République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Djilali BOUNAÂMA Khemis Miliana

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et d'Informatique

Mémoire Présenté

Pour l'obtention de diplôme de

Master en Mathématiques

Spécialité: Mathématiques Appliquées et Traitement du Signal

Titre :

Solutions approchées pour les programmes multi-objectifs stochastiques

Réalisé par : Amrouche Hamza.

Soutenu publiquement le :..../...../2016

devant le jury composer de:

Mme Ait Abdesselem. M **.Président.**

Mme Meghatria. F **.Encadreur.**

Mr Boukedroun. M **.Examinateur 1.**

Mr Kali. A **.Examinateur 2.**

Année Universitaire 2015/2016

Dédicaces

A ma mère.

A mes frères Abdelkader, Mourad, Hakim, Salim, Ali.

A mes soeurs Benyettou Cherifa, Feghoul Donia.

A tous mes proches.

A mes amis étudiants Benanaya AEK, Djebbar Djamel, Zaghzi Hamza, Temmar Hamza, Amar youcef Remdhan, Chiekh Tayeb Mohamed Yakoub. A mes enseignants et professeurs.

A tous les étudiants et les personnel de l'université de Djilali Bounaâma .

Remerciements

Dieu merci, le pouvoir accordé à moi pour accomplir ce travail modeste.

Mes vifs remerciements vont à toutes les personnes ayant contribué de près ou loin au bon déroulement et à aboutissement de ce travail.

En premier lieu, je tiens a exprimer ma profonde gratitude a ma encadreur, Mme Meghatria Farida, ce qui m'a donné la chance de réaliser ce travail et les mener à bien ainsi que pour la confiance et la liberté qu'il m'a accordées durant toutes cette période.

Remerciement et profonde gratitude vont également aux membre du jury:

Mme Ait Abdesselem. M.

Monsieur Boukedroun Mohamed.

Monsieur Kali Abdesslam.

Nous remercions également l'ensemble du personnel du bloc Science et de la Technologie en général et le département des Maths et informatique en particulier.

Résumé

Dans ce travail, déffirentes solutions approchées pour les problèmes multiobjective stochastiques où les les vartiables aléatoires peuvent être dans les paramètres de la fonction objective et les contraintes. Une fois qu'un problème exige une formulation stochastique, une première étape consiste en transformant le problème en sa formulation déterministe. Nous proposons de classifier et évaluer de telles transformations quant aux nombreux concepts proposés de l'efficacité.

Abstrat

In this work various solutions approaches for multiobjective stochastic problems where random variables can be in both objectives and constraints parameters. Once a problem requires a stochastic formulation, a first step consists in transforming the problem into its deterministic formulation. We pro-pose to classify and evaluate such transformations with regards to the many proposed concepts of efficiency. we addresses also some applications of the multiobjective stochastic programming models.

Table des matières

Liste des notations

PMS: Programme multiobjective stochastique (Mutiobjective stochastic programming).

PMO: Programme multiobjective (Multiobjective programming).

PMD: Programme multiobjective déterministe (Multiobjective determinist programming).

PLMS: Programme linéaire multiobjective stochastique.

SGP: Programmation de but stochastique (Stochastic goal programming).

CCP: Programmation contraintes par chance (Chance constrained programming).

DM: Le décideur.

Liste des figures

Introduction générale

Dans la plupart des problèmes réel, il ne s'agit pas d'optimiser seulement un critère mais plutôt d'optimiser simultanément plusieurs critères et qui sont également conflicutuels. L'optimisation multiobjectif consiste donc à optimiser simultanément plusieurs fonctions. La notion de solution optimale unique dans l'optimisation uni-objectif disparait pour les problèmes d'optimisation multi-objectif.

La programmation probabiliste ou stochastique modélés les problèmes d'optimisation qui impliquent l'incertitude. Généralement les modèles de la programmation stochastiques sont traités par une technique de programmation à deux étapes (méthode de recours) ou la technique de contrainte par chance (CCP) qui impliquent la conversion des modèles de programmation stochastique dans leur modèles de programmation déterministes équivalents, où les contraintes contenant des vriables alétoires

Dans la résolution du programme multi-objective stochastique, on peut voir le comportement du Pareto réglé du problème multi-objective déterministe obtenu pour les différentes valeurs de l'état de la nature de ω, générallement ce genre de problème distributionnel n'est pas bon adressé dans la littérature [Stancu-Minasian 1984]., et d'un point de vue de décision, le décideur est rarement intéressé a savoir comment l'ensemble de Pareto change selon le paramètre aléatoire ω. Nous nous interessons à l'étude des solutions efficaces pour les programmes multi-objective stochastiques.

Dans le prmier chapitre: nous donnons un rappel sur quelques notions de base, on parle sur les éléments de la théorie des probabilités comme la tribu Boriliènne, l'espérance mathématique, variance et covariance.

Dans la deuxième chapitre, nou nous intéressons à l'étude du problèmes d'optimisation multiobjectif, on parle sur la relation de dominance et l'optimalité de Pareto locale et globale.

Dans la troisième chapitre:on parle sur la programmation stochastique et en général sur la programmation multiobjective stochastique.

Dans la quaterième chapitre, nous nous concentrons sur les solutions efficaces pour des problèmes aux variables aléatoires continus influençant seulement les fonctions objectives.

Chapitre 1

Notions de base

1.1 Tribu

Définition 1.1.1 *Soient E un ensemble quelconque et T une partie de $p(E)$ telle que $p(E)$ est l'ensemble de toutes les parties de E, on dit que T est une tribu si:*

1. $E \in T$.
2. $\forall A \in T \Rightarrow A^c \in T$
3. $\forall \{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset T \Rightarrow \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in T$.

Exemple 1.1.2 *Soit l'ensemble $E = \{\alpha, \beta, \gamma\}$*

- $T_1 = \{E, \phi\}$ *est une tribu*
- $T_2 = \{\{\alpha, \beta\}, \{\gamma\}\}$ *n'est pas une tribu puisque $E \notin T_2$.*

Définition 1.1.3 *Soit E est un ensemble et T est une tribu sur E on appele les éléments de T ensemble mesurable*

$T_1 = \{E, \phi\}$ *est une tribu alors :*

-ϕ est mesurable.

-E est mesurable.

1.2 Topologie

Définition 1.2.1 *Soit E un ensemble et $p(E)$ l'ensemble des partie de E.*

Une topologie τ sur E est une famille $\tau \subset p(E)$ de partie de E vérifiant les trois conditions suivantes:

1) ϕ et E sont des éléments de τ.

2) Tout reunion d'éléments de τ est un élément de τ.

3) Tout intersection finie d'éléments de τ est un élément de τ.

Définition 1.2.2 *Les éléments de τ sont appelés les ouverts de la topologie, le couple (E, τ) est appelé un espace topologique.*

1.3 Espace probabilisable

Définition 1.3.1 *Soient E un ensemble et T une tribu, le couple (E, T) est un espace mesurable ou en langage de probabilité (espace probabilisable) les partie de E qui sont dans T sont dits mesurable(probabilisable).*

1.4 Espace probabilisé

1.4.1 Mesure

Définition 1.4.1 *Soit (E, T) un espace mesurable, on appelle mesure sur (E, T) une application*

$\mu : T \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_{+}$telle que:

1. $\mu(\phi) = 0$.

2. μ est σ_additive, c'est à dire:

$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de T deux à deux disjoints $(A_n \cap A_m = \phi, n \neq m)$ on a:

$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Définition 1.4.2 *Soient E un ensemble et T une tribu sur E et μ une mesure, on appelle le triplet (E, T, μ) espace mesuré. Soit un espace probabilisable (E, T), une probabilité p est une application de $E \rightarrow [0, 1]$ telle que:*

- $p(E) = 1$.
- $p(A \cup B) = p(A) \cup p(B)$ *si* $A \cap B = \phi$.
- $p(\cup_{i\in\mathbb{N}^*} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} p(A_i)$ *ou les A_i sont deux à deux disjoints et I est un ensemble dénombrable (E, T, p) est appellé espace probabilisé.*

1.5 Tribu de Borel(tribu Borélienne)

Définition 1.5.1 *Soit E un ensemble muni d'une topologie. On appeles tribu Borélienne la tribu engendrée par des ouverts et notée par $B(E)$. Dans le cas où $E = \mathbb{R}$ on note par $B(\mathbb{R})$. ou bien $B_{\mathbb{R}}$.et donc la tribu Borélienne est engendrée par des intervalles $]a; b[\,, a, b \in \mathbb{R}$.*

1.6 Application mesurable

Définition 1.6.1 *Soient (E, T_1) et (F, T_2) deux espaces mesurables et $f : (E, T_1) \to (F, T_2)$ une application. On dit que l'application f est mesurable si l'image inverse de tout ensemble mesurable est mesurable.c-à-d: $\forall \alpha \in T_2 \Rightarrow f^{-1}(\alpha) \in T_1$.*

1.7 variable aléatoire réelle

Définition 1.7.1 *Soit (E, T, p) un espace de probabilité. Soit X une application de E dans $\mathbb{R}$. On dit que X est une variable aléatoire définie sur (E, T, p) lorsque pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, $X^{-1}(B) = \{w : X(w) \in B\} \in T$.*

Remarque 1.7.2 *X est une variable aléatoire discrete si l'image de E par X est un ensemble fini ou dénombrale.*

On peut associer à chaque évènement B une probabilité par l'intermédiare de X telle que $P(X^{-1}(B)) = P_X(B)$

Remarque 1.7.3 *On appelle loi de probabilité ou distribution de probabilité de la variable aléatoire X la probabilité P_X définie sur $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$*

Pratiquement, on peut définie une variable aléatoire par l'application suivante

$$\begin{aligned} X &: \quad E \to \mathbb{R} \\ \omega &\to \quad X(\omega) \end{aligned}$$

On a deux cas pour X :

1. *X est une variable aléatoire continue, X prend n'importe quelle valeur sur des intervalles de $\mathbb{R}$.*

2. *X est une variable aléatoire discrète, X prend un nombre dénombrable ou fini des valeurs .*

1.7.1 Fonction de répartition (distribution)

Définition 1.7.4 *Soit X une variable aléatoire sur (E, T, p) on appelle fonction de répartition(ou distribution) de v.a X la fonction définie par:*

$$\begin{aligned} F_X &: E \to [0,1] \\ x &\to F_X(x) = p(X \leq x) \end{aligned}$$

telle que F_X est une fonction croissante, continue à droite et $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.

1.7.2 Fonction de densité (densité de probabilité)

Définition 1.7.5 *Soit X une variable aléatoire sur (E, T, p) on appelle fonction de densité(ou densité de probabilité) de v.a X la fonction définie par:*

$$\begin{aligned} f_X &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\to f_X(x) = p(X = x) \end{aligned}$$

telle que $f_X(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x,\ f_X(x) > 0\}$ est fini ou dénombrale et $\sum_{x\in\mathbb{R}} f_X(x) = 1$.

1.7.3 Espérance mathématique

Définition 1.7.6 *Pour d'écrire une variable aléatoire on a une information en plus c'est la valeur centrale de tout les valeurs possibles ou le bary centre de toutes les valeurs possibles.*

Définition 1.7.7 *Soit X une variable aléatoire de densité f_X, l'espérance mathématique de X est donnée par:* $E(X) = \int\limits_E x f_X(x) dx$.

Propriétés 1 *Soient X et Y deux variable aléatoires définies sur E admettant une espérance mathématique, alors:*

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $E(a) = a$;$\forall a \in \mathbb{R}$
- Si $X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$

1.7.4 Variance

Définition 1.7.8 *Soit X une variable aléatoire, on appelle variance de v.a X le nombre réel:* $Var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$.

Propriétés 2 *Soient X et Y deux variable aléatoires définies sur E admettant une espérance mathématique, alors:*

- $V(aX) = a^2 V(X)$;$\forall a \in \mathbb{R}$
- $V(X + c) = V(X)$;$\forall c \in \mathbb{R}$

- $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

- $V(c) = 0$;$\forall c \in \mathbb{R}$

- $V(X) = 0 \Leftrightarrow X = E(X)$

1.7.5 Ecart-type

Définition 1.7.9 *Soit X une variable aléatoire et sa variance existe, on appelle écart-type de v.a X le nombre réel:* $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

1.7.6 Covariance

Définition 1.7.10 *On appelle covariance de deux variables aléatoires, le nombre réel:* $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Propriétés 3 *Soient X et Y deux variable aléatoires définies sur E admettant une espérance mathématique, alors:*

- $Cov(aX + bY) = a^2V(X) + 2abCov(X,Y) + b^2V(Y)$

- $Cov(X,Y) = 0$ *si X et Y sont indépendantes.*

1.7.7 Variable aléatoire normale centré réduite

Remarque 1.7.11 *Si $m = 0$ et $\sigma = 1$ alors la variable aléatoire X est dite v.a normale centré réduite et sa fonction de densité devient :* $\beta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x)^2}{2}}$

Définition 1.7.12 *$X \rightsquigarrow N(0,1)$ est une variable aléatoire normale centré réduite sa fonction de distribution est définie par* $\phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x)^2}{2}} dx$

Remarque 1.7.13 *Soit X une variable aléatoire réel, si X suit une loi normale, i.e. $X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2) \Rightarrow$ la varaible aléatoire $X^* = \frac{X-m}{\sigma^2} \rightsquigarrow N(0,1)$*

Fractiles d'une varaible aléatoire normale centrée réduite

Soit X une variable aléatoire normale centrée réduite, i.e. $X \rightsquigarrow N(0,1)$.On cherche en fonction d'une valeur α donnée, à déterminer le nombre u_α, appelé fractile, tel que

$P(\omega / X(\omega) \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$.

1.8 Matrice de covariance

Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^d$, on note $X = (X_1, ..., X_d)^t$. Les variable aléatoire rééelles $X_1, ..., X_d$ sont appelées les composante de X et leurs lois sont sont des lois marginales de la loi de X. On définit classiquement son espérance (moyenne)

$$m_x = E[X] = \begin{pmatrix} E[X_1] \\ \vdots \\ E[X_d] \end{pmatrix} \text{ et } Var(X) = E[(X - E[X])^t (X - E[X])] = (Cov(X_i, X_j))_{1 \leq i,j \leq d}.$$

La matrice de covariance est donnée par:

$$\begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_{1,}X_2) \ldots Cov(X_1, X_d) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2) \quad \ldots Cov(X_2, X_d) \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ Cov(X_d, X_1) & Cov(X_d, X_2) \qquad Var(X_d) \end{pmatrix}$$

1.9 Minimum globale

Définition 1.9.1 *Un point x^* est un minimum globale d'une fonction f si on a :$f(x^*) < f(x)$ quel que soit x, tel que $x^* \neq x$.*

Chapitre 2

Programmation multiobjectifs

2.1 Introduction

Les problèmes d'optimisation multiobjectif consistent à trouver des solutions qui optimisent plusieurs objectifs qui peuvent être contradictoires (par exemple la qualité et le coût de fabrication).

