Table des matières

Resumé

En mathématiques, l'analyse fractionnaire est une branche de l'analyse qui étudie la possibilité qu'un opérateur différentiel puisse être élevé à un ordre non entier. Les équations différentielles fractionnaires (EDFs) apparaissent naturellement dans différents domaines scientifiques comme la physique, l'ingénierie, la médicine, l'électrochimie, la théorie du contrôle, etc. L'efficacité de ces équations dans la modélisation de plusieurs phénomènes du monde réel a motivé beaucoup de chercheurs à étudier leurs aspects quantitatifs et qualitatifs.

L'objectif de ce mémoire est de contribuer au développement de la théorie d'existence et d'unicité de solutions des équations différentielles fractionnaires dans des espaces de Banach. Les résultats obtenus dans ce travail sont basés sur les techniques du point fixe.

En suite, on applique les resultats d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles fractionnaires de deuxieme chapitre dans les systemes defferentielles fractionnaire impulsives.

Mots clés : Dérivée fractionnaire, intégral fractionnaire, théorème de point fixe de schauder, les problèmes de valeurs initiales, système impulsive.

Abstract

In mathematics, the fractional analysis is a branch of analysis which studies the possibility of a differential operator can be raised to a fractional order. Fractional differential equations (EDFs) appear naturally in various scientific fields such as physics, engineering, medicine, electrochemistry, control theory, etc. The effectiveness of these equations in the modeling of many real-world phenomena has motivated many researchers to study their quantitative and qualitative aspects.

The objective of this brief is to contribute to the development of the theory of existence and uniqueness of solutions of fractional differential equations in Banach spaces. The results obtained in this work are based on techniques of the fixed point.

Next, we applied the results of existence and uniqueness of solutions of differential equations of fractional second chapter in systems defferentielles fractional impulsive

Keywords : fractional derivative, integral fractional fixed point theorem of Schauder, problems of initial values, impulsive system.

Introduction

En mathématiques, l'analyse fractionnaire est une branche de l'analyse qui étudie la possibilité qu'un opérateur différentiel puisse être élevé à un ordre non entier.

Les dérivées et intégrales fractionnaires sont utilisées par exemple dans certains domaines de la physique faisant intervenir des phénomènes de diffusion comme l'électromagnétisme, l'acoustique ou la thermique.

Le but du calcul fractionnaire est de généraliser les dérivées traditionnelles à des ordres non-entiers.

Ce mémoire est organisée comme suit :

Le premier chapitre sera consacré aux éléments de base du calcul fractionnaire, quelques concepts préliminaires seront introduits comme la transformée de Laplace, la fonction gamma et la fonction de Mittag-Leffler qui joue un rôle important dans la théorie des équations différentielles fractionnaires. et donne plusieurs définitions et propriétés de l'intégration et la dérivation de différents types d'ordre fractionnaire, et donne quelque des théorèmes des point fixe nécessaires dans les chapitres suivants .

Le deuxième chapitre , on étudie l'existence et l'unicité d'une solution au probléme aux condition initiale pour un systéme d'équations différentielles fractionnaires où la dérivée fractionnaire au sens caputo. D'autre part, en utilisant les théorèmes de point fixe du Banach pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution.

Dans le dernière chapitre de ce travail on a fait une verification des résultats de la deuxième chapitre sur les systèmes impulsive.

On termine par une conclusion.

Chapitre 1

Notions préliminaire

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions et propriétés que nous utilisons dans la suite de ce travail, ainsi que les différentes définitions de la dérivée et l'intégral fractionnaire et quelques théorème des points fixe.

1.2 Fonctions spécials pour la dérivation fractionnaire

1.2.1 Fonctions Gamma et Béta

En mathématiques, la fonction Gamma est une fonction complexe, considérée comme fonction spéciale dans le calcul fractionnaire.

Définition 1.1 *Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$, on définit la fonction Gamma, notée par Γ :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \exp(-t) t^{z-1} dt \tag{1.1}$$

Cette intégrale absolument convergent sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive.

Lemme 1.1 *La fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes :*
1)Pour $Re(z) > 0$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{1.2}$$

Qu'on peut démontrer par une intégration par partie :

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} \exp(-t) t^z dt = [-t^z \exp(-t)]_0^{\infty} + z \int_0^{+\infty} \exp(-t) t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

En particulier, $\Gamma(1) = 1$, en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \Gamma(n+1) = n!$$

2) On peut représenter $\Gamma\ (z)$ par la limite,

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^z}{(z+1)...(z+n)}, \mathrm{Re}(z) > 0 \tag{1.3}$$

Remarque 1.1 *La fonction Gamma est indéfiniment dérivable sur R_+^* : Sa dérivée est :*

$$\Gamma'(z) = \Gamma(z)\Psi(z) \tag{1.4}$$

Où

$$\Psi(z) = \frac{d}{dz}\ln(\Gamma(z))$$

Définition 1.2 *La formule du binôme généralisée $\binom{\alpha}{n}$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ est donnée par :*

$$\tbinom{\alpha}{0} = 1, \tbinom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}, (n \in \mathbb{N}) \tag{1.5}$$

En particulier, pour $\alpha = m \in N$, on a :

$$\tbinom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}, m \geq n \tag{1.6}$$

Cette formule peut être exprimée en terme de la fonction Gamma pour $\alpha \notin \mathbb{Z}_-^*$ comme suit :

$$\tbinom{\alpha}{n} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha-n+1)}, (\alpha \in \mathbb{C}; \alpha \notin \mathbb{Z}_-^*, n \in \mathbb{N}) \tag{1.7}$$

Définition 1.3 *La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour tout complexes x et y par :*

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \ \ \mathrm{Re}(x) > 0, \ \ \mathrm{Re}(y) > 0 \tag{1.8}$$

Elle est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \forall x,y : \mathrm{Re}(x) > 0, \mathrm{Re}(y) > 0$$

Remarque 1.2 *La fonction Bêta est symétrique i.e.*

$$\beta(x,y) = \beta(y,x) \tag{1.9}$$

1.2.2 Fonction de Mittag-Leffler

Définition 1.4 *Pour $z \in \mathbb{C}$, la fonction de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$(notée par $M-L$) est définie comme suit :*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, (\alpha > 0) \tag{1.10}$$

et la fonction de Mittag-Leffler généralisée $E_{\alpha,\beta}(z)$ est définie comme suit :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, (\alpha > 0, \beta > 0) \tag{1.11}$$

Exemple 1.1 *Pour des valeurs spéciales de α et β on a :*

1) $E_1(z) = E_{1,1}(z) = \exp(z)$

2) $E_{1,2}(z) = \frac{\exp(z)-1}{z}$ *(on obtient,* $E_{1,2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z}\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{z}(\exp(z) - 1))$

3) $E_{1,3}(z) = \frac{\exp(z)-z-1}{z^2}$ *(on obtient,* $E_{1,3} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \frac{1}{z^é}\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2}(\exp(z) - z - 1))$

Théorème 1.1 *La fonction de Mittag-Leffler possède les proprietés suivantes :*

1)Pour $|z| < 1$ la fonction de Mittag-Leffler généralisée satisfait :

$$\int_0^{\infty} \exp(-t)t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(zt^{\alpha})dt = \frac{1}{z-1} \tag{1.12}$$

2)La transformée de Laplace de cette fonction est donnée par :

$$\mathcal{L}\left[z^{\alpha k+\beta-1}E^{(k)}_{\alpha,\beta}(+\alpha z^{\alpha})\right](s) = \frac{k!s^{\alpha-\beta}}{(s^{\alpha}-a)^{k+1}}, \mathrm{Re}(s) > |a|^{\frac{1}{\alpha}} \tag{1.13}$$

où $E^{(k)}_{\alpha,\beta}(y) = \frac{d^k}{dy^k}E_{\alpha,\beta}(y)$

3)Intégration de la fonction de M-L :

$$\int_0^{z} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})t^{\beta-1}dt = z^{\beta}E_{\alpha,\beta+1}(\lambda z^{\alpha}) \tag{1.14}$$

4)La dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la fonction de$M-L$ est donnée par :

$$\frac{d^n}{dz^n}(z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda z^{\alpha}) = z^{\beta-n-1}E_{\alpha,\beta-n}(z^{\alpha}) \tag{1.15}$$

1.3 Espace L^P

En analyse, les espaces L^p sont des espaces de fonction dont la puissance P-iéme est intégrable, au sens de Lebesgue.

