x)\}$ est un polynôme normalisée de degré n indépendant de λ_1 et vérifié la récurrence d'ordre suivante

$$\begin{aligned} &P_n^{(1)}(x) = (x-c_{n+1})P_{n-1}^{(1)}(x) - \lambda_{n+1}P_{n-2}^{(1)}(x), \quad n \geq 1 \\ &P_{-1}^{(1)}(x) = 0, \quad P_0^{(1)}(x) = 1. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Définition 3.2 *les polynômes $P_n^{(1)}(x)$ sont appelés le numérateur normalisée correspondant au $P_n(x)$. Ils sont appelés aussi les polynômes associés ou polynômes du premier espèce.*

Corollaire 3.1 [2, *p.* 86] *Les zéros des polynômes associés notés $\{x_{n,k}^{(1)}\}$ satisfont*

$$x_{n+1,k} < x_{n,k}^{(1)} < x_{n+1,k+1}, \quad 1 \leq k \leq n. \tag{3.3}$$

Introduisons par la suite une importante formule concernant la décomposition en fraction partielle des convergents de la J-fraction continue (3.1) *dans les cas définie positive, c'est-à-dire dans le cas où $\mathcal{L}$ admet une représentation intégrale.*

Théorème 3.1 [2, *p.* 88] *Lorsque les c_n sont réels et les $\lambda_n > 0$, $n \geq 1$, on a*

$$\frac{\lambda_1 P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{nk}}{z - x_{nk}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw_n(t)}{z-t}.$$

où A_{nk} sont les coefficients dans la formule de quadrateure de Gauss correspondants aux points x_{nk}.

Remarque 3.1 *Lorsque $\mathcal{L}$ est définie positive dont le vrais intervalle d'orthogonalité est borné, on peut écrire*

$$\frac{\lambda_1 P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)} = \int_{\xi_1}^{\eta_1} \frac{dw_n(t)}{z-t}.$$

De plus, il existe une sous suite w_{n_k} qui converge vers une représentation w de $\mathcal{L}$. On conclut alors que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_1 P_{n_k-1}^{(1)}(z)}{P_{n_k}(z)} = \int_{\xi_1}^{\eta_1} \frac{dw(t)}{z-t}, \quad \textit{pour} \;\; z \notin [\xi_1, \eta_1].$$

Ceci montre que si $[\xi_1, \eta_1]$ est borné, alors il existe une sous suite du convergent de la J-fraction (3.1) *qui converge vers*

$$F(z) = \int_{\xi_1}^{\eta_1} \frac{dw(t)}{z-t}, \quad \textit{pour} \;\; z \notin [\xi_1, \eta_1],$$

où w est l'unique représentation de $\mathcal{L}$.

Maintenant, lorsque $F(z)$ est bien définie, on peut calculer la distribution w à partir de $F(z)$ en utilisant la formule d'inversion de Stieltjes suivante

$$w(t) - w(s) = -\frac{1}{\pi} \lim_{y\to 0^+} \int_s^t \operatorname{Im}\{F(x+iy)\}dx.$$

3.2 Exemples

3.2.1 Les polynômes de Legendre

Dans l'exemple 2. 1, à l'aide du développement en fraction continue de la fonction hypergéométrique (2.8)

on note $F(a,0;c;z)=1$ et par chengement c par $c-1$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) &= 2zF(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};z^2)\\ &= \cfrac{2z}{1-\cfrac{1^2.z^2}{3-\cfrac{2^2z^2}{5-\cfrac{3^2z^2}{7-\cfrac{4^2z^2}{9-\ddots}}}}}\end{aligned}$$

Soit en remplaçant z par $1/z$

$$\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\cfrac{2}{z-\cfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}z-\cfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}z-\cfrac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{4}z-\cfrac{\frac{4}{5}}{\frac{9}{5}z-\ddots}}}}}.$$

valable à l'intérieur de l'intervalle $[-1,1]$. En effet, on a

$$\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\int_{-1}^{1}\frac{du}{z-u}.$$

Ceci est une J-fraction dont le dénominateur sont les polynômes de legendre qui sont orthogonaux dans l'intervalle $[-1,1]$. Ils sont normalisés tels que

$$L_0=1,\ L_1=z,\ L_p=\frac{2p-1}{p}L_{p-1}-\frac{p-1}{p}L_{p-2}.$$

3.2.2 Fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel $J_m(x)$, appelées aussi fonctions cylindriques, vérifient la récurrence d'ordre deux suivante

$$xJ_{m-1}(x)-2mJ_m(x)+xJ_{m+1}(x)=0.$$

Alors,

$$\frac{J_{m-1}(x)}{J_m(x)}=\frac{2m}{x}-\frac{J_{m+1}(x)}{J_m(x)}.$$

i.e.

$$\frac{J_m(x)}{J_{m-1}(x)} = \frac{1}{\dfrac{2m}{x} - \dfrac{J_{m+1}(x)}{J_m(x)}}.$$

Ainsi,

$$\frac{J_m(x)}{J_{m-1}(x)} = \frac{\dfrac{x}{2m}}{1 - \dfrac{x}{2m}\dfrac{J_{m+1}(x)}{J_m(x)}} = \frac{\dfrac{x}{2m}}{1 - \dfrac{\dfrac{x^2}{2m(2m+2)}}{1 - \ddots}}$$

$$= \frac{x}{2m} - \frac{x^2}{2m+2} - \frac{x^2}{2m+4} - \cdots \frac{x^2}{2m+2n}.$$