2.2 Définitions

2.2.1 Formulation

Un problème multiobjectif peut être définit comme suit :

$$\begin{cases} \max(c_1(x), ..., c_k(x)) \quad k \geq 2 \\ avec\ F = (c_1 : S \to \mathbb{R}, ..., c_k : S \to \mathbb{R}) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, ..., m \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., n \end{cases}$$

où, x_j sont des nombres réels positifs. On pose $D = \{x_j / \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, ..., m / x_j \geq 0, j = 1, ..., n\}$, k est le nombre de fonctions à optimiser, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ est le vecteur des variable de décisions, $C(x) = (c_1(x), c_2(x), ..., c_k(x))$ est le vecteur des critères à optimiser.

L'image d'une solution x dans l'espace des critères est le point $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ avec $y_i = c_i(x), i = 1, .., m$, et $Y = F(S)$ représente les points réalisables dans l'espace des objectifs. On impose sur cet ensemble une relation d'ordre partiel appelée relation de dominance.

2.2.2 Notion de dominance

Définition 2.2.1 *Une solution $y = (y_1, y_2, .., y_m)$ domine faiblement une solution $z = (z_1, z_2, ..., z_m)$ ssi $\forall i \in \{1, ..., m\}$ $c_i(y) \leq c_i(z)$. Si la solution y domine faiblement la solution z nous allons noter $y \preceq z$.*[17]

Définition 2.2.2 *Une solution $y = (y_1, y_2, .., y_m)$ domine une solution $z = (z_1, z_2, ..., z_m)$ ssi $\forall i \in \{1, ..., m\}$ $c_i(y) \leq c_i(z)$ et $\exists j \in \{1, ..., m\}$ tq $c_j(y) < c_j(z)$ Si la solution y domine la solution z nous allons noter $y \prec z$.*[17]

Remarque 2.2.3 *Notons que pour tout paire de solutions y et z un et un seul des cas suivants peut se présenter:*

·y domine z.

·y est dominé par z.

·y et z sont équivalentes au sens de la dominance .

Les solution équivalentes au sens de dominance sont appelées dans ce qui suit, solutions équivalentes au sens de Pareto ou solutions pareto équivalentes ou, encore, solutions non-dominées.

Propriétés de la relation de dominance:

La relation de dominance telle qu'elle est définie ci-dessous ;

- n'est pas réflexive, car une solution ne se domine pas elle même.

- n'est pas symétrique, car on n'a jamais $y \prec z$ et $z \prec y$.

- est transitive car, si $y \prec z$ et $z \prec w$ alors $y \prec w$.

2.2.3 Optimalité de Pareto

Soit P l'ensemble de solution candidates d'un problème d'optimisation multiobjectif. L'ensemble $P^{'} \subseteq P$, composé de tous les éléments de P qui ne sont dominés par aucun élément de P est dit sous-ensemble non dominé de l'ensemble P .

-**Optimalité locale au sens de Pareto:** Une solution y est optimale localement au sens de Pareto s'il existe un réel $\delta > 0$ tel qu'il n'y pas une solution z dominant y et vérifiant $||z-y|| \leq \delta$.

-**Optimalité globale au sens de Preto:** Une solution y est optimale globalement au sens de Pareto, ou optimale au sens de Pareto, ou encore Pareto-optimle s'il n'existe aucun point de l'espace faisable S qui la domine. L'ensemble des solutions de Pareto optimale est appelé l'ensemble de Pareto ou également l'ensemble de s compromis optimaux. L'image de l'ensemble de Pareto dans l'espace de critères est appelé la surface de Pareto (ou le front de Pareto pour le cas bi-objectif) ou encore la surface de compromis optimaux.

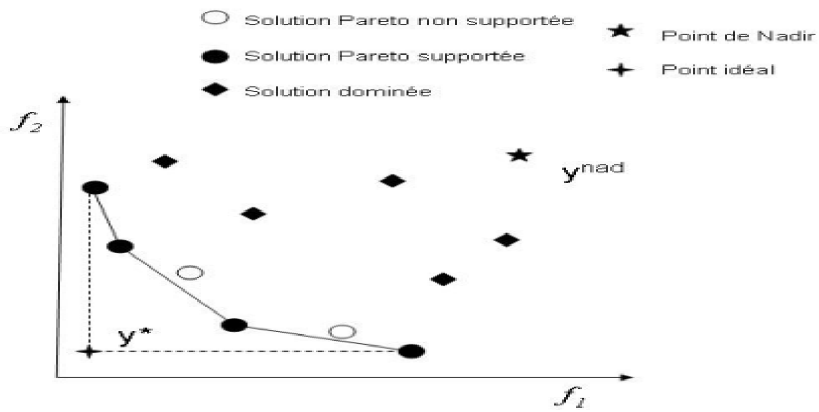

Fig 1-Représentation des solutions supportées et non supportées,point idéal et point de Nadir

2.2.4 Point idéal et point Nadir

On appelle point idéal le vecteur $y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ est obtenu en optimisant séparément chaque fonction objectif c_i,c'est-à-dire $y_i^* = c_i^*(x), x \in S$ (voir figure 1). Généralement ce vecteur n'appartient pas a l'espace objectif réalisable mais il est dans certains cas utile en tant que référence, par exemple, pour normaliser les vecteurs des objectifs.

A la différence du vecteur idéal qui représente les bornes inférieures de chaque objectif dans l'espace faisable, le vecteur de Nadir correspond à leur bornes supérieures sur la surface de Pareto, et non pas dans tout l'espace faisable (voir la figure 1).

2.2.5 Convexité

Définition 2.2.4 *[9] Un ensemble Y est convexe si, pour n'importe quels deux points distincts de cet ensemble, le segment qui relie ces deux points est contenu dans l'ensemble Y. C'est-à-dire:*

$$\forall x, y \in Y, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+, \{\lambda_1 + \lambda_2 = 1\} \Rightarrow \lambda_1 x + \lambda_2 y \in Y.$$

2.3 Les méthodes de résolution des problèmes multiobjectifs

Les méthodes d'optimisation multicritères s'intéressent aux problèmes essayant d'optimiser simultanément plusieurs objectifs. Elles peuvent être classées selon le schéma suivant : [11],[19]

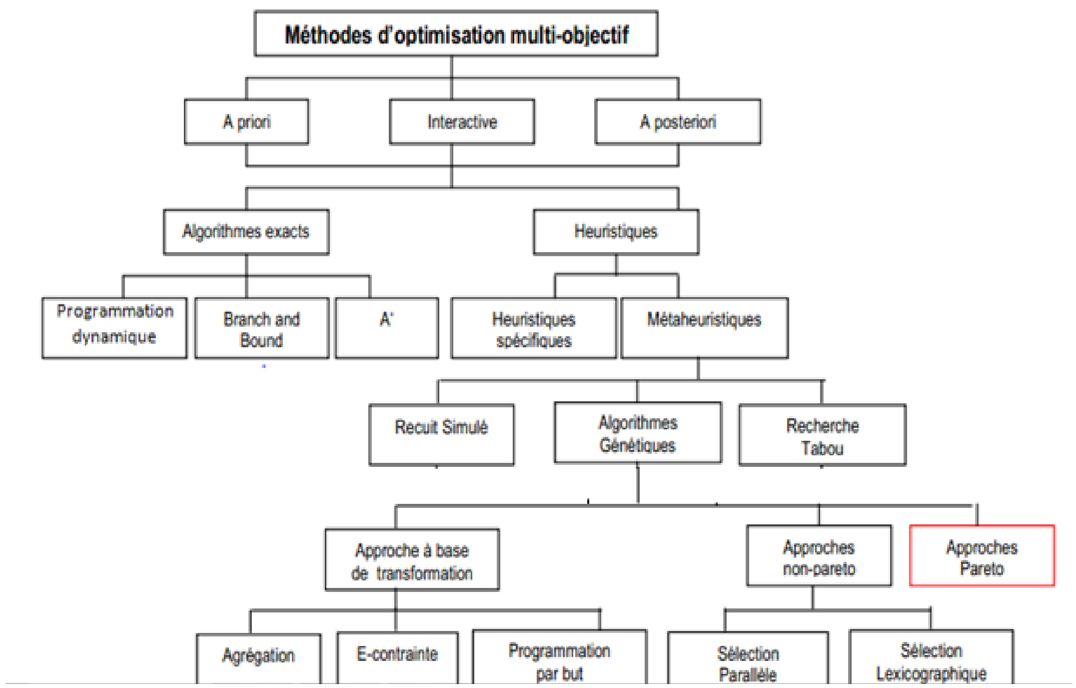

Fig 2- Classification des méthodes d'optimisation multiobjectif

On peut être rangées ses méthodes en trois familles:

• **Les méthodes à préférence à priori**:

L'utilisateur définit le compromois qu'il désire réaliser avant de lancer la méthode d'optimisation. On retrouve dans cette famille, toutes les méthodes agrégatives.

• **Les méthodes à préférence progressives**:

L'utilisateur affine son choix de compromis au fur et à mesure du déroulement de l'optimisation. On retrouve dans cette famille, toutes les méthodes interactives.

• **Les méthodes à préférence à posteriori**:

L'utilisateur choisit une solution de compromis parmi les solution de la surface de compromis.

1). LES METHODES EXACTES :

Ces méthodes permettent d'obtenir l'optimum global de manière exacte pour certains types de problèmes. Elles sont efficaces seulement lorsque le PMO à résoudre est bi-objectif et l'espace de recherche est de petite taille.[11]

2). Méthodes approchées :

A).Heuristiques :

a. Heuristiques spécifiques:

Elles sont dédiées à la résolution d'un PMO spécifique et ne fonctionnent que sur ce type de problèmes.

b. Métaheuristiques:

Elles sont fondées sur une idée générale. Et peuvent s'adapter à n'importe quel type de problème et donner de bons résultat. On trouve dans cette famille les algorithmes génétiques, la recherche tabou,....

Les métaheuristiques résolvant les PMO peuvent être classées en trois approches :

b.1 Transformation des PMO en uni-objectif :

b.1.1 Méthodes d'agrégation (agrégation pondérée) :

Les méthodes agrégatives fusionnent les différentes fonctions objectives pour se ramener à un problème d'optimisation mono-objectif [10]. Parmi ces méthodes on trouve la méthode de pondération des fonctions objectif [2], qui est la plus simple des méthodes d'optimisation multi-objectif. La transformation que l'on effectue est la suivante :

$$\begin{cases} \min C(x) \\ avec\ x \in S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min \sum_{i=1}^{k} \lambda_i C_i(x) \\ avec\ x \in S,\ \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \end{cases}$$

Où $C = (C_1, ..., C_k)$ est vecteur de k objective, S est le domaine réalisable et λ_i sont les coefficients de pondération.

b.1.2 Méthode $\varepsilon-$contrainte :

Ce n'est pas une méthode d'agrégation des fonctions objectives. Elles est aussi dite méthode de compromis [8]. Elle transforme un PMO en un problème d'optimisation mono-objectif de la façon suivante :

- Choisir un objectif à optimiser prioritairement.

- Choisir un vecteur de contraintes initiales.

- transformer le problème en gardant l'objectif prioritaire et en transformant les autres objectifs en contraintes d'inégalités comme suit :

Par exemple on choisir le premier objectif.

$$\begin{cases} \min C(x) \\ avec\ x \in S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min C_1(x) \\ avec\ C_2(x) \leq \varepsilon_2, ..., C_k(x) \leq \varepsilon_k \\ x \in S \end{cases}$$

Remarque 2.3.1 *Cette méthode présente plusieurs inconvénients à savoir puisque les contraintes rajoutées compliquent la résolution du problème.*

b.1.3 Programmation par but :

On définit un ensemble de buts qu'on espère atteindre pour chaque fonction objectif. L'algorithme tente de minimiser l'écart entre la solution courante et ses buts.

$$\begin{cases} \min \parallel C - \overline{C} \parallel_p \\ avec \ \ x \in S \end{cases}$$

Où $C = (C_1, C_2, ..., C_k)$ est le vecteur des fonctions objectifs. et $\overline{C} = C_i(x^*)$, $i = 1, ..., k$ est la valeur optimale de la fonction objectif C_i.

Par ailleurs, nous avons $\parallel C - \overline{C} \parallel_p = \sum_{i=1}^{k} (\mid C_i - \overline{C}_i \mid^p)^{\frac{1}{p}}, C_i - \overline{C}_i = e_i^+ - e_i^-$ tels que : si $e_i^+ > 0$ alors $e_i^- = 0$ et la réciproquement si $e_i^- > 0$ alors $e_i^+ = 0$.

On donne un rappel sur :

-La somme pondérée est donner par : $S_1(C, \lambda) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i C_i$

-La distance pondérée de Tchebychev : $S_2(C, \lambda, \overline{C}) = \max\{\lambda_i \mid C_i - \overline{C}_i \mid /1 \leq i \leq k\}$.

-La distance pondérée augmentée de Tchebychev : $S_2(C, \lambda, \overline{C}) = \max\{\lambda_i \mid C_i - \overline{C}_i \mid /1 \leq i \leq k\} + \rho(\sum_{i=1}^{k} \mid C_i - \overline{C}_i \mid)$.

b.2 Approches Pareto :

ces méthodes utilisent directement la notion de dominance au sens de Pareto dans la selection des solutions générées. Cette idée a été initialement introduite par Goldberg [18].

b.3. Approches non Pareto :

Ces méthodes optimisent séparément les objectifs, elles sont sensibles au paysage du front de Pareto (convexité, continuité,..). Elles sont efficaces et faciles à implémenter seulement pour les PMO avec un nombre réduit d'objectifs. Parmi ces approches on a :

-L'algorithme génétique (Vecteur Evaluated Genetic algorithm).