Définition 1.5 *Soit Ω = [a, b](-∞ ≤a < b≤ +∞) un intérvalle borné ou non borné de $\mathbb{R}$. pour $1 \leq p \leq \infty$, on définit l'espace L^p comme suit :*

1. pour 1 ≤p < ∞, L^p (Ω) est l'espace des fonctions mesurables de puissance pi-eme intégrables sur Ω c'est-à-dire :

$$f \in L^p(\Omega) \Longleftrightarrow \int_{\Omega} |f(x)|^p\, dx < \infty,\ f \ \text{ mesurable} \tag{1.16}$$

$\|f\|_p = (\int |f|^p)dx)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur $L^P(\Omega)$.
$(L^p(\Omega), \|.\|_p)$ est un espace du Banach
2. pour $p = 2$ alors :
$L^2(\Omega)$ =$\{f$: f mesurable à carré intégrable sur Ω, $\int_{\Omega} f^2(x)dx < \infty\}$
$\left(L^2(\Omega); \langle ., .\rangle_{L^2(\Omega)}\right)$ est un Hilbert, ou $\langle ., .\rangle_{L^2(\Omega)}$ est le produit scalaire définie par :

$$\langle f,g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x).g(x)dx \quad \forall f,g\in L^2(\Omega) \tag{1.17}$$

3. pour $p=\infty$,$L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions essentiellement bornées sur Ω.

Définition 1.6 *f est dite essentiellement bornée sur Ω s'il $\exists M>0$ telle que :*

$$\| f \|_\infty = ess\sup|f(x)| = \inf\{M\geq 0; |f(x)|\leq M \quad p.p \ sur \ \Omega\} \tag{1.18}$$

$(L^\infty(\Omega), \|.\|_\infty$ *est un Banach*

1.4 Transformée de Laplace

La transformée de Laplace intervient dans la résolution des équations et des systèmes diférentiels.

Définition 1.7 *La transformée de Laplace d'une fonction f de la variable réelle $t\in R^+$ est définie par :*

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty \exp(-st)f(t)dt \quad ,s\in\mathbb{R} \tag{1.19}$$

$f(t)$ est appelée l'originale de $\mathcal{L}f(s)$.

L'originale $f(t)$ est appelée la transformée de Laplace inverse :

$$\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}f)(t) = \frac{1}{2\Pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(st)\mathcal{L}f(s)ds \quad ,c>a \tag{1.20}$$

Exemple 1.2 1.$\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}$
2.$\mathcal{L}(\cos t)(s) = \frac{1}{s^2+1}$ *(pour la démonstration on applique l'intégration par partie)*
3.$\mathcal{L}(t)(s) = \frac{1}{s^2}$ *(on applique intégration par partie) :*

$$\int_0^\infty t\exp(-st)dt = 0 + \frac{1}{s}\int_0^\infty \exp(-st)dt = \frac{1}{s^2}$$

4.$\mathcal{L}(t^k)(s) = \frac{k!}{s^{k+1}}$ *(par récurrence)*
5.$\mathcal{L}(\exp(-at))(s) = \frac{1}{s+1}$

Proposition 1.1 *La transformée de Laplace est linéaire i.e.*

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \mathcal{L}\left(\sum_{i=0}^n c_i f_i(t)(s)\right) = \sum_{i=0}^n c_i\mathcal{L}f_i(s) \tag{1.21}$$

Définition 1.8 *Lorsque le produit $f(x-t)g(t)$ est intégrable sur tout intérvalle $[0,x]$ de $\mathbb{R}_+$, le produit de convolution de f et g est définie par :*

$$(f*g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt \tag{1.22}$$

Proposition 1.2 *Si les transformées de Laplace de f et g existent, alors la transformée de Laplace du produit de convolution vérifée :*

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}f(s) \cdot \mathcal{L}g(s) \tag{1.23}$$

Proposition 1.3 *La transformée de laplace de la dérivée d'ordre $n \in N^*$de la fonction f est donnée par :*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f^{(n)})(s) &= s^n \mathcal{L}f(s) - \sum_{k=0}^{(n-1)} s^{n-k-1} f^{(k)}(0^+) \\ &= s^n \mathcal{L}f(s) - \sum_{k=0}^{(n-1)} s^k f^{(n-k-1)}(0^+) \end{aligned} \tag{1.24}$$

1.5 Calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire est une branche de l'analyse dont l'étude se rapporte aux opérateurs d'intégration et de dérivation d'ordre non entier.

Dans cette partie, on donne quelques définitions de dérivées et intégrales fractionnaires .

1.5.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.9 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville (notée par R-L) d'ordre α d'une fonction f est définie par :*

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, x > a \qquad Pour(-\infty \leq a < x < \infty) \tag{1.25}$$

pour $\alpha = 0$, on a :

$$I_a^0 := I \text{ (operateur identité)}$$

pour $\alpha = n \in \mathbb{N}^*, \jmath_a^\alpha$ coincide avec l'intégrale répétée n-fois de la forme :

$$\begin{aligned} (I_a^\alpha f)(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_n-1} f(t_n)dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \end{aligned} \tag{1.26}$$

Exemple 1.3 *Soit $f(x) = (x-a)^c$ avec $c > -1$, alors*

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+c+1)} (x-a)^{\alpha+c} \tag{1.27}$$

En effet,

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^c dt$$

En utilisant le changement de variable et la fonction Bêta on obtient :

$$t-a=s(x-a),\ 0\leq s\leq 1 \tag{1.28}$$

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (x-a-s(x-a))^{\alpha-1}s^c(x-a)^{c+1}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha+c}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^c ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha+c}\beta(\alpha,c+1) \\
I_a^\alpha f(x) &= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+c+1)}(x-a)^{\alpha+c}
\end{aligned}$$

cas $a=0$ on a,

$$I_0^\alpha f(x)=\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+c+1)}x^{\alpha+c}$$

Théorème 1.2 *si $f\in L^1[a,b]$ et $\alpha>0$, alors $J_a^\alpha f(x)$ existe pour $x\in[a,b]$ et on a :*

$$I_a^\alpha f\in L^1[a,b] \tag{1.29}$$

Preuve. Soit $f\in L^1[a,b]$, on a :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(x-t)\varphi_2(t)dt$$

avec,

$$\varphi_1(u)=\begin{cases}\frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \text{ pour } 0<u\leq b-a\\ 0 \text{ pour ,u} \in\mathbb{R}\backslash\,[0,b-a]\end{cases}$$

et

$$\varphi_2(u)=\begin{cases} f(u),\ \text{a}\leq u\leq b\\ 0,\quad \mathbb{R}\backslash[a,b]\end{cases}$$

Par construction, $\varphi_j\in L^1(\mathbb{R})$ pour $j\in\{1,2\}$, et on a : $J_a^\alpha f\in L^1[a,b]$ ■

Théorème 1.3 *Soit $\alpha>0$ et soit $(f_k)_{k=1}^\infty$ une suite des fonctions continues uniformément convergente sur $[a,b]$, alors on peut intervertir l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et la limite comme suit :*

$$\left(J_a^\alpha\lim_{k\to\infty}f_k\right)(x)=\left(\lim_{k\to\infty}J_a^\alpha f_k\right)(x) \tag{1.30}$$

en particulier, la suite $(I_a^\alpha f_k)_{k=1}^\infty$est uniformément convergente.

Preuve. Soit f la limite de la suite (f_k), il est clair que f est continue,et on a l'estimation :

$$\begin{aligned}\left|I_a^\alpha f_k(x) - I_a^\alpha f(x)\right| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left|f_k(t) - f(t)\right| dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left\|f_k - f\right\|_\infty (b-a)^\alpha\end{aligned}$$

d'où, la convergence uniforme lorsque $k \to \infty$ pour $x \in [a,b]$. ■

Théorème 1.4 *Soit $\alpha, \beta > 0$, pour toute fonction $f \in L^1[a,b]$, on a :*

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x) = I_a^\beta I_a^\alpha f(x) \tag{1.31}$$

pour presque tout $x \in [a,b]$, et $f \in C[\alpha,\beta]$, alors (1.31) est vraie pour tout $x \in [a,b]$

Preuve. Soit $f \in L^1[a,b]$, on a :

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \int_\tau^t (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau dt$$

D'après le théorème de Fubini on a :

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\tau) \int_\tau^x (x-\tau)^{\alpha-1} (t-\tau)^{\beta-1} dt d\tau$$

En utilisant le changement de variable (1.28), on obtient :

$$\begin{aligned}I_a^\alpha I_a^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\tau)(x-t)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\alpha-1} ds d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\tau)(x-\tau)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(\tau)(x-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau = J^{\alpha+\beta} f(x)\end{aligned}$$

presque par tout sur $[a,b]$ si $f \in C[a,b]$, alors $I_a^\alpha f \in C[a,b]$ et par suite $I_a^\alpha I_a^\beta f \in C[a,b]$, et aussi :$I_a^{\alpha+\beta} f \in C[a,b]$ ■

Lemme 1.2 *Soit $\alpha > 0, n = [\alpha]+1$ et $f \in L^1[a,b]$ pour $b > 0$,alors la transformée de Laplace de l'intégral fractionnaire de $R-L$ est formulée comme suit :*

$$\mathcal{L}(I_0^\alpha f)(s) = s^{-\alpha} \mathcal{L} f(s) \tag{1.32}$$

Preuve. On peut écrire $I_a^\alpha f$ comme une convolution de deux fonctions $g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}$ et $f(t)$

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t) = (g * f)(x)$$

Alors,

$$\mathcal{L}[I_0^\alpha f](s) = \mathcal{L}[\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}](s).\mathcal{L}f(s)$$