3.2.3 Fonctions usuelles

Exemple 3.1 *Toujours dans l'exemple 2. 1, en utilisant la fraction continue* (2.8)*, on obtient*

$$\ln(1+z) = \cfrac{z}{1 + \cfrac{1^2 \cdot z}{2 + \cfrac{1^2 \cdot z}{3 + \cfrac{2^2 \cdot z}{4 + \cfrac{2^2 \cdot z}{5 + \cfrac{3^2 \cdot z}{6 + \ddots}}}}}}.$$

et

$$\arctan z = \cfrac{z}{1 + \cfrac{(1z)^2}{3 + \cfrac{(2z)^2}{5 + \cfrac{(3z)^2}{7 + \cfrac{(4z)^2}{9 + \ddots}}}}}.$$

Exemple 3.2 *D'après* (2.8), *on obtient*

$$\frac{\arcsin z}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{zF\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};z^2\right)}{F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2};z^2\right)}$$
$$= \cfrac{z}{1-\cfrac{1.2z^2}{3-\cfrac{1.2z^2}{5-\cfrac{3.4z^2}{7-\cfrac{3.4z^2}{9-\cfrac{5.6z^2}{11-\cfrac{5.6z^2}{13-\ddots}}}}}}}.$$

et

$$\frac{(1+z)^k-(1-z)^k}{(1+z)^k+(1-z)^k} = kz\frac{F(\frac{1-k}{2},\frac{2-k}{2};\frac{3}{2};z^2)}{F(\frac{1-k}{2},\frac{-k}{2};\frac{1}{2};z^2)}$$
$$= \cfrac{kz}{1+\cfrac{(k^2-1)z^2}{3+\cfrac{(k^2-4)z^2}{5+\cfrac{(k^2-9)z^2}{7+\ddots}}}}.$$

Exemple 3.3 *On retrouve ainsi les fractions continues de Lambert pour les fonctions tangente hyperbolique et tangente , donc daprér la relation* (2.8)

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{z_0F_1(;\frac{3}{2};\frac{z^2}{4})}{{}_0F_1(;\frac{1}{2};\frac{z^2}{4})} = \frac{z}{2}\frac{{}_0F_1(;\frac{3}{2};\frac{z^2}{4})}{\frac{1}{2}{}_0F_1(;\frac{1}{2};\frac{z^2}{4})}$$
$$= \frac{\frac{z}{2}|}{|\frac{1}{2}} + \frac{\frac{z^2}{4}|}{|\frac{1}{2}+1} + \frac{\frac{z^2}{4}|}{|\frac{1}{2}+2} + \frac{\frac{z^2}{4}|}{|\frac{1}{2}+3} + \cdots$$
$$= \frac{z|}{|1} + \frac{z^2|}{|3} + \frac{z^2|}{|5} + \frac{z^2|}{|7} + \cdots$$

et on a

$$\tan z = -i\tanh(iz) = \frac{z|}{|1} - \frac{z^2|}{|3} - \frac{z^2|}{|5} - \frac{z^2|}{|7} - \cdots$$

3.2.4 Une élégante fraction continue

Le nombre π est développer en fraction continue par beaucoup d'auteurs. En 1999, le nombre π a subit le développement suivant [5]

$$\frac{\pi}{4} = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cfrac{7^2}{6 + \cfrac{9^2}{6 + \cfrac{11^2}{6 + \cfrac{13^2}{6 + \ddots}}}}}}}.$$

Lord William Broncker (1620-1684), a prouvé que

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{9|}{|2} + \frac{25|}{|2} + \frac{49|}{|2} + \cdots \tag{3.4}$$

La méthode utilisé par Broncker n'est pas connue. En peut conclure à partir de la relation (3.4), que

$$\frac{4}{\pi} = \frac{1|}{|1} + \frac{1^2|}{|2} + \frac{3^2|}{|2} + \frac{5^2|}{|2} + \frac{7^2|}{|2} \cdots$$

Remarque

Remarquons que tout nombre réel, peut s'écrire sous forme d'une fraction continue ascendante. Par exemple

$$\pi = 3,1415926... = 3 + \cfrac{1 + \cfrac{4 + \cfrac{1 + \cfrac{5 + \cdots}{10}}{10}}{10}}{10}$$

Sont les fractions continues introduit par les Égyptiens qui ne sont pas facile à manipuler.

Bibliographie

[1] W. N. Bailey, generalized hypergeometric series, Stechert-Hanfer Service Agency, New york, 1964.

[2] T. S. Chihara : An Introduction to Orthogonal Polynomials, Gordon and Breach, NewYork, 1978.

[3] W. B. Janesand W.Z.Thron, Continued fraction analytic theory and applications, Cambridge university press, 1984.

[4] A. N. Khovanskü, The application of continued fraction and their generalizations to problems un approximation theory, P. Noordhoff, Ltd. Groningen ; The netherlands, 1963.

[5] L. J. Longe, An elegant continued fraction for π, Amer. Math. Monthly 106, No. 5 (May, 1999), pp. 456-458.

[6] N. N. Lebedev, Special functions and their applications, Prentice-Hall, Inc, 1965.

[7] H. W. Lenstra and J. O. Shallit, Continued fraction and linear recurrences ; Mathematics for computation, Vol. 61, N°203 (July 1993) ; P. 351-354.

[8] L. Loretzen and H. Waadeland, Continued fraction with applications, North-Holand, 1992.

[9] E. D. Rainville, Special functions, The Macmillan Company, New York, 1960..

[10] H. S. Wall, Analytic theory of continued fraction, D.Van Nostrand company, Inc, 1948.

[11] William J.leveque, Elementary theory of nember, Dover publication, Inc 1990. Origenally published : Addison Wisley, 1962.