Chapitre 3

Programmation multiobjective stochastique

3.1 Programmation linéiare stochastique

Définition 3.1.1 *Un programme linéaire stochastique est un programme linéaire en présence de variable(s) aléatoire(s) définie sur un espace de probabilité (Ω, F, P) de distribution connue en. On considère le programme linéaire stochastique suivant:*

$$\begin{cases} \max c(\omega)x \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega) \\ i = 1, ..., m \ ; \ j = 1, ..., n \ ; x_j \geq 0 \end{cases} \qquad (S)$$

avec $c(\omega)$ est un vecteur aléatoire de dimension n telle que $c(\omega) = (c_1(\omega), c_2(\omega), ..., c_n(\omega))$, où a_{ij}, b_j et $c_i(\omega)$ sont des varaibles aléatoires de distribution connue sur l'espace de probabilité(Ω, F, P) pour $\{i = 1, ..., m \ ; \ j = 1, ..., n \ \}$, et les x_j sont des nombres réels positifs.

•Méthode passive

le décideur peut attendre la réalisation des variables aléatoires et résoudre le programme déterministe résultant. Dans ce cas, on s'intéresse généralement à la distribution de probabilité de la valeur optimale ou à son espérence mathématique ou sa variance. D'aprés la philosophie de cette méthode, cette dernière concerne plus les problèmes prévisionels.

3.1.1 Programme équivalent

On considère le programme linéaire stochastique sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \max c(\omega)x \\ x \in D = \{x/Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases} \qquad (S^1)$$

Où c est un vecteur aléatoire et $A = (a_{ij})$ et $b = (b_i)$ sont déterministes.

Pour établir la fonction objectif du problème (S^1) nous avons plusieurs méthode. Parmi elles, on considère les méthodes suivantes:

E- modèle (espérance-modèle)

cette méthode est la plus utilisée, elle consiste à remplacer la variable aléatoire de l'objectif par son espérance mathématique pour obtenir le programme linéaire déterministe suivant:

$$\begin{cases} \max E(c(\omega))x \\ x \in D = \{x/Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases} \qquad (S^1)_1$$

V-modèle (variance-modèle)

La minimisation de la variance appelée V_modèle, dans le cas où c est un vecteur aléatoire son espérance mathématique $\overline{c}$, de matrice de covariance V. la variance de $c(\omega)$ est x^tVx et donc cette méthode donne le programme déterministe suivant:

$$\begin{cases} \max x^tVx \\ x \in D = \{x/Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases} \qquad (S^1)_2$$

P-modèle (méthode à risque minimum)

La maximisation de la probabilité que la valeur de l'objectif est au moins égale à un certain niveau u qui est choisi par le décideur alors la méthode à risque minimum donnée le programme déterministe suivant:

$$\begin{cases} \max\{P_u(c(\omega)x) = P(\omega/c(\omega)x \geq u\} \\ x \in D = \{x/Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases} \qquad (S^1)_3$$

Dans le cas gaussien, la solution de ce problème est donnée par le programme fractionnel suivant:

$$\begin{cases} \max \frac{\overline{c}x-u}{x^tVx} \\ x \in D = \{x/Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases} \qquad (S^1)_3'$$

Où $\overline{c}$ est l'espérance mathématique de $c(\omega)$, V sa matrice de covariance et x^tVx la variance de $c(\omega)x$.

Méthode de Katoaka

C'est la maximisation de $\alpha-$fractile de la fonction de distribution de l'objectif telle que α est choisi par le décideur. Alors on a le programme suivant:

$$\begin{cases} \max u \\ P(\omega/c(\omega)x \geq u) = \alpha \\ x \in D = \{x/Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases} \qquad (S^1)_4$$

Dans le cas gaussien:

$P(\omega/c(\omega)x > u) = \alpha \Leftrightarrow P(\omega/c(\omega)x \leq u) = 1 - \alpha$

et $P(\omega/c(\omega)x \leq u) = P(\omega/\frac{c(\omega)x-\bar{c}x}{\sqrt{x^tVx}} \leq \frac{u-\bar{c}x}{\sqrt{x^tVx}}) = \phi(\frac{u-\bar{c}x}{\sqrt{x^tVx}})$

Où ϕ est la fonction de répartition de la varaible aléatoire normale centrée réduite. Donc

$P(\omega/c(\omega)x \geq u) = \alpha \Leftrightarrow \phi(\frac{u-\bar{c}x}{\sqrt{x^tVx}}) = 1 - \alpha \Leftrightarrow u = \bar{c}x - \phi^{-1}(\alpha).\sqrt{x^tVx}$

Par conséquent, résoudre le problème $(S^1)_4$ dans le cas gaussien, revient à résoudre le problème suivant:

$$\begin{cases} \max \bar{c}x - \phi^{-1}(\alpha).\sqrt{x^tVx} \\ x \in D = \{x/Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases} \qquad (S^1)_4^{'}$$

Telle que $\bar{c}x - \phi^{-1}(\alpha).\sqrt{x^tVx}$ est concave si $\phi^{-1}(\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq \frac{1}{2}$. Donc on peut dire, si on revient au problème $(S^1)_4$, si $P(\omega/c(\omega)x \geq u) = \alpha$ telle que $\alpha \geq \frac{1}{2}$, avoir le maximum de gain avec une probabilité supèrieur au égal à $\frac{1}{2}$.

Remarque 3.1.2 *si $\alpha = 1$ on revient au E-modèle.*

3.1.2 Contraintes du programme équivalent

La méthode qui est utilisée pour la résolution d'un programme linéaire stochastique consiste à remplacer chacune des variable aléatoires des contraintes par leur espérances mathématiques respectives et résoudre le problème déterministe résultant. L'exemple suivant montrer le manque de réalisme d'une telle méthode.

Exemple 3.1.3 *On considère le programme stochastique suivant:*

$$\begin{cases} \min \ x_1 + x_2 \\ a(\omega)x_1 + x_2 \geq 7 \\ b(\omega)x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (S^2)$$

Où le couple de variables aléatoires $(a(\omega), b(\omega))$ est uniformément distribué sur le rectangle $\{(i,j)/1 \leq i \leq 4, \frac{1}{3} \leq j \leq 1\}$

En remplaçer $a(\omega)$ et $b(\omega)$ par leur espérances mathématiques respectives $E(a)$ et $E(b)$ avec $E(a) = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$ et $E(b) = \frac{1+\frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{3}$, donc on obtient le programme déterministe suivant:

$$\begin{cases} \min \ x_1 + x_2 \\ \frac{5}{2}x_1 + x_2 \geq 7 \\ \frac{2}{3}x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (S_d^2)$$

Donc unique solution optimale est :$\{x_1^* = \frac{18}{11}, x_2^* = \frac{32}{11}\}$,on cherche la probabilité pour que la solution optimale soit réalisable

$$P(a(\omega)x_1^* + x_2^* \geq 7, b(\omega)x_1^* + x_2^* \geq 4\} = P\{a(\omega) \geq \frac{5}{2}, b(\omega) \geq \frac{2}{3}\}$$

$= P(a(\omega) \geq \frac{5}{2}) \cdot P(b(\omega) \geq \frac{2}{3}) = (1 - F_a(\frac{5}{2})) \cdot (1 - F_b(\frac{3}{2})) = \frac{1}{4}.$

Où F_a *et* F_b *sont les fonctions de répartitions des variables aléatoires respectives* $a(\omega)$ *et* $b(\omega)$.

La probabilité pour que cette solution soit réalisable est donc faible, ce qui montre le manque de réalisme d'une telle méthode.

Résolution du programme linéaire stochastique :

Pour la résolution du programme linéaire stochastique, il existe deux méthodes importantes:

▷**Méthode avec recours:** Cette méthode consiste à transformer le programme (S^1) en un programme déterministe équivalent en introuduisant des fonctions de pénalité pour la violation des contraintes stochastiques et ajouter l'espérance de leurs coûts à la fonction économique d'origine.

▷**Programmation contrainte par chance (Chance constrained programming):** Cette méthode consiste à transformer les contraintes stochastiques du programme (S^1) en des contraintes déterministes équivalentes en considérant la probabilité de leurs réalisations simultanément ou séparément, au moins égale à un/des seuil(s) choisi(s) par le décideur. "Chance constrained programming" accepte la violation des contraintes jusqu'à un certain seuil choisi par le décideur, par contre la " méthode avec recours" ne le parmi pas, par conséquent des fonctions de pénalité peuvent fournir un moyen pour ajouter un coût de violations à la fonction économique comme suit:

▷**Programmation linéaire stochastique avec recours:** La formulation de ce problème appelée " programme à deux étapes" ou "méthode avec recours". [4]

Soit y une décision corrective ou appelé (recours), prise pour compencer $q(\omega)$ un vecteur de pénalisation de recours, $q(\omega)y$ est la pénalité introduite pour compenser ces violations.

$$\left\{\min E(c(\omega)x + \min(q^t(\omega)y / W(\omega)y = b(\omega) - A(\omega), x \geq 0, y \geq 0/y)\right\} \ldots.(Pd)$$

$$Q(x,\omega) \;=\; \min\{q^t(\omega)y / W(\omega)y = b(\omega) - A(\omega)x, x \geq 0, y \geq 0/y\}$$

correspond au problème recours, où dans la deuxième niveau, on pose $k = (x \in \mathbb{R}^n / Q(x,\omega) < +\infty$ avec une probabilité égale à 1)

Soit P_ω une distribution de probabilité, on pose:

$\overline{c} = E(c(\omega) = \int\limits_\Omega c(\omega)dP_\omega$ et $Q(x) = \int\limits_\Omega Q(x,\omega)dP_\omega$ alors le programme prendre la forme suivante:

$$\left\{\begin{array}{c} \min \overline{c}x + Q(x) \\ \\ x \in B = \{x \in \mathbb{R}^n / x_j \geq 0, j = 1,2,...,n\} \end{array}\right. . \qquad (Pd)$$

Dans le cas oû P_ω est une distribution de probabilité discrète et finie telle que $P_\omega(\omega_k) = p_k, k = 1,2,....,r$ et $\sum\limits_{k=1}^{r} p_k = 1$ on a $Q(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} p_i q(\omega_i) y^i$

Alors le programme s'écrirt sous la forme suivante:

$$\left\{\begin{array}{c} \min \overline{c}x + \sum\limits_{i=1}^{r} p_i q(\omega_i) y^i \\ \\ A(\omega_i)x + W(\omega_i)y^i = b(\omega_i), i = 1,2,...,r \\ \\ x \in B, y^i \geq 0 \end{array}\right.$$

Simple recours Dans le cas où $W(\omega) = W$ est fixe, c'est une matrice non stochastique qui prendre la forme $W(I, -I)$ ou $I(m \times m)$ est la matrice identité.

Définition 3.1.4 *On appelle la matrice de simple recours la matrice $W(I,-I)$ où $I(m\times m)$ est la matrice identité. [3]*

Les violations des contraintes originales qui apparaissent aprés le choix de la décision $x \in B$ et la réalisation de $A(\omega)$ et $b(\omega)$ valent $q(\omega)$. Il est préférable de représente la deuxième étape du programme sous la forme suivante:

$$\begin{cases} Q(x,\omega) = \min\{q^+(\omega)y^+ + q^-(\omega)y^-\} \\ y^+ - y^- = b(\omega) - A(\omega)x \\ y^+ \geq 0, y^- \geq 0 \\ y^+, y^- \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Autrement dit, pour $q^+ + q^- \geq 0$, les variable de recours y^+ et y^-peuvent être choisie pour mesurer(positivement) les déficiences absolues dans les contraintes stochastiques.

Théorème 3.1.5 *$Q(x,\omega)$ est fini si et seulement si $q^+(\omega)+q^-(\omega) \geq 0$ avec une probabilité égale à 1.*

▷**Programmation contrainte par chance :** Etant donné que cette méthode focaliser les contraintes, nous consédirons alors un programme linéaire stochastique dont l'objectif est déterministe comme suit:

$$\begin{cases} \max cx \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega) \\ i=1,...,m \ ; \ j=1,...,n \ ; x_j \geq 0 \end{cases} \qquad (S^3)$$

avec $c = (c_{1,}c_{2,}....., c_n)$ est un vecteur de dimension n où les c_i sont des nombre réels et a_{ij} et b_i pour $\{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ sont des variables aléatoires de distribution connue sur l'espace de probabilité (Ω, F, P) et x_j pour tout $j = 1, ..., n$ sont des nombres réels positifs.

Versions de programmation contrainte par chance : Il existe deux différents versions de cette méthode:

Première version Cette version consiste à remplacer l'ensemble des contraintes la probabilité (joiante) de leur réalisations simultanées au moins égale un seuil choisi par le décideur.

Donc on a le programme déterministe suivant:

$$\begin{cases} \max cx \\ P\{\omega / \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j \leq b_i(\omega), i = 1, ..., m\} \geq \alpha \quad ....(S^3)_1 \\ x_j \geq 0, j = 1, .., n \end{cases}$$

Deuxième version Cette version consiste à remplacer chaque contraintes par la probabilité de la réalisation au moins égale à un seuil choisi par le décideur.

Donc on a le programme déterministe suivant:

$$\begin{cases} \max cx \\ P\{\omega / \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j \leq b_i(\omega), i = 1, ..., m\} \geq \alpha_i \qquad (S^3)_2 \\ x_j \geq 0, j = 1, .., n \end{cases}$$

la deuxième version est le plus avantageuse que la première puisque le décideur peut choisir pour chaque contraintes $A_i(\omega)x \leq b_i(\omega)$ suivant les données du problème, le seuil α_i tel que

$P(\omega/A_i(\omega)x \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i$.

Solutions admissibles pour les deux versions : Maintenent on donne l'ensemble des solutions admissibles pour les deux versions précidents. Soient:

$$\begin{aligned} X(\alpha) &= \{x \geq 0/P(\omega/\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega), i=1,...,m) \geq \alpha\} \text{ pour le problème déterministe}(S^3)_1 \\ X_i(\alpha_i) &= \{x \geq 0/P(\omega/\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega), i=1,...,m) \geq \alpha_i\} \text{ pour le problème déterministe}(S^3)_2 \end{aligned}$$

.

-On pose une question : les ensembles $X(\alpha)$ et $X_i(\alpha_i)$ sont-ils convexes? car ce n'est pas toujours le cas de convexité.