Comme,

$$\mathcal{L}[x^{\alpha-1}](s) = \Gamma(\alpha)s^{-\alpha}$$

D'où le résultat. ■

1.5.2 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.10 *pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n-1 \leq \alpha \leq n$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction f est définie par :*

$$D_a^\alpha f(x) := D^n I_a^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt, \ x > a \tag{1.33}$$

$$= \frac{d^n}{dx^n} I_a^{n-\alpha} \tag{1.34}$$

où $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$
*En particulier, **1)** Pour $\alpha = 0$, on a :*

$$D_a^0 f(x) = DI_a^1 f(x) = If(x) \tag{1.35}$$

***2)** Pour $\alpha = m \in \mathbb{N}$, on a :*

$$D_a^\alpha f(x) = D^{m+1} I_a^{m+1-m} f(x) = D^{m+1} I_a^1 f(x) = D^m f(x) \tag{1.36}$$

Ainsi pour $\alpha \in \mathbb{N}$, la dérivée fractionnaire de R-L coincide avec la dérivée usuelle

Exemple 1.4 *soit $f(x) = (x-a)^v$ avec $v > -1$ et $a \geq 0$ tel que $n-1 \leq a < n$ d'aprés (1.28) on a :*

$$D_a^\alpha f(x) = D^n I_a^{n-\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+n-\alpha+1)} D^n (x-a)^{n-(\alpha-\nu)}$$

Pour le cas, $(\alpha-\nu) \in \mathbb{N}$ on a :

$$D_a^\alpha f(x) = 0, \ (\alpha-\nu) \in \{1, 2, ..., n\}$$

Par ailleurs si $(\alpha-\nu) \notin \mathbb{N}$, on a :

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-\alpha)} (x-a)^{\nu-\alpha}$$

Proposition 1.4 *soit $a > 0$ et $n = [a]+1$ alors pour tout entier $m \in \mathbb{N}$ on a :*

$$D_a^\alpha f(x) = D^m I_a^{m-\alpha} f(x), \ m > \alpha \tag{1.37}$$

Preuve. Comme $m \geq n$, on a :

$$\begin{aligned} D^m I_a^{m-\alpha} f(x) &= D^n D^{m-n} I_a^{m-n} I_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= D^n I_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= D_a^\alpha f(x) \end{aligned}$$

car $D^{m-n} I_a^{m-n} = I$ ■

Théorème 1.5 *soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de $R-L$ existent, pour c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$, $D_a^\alpha(c_1 f + c_2 g)$ existe , et on a :*

$$D_a^\alpha(c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 D_a^\alpha f(x) + c_2 D_a^\alpha g(x) \tag{1.38}$$

Lemme 1.3 *Soient $\alpha > 0$ et $f \in L^1[a,b]$, alors l'égalité :*

$$D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) = f(x) \tag{1.39}$$

est vraie pour presque tout $x \in [a,b]$

Preuve. En utilisant la définition (1.10) on a :

$$D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) = D^n I_a^{n-\alpha} I_a^\alpha f(x) = D^n I_a^n f(x) = f(x)$$

■

Théorème 1.6 *Soient $\alpha, \beta > 0$ et $n-1 \leq \alpha < n$, $m-1 \leq \beta < m$ tel que $(n, m \in \mathbb{N}^*)$ alors :*

1) *si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L^1[a,b]$ l'égalité :*

$$D_a^\beta (I_a^\alpha f)(x) = I_a^{\alpha-\beta} f(x) \tag{1.40}$$

est presque partout sur $[a,b]$.

2) *S'il existe une fonction $\varphi \in L^1[a,b]$ tel que $f = \jmath_a^\alpha \varphi$, alors :*

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f(x) = f(x) \tag{1.41}$$

pour presque tout $x \in [a;b]$.

3) *Pour $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$.Si les dérivées fractionnaires $D_a^\alpha f$ et $D_a^{k+\alpha} f$ existes, alors :*

$$D^k(D_a^\alpha f(x)) = D_a^{k+\alpha} f(x) \tag{1.42}$$

4) *Si $\beta \geq \alpha > 0$ et la dérivée fractionnaire $D_a^{\beta-\alpha} f$ existe, alors :*

$$D_a^\beta (I_a^\alpha f)(x) = D_a^{\beta-\alpha} f(x) \tag{1.43}$$

Preuve. En utilisant la relation(1.31) on obtient :

1)Pour $\alpha > \beta > 0$, alors $n \geq m$, on a :

$$\begin{aligned} D_a^{\beta}(I_a^{\alpha} f)(x) &= D^n I_a^{n-\beta}(I_a^{\alpha} f)(x) \\ &= D^n (I_a^{n+\alpha-\beta} f)(x) \\ &= D^n I_a^{n}(I_a^{\alpha-\beta} f)(x) \\ &= I_a^{\alpha-\beta} f(x) \end{aligned}$$

presque pour tout $x \in [a, b]$

2) Par les relations(1.39), on obtient :

$$I_a^{\alpha} D_a^{\alpha} f(x) = I_a^{\alpha}(D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} \varphi(x)) = I_a^{\alpha}(\varphi(x)) = f(x)$$

3) on a :

$$\begin{aligned} D^k[D_a^{\alpha} f(x)] &= D^k D^n I^{n-\alpha} f(x) \\ &= D^{k+n} I^{n-\alpha+k-k} f(x) \\ &= D^{k+n} I_a^{k+n-(\alpha+k)} f(x) \\ &= D_a^{k+\alpha} f(x) \end{aligned}$$

d'où la résultat.

4) on a :

$$D_a^{\beta}(I_a^{\alpha} f)(x) = D^m I_a^{m-\beta}(I_a^{\alpha} f)(x) = D^m I^{m-(\beta-\alpha)} f(x) = D_a^{\beta-\alpha} f(x)$$

existe pour $i - 1 \leq \beta - \alpha < i$ et $i \leq m$ ∎

Théorème 1.7 *Si $f \in L^1[a, b]$, $b > 0$, la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de R-L de f est :*

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}_0^{\alpha} f)(s) = s^{\alpha}(\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0} \tag{1.44}$$

avec $n - 1 < \alpha < n$, cette transformée de Laplace est bien connue.

Preuve. Par la définition (1.10) on trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{D}_0^{\alpha} f)(s) &= \mathcal{L}(D^n I_0^{n-\alpha} f)(s) \\ &= s^n \mathcal{L}(I_0^{n-\alpha} f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{k-n-1}[D^k(I_0^{n-\alpha} f)(t)]_{t=0} \\ &= s^{\alpha}(\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{k-n-1}[D^k(I^{n-\alpha} f)(t)]_{t=0} \end{aligned}$$

∎

1.5.3 Dérivée fractionnaire de Caputo

Définition 1.11 *La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \in R_+$ d'une fonction f est donnée par :*

$$^{c}D_a^{\alpha} f(x) := I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt, \ \ x > a \qquad (1.45)$$

avec $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}^*$

Exemple 1.5 *Soit $f(x) = (x-a)^{\gamma}$ avec $\gamma > 0$, pour $(0 < \alpha \leq 1)$ et utilisant le changement de variable(1.28) on a :*

$$\begin{aligned}
^{c}D_a^{\alpha} f(x) &= I_a^{1-\alpha} f\prime(x) = \gamma I_a^{1-\alpha}(x-a)^{\gamma-1} \\
&= \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha}(t-a)^{\gamma-1}dt \\
&= \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha+\gamma} \int_0^1 s^{\gamma-1}(1-s)^{-\alpha}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha+\gamma}\beta(\gamma, 1-\alpha) \\
^{c}D_a^{\alpha} f(x) &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(1-\alpha+\gamma)}(x-a)^{-\alpha+\gamma}
\end{aligned}$$

Théorème 1.8 *Soient $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha]+1$, si f possède $n-1$ dérivées en a et si $D_a^{\alpha} f$ existe, alors :*

$$^{c}D_a^{\alpha} f(x) = D_a^{\alpha}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] \qquad (1.46)$$

pour presque tout $x \in [a, b]$

Preuve. D'après les définition (1.11) on a :

$$\begin{aligned}
&D_a^{\alpha}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] = D^n I_a^{n-\alpha}[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k] \\
&= \frac{d^m}{dx^n} \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] dt
\end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie on obtient :

$$\begin{aligned}
&I_a^{n-\alpha}[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k] = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(t-a)^k\right] dt \\
&= -\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left[\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(t-a)^k\right)(x-t)^{n-\alpha}\right]_{t=a}^{t=x} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha}\left[Df(t) - D\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] dt
\end{aligned}$$

Où :

$$I_a^{n-\alpha}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right]=I_a^{n-\alpha+1}D\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right]$$

De la même façon pour n-fois alors :

$$\begin{aligned}I_a^{n-\alpha}&\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right]\\&=I_a^{n-\alpha+n}D^n\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right]\\&=I_a^nI_a^{n-\alpha}D^n\left[f(x)-\frac{f^{(k)}(a)^k}{k!}(x-a)^k\right]\end{aligned}$$

Où $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\left(x-a^k\right)$ est un polynôme de dégré n-1, alors :

$$I_a^{n-\alpha}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right]=I_a^nI_a^{n-\alpha}D^nf(x)$$

Donc

$$\begin{aligned}D_a^{\alpha}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right]&=D^nI_a^{n-\alpha}D^nf(x)\\&=I_a^{n-\alpha}D^nf(x)\\&={}^cD_a^{\alpha}f(x)\end{aligned}$$

Pour $x\in[a,b]$ ■

Corollaire 1.1 *Soient $\alpha\geq 0$ et $n=[\alpha]+1$, si ${}^cD_a^{\alpha}f$ et $D_a^{\alpha}f$ existent, on suppose que $D^kf(a))=0$ pour tout $k\in\{0,1,....,n-1\}$, alors :*

$${}^cD_a^{\alpha}f(x)=D_a^{\alpha}f(x)\qquad(1.47)$$

Théorème 1.9 *Si $f\in C[a,b]$ et si $\alpha>0$ $(n-1<\alpha\leq n)$, alors :*

$${}^cD_a^{\alpha}I_a^{\alpha}f(x)=f(x)\qquad(1.48)$$

Preuve. Soit $g=\jmath_a^{\alpha}f$ et par le corollaire precédent $(D^kf(a)=0)$, pour $k\in\{0,1,...n-1\}$ et d'après l'égalité(1.39), on a :

$${}^cD_a^{\alpha}\jmath_a^{\alpha}f={}^cD_a^{\alpha}g=D_a^{\alpha}g=D_a^{\alpha}\jmath_a^{\alpha}f=f$$

■

Théorème 1.10 *Soient f_1 et f_2 deux fonctions définies sur $[a,b]$; telles que ${}^cD_a^{\alpha}f_1$ et $D_a^{\alpha}f_2$ existent presque partout. De plus, soient c_1 et $c_2\in\mathbb{R}$ alors, ${}^cD_a^{\alpha}(c_1f_1+c_2f_2)$ existe presque partout sur*

$[a,b]$, et on a :

$${}^cD_a^{\alpha}(c_1f_1+c_2f_2)=c_1{}^cD_a^{\alpha}f_1+c_2{}^cD_a^{\alpha}f_2\qquad(1.49)$$

Théorème 1.11 *Si $f \in C[a,b]$, pour tout $b > 0$, alors, la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo de f est :*

$$\mathcal{L}({}^{c}D_a^{\alpha} f)(s) = s^{\alpha}(\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}\left(0^{+}\right) \tag{1.50}$$

Preuve. Pour $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}^{*}$, $x > 0$ alors :

$${}^{c}D_0^{\alpha} f(x) = I_0^{n-\alpha} f^{(n)}(x)$$

Donc, d'après (1.32)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}({}^{c}D_a^{\alpha} f)(s) &= \mathcal{L}I_0^{n-\alpha} f^{n})(s) \\ &= s^{-n+\alpha}\left(\mathcal{L}f^{(n)}\right)(s) \end{aligned}$$

et d'après (1.33)

$$\mathcal{L}({}^{c}D_a^{\alpha} f)(s) = s^{\alpha}\left(\mathcal{L}f\right)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}\left(0^{+}\right)$$

■

1.6 Théorèmes de point fixe

Les théorèmes de points fixes sont des outils très utiles en mathématique et particulièrement dans la résolution des équations différentielles.

En effet, ces théorèmes fournissent des conditions suffisantes pour lesquelles une fonction donnée admet un point fixe, ainsi on assure l'existence de la solution d'un problème donné en le transformant en un problème de point fixe, et on détermine éventuellement ces points fixes qui sont les solutions du problème posé.

Dans cette partie nous allons présenter les théorèmes de points fixes que nous allons pour obtenir des résultats d'existence et d'unicité.

Définition 1.12 *Soit f une application d'un ensemble E dans lui même. On appelle point fixe de f tout point $u \in E$ tel que*

$$f(u) = u.$$

Définition 1.13 *Soit (E,d) un espace métrique. Une application $f : E \to E$ est dite Lipschitzienne de constante $L \geq 0$ si elle vérifie*

$$\forall u, v \in E,\ d(f(u), f(v)) \leq Ld(u,v)$$

Définition 1.14 *L'application Lipschitzienne f est dite une contraction si $L = 1$. Dans le cas où $L \in (0,1)$, f est dite une contraction stricte.*

Théorème 1.12 *(Principe de contraction de Banach) Soit (E, d) un espace métrique complet et soit $f : E \to E$ une contraction stricte. Alors f admet un unique point fixe.*

Théorème 1.13 *(Théorème de point fixe de Schauder) Soit E un espace de Banach, K un convexe fermé borné de E et $T : K \to K$ un opérateur continu et compact, alors T admet au moins un point fixe dans K*

Définition 1.15 *Soient E et F deux espaces de Banach. L'opérateur continu $T : E \to F$ est complètement continu s'il transforme tout borné de E en une partie relativement compacte dans F.*

Théorème 1.14 *(Théorème de point fixe de Schaefer) Soient E un espace de Banach et $T : E \to E$ un opérateur complètement continu. Si l'ensemble*

$$X = \{u \in E : u = \lambda Tu, \lambda \in (0, 1)\}$$

est borné, alors T possède au moins un point fixe.

Théorème 1.15 *(théorème $\mathcal{H}$ -Arzéla Ascoli) Soit E un espace de Banach et $W \subset \mathcal{H}([a, b]; E)$. Si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *W un sous-ensemble uniformément borné de $\mathcal{H}([a, b]; E)$,*

2. *W est équicontinu dans $(t_k, t_k + 1)$, $k = 0, ..., m$,*

3. *$W(t) = \{u(t) : u \in W, t \in J\{t_k\}\}$, $W(t_k^+) = \{u(t_k^+) : u \in W\}$ et $W(t_k^-) = \{u(t_k^-) : u \in W\}$ sont des sous-ensembles relativement compacts de E, alors W est un sous-ensemble relativement compact de $\mathcal{H}([a, b]; E)$.*

Chapitre 2

Systèmes différentiels fractionnaires

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va étudie l'existence et l'unicité d'une solution pour un système d'équations différentielles fractionnaires où la dérivée fractionnaire au sens caputo. En utilisant les théorèmes de point fixe du Banach.

2.2 Système differentiel fractionnaire

Soit le système d'équations différentielles fractionnaires définit comme suit :

$$\begin{aligned} D^{\alpha}x(t) &= f(t, x(t)), \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

D^{α} :La dérivé de Caputo d'ordre $\alpha \in (0, 1)$, avec la limite inférieure t_0 est défini par :

$$D^{\alpha}x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} x'(s) ds$$

tel que

$$J = [t_0 - a, t_0 + a], B = \{x \in R^n \diagup ||x - x_0|| \leq b\},$$

$$E = \{(t, x) \in R \times R^n \diagup t \in J, x \in B\}$$

Une fonction $x \in C^1(J, R^n)$ est dite une solution de (2.1) si x satisfait l'équation :

$$D^{\alpha}x(t) = f(t, x(t))$$

et la condition $x(t_0) = x_0$

Remarque 2.1 *Soit un système différentiel fractionnaire*

$$D^{\alpha}x(t) = f(t, x(t)),$$

est appelée équation différentiel fractionnaire de type Caputo et dans ce cas on utilise comme conditions initiales :

$$x^{(k)}(0) = b_k \ (k = 0, 2, ..., n-1)$$

L'utilisation de conditions initiales de différents types pour les équations différentielles fractionnaires nous assure l'existence et l'unicité des solutions de l'EDF correspondante, qu'on va prouver dans les théorèmes suivants.

2.3 L'existence et l'unicité d'une solution du système fractionnaire

Théorème 2.1 [*10*]*Supposons que la fonction $f : E \rightarrow R^n$ satisfait les conditions suivantes :*

(i) *$f\ (t,\ x)$ est Lebesgue mesurable par rapport à t de J;*

(ii) *$f\ (t,\ x)$ est continue par rapport à x sur B*

(iii) *il existe une constante $\beta \in (0, \alpha)$ et une fonction réelle $m(t) \in L^{\frac{1}{\beta}}(J)$ tel que $||f(t,x)|| \leq m(t)$, pour tous les $t \in J$ et tout $x \in B$.*

Ensuite, pour $\alpha \in (0,1)$, il existe au moins une solution de le PVI (2.1) sur l'intervalle $[t_0 - h, t_0 + h]$,où $h = min\{a, [\frac{b\Gamma(\alpha)}{M}(\frac{\alpha-\beta}{1-\beta})^{1-\beta}]^{\frac{1}{\alpha-\beta}}\}$

et $M = (\int_{t_0}^{t_0+\alpha}((m(s))^{\frac{1}{\beta}}ds)^{\beta}$

Preuve. L'IVP (2.1) pour le cas où $t \in [t_0, t_0 + h]$ sont discutés.Une approche similaire pourrait être utilisée pour vérifier le cas où $t \in [t_0 - h, t_0]$.