Remarque 3.1.6 *Nous allons voir par suite que $X(\alpha)$(resp.$X_i(\alpha_i)$) peut être convexe si les variables aléatoires sont normales ou discrètes et sous certains conditions concernant les valeurs de α (resp.α_i) Seuls les cas où α(resp.α_i) est égale à 0 ou 1 ou les cas où A (resp.A_i) est déterministe et b(resp.b_i) est aléatoires nous assure la convexité de $X(\alpha)$(resp.$X_i(\alpha_i)$) quelque soit la distribution de probabilité de variables aléatoires b(resp.b_i).*

Théorème 3.1.7 *[5] Dans un programme, si les a_{ij} sont déterministes et les b_i sont stochastiques alors:*

-Pour tout distribution de probabilité de $b, X(\alpha)$ est convexe.

-Pour tout distribution de probabilité de $b_i, X_i(\alpha_i)$ est convexe

Preuve.
$$\begin{aligned} P(\omega/\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i &\Leftrightarrow 1 - P(\omega/\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j > b_i(\omega)) \geq \alpha_i \\ &\Leftrightarrow 1 - F_{b_t}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j) \geq \alpha_i, i=1,....,m \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow F_{b_t}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j) \leq 1-\alpha_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq F_{b_t}^{-1}(1-\alpha_i).$$

Donc : $X(\alpha_i) = \{x \geq 0 / \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq F_{b_t}^{-1}(1-\alpha_i)\}, i = 1, ..., m$ $\square$

Théorème 3.1.8 *[5] Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité et la distribution discrète et finie $p(\omega_k) = p_k$ et $\sum_{k=1}^{r} p_k = 1, k = 1, ..., r$. Alors:l'ensemble $X(\alpha)(resp.X_i(\alpha_i))$ est convexe, pour $\alpha > 1 - \min_{k\in(1,2,...,r)} p_k$. $(resp.\alpha_i > 1 - \min_{k\in(1,2,...,r)} p_k.)$.*

Théorème 3.1.9 *[5] Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité, $a_{ij}(\omega)$ les composantes de la matrice $A(m \times n)$ et les b_i les composantes du vecteur $b(m \times 1)$*

Si $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}, b_i$ sont $(n+1)$ variables aléatoires normales d'espérances mathématiques $\mu_{i1}, \mu_{i2}, ..., \mu_{in}, \lambda_i$ et de variances $\sigma_{i1}^2, \sigma_{i2}^2, ..., \sigma_{in}^2, \delta_i^2$ respectivement, alors:

-L'ensemble $X(\alpha)$ est convexe, pour $\alpha > \frac{1}{2}$.

-L'ensemble $X_i(\alpha_i)$ est convexe, pour $\alpha_i > \frac{1}{2}$.

Preuve. On montre que $X_i(\alpha_i)$ est convexe.

On pose:

$y_i(x, \omega) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j - b_i(\omega), i = 1, .., m$ est une combinaison linéaire de $(n+1)$ variables aléatoires normales. Donc $y_i(x, \omega)$ est une variable aléatoire normale de moyenne $E(y_i(x, \omega)) = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij}x_j - \lambda_j$ et de variance $V(y_i(x, \omega)) = z^t S_i z$ où $z = (x_1, x_2, .., x_n, -1)^t$ et si $S_i((n+1) \times (n+1)$ est la matrice de covariance suivante:

$$S_i = \begin{pmatrix} V(a_{i1}) & Cov(a_{i1},a_{i2})\dots Cov(a_{i1},a_{in}) & Cov(a_{i1},b_i) \\ Cov(a_{i2},a_{i1}) & V(a_{i2}) \;\; Cov(a_{i2},a_{i3})\cdots & Cov(a_{i2},b_i) \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots \\ Cov(a_{in},a_{i1}) & Cov(a_{in},a_{i2})\dots V(a_{in}) & Cov(a_{in},b_i) \\ Cov(b_i,a_{i1}) & Cov(b_i,a_{i2})\dots Cov(b_i,a_{in}) & V(b_i) \end{pmatrix}$$

Où V et Cov représentent respectivement variance et covariance

Posons :$m_{y_i}(x) = E(y_i(x,\omega)), \sigma^2_{yi}(x) = V(y_i(x,\omega))$ et $\sigma_{yi} = \sqrt{V(y_i(x,\omega))}$.

Nous avons: $P(\omega/\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)) = P(\omega/\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j - b_i(\omega) \leq 0)$
$= P(\omega/\frac{y_i(x,\omega)-m_{yi}(x)}{\sigma_{yi}(x)} \leq \frac{-m_{yi}(x)}{\sigma_{yi}})$.

Donc: $P(\omega/\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i \Leftrightarrow P(\omega/\frac{y_i(x,\omega)-m_{yi}(x)}{\sigma_{yi}(x)} \leq \frac{-m_{yi}(x)}{\sigma_{yi}}) \geq \alpha_i$.

$\frac{y_i(x,\omega)-m_{yi}(x)}{\sigma_{yi}(x)}$ est une variable aléatoire normale centrée réduite et soit ψ sa fonction de distribution qui est strictement croissante et bijective de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$ .Donc, $P(\omega/\frac{y_i(x,\omega)-m_{yi}(x)}{\sigma_{yi}(x)} \leq \frac{-m_{yi}(x)}{\sigma_{yi}}) = \psi(\frac{-m_{yi}(x)}{\sigma_{yi}(x)}) \geq \alpha_i \Leftrightarrow \frac{-m_{yi}(x)}{\sigma_{yi}(x)} \geq \psi^{-1}(\alpha_i) \Leftrightarrow \psi^{-1}(\alpha_i)\sigma_{yi}(x) + m_{yi}(x) \preceq 0$.

$X_i(\alpha_i) = \{x/\psi^{-1}(\alpha_i)\sigma_{yi}(x) + m_{yi}(x) \leq 0\}$. La matrice S_i est définie positive donc $\sigma^2_{yi}(x) = V(y_i(x,\omega))$ et $\sigma_{yi}(x) = \sqrt{V(y_i(x,\omega))}$ sont convexes en x et $m_{yi}(x) = E(y_i(x,\omega))$ est linéaire affine en x.Alors $X_i(\alpha_i)$ est convexe si $\psi^{-1}(\alpha_i) \geq 0$,i.e, $\alpha_i \geq \frac{1}{2}$ car

$\psi^{-1}(\alpha_i) \geq 0 \Leftrightarrow \psi(0) = \frac{1}{2}$. $\square$

3.2 Programmation multiobjective stochastique

Définition 3.2.1 *(**La forme générale de PMS**) [6] Dans beaucoup de cas réel, les besoins d'un décideur (DM) d'optimiser des objectifs aléatoires contradictoires. le problème obtenu s'appelle un programme multiobjective stochastique (PMS) dans lequel les objectifs et/ou les contraintes contiennent des paramètres aléatoires la formulation générale de (PMS) peut être enoncé comme suit:*

$$\left\{ \begin{array}{c} \max c(\omega, x) = (c_1(\omega, x), c_2(\omega, x), ..., c_m(\omega, x)) \\ x \in X(\omega) = \{g_j(\omega, x) \leq b_j(\omega); j = 1, ..., k \\ x \in D, \omega \in \Omega \end{array} \right\} \qquad (1)$$

Où

D est un ensemble déterministe de corps convexe, $X(\omega)$ ensemble faisable aléatoire, g_i sont des contraintes aléatoires, b_j sont des paramètres aléatoires,$c_1(\omega, x), c_2(\omega, x), ..., c_m(\omega, x)$ sont des objectifs aléatoires, (Ω, F, P) est un espace de probabilité, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ est un vecteur de dimension n.

3.2.1 Programmation linéaire multiobjective stochastique

Formulation de problème

Une programmation linéaire multiobjective stochastique (PLMS) est un problème du type:

$$\left\{ \begin{array}{c} \min(c_1(\omega)x, ..., c_k(\omega)x) \\ D(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^n; A(\omega)x \leq b(\omega); x \geq 0\} \\ x \in D(\omega) \end{array} \right.$$

où $(c_1(\omega), ..., c_k(\omega))$ est un vecteur aléatoire de dimension n définie sur l'espace de probabilité (Ω, F, P), $A(\omega)$ et $b(\omega)$ sont $(m \times n)(resp(m \times 1))$ des matrices aléatoires definies sur le même espace de probabilité.

Transformation de PMS

Le problème multiobjective stochastique n'est pas définie mathématiquement puisque la résolution d'un tel problème implique deux genres de transformations notamment la transformation multiobjective et la transformation stochastique et n'oublier pas la transformation de l'ensemble faisable.

Transformation de l'ensemble faisable On transforment généralement $D(\omega)$ à un ensemble déterministe, on parle selon les règles utilisé dans la programmation stochastique.

Quelque contre-parties déterministes généralement utilisé de $D(\omega)$ sont énumérés ci-dessous:

$\bullet D' = \{x \in \mathbb{R}^n; E(A(\omega))x \leq E(b(\omega)); x \geq 0\}$, où E représente la valeur d'espérance mathématique.

$\bullet D'' = \{x \in \mathbb{R}^n; P(A(\omega)x \leq b(\omega)) \geq \alpha; x \geq 0\}$, où α est un niveau de probabilité prédéfinie par le décideur.

$\bullet D''' = \{\alpha_1, ..., \alpha_m\} = \bigcap_{i=1}^{m} D_i(\alpha_i)$, où pour chacun a fixé $i = \{1, 2, ..., m\}$

$D_i(\alpha_i) = \{x \in \mathbb{R}^n; P(A(\omega)x \leq b(\omega)) \geq \alpha_i; x \geq 0\}$, ici les α_i sont les niveau de probabilité fixé a-priori par le décideur et $A_i(\omega)$,$b_i(\omega)$ soyez respectivement la $i^{éme}$ rangée de $A_i(\omega)$ et la $i^{éme}$ composant de $b(\omega)$.

$\bullet D^{iv} = \{x \in \mathbb{R}^n : Q(\omega, x) \prec +\infty$; avec probabilité égale à $1\}$

où

$$Q(\omega,x)=\begin{cases}\quad \inf q(\omega)y \\ y\in\Upsilon \text{ si } \Upsilon\neq\phi \\ +\infty \text{ si } \Upsilon=\phi\end{cases}$$

où $q(\omega)$ est un coût de pénalité, $W(\omega)$ est la matrice de recours, $\Upsilon=\{y\in\mathbb{R}^n : W(\omega)y = b(\omega)-A(\omega)x; y\geq 0\}$

Remarque 3.2.2 *La plupart des transformations stochastiques de contrainte rapportent la non-convexité sur les ensembles faisables déterministes résultants. Ceci exclut l'application des algorithmes convexes puissants existants d'optimisations.*

Proposition 3.2.3 *[1] $D^{"}(0), D^{"}(1), D_i(0), D_i(1)$ pour $i=1,2,...,m$ et D^{iv} sont des ensembles convexes.*

Proposition 3.2.4 *[1] On considère le problème (PLMS) précédent et on suppose que $A(\omega)$ est une matrice fixe avec le rang maximal puis, $D_i(\alpha_i)=\{x\in\mathbb{R}^n; F_i(A_ix)\geq\alpha_i; i=1,...,m\}$ sont convexes pour chaque distribution de probabilité F_i de $b_i(\omega)$.*

Preuve. On trouve la démonstration de deux propositions dans [12]. □

Transformation multiobjective La transformation multiobjectif éliminé dans une première étape l'aspect aléatoire du problème. le objective déterministe obtenu (PMD) est généralement résolu par une méthode interactive comme en Luque et autres. C'est également le cas de la méthode de PROTRADE proposés par Goicoechea où le (PMD) équivalent est obtenu en transformant l'ensemble faisable stochastique à un ensemble faisable déterministe et en considérant les valeurs d'espérance des fonctions objectives. Dans la méthode STRANGE [6] proposée par Tegham et Kunsch.

Les méthodes de transformations multiobjective:

a) Méthode de PROTRADE (Goicoechea) [6]

PROTRADE est inspiré de la méthode de STEM [18]. Goicoechea a proposé de résoudre le problème multiobjective avec les caractéristiques suivantes:

-Les fonctions objectives sont linéaires.

-Les coefficients des fonctions objectives sont normalement distribués.

-L'ensemble des cotraintes sont défini par: $D = \{x : x \in \mathbb{R}^n : A_j(x) \leq 0, j = 1, ..., k\}$ où les fonctions A_j sont différentiables et convexes.

La méthode suppose la connaissance complète de la structure de préférence de décideur et emploie des taux de substitution entre les niveaux des objectifs et les probabilités d'atteindre ces niveaux. PROTRADE prévoit pour fournir une solution de compromis fournie l'information obtenue à partir du décideur en réduisant interactivement l'ensemble de solutions faisables. Sachant quelques informations sur l'utilité de décideur. On peut estimer le ω_i de poids dans l'objectif agregé $\sum_{i=1}^{m} \omega_i E(c_i(\omega, x))$, soit x^1 la solution qui maximise :

$$\left\{ \sum_{i=1}^{m} \omega_i E(c_i(\omega, x)); x \in D \right\}$$

On definie le vecteur: $v^1 = E(c_i(\omega, x^1), 1 - \alpha_i)$ où $P((c_i(\omega, x)) \geq E(c_i(\omega, x^1)) \geq 1 - \alpha_i$

Soit v^1 satisfait DM, puis x^1 est la solution de compromis. Autrement, soit $E(c_u(\omega, x))$ la valeur insatisfait. Le DM doit choisir ε_u et α_u^0 tels que:

$P(c_u(\omega, x) \geq \varepsilon_u) \geq 1 - \alpha_u^0$. L'inégalité précédente est considérée comme nouvelle contrainte, le nouvel ensemble de solutions faisables est défini comme suit:

$D^1 = \{x : x \in \mathbb{R}^n, P(c_u(\omega, x) \geq \varepsilon_u) \geq 1 - \alpha_u^0\}$, puis, la solution x^2 est obtenu en résolvant le programme suivant :

$$\{\sum_{i=1}^{m} \omega_i E(c_i(\omega, x)); x \in D^1\}$$

b) Méthode de Leclerq [6]

Leclerq à transformé le (PMS) en (PMD) en employant la programmation contrainte par chance (chance constrained programming) et programmation à deux étages modèles (recours), les contraintes aléatoires sont écrites comme $\max P(Ax \leq b)$. Les objectifs aléatoires peuvent être transformés sur un des formes suivantes:

(E) : $\max E(cx)$ "moyen"

(v) : $\min v(cx)$ "variance"

(P) : $P(cx \geq s)$ "probabilité", tels que $P(cx \geq s) \geq \alpha$, avec α donné.