Nous savons que $f(t, x(t))$ est Lebesgue mesurable sur $[t_0, t_0 + h]$ selon aux conditions **(i)** et **(ii)**. Le calcul direct donne que $(t-s)^{\alpha-1} \in L^{\frac{1}{1-\beta}}[t_0, t]$, pour $t \in [t_0, t_0 + h]$. par l'inégalité de Holder, nous obtenons que $(t-s)^{\alpha-1}f(s, x(s))$ est Lebesgue intégrable par rapport à $s \in [t_0, t]$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + h]$, et :

$$\int_{t_0}^{t} \left\|(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))\right\| ds \leq \left(\int_{t_0}^{t}((t-s)^{\alpha-1})^{\frac{1}{1-\beta}}ds\right)^{1-\beta} \left(\int_{t_0}^{t}(m(s))^{\frac{1}{\beta}}ds\right)^{\beta}$$

Pour $x \in C([t_0, t_0 + h], R^n)$,on définie la norme :

$$\|x_*\| = \sup_{s\in[t_0,t_0+h]} ||x(s)||.$$

Alors $C([t_0, t_0 + h], \mathbb{R}^n)$ avec$\|\cdot\|_*$est un espace de Banach.

Soit

$$\Omega = \{x \in C([t_0, t_0 + h], \mathbb{R}^n) : ||x - x_0||_* \leq b\}$$

alors Ω est une partie fermé, bornée et convéxe de $C([t_0, t_0 + h], \mathbb{R}^n)$

Pour un élément $x \in \Omega$, on a :

$$(Tx)(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}f(s, x(s))ds, t \in [t_0, t_0 + h] \tag{2.2}$$

a) Nous allons montrer que pour tout $x \in \Omega$, $Tx \in \Omega$, donc on montre que T est une application :

Alors on utilise l'inégalité et la condition **(iii)**, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|Tx(t)-x_0\|_* &= \left\| x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s,x(s))ds - x_0 \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s,x(s))ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} m(s)ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_{t_0}^{t} \left((t-s)^{\alpha-1}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right]^{1-\beta} \left[\left(\int_{t_0}^{t} (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \right] \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_{t_0}^{t} (t-s)^{\frac{\alpha-1}{1-\beta}} ds \right]^{1-\beta} \left[\left(\int_{t_0}^{t} (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \right] \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\left(\frac{1}{\frac{\alpha-1}{1-\beta}+1} (-(t-s))^{\frac{\alpha-1}{1-\beta}+1} \right)^{1-\beta} \right]_{t_0}^{t} \left[\left(\int_{t_0}^{t} (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \right] \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\left(\frac{1}{\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}} (-(t-s))^{\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \right]_{t_0}^{t} \left[\left(\int_{t_0}^{t} (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \right] \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\left(\frac{1}{\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}} \left((-(t-t))^{\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}} + (t-t_0)^{\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}} \right) \right)^{1-\beta} \right] \left[\left(\int_{t_0}^{t} (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \right] \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta} \right)^{1-\beta} (t-t_0)^{\alpha-\beta} \left[\left(\int_{t_0}^{t} (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \right]
\end{aligned}$$

On a $\left[\left(\int_{t_0}^{t} (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \right] = M$ alors :

$$\begin{aligned}
\|Tx(t)-x_0\|_* &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta} \right)^{1-\beta} (t-t_0)^{\alpha-\beta} M \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta} \right)^{1-\beta} h^{\alpha-\beta} \\
&\leq b, \quad \text{pour } t \in [t_0, t_0+h]
\end{aligned}$$

Cela signifie que $\|Tx - x_0\|_* \leq b$, alors T est une application de Ω

b) Nous montrons maintenant que T est complètement continue.

Premièrement, nous allons montrer que T est continue. Pour tout $x_m,\ x \in \Omega, m = 1, 2, \ldots$,avec $\lim\limits_{m\to\infty} ||x_m - x||_* = 0$, nous obtenons :

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t) = x(t), \text{pour } t \in [t_0, t_0+h]$$

Ainsi, à la condition **(ii)**, on a

$$\lim_{m\to\infty} f(t, x_m(t)) = f(t, x(t)), \qquad \text{pour } \ t \in [t_0, t_0+h]$$

Donc, nous pouvons conclure que

$$\sup_{s\in[t_0,t_0+h]} \|f(s,x_m(s))-f(s,x(s))\| \to 0, \quad m\to\infty$$

D'autre part, T est continue si :

$$\begin{aligned}
\|Tx_m(t)-Tx(t)\|_* &= \left\|x_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}f(s,x_m(s))ds - x_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds\right\| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}f(s,x_m(s))ds - \int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds\right\| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\left[f(s,x_m(s))-f(s,x(s))\right]ds\right\| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}ds\left[f(s,x_m(s))-f(s,x(s))\right]\right\| \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}ds\,\|f(s,x_m(s))-f(s,x(s))\| \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{\alpha-1+1}(t-s)^{\alpha-1+1}\right]_{t_0}^{t}\sup_{s\in[t_0,t_0+h]}|f(s,x_m(s))-f(s,x(s))| \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{\alpha}(t-t_0)^{\alpha}\right]\sup_{s\in[t_0,t_0+h]}|f(s,x_m(s))-f(s,x(s))| \\
&\le \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}(t-t_0)^{\alpha}\sup_{s\in[t_0,t_0+h]}|f(s,x_m(s))-f(s,x(s))| \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}h^{\alpha}\sup_{s\in[t_0,t_0+h]}|f(s,x_m(s))-f(s,x(s))|
\end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\|Tx_m-Tx\|_* \le \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\sup_{s\in[t_0,t_0+h]}\|f(s,x_m(s))-f(s,x(s))\|$$

Par conséquent,

$$\|Tx_m-Tx\|_* \to 0, \quad m\to\infty$$

Cela signifie que T est continue.

c). Ensuite, nous montrons $T\Omega$ est relativement compact. Il suffit de montrer que l'opérateur $\{Tx : x\in\Omega\}$ est uniformément bornée et équicontinu sur $[t_0,t_0+h]$. Pour $x\in\Omega$, nous obtenons :

T est uniformement bornée :

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_* &= \left\|x_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds\right\| \\
&\le \|x_0\| + \left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds\right\|
\end{aligned}$$

et on a

$$\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds\right\| \le b$$

alors :

$$\|Tx\|_* \leq \|x_0\| + b$$

donc, ce qui signifie que $\{Tx : x \in \Omega\}$ est uniformement bornée.

T est equicontinue :

D'autre part, pour tout $t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + h], t_1 < t_2$, En utilisant le inégalité de Holder, nous avons :

$$\begin{aligned}
\|(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)\|_* &= \left\| x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t_2} (t_2 - t_0)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \right. \\
&\left. - x_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t_0)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_{t_0}^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \right. \right. \\
&\left. \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \right] \right\| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_{t_0}^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \right. \\
&\left. - \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, x(s) ds \right\| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_{t_0}^{t_1} \left[(t_2 - s)^{\alpha-1} ds - (t_1 - s)^{\alpha-1} \right] f(s, x(s)) ds \right. \\
&\left. + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \right\|
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\|(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\left\| \int_{t_0}^{t_1} \left[(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1} \right] f(s, x(s)) ds \right\| \right. \\
&\left. + \left\| \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \right\| \right] \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t_1} \left\| \left[(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1} \right] f(s, x(s)) \right\| ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} \left\| (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) \right\| ds
\end{aligned}$$