(k) : $\max s$ "seuil"

c) Méthode de Sakawa [6]

Sakawa et autres ont proposé une approche de solution pour résoudre le (PMS) (1) en transformant les contraintes d'une manière contrainte par chance qui satisfie les niveaux le $b_j, j = 1, ..., k$ avec substituer la minimisation des fonctions objectives dans (1) à la maximisation de la probabilité que chaque fonction objective est supérieur ou égale à un certain niveau admissible $\overline{c}$. Le programme stochastique (1) est remplaceé par le programme multiobjectives déterministe suivant :

$$\begin{cases} \max p_i(x) = P(c_i(\omega, x) \geq \overline{c}_i); i = 1, ..., m \\ P(A_J x \leq b_j(\omega)) \geq \beta_j; j = 1, ..., k \\ x \in D; x \geq 0 \end{cases}$$

Transformation stochastiques

Introduction

L'approche stochastique, élimine d'abord l'aspect multiobjective du problème en agrégeant le m objectifs et résoudre le problème stochastique d'objectif simple résultant. La plupart transformations directe est l'approche pesée de somme, comme en Caballero, les objectifs aléatoires du problème original sont transformés: $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(c_i(\omega, x))$ le problème obtenue est alors traité par une approche de recours ou une approche contrainte par chance. la transformation précédente est rarement employée dans la littérature car il est difficile de juger la qualité des solutions d'un point de vue de décision. La plupart des approches proposées restantes sont basées sur la programmation par but (Goal programming). Où les modèles de programmation de compromis.

a)L'approche de programmation de but stochastique (Ballestero) [6]

Ballestro a formulé la transformation suivante au problème de programmation pesé stochastique de but :

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{q} \alpha_j R_{Aj}(x) \sigma_j^2 \\ E(g_i(\omega, x)) \geq b_j, j = 1, ..., k \end{cases}$$

Où

·Les buts aléatoires sont notés de $j = 1, ..., q$ et les buts non-aléatoires en tant que

$j = q+1, ..., k.$

$\cdot\alpha_j$ est le poids de préférence pour la $j^{èmé}$ variable de déviation.

$\cdot R_{Aj}(x)$ est le coefficient d'ARA (aversion absolue de risque) pour le $j^{èmé}$ buts.

$\cdot\sigma_j$ est l'écart type du $j^{èmé}$ but.

$\cdot a_j$ est la $j^{èmé}$ cible.

Remarque 3.2.5 *Ballestero a employé, pour son problème, le (SGP) avec une fonction lexicographique d'accomplissement[17], il a prouvé que l'approche proposé peut résoudre déffirentes applications pratiques de (PMS).*

b)L'approche de programmation contraintes par chance stochastique de compromis (Ben Abdelaziz): [6]

Ben Abdelaziz est proposé une technique de programmation contrainte par chance de compromis (CCCP) au (PMS). Il est transformé les contraintes linéaires par l'approche (CCP):

$\sum_{j=1}^{k} \widetilde{a}_{jk} x_k \leq \widetilde{b}_j$ est remplacé par: $P(\widetilde{l}_j \leq 0) \geq \xi_j$ où $\widetilde{l}_j = \sum_{j=1}^{k} \widetilde{a}_{jk} x_k - \widetilde{b}_j$.

Les objectifs aléatoires sont également transformés en utilisant une approche stochastique de compromis assument cela :

$c_i^* = \max_{\omega,x} s_i(\omega)x$ et $\widetilde{h}_i(x) = c_i^* - \sum_k \widetilde{c}_{ik} x_k$.

Les m objectifs sont transformés comme :

$$\left\{ \begin{array}{c} \min \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \\ P(\widetilde{h}_i(x) \leq \varepsilon_i) \geq 1 - \xi_i \end{array} ; où \;\; \varepsilon_i \text{ représentez les seuils} \right\}$$

Dans le cas où des variables aléatoires sont normalement distribuées $\widetilde{l}_j$ et $\widetilde{h}_i$ sont également normalement distribués, l'équivalent final (PMD) est alors exprimé comme suit:

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} (\varepsilon_i + \delta_i^-) + \sum_{k=1}^{q} (\delta_i^-) \\ E(\widetilde{h}_i) + \phi^{-1}(1 - \xi_i)\sigma(\widetilde{h}_i(x)) - \varepsilon_i + \delta_i^- = 0; \forall i = 1, ..., m \\ E(\widetilde{l}_j) + \phi^{-1}(1 - \xi_i)\sigma(\widetilde{l}j) + \delta_j^- = 0; \forall j = 1, ..., k \\ x \in D \end{cases}$$

Où

$\cdot c_i^*$ est la valeur idéale du l'objectif i.

$\cdot \delta_i^-$ est la déviation négative entre la valeur idéale c_i^* et $c_i(\omega, x)$.

$\cdot \xi_i$ sont les valeurs seuils, des contraintes indiquées par le DM.

$\cdot \sigma$ est l'écart type.

$\cdot \phi(y)$ représente la fonction de distribution de probabilité de la distribution normale standard.

Chapitre 4

Solution efficaces pour les programmes multiobjective stochastiques

Introduction :

La formulation des critères pour identifier "de bonne" solution est un souci d'une large catégorie de recherche puisque le problème (1) est dans beaucoup de cas multidimentionnel, il est normale de voir "les solutions non-dominées" en tant que solutions potentiellement bonnes et de chercher ainsi de contre-parties du concept du Pareto-efficacité. Beaucoup de chercheurs ont considère le problème (1) comme problème paramétrique. Ainsi que pour le cas $X(\omega) = x$. Bitran(1980), par exemple, a considéré que les solutions efficaces sont les solutions Pareto-efficace pour tout les réalisations possibles de la matrice c, autre auteurs ont considéré les distributions de probabilité afin de définir les solutions efficaces, pour un problème avec des contraintes déterministes. Loup(1985) a employé la distribution marginale des objectifs comme critère de comparaison.

4.1 Formulation du problème et les concepts efficaces de solution

Considérons le problème multiobjective stochastique suivant:

$$\left\{ \min_{x \in D} \widetilde{z}(x, \widetilde{c}) = (\widetilde{z}(x_1, \widetilde{c}), \widetilde{z}_2(x, \widetilde{c}), ..., \widetilde{z}_q(x, \widetilde{c})) \right\} \qquad \text{(SMP)}$$

Dans ce problème, les fonctions objectives du problème dépendent d'un vecteur des paramètres aléatoires continus $\widetilde{c}$, défini au-dessus d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^S$, Assumons une famille d'évenements F. c-à-d, sous ensembles de E et la distribution P de prbabilité définie sur F,de sorte que pour tout sous-ensemble de E, $A \subset E$, $A \in F$, la probabilité de A, $p(A)$est connu, l'hypothèse sur la distribbution de probabilité P, est independante des variables de décisions du problème $x_1, ..., x_n$. Nous supposons également que l'ensemble faisable du problème $D \subset \mathbb{R}^n$ est convexe et, d'ailleur est déterministe ou a été transformé en son forme déterministe équivalent en utilisant la méthode de contraintes par chance. Comme a été précédement précisé, obtenant les solutions efficaces pour ce problème a été jusqu'ici considéré de deux approches: l'approche multiobjective et l'approche stochastique.

4.1.1 Approche multiobjective

Dans cette approche, les objectifs stochastiques sont transformés en leur équivalents déterministes selon les critères de la programmation stochastique, obtenant un problème multiobjective déterministe equivalent ayant un ensemble de solutions efficaces qui sont considérées efficaces pour le problème original. Nous pouvons définir, de cette idée, le concept suivant de la solution efficace pour le problème (SMP).

Définition 4.1.1 *[13]* ***Solution efficace de valeur d'espérance (White (1982))***

Soit $x \in D$, on dit que x est une solution efficace de valeur d'espérance au prblème (SMP), si c'est Pareto-efficace au problème

$$\left\{ \min_{x \in D} (\overline{z}_1(x), \overline{z}_2(x), ..., \overline{z}_q(x)) \right\} \qquad (E)$$

Où $\overline{z}_k(x)$ est la valeur d'espérance de la variable aléatoire $\widetilde{z}_k(x, \widetilde{c})$, $k \in \{1, ...q\}$ c'est-à-dire, donné le problème (SMP) et nous nous appliquons le critère de valeur d'espérance à chacune des fonctions objectives stochastiques du problème et nous obtenons le problème multiobjective déterministe équivalent (E). Par conséquence, avec ce critère chaque objectif stochastique est substitué par la valeur d'espérance de chaque objectif stochastique.

Maintenant considérons l'application du critère de variance minimum pour transformer le problème multiobjective stochastique en son problème déterministe équivalent.

Dans l'approche multiobjective, l'application de ce critère donne le concept suivant :

Définition 4.1.2 *[13]* ***Solution efficace de variance minimum(White(1982))***

Soit $x \in D$, on dit que x est une solution efficace de variance minimum au prblème de programmtion multiobjective stochastique (SMP), si c'est une solution efficace de Pareto au problème:

$$\left\{ \min_{x \in D} (\sigma_1^2(x), \sigma_2^2(x), ..., \sigma_q^2(x)) \right\} \qquad (V)$$

Où $\sigma_k^2(x)$ est la variance de la $k^{\grave{e}m\acute{e}}$ fonction objective, $k \in \{1, 2, ..., q\}$, soit E_{σ^2} être l'ensemble de solution efficaces au problème (V).

Définition 4.1.3 *[13] **Solution efficace de valeur d'espérance-écart type***

Soit $x \in D$, on dit que x est une solution efficace de valeur d'espérance-écart type au problème de programmation multiobjective stochastique (SMP), si c'est une solution efficace de Pareto au problème:

$$\left\{ \min_{x \in D} (\overline{z}_1(x), \overline{z}_2(x), ..., \overline{z}_q(x), \sigma_1(x), \sigma_2(x), ..., \sigma_q(x)) \right\} \qquad (E\sigma)$$

Ce qui inclut la valeur d'espérance -écart type des fonctions objectives stochastiques du problème. Soit $E_{E\sigma}$ l'ensemble de solutions efficaces par mesure de tendance centrale et une mesure de dispersion de chaque objectif stochastique sont enregistrés, ce critère de la solution des problèmes de la programmation stochastique à été en grande partie employé dans des modèles de portefeuilles dans des sciences économiques de finances afin de résoudre des problèmes de programmation stochastiques correspondant aux modèles. Nous traiterons maintenant l'application de la probabilité maximum, le risque minimum et les critères de Kataoka-aux problèmes de programmation multiobjective stochastiques. Etant donné le problème (SMP), nous pouvons appliquer le critère minimum de risque à chaque objective stochastique séparément. Dans ce cas-ci le décideur(DM) doit fixé a-priori un niveau d'aspiration u_k pour chaque fonction objective stochastique et trouver le vecteur x, dans lequel la probabilité de la $k^{ème}$ fonction objectif n'a pas être plus grand que le niveau maximum d'aspiration fixé: $P(\widetilde{z}_k(x, \widetilde{c}) \leq u_k)$. L'application séparé de ce critère a chaque fonction objective stochastique dans le problème (SMP) nous mènent à la définition suivante de l'efficacité:

Définition 4.1.4 *[13]* ***Solution efficace de risque minimum pour des niveau*** $u_1, ..., u_q$ ***(Stancu-Minasian et Tigan(1984))***

Soit $x \in D$, on dit que x est une solution vectoriel de risque minimum pour des niveaux $u_1, ..., u_q$, si c'est une solution efficace de Pareto au problème:

$$\left\{ \max_{x \in D} (P(\widetilde{z}_1(x, \widetilde{c}) \leq u_1, ..., P(\widetilde{z}_q(x, \widetilde{c}) \leq u_q)) \right\} \qquad (MR(\boldsymbol{u}))$$

Où $E_{MR}(u)$ note l'ensemble de solutions efficaces au problème $(MR(\mathbf{u}))$

Le deuxième critère de la probabilité maximum est le critère de Kataoka, dans ce cas on fixe une probabilité β_k pour la fonction objective stochastique , et voir plus petit valeur u_k où on peut affirmer qu'une probabilité fixé. L'application de cette critère à chaque fonction objective stochastique du problème (SMP), donne le concept d'efficacité suivant:

Définition 4.1.5 ***[13] Solution efficace avec les probabilités $\beta_1, ..., \beta_q$ ou solution de $\boldsymbol{\beta}-$ efficace:***

Soit $x \in D$; x est une solution efficace des probabilités $\beta_1, ..., \beta_q$, s' il existe $u \in \mathbb{R}^q$ tel que $(x^t, u^t)^t$ est une solution efficace au problème:

$$\left\{ \begin{array}{c} \min_{x,u}(u_1, ..., u_q) \\ P(\widetilde{z}_k(x, \widetilde{c}) \leq u_k) \geq \beta_k ; k = 1, ..., q \\ x \in D \end{array} \right\} \qquad k(\beta)$$

L'ensemble de solutions efficaces avec les probabilités $\beta_1, ..., \beta_q$, pour le problème (SMP) est noté par $E_k(\beta) \subset \mathbb{R}^n$.