alors

$$
\begin{aligned}
\|(Tx)(t_2)-(Tx)(t_1)\| \leq\leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t_1}\left[(t_1-s)^{\alpha-1}-(t_2-s)^{\alpha-1}\right]m(s)ds \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}m(s)ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_{t_0}^{t_1}\left((t_1-s)^{\alpha-1}-(t_2-s)^{\alpha-1}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}ds\right]^{1-\beta}\left(\int_{t_0}^{t_1}(m(s))^{\frac{1}{\beta}}ds\right)^{\beta} \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_{t_1}^{t_2}\left((t_2-s)^{\alpha-1}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}ds\right]^{1-\beta}\left(\int_{t_0}^{t_1}(m(s))^{\frac{1}{\beta}}ds\right)^{\beta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|(Tx)(t_2)-(Tx)(t_1)\| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_{t_0}^{t_1}\left[(t_1-s)^{\frac{\alpha-1}{1-\beta}}-(t_2-s)^{\frac{\alpha-1}{1-\beta}}\right]ds\right]^{1-\beta}\left(\int_{t_0}^{t_1}(m(s))^{\frac{1}{\beta}}ds\right)^{\beta} \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\frac{\alpha-1}{1-\beta}}ds\right]^{1-\beta}\left(\int_{t_0}^{t_1}(m(s))^{\frac{1}{\beta}}ds\right)^{\beta} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_{t_0}^{t_1}(t_1-s)^{\frac{\alpha-1}{1-\beta}}ds-\int_{t_0}^{t_1}(t_2-s)^{\frac{\alpha-1}{1-\beta}}ds\right]^{1-\beta}\left(\int_{t_0}^{t_1}(m(s))^{\frac{1}{\beta}}ds\right)^{\beta} \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\frac{\alpha-1}{1-\beta}}ds\right]^{1-\beta}\left(\int_{t_0}^{t_1}(m(s))^{\frac{1}{\beta}}ds\right)^{\beta} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\left[\frac{1}{\frac{\alpha-1}{1-\beta}+1}(-(t_1-s))^{\frac{\alpha-1}{1-\beta}+1}\right]_{t_0}^{t_1}\right. \\
&\left.-\left[\frac{1}{\frac{\alpha-1}{1-\beta}+1}(-(t_2-s))^{\frac{\alpha-1}{1-\beta}+1}\right]_{t_2}^{t_1}\right]^{1-\beta} M \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{\frac{\alpha-1}{1-\beta}+1}(-(t_2-s))^{\frac{\alpha-1}{1-\beta}+1}\right]^{1-\beta} M
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|(Tx)(t_2)-(Tx)(t_1)\| \leq & \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta}\right)^{1-\beta}\left[(t_1-t_0)^{\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}}+(t_2-t_1)^{\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}}-(t_2-t_0)^{\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}}\right]^{1-\beta} \\
&+\frac{M}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta}\right)^{1-\beta}\left[(t_2-t_1)^{\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}}\right]^{1-\beta} \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta}\right)^{1-\beta}(t_2-t_1)^{\alpha-\beta}+\frac{M}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta}\right)^{1-\beta}(t_2-t_1)^{\alpha-\beta} \\
&\leq \frac{2M}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta}\right)^{1-\beta}(t_2-t_1)^{\alpha-\beta}
\end{aligned}
$$

alors :

$$
\|(Tx)(t_2)-(Tx)(t_1)\|_* \leq \frac{2M}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta}\right)^{1-\beta}(t_2-t_1)^{\alpha-\beta}
$$

Comme $t_1 \to t_2$ le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. Par conséquent $\{Tx : x \in \Omega\}$ est équicontinu sur $[t_0, t_0 + h]$, et donc $T\Omega$ est relativement compact. Par le théorème de point fixe de Schauder, il ya un $x^* \in \Omega$ tel que $Tx^* = x^*$, c'est :

$$x^*(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s, x^*(s)) ds, \quad t \in [t_0, t_0 + h].$$

Il est facile de voir que x_* est une solution d'IVP (2.1) sur $[t_0, t_0 + h]$. ■

Corollaire 2.1 [[*10*]]*Soit* $f \in C(J \times \ B, R^n)$. *Ensuite, pour* $\alpha \in (0, 1)$, *il existe au moins une solution du PVI (2.1) sur l'intervalle* $[t_0 - h, t_0 + h]$, *où* $h\prime = min\{\alpha, [\frac{b}{M''}\Gamma(\alpha+1)]^{\frac{1}{\alpha}}\}$*et* $M" = sup_{(T,x)\in J\times \ B} f(t, x)$.

La preuve du Corollaire (2.1) *est similaire à celle du théorème* (2.1).

Théorème 2.2 [[*10*]]*Tout les conditions de théorème* (2.1)*sont détenir.*

(iv) *on suppose que il existe constante* $\gamma \in (0, \alpha)$ *et une fonction réelle* $\mu(t) \in L^{\frac{1}{\gamma}}[t_0, t_0 + a]$ *tel que :*

$$||f(t, x) - f(t, y)|| \leq \mu(t)||x - y|| \tag{2.3}$$

Pour $t \in J$ *et tout* $x, y \in B$. *Alors :*

Il existe une unique solution du PVI (2.1) *sur* $[t_0 - h_1, t_0 + h_1]$, *ou :*

$$h_1 < \min\{\alpha, h, [\frac{\Gamma(\alpha)}{M_1}(\frac{\alpha-\gamma}{1-\gamma})^{1-\gamma}]^{\frac{1}{\alpha-\gamma}}\}$$

Et

$$M_1 = (\int_{t_0}^{t_0+\alpha} (\mu(s))^{\frac{1}{\gamma}} ds)^{\gamma}$$

Preuve. Soit $\Omega = \{x \in C([t_0, t_0 + h_1], R^n) : ||x - x_0||* \leq b\}$. Pour un élément $x \in \Omega$, on a

$$(Tx)(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds, \ t \in [t_0, t_0 + h_1]$$

Maintenant, nous allons montrer que l'opérateur T est un opérateur de contraction sur Ω.

En fait, pour $x, y \in \Omega$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\|(Tx)(t) - (Ty)(t)\| &= \left\| x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds - x_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} (f(s, x(s) - f(s, y(s)) \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} \mu(t) ds \max_{s\in[t_0,t_0+h]} \|x(s) - y(s)\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} \mu(t) ds \right) \|x - y\|_*
\end{aligned}$$

On a : $(t-s)^{\alpha-1} \in L^{\frac{1}{1-\gamma}}$ et $\mu(s) \in L^{\frac{1}{\gamma}}$
Alors :

$$\begin{aligned}
\|(Tx)(t)-(Ty)(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_{t_0}^{t}\left((t-s)^{\alpha-1}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}ds\right]^{1-\gamma}\left[\int_{t_0}^{t}(\mu(s))^{\frac{1}{\gamma}}ds\right]^{\gamma}\|x-y\|_* \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\frac{\alpha-1}{1-\gamma}}ds\right]^{1-\gamma}\left[\int_{t_0}^{t}(\mu(s))^{\frac{1}{\gamma}}ds\right]^{\gamma}\|x-y\|_* \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\left(-\frac{1}{\frac{\alpha-1}{1-\gamma}+1}(t-s)^{\frac{\alpha-1}{1-\gamma}+1}\right)^{1-\gamma}\right]\left[\int_{t_0}^{t}(\mu(s))^{\frac{1}{\gamma}}ds\right]^{\gamma}\|x-y\|_* \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[-\frac{1-\gamma}{\alpha-\gamma}(t-s)^{\frac{\alpha-\gamma}{1-\gamma}}\right]^{1-\gamma}\left[\int_{t_0}^{t}(\mu(s))^{\frac{1}{\gamma}}ds\right]^{\gamma}\|x-y\|_* \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1-\gamma}{\alpha-\gamma}\right)^{1-\gamma}(t-s)^{\alpha-\gamma}\left[\int_{t_0}^{t}(\mu(s))^{\frac{1}{\gamma}}ds\right]^{\gamma}\|x-y\|_* \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1-\gamma}{\alpha-\gamma}\right)^{1-\gamma}(t-s)^{\alpha-\gamma}M_1\|x-y\|_*
\end{aligned}$$

On a : $(t-t_0)=h_1$

$$\|(Tx)(t)-(Ty)(t)\| \leq \frac{M_1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1-\gamma}{\alpha-\gamma}\right)^{1-\gamma}(h)^{\alpha-\gamma}\|x-y\|_* \quad \text{pour } t\in[t_0,t_0+h_1]$$

Alors

$$\|Tx-Ty\| \leq c\,\|x-y\|_*$$

Où

$$c=\frac{M_1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1-\gamma}{\alpha-\gamma}\right)^{1-\gamma}(h)^{\alpha-\gamma}\in(0,1)$$

Ce qui prouve que T est une contraction de Banach.On resumée le principe de contraction, T admet unique point fixe x, ce qui est évidemment une solution de PVI (2.1) sur $[t_0,t_0+h_1]$

Alors la preuve est complete. ■

Corollaire 2.2 [[10]]*Soit* $f\in C(J\times\ B,R^n)$. *Supposons qu'il existe une constante* $L>0$ *telle que* $||f(t,x)-f(t,y)||\leq L||x-y||$, *pour tous* $t\in J$ *et tous* $x,y\in B$. *Ensuite, pour* $\alpha\in(0,1)$, *il existe une solution unique de PVI (2.1) sur l'intervalle* $[t_0-h_1,t_0+h_1]$, *Où* $h\prime_1<min\{a,h\prime,\frac{1}{L}\Gamma(\alpha+1)]^{\frac{1}{\alpha}}\}$.

Théorème 2.3 [[10]]*Supposons que la condition (iv) du théorème* (2.26) *verifie. Si les solutions de PVI (2.1) existent sur* $[t_0-h,t_0+h]$, *alors la solution de PVI(2.1) est unique.*

avec

$$h<min\left\{a,[\frac{\Gamma(\alpha)}{M_1}(\frac{\alpha-\gamma}{1-\gamma})^{1-\gamma}]^{\frac{1}{\alpha-\gamma}}\right\}$$

Preuve. Supposons que $y(t)$ et $x(t)$ sont les solutions de PVI (2.1) dans $[t_0,t_0+h]$. Alors :

$$y(t)=x_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds,\ t\in[t_0,t_0+h]$$

et

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds, \ t \in [t_0, t_0 + h]$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \|y(t) - x(t)\| &= \left\| x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - x_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} \left[f(s, y(s)) - f(s, x(s)) \right] ds \right\|, \quad t \in [t_0, t_0 + h] \end{aligned}$$

Pour (iv), on a :

$$\begin{aligned} \|y(t) - x(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} \mu(s) ds \, \|x - y\|_* \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_{t_0}^{t} \left((t-s)^{\alpha-1} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} ds \right]^{1-\gamma} \left[\int_{t_0}^{t} ((\mu(s))^{\frac{1}{\gamma}} ds \right]^{\gamma} \|x - y\|_* \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_{t_0}^{t} (t-s)^{\frac{\alpha-1}{1-\gamma}} ds \right]^{1-\gamma} \left[\int_{t_0}^{t} ((\mu(s))^{\frac{1}{\gamma}} ds \right]^{\gamma} \|x - y\|_* \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\left(-\frac{1}{\frac{\alpha-1}{1-\gamma} + 1} (t-s)^{\frac{\alpha-1}{1-\gamma}+1} \right)^{1-\gamma} \right]_{t_0}^{t} \left[\int_{t_0}^{t} ((\mu(s))^{\frac{1}{\gamma}} ds \right]^{\gamma} \|x - y\|_* \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\gamma}{\alpha-\gamma} \right)^{1-\gamma} (t-t_0)^{\alpha-\gamma} \left[\int_{t_0}^{t} ((\mu(s))^{\frac{1}{\gamma}} ds \right]^{\gamma} \|x - y\|_* \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\gamma}{\alpha-\gamma} \right)^{1-\gamma} (t-t_0)^{\alpha-\gamma} M_1 \|x - y\|_* \\ &\leq \frac{M_1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\gamma}{\alpha-\gamma} \right)^{1-\gamma} (h)^{\alpha-\gamma} \|x - y\|_* \\ &\leq \frac{M_1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\gamma}{\alpha-\gamma} \right)^{1-\gamma} (h)^{\alpha-\gamma} \max_{s \in \left[t_{0, t_0+h} \right]} \|y(s) - x(s)\| \end{aligned}$$

alors

$$\|y(t) - x(t)\| \leq c \max_{s \in [t_0, t_0+h]} \|y(s) - x(s)\|$$

où

$$c = \frac{M_1}{\Gamma(\alpha)} (\frac{1-\gamma}{\alpha-\gamma})^{1-\gamma} h^{\alpha-\gamma} \in (0, 1)$$

donc

$$\max_{s \in [t_0, t_0+h]} \|y(t) - x(s)\| \leq c \max_{s \in [t_0, t_0+h]} \|y(s) - x(s)\|, \ t \in [t_0, t_0 + h]$$

ce qui implique

$$x(t) = y(t), \ t \in [t_0, t_0 + h]$$

Alors le PVI admet une unique solution. ■

Chapitre 3

Cas d'un système d'équation différentiel fractionnaire de la forme $D_*^{\alpha_i} y_i(t) = f_i(t, y_1, ..., y_n)$

3.1 Théorème de point fixe de banach généralisé

Théorème 3.1 *[9]Soit U sous ensemble non vide et fermée d'un espace de Banach E, soit $B_n \geq 0$, et pour tout n tel que $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$ converge, soit un operateur $A : U \to U$ qui satisfait l'inégalité :*

$$\|A^n u - A^n v\| \leq B_n \|u - v\|$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u, v \in U$, alors A admet un point fixe unique u^*et pour tout $u_0 \in U$,$(A^n u_0)_{n=1}^{\infty}$ converge vers le point fixe u^*.

3.2 Existence et unicitée d'une solution

dans ce travail nous prouvons l'existence et unicitée par le théorème de point fixe de Banach, du système d'équation différentielle fractionnaire :

$$D_*^{\alpha_i} y_i(t) = f_i(t, y_1, ...y_n), \text{ et } y_i^{(k)}(0) = C_k^i; i = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ..., n \tag{3.1}$$

Où $m_i < \alpha_i \leq m_i + 1$ et $D_*^{\alpha_i}$ est la derivée fractionnaire de caputo.

Lemme 3.1 *[9]Si la fonction $f = (f_1, ..., f_n)$ est de classe C^1, alors le problème de valeur initial(PVI)* (3.1)*est équivalent à l''équations intégral de Volterra :*

$$y_i(t) = \sum_{k=0}^{m_i} C_k^i \frac{t^k}{k!} + I^{\alpha_i} f_i(t, y_1, ..., y_n), \quad 1 \leq i \leq n \tag{3.2}$$

Preuve. On suppose y_i satisfait le problème de valeur initiale (3.1),alors on applique I^{α_i} à les deux coté de (3.1) et on utilise les propriétés de la dérivée fractionnaire de caputo (3.2), inversement on suppose que y_i satisfait (3.2), alors on observe $D^{m_i+1} y_i$ existe et intégrable à cause de :

$$\begin{aligned}
y_i^{m_i+1} &= D^{m_i+1}\left(\sum_{k=0}^{m_i} C_i^k \frac{t^k}{k!} + I^{\alpha_i} f_i\right), \quad 1 \le i \le n \\
&= D^{m_i+1} I^{\alpha_i} f_i \\
&= D D^{m_i} I^{\alpha_i - m_i + m_i} f_i \\
&= D D^{m_i} I^{m_i} I^{\alpha_i - m_i} f_i \\
&= D I^{\alpha_i - m_i} f_i
\end{aligned}$$

Par les propriétés de derivée de caputo alors

$$\begin{aligned}
y_i^{m_i+1} &= D^{1-\alpha_i+m_i} f_i = D^{1-\alpha_i+m_i} f_i \\
&= D^{m_i-\alpha_i+1} f_i
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Ce qui existe et intégrable car f_i' est continue.
alors

$$I^{m_i+1-\alpha_i} y_i^{m_i+1} = D_*^{\alpha_i} y_i \qquad \text{exsite}$$

On applique l'opérateur différentiel $D_*^{\alpha_i}$ aux deux membre de cette coté igalité (3.2) :

$$\begin{aligned}
D_*^{\alpha_i} y_i &= I^{m_i+1-\alpha_i} D^{m_i+1}\left(\sum_{k=0}^{m_i} C_i^k \frac{t^k}{k!} + I^{\alpha_i} f_i\right) \\
&= D^{m_i+1} I^{\alpha_i} f_i \\
&= D D^{m_i} I^{\alpha_i} I^{\alpha_i - m_i} f_i \\
&= I^{m_i+1-\alpha_i} D^{m_i+1}\left(\sum_{k=0}^{m_i} C_i^k \frac{t^k}{k!} + I^{\alpha_i} f_i\right)
\end{aligned}$$

On a :

$$D^{m_i+1}\left(\sum_{k=0}^{m_i} C_i^k \frac{t^k}{k!} + I^{\alpha_i} f_i\right) = D^{m_i+1-\alpha_i} D^{m_i+1-\alpha_i} f_i = f_i \tag{3.4}$$

Par les proprietées de la dérivée fractionnaire
Alors :
f_i est continus et $0 < m_i + 1 - \alpha_i < 1$, alors y_i satisfait (3.1) ■

Théorème 3.2 [9]*Soit $f = (f_1, ..., f_n) : w \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 avec :*

$$w = [0, \chi^*] \times \prod_{j=1}^{n} [y_i(0) - l_j, y_j(0) + l_j] \qquad \chi^* > 0, l_j > 0, \forall j$$

alors le système d'équation non autonomes :

$$D_*^{\alpha_i} y_i(t) = f_i(t, y_1, y_2, ..., y_n)\ , \qquad y_i^k(0) = C_k^i \quad ,1 \le i \le n\ ,1 \le k \le m_i \tag{3.5}$$

Où $m_i < \alpha_i < m_i + 1$ possède une unique solution $\bar{y}(t) : C\,[0, \chi] \to \mathbb{R}$

Où :

$$\chi = min\left\{\chi^*, \left(\frac{l\Gamma(\alpha_i+1)}{[1+\alpha]\,\|f\|}\right)^{\frac{1}{\alpha_i}}, \left(\frac{lk!}{[1+\alpha]\,|C_k^i|}\right)^{\frac{1}{k}}\right\} \quad i=1,...,n, k=1,...,m_i$$

$$l = \min\{l_1, l_2, ..., l_n\}, \ \ \alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$$

et $[1+\alpha]$ *est la partie entiere de* $\alpha+1$.