Théorème 4.1.6 ***(Caballero, Cerda, Muñoz et Ray(2000))***

Supposons que la fonction de distribution de la variable aléatoire $\widetilde{z}_k(x, \widetilde{c})$ est continu et strictement augmentant. Puis, x est une solution efficace au problème $(MR(\mathbf{u}))$, si et seulement si $(x^t, u^t)^t$ est une solution efficace au problème $(K(\boldsymbol{\beta}))$ avec $\mathbf{u}$ et $\boldsymbol{\beta}$ tels que:

$$\{P(\widetilde{z}_k(x,\widetilde{c}) \leq u_k) = \beta_k; \forall k \in \{1, ..., q\}\}$$

Corollaire 4.1.7 ***(Caballero, Cerda, Mu*$\widetilde{n}oz$ *et Ray(2000))***

$$\begin{aligned}\bigcup_{u\in\mathbb{R}^q} E_{MR}(\mathbf{u}) &= \bigcup_{\beta\in B} E_k(\boldsymbol{\beta}) \\ avec \quad B &= \{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^q / \beta_k \in (0,1), k = 1, 2, ..., q\}\end{aligned}$$

4.1.2 Approche stochastique

Considérons encore le problème (SMP). Afin d'obtenir les solutions efficaces à ce problème il est également possible d'appliquer d'abord une des techniques pour obtenir les solutions efficaces utilisées dans la programmation multiobjectives qui mène, en général à résoudre un problème de programmation stochastique avec une fonction objective qui doit être résolue aprés, Parmi les méthodes existantes dans la programmation multiobjective déterministe, un des plus importante afin d'obtenir les solutions efficaces est la méthode pesante. Dans cette méthode, un poids non-négatif est assigné à chacune des fonctions objectives du problème, le but est de réduite au minimum la somme des fonctions objectives du problème (SMP). soit $\mu = (\mu_1, ..., \mu_k)^t$ le vecteur de poids, $\mu_k \in \mathbb{R}^+$, le problème lié au problème (SMP) par la méthode pesante est le problème de programmation stochastique suivant:

$$\left\{\min_{x\in D} \widetilde{f}(x,\widetilde{c}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \widetilde{z}(x,\widetilde{c})\right\} \qquad \text{(S)}$$

Afin de le résoudre, nous pouvons appliquer un des critères existants dans la programmation stochastique, par exemple, la valeur d'espérance, la variance minimum et le risque minimum, ou le critère de Kataoka. L'application de ces critères au problème (S) implique quatre problème déterministe équivalents différents dont les solutions optimales sont les solutions efficaces au problème(SMP). Dans ce cas on pose la question suivante, est-ce-que une solution efficace selon une approche peut être efficace selon d'autre approche?

Considérons le problème multiobjective déterministe suivant:

$$\left\{ \min_{x \in D} (z_1(x), ..., z_q(x)) \right\} \qquad (\mathrm{P})$$

Le problème associe au problème (P) par la méthode pesante est :

$$\left\{ \min_{x \in D} \sum_{k=1}^{q} \mu_k z_k(x) \right\} \qquad (\mathrm{P}(\boldsymbol{\mu}))$$

Où $\boldsymbol{\mu}$=$(\mu_1, ..., \mu_q)^t$ est la valeur de poids, $\mu_k \in \mathbb{R}^+$.

Le théorème suivant établit le rapport entre la solution du problème (P($\boldsymbol{\mu}$)) et les solutions efficaces du problème (P).

Théorème 4.1.8 *[13]* ***(Sawaragi, Nakayama et Tanino(1985))***

a) Supposons que les fonctions $z_1, ..., z_q$ sont convexes et D est un ensemble convexe, si x^*est une solution correctement efficace pour le problème (P), existe là $\mu_1, ..., \mu_q > 0$, pour chaque $k \in \{1, ..., q\}$, tel que x^* est la solution au problème (P($\boldsymbol{\mu}$)).

b) Si x^* est une solution au problème (P($\boldsymbol{\mu}$)) avec $\boldsymbol{\mu} > \mathbf{0}$, puis, x^* est une solution correctement efficace au problème (P).

c) Si x^* est la solution unique au problème (P($\boldsymbol{\mu}$)) avec $\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$, puis, x^* est une solution efficace au problème (P). Si ce n'est pas le seul, les solutions obtenues pour (P) sont faiblement *efficaces.*

Apartir de ce théorème, si la convexité de l'ensemble faisable et des fonctions objectives est vérifiée, l'ensemble des solutions correctement efficaces au problème (P) peut être obtenu en résolvant simplement le problème (P($\boldsymbol{\mu}$)) pour toutes les valeurs possibles du vecteur $\boldsymbol{\mu}$ avec les composants strictement positifs, Sinon, quelques solutions efficaces au problème (P) ne pourrait pas être obtenue par cette méthode. En autre, du point (c) de ce théorème, si nous prenons des vecteur de poids avec quelques composants nuls-qui signifie que la fonction objective lié à ce composant ne sera pas pris en considération quand résolvant le problème (P($\boldsymbol{\mu}$)) nous pouvons affirmer que la solution obtenue est efficace seulement si c'est la seule solution à (P($\boldsymbol{\mu}$)).

4.1.3 Approche stochastique et approche multiobjective

Afin de répondre au question indiquée au sujet des rapports entre les solutions d'un problème multiobjective stochastique nous résolvons le problème pesé (S) au moyen des critères suivants: valeur d'espérance, variance minimum, risque minimum et Kataoka, dans chaque cas, nous comparerons les solutions efficaces obtenues en utilisant l'approche stochastique à certains des concepts de solutions efficaces défini dans la section précédente correspondance à l'approche multiobjective.

Critère de valeur d'espérance :

Soit le problème (S) et considérons le critère de valeur d'espérance afin de résoudre. Alors nous obtenons le problème déterministe équivalent suivant:

$$\left\{ \min_{x \in D} \overline{f}(x) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \overline{z}_k(x) \right\} \qquad \text{(SE)}$$

Où $\overline{f}(x)$ noté la valeur d'espérance de la variable aléatoire $\widetilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \widetilde{z}_k(x)$.

Ainsi, si nous appliquons le critère de valeur d'espérance au problème (S), le problème résultant réduit au minimum une combinaison linéaire de la valeur d'espérance des fonctions objectives stochastiques du problème original et les coefficients d'une combinaison si linéaire ne sont pas plus que les poids assignés aux objectifs stochastiques dans la première étape de la résolution de problème. En d'autre terme, le problème obtenu est identique au problème multiobjective stochastique original, transformant le problème en son problème déterministe équivalent en appliquent le critère de valeur d'espérance à chacune des fonctions objectives stochastiques de (SMP) et alors appliquent la méthode pesante afin d'obtenir les solutions efficaces de valeur d'espérance.

Par conséquent, soit μ_k,$k \in \{1, ..., q\}$, des poids non négatif, pour chaque vecteur, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^q$, le rapport entre le problème (E) et le problème (SE) est identique que le rapport entre n'importe quel problème multiobjective et son problème pesé associe,exprimé en théorème 3.1.8.

Critère de variance minimum :

Maintenant considérons l'application du critère de variance minimum au problème pesé. Donné cela la variable aléatoire $\widetilde{f}(x, \widetilde{c}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \widetilde{z}_k(x, \widetilde{c})$ est une fonction linéaire des variables aléatoires $\widetilde{z}_1(x, \widetilde{c}), \widetilde{z}_2(x, \widetilde{c}), ..., \widetilde{z}_q(x, \widetilde{c})$, son variance depend de variances de ces varaibles aléatoires et leurs covariances (voir, par exemple [Hogg et Craig(1989) p177]). Ainsi nous avons:

$$\left\{\sigma^2(x) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \sigma_k^2 + 2 \sum_{\substack{k,s=1 \\ k<s}}^{q} \mu_k \mu_s \sigma_{ks}(x)\right\}$$

Où $\sigma_{ks}(x)$ noté la covariance des varaibles aléatoires $\widetilde{z}_k(x, \widetilde{c})$ et $\widetilde{z}_s(x, \widetilde{c})$

$$\sigma_{ks}(x) = E\{(\widetilde{z}_k(x, \widetilde{c}) - \overline{z}_k(x))(\widetilde{z}_s(x, \widetilde{c}) - \overline{z}_s(x))\}$$

Par conséquent, la variance de la fonction $\widetilde{f}(x, \widetilde{c}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \widetilde{z}_k(x, \widetilde{c})$ depend non seulement des variances des fonctions $\widetilde{z}_1(x, \widetilde{c}), \widetilde{z}_2(x, \widetilde{c}), ..., \widetilde{z}_q(x, \widetilde{c})$, mais également sur leur covariance. Ainsi, si nous appliquons le critère de variance minimum pour résoudre le problème (S) nous obtenons le problème:

$$\left\{\min_{x \in D} \sigma^2(x) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \sigma_k^2 + 2 \sum_{\substack{k,s=1 \\ k<s}}^{q} \mu_k \mu_s \sigma_{ks}(x)\right\} \qquad \text{(SV)}$$

Nous pouvons voir que les rapports entre un problème pesé et le problème multiobjective déterministe équivalent ne sont pas aussi dirigeons comme dans le cas précédent. Afin d'établir ces rapports que nous distinguons entre tous le cas des covariances des fonctions objectives stochastique qui sont zéro et le cas de certains d'entre eux n'etant pas zéro. Si les covariances des fonctions objectives sont zéro, c-à-d, s'il accomplit ce qui suit:

$\sigma_{ks} = 0$ pour chaque $k, s \in \{1, 2, ..., q\}$ avec $k \neq s$ et pour chaque $x \in D$, puis le problème (SV), résultant si on appliquer le critère de variance minimum au problème pesé (S) est :

$$\left\{\min_{x \in D} \sigma^2(x) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \sigma_k^2(x)\right\}$$

c-à-d, le problème obtenu est identique à celui que nous aurions obtenu si on résoudre le problème de programmation multiobjective stochastique en utilisant l'approche multiobjective c-à-d, appliquant le critère de variance minimum à chaque fonction objective stochastique et puis, la méthode pesée au problème multiobjective déterministe équivalent, les deux problèmes sont reliés comme montrés par théorème 3.1.6.

La deuxième situation à traiter est le cas des covariances de quelques fonctions objectives stochastiques sont non nulle. Dans ce cas-ci pour chaque vecteur $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{q+}$, la solution optimale au problème (SV) ne doit pas être nécessairement variance minimum efficace, comme montré précédement, où un problème linéaire bi-objectif stochastique linéaire est formulé avec les fonctions objectives stochastiques dont la covariance n'est pas zéro. Dans cet exemple, nous voyons si nous nous appliquons le critère de variance minimum au problème pesé (S), la solution obtenue n'est pas nécessairement variance minimum efficace. La seule manière d'assurer l'efficacité est si les covaraince des fonctions objectives sont zéro. Comme nous savons, la covariance de deux varaibles mesure la dépendance entre elles, dans ce sens, nous savons que si deux varaibles aléatoires sont independantes, leur covariance est zéro. Cependant, et d'une manière générale, l'opposé n'est pas nécessairement vrai. En d'autres termes, le fait que la covariance nulle pas nécessaire signifie que les varaibles aléatoires sont independantes. Par conséquent, l'application du critère de varaince au problème pesé reflète dans une certaine mesure la dépendance entre les fonctions objectives stochastiques.

Critère maximum de probabilité :

Maintenant considérons l'application des critères maximum de probabilité (risque minimum de Kataoka) au problème pesé:

$$\left\{ \min_{x \in D} \widetilde{f}(x, \widetilde{c}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \widetilde{z}_k(x, \widetilde{c}) \right\} \qquad \text{(S)}$$

Afin de s'appliquer le critère minimum de risque à ce problème, nous devons fixer une valeur u (niveau d'aspération de la fonction objective de problème) et maximiser la probabilité de la variable aléatoire $\widetilde{f}(x, \widetilde{c}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \widetilde{z}_k(x, \widetilde{c})$ ne pas dépasser une telle valeur, le problème déterministe équivalent produit est:

$$\left\{ \max_{x \in D} P\{\sum_{k=1}^{q} \mu_k \widetilde{z}_k(x, \widetilde{c}) \leq u\} \right\}$$

Soit $\widetilde{f}(x, \widetilde{c}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \widetilde{z}_k(x, \widetilde{c})$ une fonction de q fonctions objectives. Notant que le niveau u doit être fixe pour la variable aléatoire $\widetilde{f}(x, \widetilde{c}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \widetilde{z}_k(x, \widetilde{c})$, où cette variable n'est pas un objectif du prblème de programmation multiobjective stochastique initiale, mais a été considéré intermidiare de le résoudre. Par conséquent, la valeur u, qui dans la programmation stochastique est le niveau d'aspération a fixé par le DM pour l'objectif stochastique, n'a plus cette signification. Ceci pourait mener à penser que le critère minimum de risque n'est pas applicable au problème pesé. Cependant, nous pouvons décider de déterminer la valeur u d'un niveau d'aspération pour chacune objectif. En ce cas, le DM doit déterminer un niveau d'aspiration, u_k, pour chaque fonction objective, et niveau u est calculé comme addition des niveaux fixé par décideur, pesant chaque niveau avec le poids assigné à l'objectif correspondant. C'est-à-dire, $u = \sum_{k=1}^{q} \mu_k u_k = \boldsymbol{\mu}^t \mathbf{u}$, où u est fixé. Le problème déterministe équivalent est comme suit:

$$\left\{ \max_{x \in D} P(\sum_{k=1}^{q} \mu_k \widetilde{z}_k(x, \widetilde{c}) \leq \sum_{k=1}^{q} \mu_k u_k \right\} \qquad (\text{SMR}(\mathbf{u}))$$

D'autre part, si nous nous appliquons le critère de Kataoka au problème pesé le problème déterministe équivalent est comme suit:

$$\left\{\begin{array}{c} \min_{x,u} u \\ P(\sum_{k=1}^{q} \mu_k \widetilde{z}_k(x, \widetilde{c}) \leq u) = \beta \\ x \in D \end{array}\right\} \qquad (\mathrm{SK}(\boldsymbol{\beta}))$$

Où β est la probabilité fixée pour le problème. La résolution de ce problème détermine le niveau le plus bas de u que la fonction objective du problème pesé avec la probabilité β peut atteindre. L'application de ce critère sur le problème pesé (S) implique la nécessite de fixer une probabilité pour la variable aléatoire $\widetilde{f}(x, \widetilde{c}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \widetilde{z}_k(x, \widetilde{c})$, et cette fonction est construite des objectifs stochastiques du problème initiale, en général, on a différents caractéristiques, Comme dans le critère minimum de risque, afin de fixer la probabilité $\beta \in (0, 1)$ pour le problème (SK(β)) nous pouvons considérer la possibilité de demender le DM pour fixer une probabilité pour chacun des objectifs stochastiques $\beta_k \in (0, 1)$ et supposons que le vecteur de poids $\boldsymbol{\mu}$ a une norme égale a 1 (dans n'importe quel autre cas, les poids devraient être normalisés), nous fixons la probabilité β pour le problème (SK(β)) comme suit :

$$\left\{\beta = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \beta_k\right\}$$

Maintenant nous établi une manière possible de fixer les niveaux d'aspération et les probabilités dans les deux critères de la probabilité maximum, afin d'enoncer les rapports possibles entre les ensembles efficaces qui sont obtenus en deux approches, nous le considérons commode pour indiquer que les problèmes déterministes équivalents obtenus (SMR($\mathbf{u}$)) et (SMR(β)) sont, dans certaines conditions réciproques, selon le théorème 3.1.6, pour $k = 1$, en prenant les solutions optimales au lieu des solutions efficaces, nous pouvons affirmer cela si la fonction de distribution pour la variable aléatoire $\widetilde{f}(x,\widetilde{c}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \widetilde{z}_k(x,\widetilde{c})$, est continue est strictement croissante, on vérifie cela:

- Si x^* est la solution au problème (SMR($\mathbf{u}$)) pour un niveau d'aspération u, puis $(x^{*t}, u)^t$ est la solution au problème (SK($\boldsymbol{\beta}$)) pour un niveau de probabilité $\beta = P\{\widetilde{f}(x^*,\widetilde{c}) \leq u\}$.

- Si $(x^{*t}, u)^t$ est la solution au problème (SK($\boldsymbol{\beta}$)) pour une probabilité β, puis x^* est la solution au problème (SMR($\mathbf{u}$)) pour un niveau d'aspération u tels que : $\beta = P\{\widetilde{f}(x^*,\widetilde{c}) \leq u\}$.

La réciprocité entre les deux critères de la probabilité maximum nous permet d'affecter une etude de rapport entre les problèmes correspondant aux deux approches différentes, en considérant seulement un des critères (le risque minimum ou le critère de Kataoka) et à affirmez que les même rapports seront vérifiés pour assurer l'autre. Dorénavant, l'analyse des rapports entre les solutions efficaces dans les approches multiobjective et stochastiques par les critères de la probabilité maximum sera faite exclusivement pour l'efficacité dans la probabilité. D'autre part, il doit préciser que dans les deux critères maximum de probabilité soit impliqué la fonction de distribution des variables aléatoires $\widetilde{z}_1(x,\widetilde{c}), \widetilde{z}_2(x,\widetilde{c}), ..., \widetilde{z}_q(x,\widetilde{c})$ et $\widetilde{f}(x,\widetilde{c}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \widetilde{z}_k(x,\widetilde{c})$. La détermination de ces fonctions de distribution n'est pas une issue facile, parce qu'elles dépendent non seulement de la distribution de probabilité du $\widetilde{c}$, mais également sur le vecteur des variables de décision x du problème. Ceci mène à la nécessité d'établir des hypothèses additionnelles concernant la structure du problème et la distribution de ses paramètres aléatoires. Nous nous concentrerons sur des fonctions objectives linéaires sous hypothèse simple d'aspect aléatoire, et de la normalité de vecteur des paramètres aléatoires $\widetilde{c}$, aprés, nous analysons les deux cas pour vérifier qu'il y a de réciprocité entre les deux critères de la probabilité maximum dans les deux cas.

Le cas simlpe linéaire de randomisation : Supposons que pour chaque $k \in \{1, 2, ..., q\}$ la fonction objective, $\widetilde{z}_k(x, \widetilde{c})$ est linéaire: $\widetilde{z}_k(x, \widetilde{c}) = \widetilde{c}_k^t x$ et que toutes les fonctions objectives stochastiques dependent de la même variable aléatoire $\widetilde{t}$, de sorte que $\widetilde{c}_k = c_k^1 + \widetilde{t} c_k^2$. Egalement supposons que la variable aléatoire $\widetilde{t}$ est continu, sa valeur d'espérance $\overline{t}$ et variance fini v_t^2 et sa fonction de distribution F_t, est structement augmentant. Nous assumons finalement cela pour chaque $x \in D$ et pour chaque $k \in \{1, ..., q\}$, $c_k^{2^t} x > 0$. Si ces hypothèses sont vérifiée, l'ensemble de solutions efficaces avec les probabilités $\beta_1, ..., \beta_q$ pour le problème multiobjective stochastique initiale est identique au problème multiobjective suivant:

$$\left\{ \min_{x \in D} (c_1^{1t} x + F_t^{-1}(\beta_1) c_1^{2t} x, ..., c_q^{1t} x + F_t^{-1}(\beta_q) c_q^{2t} x \right\}$$

Si la probabilité fixée pour chacun des objectifs est la même et l'égale à la probabilité fixé pour le problème pesé, $\beta_1 = ... = \beta_q = \beta$, alors l'ensemble de solutions efficaces avec la probabilité β pour le problème de programmation multiobjective stochastique est le même que pour le problème suivant:

$$\left\{ \min_{x \in D} (c_1^{1t} x + F_t^{-1}(\beta_1) c_1^{2t} x, ..., c_q^{1t} x + F_t^{-1}(\beta_q) c_q^{2t} x \right\} \qquad (1)$$

D'autre part, avec l'approche stochastique nous avons:

$$P(\widetilde{f}(x, \widetilde{c}) \leq u) = P(\sum_{k=1}^{q} \mu_k c_k^{1t} x + \widetilde{t} \sum_{k=1}^{q} \mu_k c_k^{2t} x \leq u) = F_t \left[\frac{u - \sum_{k=1}^{q} \mu_k c_k^{1t} x}{\sum_{k=1}^{q} \mu_k c_k^{2t} x} \right] = \beta$$

Ce qui implique cela:

$$u = \sum_{k=1}^{q} \mu_k c_k^{1t} x + F_t^{-1}(\beta) \sum_{k=1}^{q} \mu_k c_k^{2t} x$$

Ainsi, le problème résultant, si on appliquer le critère de Kataoka au problème pesé avec la probabilité β est:

$$\left\{ \min_{x \in D} \sum_{k=1}^{q} \mu_k c_k^{1t} x + F_t^{-1}(\beta) \sum_{k=1}^{q} \mu_k c_k^{2t} x \right\} \qquad (2)$$

une fois le problème pour les deux critères sont décrits, nous pouvons passer et analyser le rapport existant entre la solution optimale pour le problème (2) et l'ensemble de solution efficaces avec des probabilité $\beta_1, ..., \beta_q$. De ce point en avant, si nous comparons des problème (1) et (2), nous notons que si nous appliquons la méthode pesante pour obtenir les solutions efficaces pour le problème (1), nous obtenons le problème (2). En d'autre terme, dans ce cas-si nous pesons le problème de programmation multiobjective stochastique et nous appliquons le critère de Kataoka à lui pour une probabilité β, le problème à résoudre est identique comme si nous appliquons le critère de Kataoka à chacun fixer objectif-séparément, fixer la même probabilité pour tous les objectifs stochastique-et appliquons la méthode pesante pour obtenir les solutions efficaces pour ce problème. Par conséquent, les rapports entre ces deux problèmes sont les même que pour n'importe quel problème multiobjective linéaire et son problème pesé associé, comme décrit dans le théorème 3.1.8.

En autre, donné la réciprocité entre les deux critères maximum de probabilité, des rapports sont également vérifiés pour le problème (SMR($\mathbf{u}$)) résultant de s'appliquer le critère minimum de risque au problème pesé et pour assurer l'ensemble de risque minimum de niveau d'aspération $u_1, .., u_q$ pour le problème de programmation multiobjective stochastique. Explorons ce qui se produit dans le cas de la distribution normale.

Objectifs linéaire avec la distribution normale : Supposons que pour chaque $k \in \{1, ..., q\}$ la fonction objective $\widetilde{z}(x, \widetilde{c})$ est linéaire $\widetilde{z}(x, \widetilde{c}) = \widetilde{c}_k^t x$.

Soit $\widetilde{c} = (\widetilde{c}_1^t, \widetilde{c}_2^t, .., \widetilde{c}_q^t)^t = (\widetilde{c}_{11}, \widetilde{c}_{12}, .., \widetilde{c}_{1n}, \widetilde{c}_{21}, \widetilde{c}_{22}, .., \widetilde{c}_{2n}, \widetilde{c}_{q1}, \widetilde{c}_{q2}, ..., \widetilde{c}_{qn})^t$

Egalement supposons que $\widetilde{c}$ est un vecteur aléatoire multinormale avec valeur d'espérance

$\overline{c} = (\overline{c}_1^t, \overline{c}_2^t, ..., \overline{c}_q^t)^t = (\overline{c}_{11}, \overline{c}_{12}, .., \overline{c}_{1n}, \overline{c}_{21}, \overline{c}_{22}, .., \overline{c}_{2n}, .., \overline{c}_{q1}, \overline{c}_{q2}, .., \overline{c}_{qn})^t$

Et la matrice définie positive V de covariance:

$$V = \begin{pmatrix} & V_1 V_{12} ... V_{1s} ... V_{1q} & \\ & V_{21} V_2 ... V_{2s} ... V_{2q} & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & V_{k1} V_{k2} ... V_{ks} ... V_{kq} & \\ & V_{q1} V_{q2} ... V_{qs} ... V_q & \end{pmatrix}$$

Assumons également cela $0 \notin D$.

Si ces hypothèses sont vérifiées, la probabilité de variable aléatoire $\widetilde{f}(x, \widetilde{c}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \widetilde{c}_k^t x$ être moins ou égale à u est:

$$P(\sum_{k=1}^{q} \mu_k \widetilde{c}_k^t x \leq u) = \Phi \left[\frac{u - \sum_{k=1}^{q} \mu_k \overline{c}_k^t x}{\sqrt{\sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 x^t V_k x + 2 \sum_{\substack{k,s=1 \\ k<s}}^{q} \mu_k \mu_s x^t V_{ks} x}} \right] = \beta$$

Où Φ est la fonction de distribution de la distribution normale standard, puis :

$$u = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \overline{c}_k^t x + \Phi^{-1}(\beta) \sqrt{\sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 x^t V_k x + 2 \sum_{\substack{k,s=1 \\ k<s}}^{q} \mu_k \mu_s x^t V_{ks} x}$$

et, la solution au problème pesé (S), en utilisant le critère de Kataoka est donnée par la solution au problème:

$$\left\{ \min_{x \in D} \sum_{k=1}^{q} \mu_k \overline{c}_k^t x + \Phi^{-1}(\beta) \sqrt{\sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 x^t V_k x + 2 \sum_{\substack{k,s=1 \\ k<s}}^{q} \mu_k \mu_s x^t V_{ks} x} \right\} \tag{3}$$

Etant donné que la fonction de distribution normale est strictement augmentante et continue, il y a toujour de réciprocité entre les solutions optimales pour le problème obtenu si on appliquent le critère minimum de risque au problème pesé et pour le problème (3) obtenu par l'application de critère de Kataoka.

Notez que le problème (3) peut également être exprimé comme:

$$\left\{ \min_{x \in D} \sum_{k=1}^{q} \mu_k \overline{z}_k(x) + \alpha \sigma(x) \right\} \tag{4}$$

Avec $\overline{z}_k(x) = \overline{c}_k^t x$, $\sigma(x) = \sqrt{\sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 x^t V_k x + 2 \sum_{\substack{k,s=1 \\ k<s}}^{q} \mu_k \mu_s x^t V_{ks} x}$ et $\alpha = \Phi^{-1}(\beta)$.

Une fois que le problème (4) a été exprimé, nous considérons encore l'existence possible d'un rapport entre ses solutions optimales et certains des concepts de la solution efficace pour des problèmes de programmation multiobjective stochastiques. Nous rapportons la solution optimale pour le problème (4) à la solution efficace de valeur d'espérance-écart type. La proposition suivante relie la solution optimale pour le problème (4) obtenue par résoudre le problème pesé en utilisant le critère de Kataoka, avec l'ensemble $E_{E\sigma}$.

Proposition 4.1.9 *[13] Considérons le problème (4) et (Eσ). Assumons cela $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{0q^+}$, $\alpha > 0$ et cela on le vérifie $\sigma_{ks}(x) = 0$, pour chaque $k, s \in \{1, ..., q\}$ avec $k \neq s$ et pour chaque $x \in D$, puis, si x^* est la solution optimale pour (4) il est également la solution efficace pour (Eσ).*

Preuve. (La démonstration est faite par l'absurde)

Soit $x^* \in D$ soit la solution optimale pour (4) et nous supposons que ce n'est pas efficace pour $(E\sigma)$. Dans ce cas, il y a une solution $x^{'}$ qui domine x, et ainsi, pour chaque $k \in \{1, .., q\}$.

$$\overline{z}_k(x^{'}) \leq \overline{z}_k(x^*) \text{ et } \sigma_k(x^{'}) \leq \sigma_k(x^*)$$

et il y a au moins un $s \in \{1, .., q\}$ pour lequel l'inégalité est strict, qui est:

$$\overline{z}_s(x^{'}) < \overline{z}_s(x^*) \text{ et } \sigma_s(x^{'}) < \sigma_s(x^*)$$

Donné ce $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{0q^+}$, pour chaque $k \in \{1, .., q\}$ on le vérifie cela:

$$\mu_k \overline{z}_k(x^{'}) \leq \mu_k \overline{z}_k(x^*) \qquad (5)$$

$$\mu_k \sigma_k(x^{'}) \leq \mu_k \sigma_k(x^*) \qquad (6)$$

et il y a au moins un $s \in \{1, .., q\}$ pour lequel:

$$\mu_s \overline{z}_s(x^{'}) < \mu_s \overline{z}_s(x^*) \text{ ou } \mu_s \sigma_s(x^{'}) < \mu_s \sigma_s(x^*)$$

Etant donné que la variance est toujour non-négatif, si nous soulvons les deux cotés de l'inégalité (6) à la puissance de 2 nous obtenons:

$$\mu_k^2 \sigma_k^2(x^{'}) \leq \mu_k^2 \sigma_k^2(x^*) \qquad (7)$$

S'ajouter vers le haut de (5) et de (7) dans k nous obtenons:

$$\sum_{k=1}^{q} \mu_k \overline{z}_k(x^{'}) \leq \sum_{k=1}^{q} \mu_k \overline{z}_k(x^*) \qquad (8)$$

$$\sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \sigma_k^2(x^{'}) \leq \sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \sigma_k^2(x^*) \qquad (9)$$

De (9) nous déduisons cela:

$$\alpha \sqrt{\sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \sigma_k^2(x^{'})} \leq \alpha \sqrt{\sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \sigma_k^2(x^*)} \qquad (10)$$

et l'un des inégalités, (8) ou (10) est strict.

A partir des expressions ci-dessus nous obtenons:

$$\sum_{k=1}^{q} \mu_k \overline{z}_k(x^{'}) + \alpha \sqrt{\sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \sigma_k^2(x')} < \sum_{k=1}^{q} \mu_k \overline{z}_k(x^*) + \alpha \sqrt{\sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \sigma_k^2(x^*)}$$

Et c'est contraire à x^* étant la solution optimale pour (4). $\square$

Par conséquent, cette proposition affirme que si les covariances des fonctions objectives stochastiques du problème sont zéro, la solution optimale obtenue par l'appliquation de critère de Kataoka sur le problème pesé, avec les poids strictement positifs, est une solution efficace de valeur d'espérance-écart type pour le problème multiobjective stochastique. Si la valeur du paramètre α est strictement positif. Etant donné que $\alpha = \Phi^{-1}(\beta)$, si la probabilité fixe β est plus grand que 0.5, puis $\alpha > 0$. Dans aucun autre cas, la solution optimale au problème (4) ne doit pas n'être la valeur d'espérance-écart type comme montré dans l'exemple ci-dessous.

En conclusion, étant donné que dans ce cas-ci il y a également de réciprocité entre le solution optimale pour le problème (4) et pour le problème obtenue si on appliquons le critère de risque minimum au problème pesé, les resultats obtenus pour le critère de Kataoka pouvent être extrapolés au critère de risque minimum.

4.2 Application numérique

Considérons le problème de programmation bi-objectif stochastique suivant:

$$\left\{ \begin{array}{c} \min_x(\widetilde{c}_{11}x_1 + \widetilde{c}_{12}x_2, \widetilde{c}_{21}x_1 + \widetilde{c}_{22}x_2) \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Avec $\widetilde{c} = (\widetilde{c}_{11}, \widetilde{c}_{12}, \widetilde{c}_{21}, \widetilde{c}_{22})^t$ étant donné un vecteur du variables aléatoires multinormal avec la valeur d'espérance $\overline{c} = (0.5, 1, 1, 2.5)^t$ et avec la matrice définie positive de covariance:

$$V = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 25 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Afin d'illustrer certains des résultats obtenus en ce travail, nous allons résoudre ce problème en certains des critères précédement considérés. Avant la continuation, il convient noter qu'étant donné que l'ensemble faisable pour ce problème est un ensemble non vide, fermé et lie (voir le figure 3) et, étant donné que les fonctions objectives pour les problèmes déterministes équivalents nous obtiendront sommes continus dans cet ensemble faisable, nous pouvons affirmer l'existence des solutions optimales ou efficaces (selon le cas) pour elles:

Nous appliquons maintenant le critère de variance minimum, le valeur d'espérance-écart type et les critères de Kataoka.

a) Critère de variance minimum:

L'ensemble des solutions efficaces de variance minimum est le même que pour le problème:

$$\left\{\begin{array}{c} \min_x 25x_1^2 + 25x_2^2, x_1^2 + 9x_2^2 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \quad (11)$$

L'ensemble faisable est le segment qui joint le point A, avec les coordonnées $(0.8, 1.6)$, au point B, avec les coordonnées $(2.769231, 0.6153846)$, sur le figure 3:

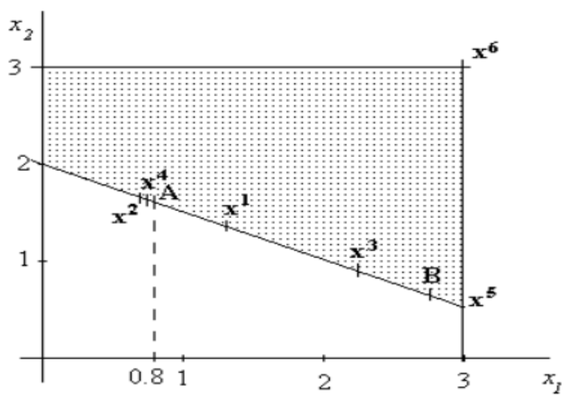

Fig 3-Représentation de la surface réalisable et les positions des solutions

D'autre part, si nous résolvons le problème précédent en employant l'approche stochastique, pesant les objectifs stochastiques avec des poids μ_1, μ_2 et alors appliquent le critère minimum de variance, nous obtenons le problème:

$$\left\{\begin{array}{c} \min_x \mu_1^2(25x_1^2 + 25x_2^2) + \mu_2^2(x_1^2 + 9x_2^2) + 2\mu_1\mu_2(6x_1x_2) \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \quad (12)$$

Si les poids suivants $\mu_1 = 0.3; \mu_2 = 0.7$, sont employés dans ce problème

$$\left\{ \begin{array}{c} \min 2.74x_1^2 + 6.66x_2^2 + 2.52x_1x_2 \\ \\ x_1 + 2x_2 = 4 \\ \\ avec\ x_1, x_2 \leq 3 \\ \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

On donne un rappel sur le théorème suivant

Théorème 4.2.1 ***(Condition nécessaire de 1^{ière} ordre)*** *Soit $x^* \in v$,un point régulier, si x^* est un minimum local de f sur v alors, $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tq:$\bigtriangledown f(x^*) + g'(x^*) = 0$. ou bien $\bigtriangledown f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_i) = 0$.*

Remarque 4.2.2 *On va introduit le Lagrangien definie par:*

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^t g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x).$$

On appelle λ_i le multiplicateur de Lagrange.

Alors la condition necessaire de 1^{éré} ordre s'écrit comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_x(x, \lambda) = 0 \\ \\ L_\lambda(x, \lambda) = 0 \quad ,(g(x) = 0) \end{array} \right\}$$

Donc on résoudre ce problème avec la méthode de Lagrange

$L(x_1, x_2, \lambda) = 2.74x_1^2 + 6.66x_2^2 + 2.52x_1x_2 - \lambda(x_1 + 2x_2 - 4)$

$L(x_1, \lambda) = 5.48x_1 + 2.52x_2 - \lambda = 0 \qquad (1)$

$L(x_2, \lambda) = 2.52x_1 + 13.32x_2 - 2\lambda = 0 \qquad (2)$

$L(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - 4 = 0 \qquad (3)$

D'aprés (1) on a : $\lambda = 5.48x_1 + 2.52x_2$

D'aprés (2) on a : $\lambda = 2.52x_1 + 13.32x_2$

A partir (1) et (2) on a : $5.48x_1 + 2.52x_2 = 2.52x_1 + 13.32x_2$

$$4.22x_1 = 4.14x_2$$

$$x_2 = 1.01932x_1$$

On remplace la valeur de x_2 dans (3) nous obtiennant la solution $x^1 = (1.316375, 1.341812)^t$, qui est une solution minimum de variance, mais si nous fixons les poids, $\mu_1 = 0.75; \mu_2 = 0.35$, la solution que nous obtenons est $x^2 = (0.7302074, 1.634896)^t$, qui est un variance minimum a dominé la solution. Cet exemple prouve que si les covariances des objectifs stochastiques ne sont pas zéro, les solutions minimum de varaince au problème pesé ne doivent pas être variance minimum efficace.

b) Critère de Kataoka et l'efficacité de valeur d'espérance-écart type

Maintenant on résoudre le problème pesé par l'application de critère de Kataoka, le problème résultant, pour une probabilité β est:

$$\left\{ \begin{array}{c} \min_x \mu_1(0.5x_1 + x_2) + \mu_2(x_1 + 2.5x_2) + \Phi^{-1}(\beta)\sqrt{\mu_1^2(25x_1^2 + 25x_2^2) + \mu_2^2(x_1^2 + 9x_2^2) + 2\mu_1\mu_2(6x_1x_2)} \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Comme nous avons vu dans la section précédente, si la covariance des fonctions objectives stochastiques est zéro et la probabilité fixée est plus grand que 0.5 , pour chaque vecteur des poids $\boldsymbol{\mu} > 0$ la solution optimale pour le problème (12) est valeur efficace d'espérance-écart type, mais si l'une ou l'autre de ces deux hypothèses n'est pas vérifiée, le rapport précédent n'est pas nécessairement vrai, comme nous montrons aprés. D'abord, nous détendrons la première hypothèse et puis le second Pour commencer par, il doit noter que l'ensemble de solutions efficaces de valeur d'espérance-écart type pour le problème initial est le segment qui joint les points A et x^5sur le figure 3. Considérons le problème (12) pour une probabilité $\beta = 0.95$. Si le vecteur de poids est fixe à $\mu = (0.2, 0.8)^t$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{c} \min_x 0.9x_1 + 2.2x_2 + 1.645\sqrt{1.64x_1^2 + 6.76x_2^2 + 1.92x_1x_2} \\ x_1 + 2x_2 = 4 \\ avec\ x_1, x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Par la méthode de Lagrange, nous obtenons la solution $x^3 = (2.255366, 0.8723169)$, qui appartient à l'ensemble efficace de valeur d'espérance-écart type. Cependant, pour le vecteur de poids $\mu = (0.7, 0.3)$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{c} \min_x 0.65x_1 + 1.45x_2 + 1.645\sqrt{12.34x_1^2 + 13.06x_2^2 + 2.52x_1x_2)} \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

la solution au problème pesé est $x^4 = (0.7559553, 1.622022)$. Comme montré dans le graphe, cette solution n'appartient pas à l'ensemble efficace de valeur d'espérance-d'écart type, D' autre part, nous supposent que la covariance des fonctions objectives stochastiques est zéro et qu'ils ont une distribution normale; c'est-à-dire, nous supposons que le vecteur $\widetilde{c} = (\widetilde{c}_{11}, \widetilde{c}_{12}, \widetilde{c}_{21}, \widetilde{c}_{22})^t$,est un vecteur aléatoire multinormal avec la valeur d'espérance $\overline{c} = (0.5, 1, 1, 2.5)^t$ et matrice définie positive de covariance, V:

$$V = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

L'ensemble de solutions efficaces de valeur d'espérance-d'écart type pour ce problème est le même que pour le précédent, mais le problème obtenu à partir de l'application de critère de Kataoka au problème pesé pour une probabilité β est maintenant:

$$\left\{ \begin{array}{c} \min_x \mu_1(0.5x_1 + x_2) + \mu_2(x_1 + 2.5x_2) + \Phi^{-1}(\beta)\sqrt{\mu_1^2(25x_1^2 + 25x_2^2) + \mu_2^2(x_1^2 + 9x_2^2)} \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Comme précédemment montrées, pour n'importe quel vecteur de poids, les solutions pour ce problème sont les solutions efficaces de valeur d'espérance-d'écart type, si la probabilité fixée est plus grand que 0.5, mais ceci ne doit pas nécessairement être le cas si la probabilité fixée est moins de 0.5. Ainsi, pour un vecteur de poids $\boldsymbol{\mu}= (0.8, 0.2)^t$, si la probabilité fixée est $\beta = 0.4$, la solution obtenue est $x^5 = (3, 0.5)$; mais si la probabilité fixée est $\beta = 0.2$, la solution obtenue est $x^6 = (3, 3)$, qui n'est pas solution efficace de valeur d'espérance-d'écart type, comme représenté sur le figure 3.

Conclusion générale

Dans ce tarvail, nous avons examiné quelques approches de solution en optimisation multiobjective stochastique. le but c'est obtenir des solutions efficaces pour les problèmes multiobjective stochastiques à partir d'un ensemble des critères existant dans la litérattute de l'approche multiobjective et l'approche stochastique.

REFERENCES

1 A.S Adefya, M.K Luhandjula, Multiobjective stochastic linear programming An overview. American journal of opérations research, 2011.

2 C.Coello Ceollo, An updated survey on G.A. Based multiobjective optimisation techniques, Rapprot technique Lania-RD-98-08, Xalapa Veracruz, Mexico, decembre 1998, http://www.lania.mx/~CCoello/EMOO.

3 D. Kall, stochastic linear programming. Spring verlag Berlin Heideberg, New York (1978), 79-92.

4 Dantzing, linear programming under uncertaity, Management Sciences 1 (1955) 3-4.

5 F.Aiche, Sur la programmation multiobjectif floue stochastique, thèse de Doctorat, université de Tizi-Ouzou (2013).

6 F.B. Abdelaziz, solution approaches for the multiobjective stochastic programming, European journal of operational research, 2012, p. 1-16.

7 Halima Mahideb, l'optimisation multi-objectif basé sur l'intelligence computationnelle, mémoire de magister en informatique université de Constantine 2, (2013/2014) p. 15-16.

8 K.M. Menttinen, no linear multiobjective optimization, Editions Kluwer academic publisher, 1999.

9 L. Halpern, resumé de cours d'optimisation, 13 septembre 2005, p 8.

10 Mahdi Samir, optimisation multiobjectif par un nouveau schéma de coopération Méta/Exacte, mémoire de Magister, université de Mentouri de Constantine.

11 M. Karima, L'optimisation multiobjectif et l'informatique quantique, mémoire de Magister en informatique, université de Mentouri Constantine.

12 P. Kall stochastic linear programming. Spring-Verlag, Berlin, 1972 .

13 R. Caballero, E. Cerda, M. *Muñoz* and L. Ray, stochastic approach versus multiobjective approach for obtaining efficient solutions in stochastic multiobjective programming problems, European journal of operational research, Vol 158, NO. 3, 2004, pp. 633-648.

14 R. Caballero, E. Cerda, M. *Muñoz* and L. Ray, I.M. Stancu-Minasian, efficient solution concepts and their relations in stochastic multiobjective programming, journal of optimisation theory & application, Vol. 110, NO. 1, 2001, pp. 53-74.

15 S. Kataoka, on stochastic programming; preliminary study on stochastic programming model, Hitot subashi journal of arts science, Vol. 2, 1963, pp. 36-44.

16 Thomas Vincent, caractérisations des solutions efficaces et algorithmes d'enumération exacts pour l'optimisation multiobjectif en variables mixtes binaire, thèse de Doctorat, université de Nantes (2013), pp. 9-10.

17 Yann Collette, Patrick Siarry, optimisation multiobjectif, Edition Eyrolles 61, Bld Saint Germain 75240 Paris cedex 05, site: www.editions-eyrolles.com. p 19.

18 Goldberg, D.E. 1989, Genetic algorithms for search, optimization, and machine learning. In : ADDISON-WESLEY, MA : (ed), reading.

19 Clarisse Dhaenens, El-Ghazali Talbi, optimisation multi-critère : approche par métaheuristiques, equipe d'optimisation parallèle coopérative, université de Lille 1, France, site: http:// www.lifl.fr/~dhaenens.

Annexes

Fonction de répartition de la loi normale centée réduit : $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dx$

Le tableau suivant donne des valeurs approximatives de la fonction de répartition de X pour x entre 0 et 2.99.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5717	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986