Preuve. Par le lemme (3.1), et l'équation (3.5) implique

$$y_i(t) = \sum_{k=0}^{m_i} C_k^i \frac{t^k}{k!} + I^{\alpha_i} f_i(t, \bar{y}), \quad 1 \le i \le n \tag{3.6}$$

On a

$$A(\bar{y}) = (A_1(\bar{y}), A_2(\bar{y}), ..., A_n(\bar{y}))$$

Où :

$$A_i(\bar{y}(t)) = \sum_{k=0}^{m_i} C_k^i \frac{t^k}{k!} + I^{\alpha_i} f_i(t, A(\bar{y}))$$

On remplace

$$I^{\alpha_i} f_i(t, A(\bar{y})) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_i - 1} f_i(s, \bar{y}(s)) ds$$

Alors

$$A_i(y(t)) = \sum_{k=0}^{m_i} C_k^i \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_i - 1} f_i(s, \bar{y}(s)) ds \tag{3.7}$$

le point fixe de l'opérateur A sera une solution de l'équation (3.5).

comme f est $\mathcal{C}^1$, elle est localement Lipschitzienne et il existe un voisinage, de L sur lequel f est Lipschitzienne, avec constante de Lipschitz L, soit

$$U = \{\bar{y} \in B : |y_i - y_i(0)| \le L, 1 \le i \le n, \ x < L\}$$

Il est clair que U est un sous-ensemble non vide, convexe et fermé et de $\mathcal{C}\left([0,X]^n\right)$, sur lequel f est Lipschitzienne. Puisque f_i , $i = 1, 2, ..., n$, sont continues sur l'ensemble compact W, ils sont uniformément continue sur W.

Ainsi par $\varepsilon > 0$, nous pouvons trouver $\delta > 0$ telque :

$$|f_i(t, \bar{y}) - f_i(t, \bar{z})| < \varepsilon^*$$

$$|\bar{y} - \bar{z}| < \varepsilon, \quad \varepsilon^* = \min\left\{\frac{\varepsilon\Gamma(\alpha_1+1)}{x^{\alpha_1}}, ..., \frac{\varepsilon\Gamma(\alpha_n+1)}{x^{\alpha_n}}\right\}$$

Maintenant soit $\bar{y}, \bar{z} \in U$ telque $|\bar{y} - \bar{z}| < \delta$

alors par l'équation(3.5)

$$|A_i\bar{y}(t) - A_i\bar{z}(t)| =| \sum_{k=0}^{m_i} C_k^i \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_i - 1} f_i(s, \bar{y}(s))ds$$

$$-\sum_{k=0}^{m_i} C_k^i \frac{t^k}{k!} - \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_i - 1} f_i(s, z(\bar{s}))ds \;|= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_i - 1} f_i(s, \bar{y}(s))ds \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_i - 1} f_i(s, \overline{z}(s))ds \right|$$
$$= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_i - 1} ds \left[f_i(s, \bar{y}(s)) - f_i(s, \overline{z}(s)) \right] \right|$$

on a

$$[f_i(s, \bar{y}(s)) - f_i(s, \overline{z}(s))] \leq \varepsilon^*$$

Alors

$$\begin{aligned}
|A_i\overline{y}(t) - A_i\overline{z}(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_i - 1} ds \; \varepsilon^* \\
&\leq \frac{\varepsilon^*}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_i - 1} ds \\
&\leq \frac{\varepsilon^*}{\Gamma(\alpha_i)} \left[\frac{-1}{\alpha_i - 1 + 1} (t-s)^{\alpha_i - 1 + 1} \right]_0^t \\
&\leq \frac{\varepsilon^*}{\Gamma(\alpha_i)} \left[\frac{-1}{\alpha_i} (t-s)^{\alpha_i} \right]_0^t \\
&\leq \frac{\varepsilon^*}{\Gamma(\alpha_i)} \left[\frac{1}{\alpha_i} (t)^{\alpha_i} \right] \\
&\leq \frac{\varepsilon^*}{\Gamma(\alpha_i)} t^{\alpha_i}
\end{aligned}$$

Donc

$$|A_i\overline{y}(t) - A_i\overline{z}(t)| \leq \frac{\varepsilon^*}{\Gamma(\alpha_i)} x^{\alpha_i} \leq \varepsilon, \quad \forall i$$

Nous trouvons

$$\begin{aligned}
\left|A_i\overline{y}(t) - C_0^i\right| &= \left|\sum_{k=0}^{m_i} C_k^i \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1} f_i(s,\bar{y}(s))ds\right| \\
&\leq \left|\sum_{k=0}^{m_i} C_k^i \frac{t^k}{k!}\right| + \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1} f_i(s,\bar{y}(s))ds\right| \\
&\leq \left|\sum_{k=0}^{m_i} C_k^i \frac{t^k}{k!}\right| + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1} ds \left|f_i(s,\bar{y}(s))\right| \\
&\leq \left|\sum_{k=0}^{m_i} C_k^i \frac{t^k}{k!}\right| + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1} ds \left\|f\right\| \\
&\leq \left|\sum_{k=0}^{m_i} C_k^i \frac{t^k}{k!}\right| + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\left[\frac{-1}{\alpha_i-1+1}(t-s)^{\alpha_i-1+1}\right]_0^t \left\|f\right\| \\
&\leq \left|\sum_{k=0}^{m_i} C_k^i \frac{t^k}{k!}\right| + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\left[\frac{-1}{\alpha_i}(t-s)^{\alpha_i}\right]_0^t \left\|f\right\| \\
&\leq \left|\sum_{k=0}^{m_i} C_k^i \frac{t^k}{k!}\right| + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\left[\frac{-1}{\alpha_i}(t)^{\alpha_i}\right] \left\|f\right\| \\
&\leq \left|\sum_{k=0}^{m_i} C_k^i \frac{t^k}{k!}\right| + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i+1)} t^{\alpha_i} \left\|f\right\|
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left|A_i\overline{y}(t) - C_0^i\right| &\leq \left|\sum_{k=0}^{m_i} C_k^i \frac{t^k}{k!}\right| + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i+1)} t^{\alpha_i} \left\|f\right\| \\
&\leq \left|\sum_{k=0}^{m_i} C_k^i \frac{t^k}{k!}\right| + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i+1)} x^{\alpha_i} \left\|f\right\| \\
&\leq \left|\sum_{k=0}^{m_i} C_k^i \frac{t^k}{k!}\right| + \frac{\left\|f\right\| x^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)} \\
&\leq l, \quad \forall i
\end{aligned}$$

Ainsi, nous démontrons que pour chaque $\overline{y}, \overline{z} \in U$

$$\left|A_i^n\overline{y}(s) - A_i^n\overline{z}(s)\right| \leq \frac{Ls^{\alpha_i}}{\Gamma(n\alpha_i+1)}\left|\overline{y} - \overline{z}\right|, \text{ pour n=0,1,...}$$

Cela peut être vu par induction. Dans le cas $n = 0$, l'instruction est trivialement vrai. pour l'étape d'induction de $n-1 \to n$, on écrit

$$\begin{aligned}
\left|A_i^n\overline{y}(s) - A_i^n\overline{z}(s)\right| &= \left|A(A_i^{n-1}\overline{y}(s)) - A(A_i^{n-1}\overline{z}(s))\right| \\
&= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1} ds f(s, A_i^{n-1}\overline{y}(t)) - \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1} ds f(s, A_i^{n-1}\overline{z}(t))\right| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\left|\int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1} ds \left[f_i(s, A_i^{n-1}\overline{y}(s) - f_i(s, A_i^{n-1}\overline{z}(s)\right] ds\right|
\end{aligned}$$

Dans les prochaines étapes, nous utilisons que f est lipchitziennes sur U et l'hypothèse d'induction pour obtenir

$$\begin{aligned}|A_i^n\overline{y}(t)-A_i^n\overline{z}(t)| &\leq L\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1}ds\left|A_i^{n-1}\overline{y}(s)-A_i^{n-1}\overline{z}(s)\right| \\ &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1}\left|A_i^{n-1}\overline{y}(s)-A_i^{n-1}\overline{z}(s)\right|ds\end{aligned}$$

On a

$$||A_i^n\overline{y}(t)-A_i^n\overline{z}(t)|| \leq \frac{(LS^{\alpha_i})^n}{\Gamma(n\alpha_i+1)}|\overline{y}-\overline{z}|$$

Donc

$$\left|\left|A_i^{n-1}\overline{y}(t)-A_i^{n-1}\overline{z}(t)\right|\right| \leq \frac{(LS^{\alpha_i})^{n-1}}{\Gamma((n-1)\alpha_i+1))}|\overline{y}-\overline{z}|$$

Alors

$$\begin{aligned}|A_i^n\overline{y}(t)-A_i^n\overline{z}(t)| &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1}ds\frac{(LS^{\alpha_i})^{n-1}}{\Gamma((n-1)\alpha_i+1))}|\overline{y}-\overline{z}| \\ &\leq \frac{LL^{n-1}}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma((n-1)\alpha_i+1))}\int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1}s^{(n-1)\alpha_i}ds\,|\overline{y}-\overline{z}| \\ &\leq \frac{L^n}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(1+(n-1)\alpha_i))}\int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1}s^{(n-1)\alpha_i}|\overline{y}-\overline{z}|\,ds \\ &\leq \frac{L^n|\overline{y}-\overline{z}|}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(1+(n-1)\alpha_i))}\int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1}s^{(n-1)\alpha_i}ds \\ &= \frac{L^n|\overline{y}-\overline{z}|}{\Gamma(\alpha_i+1+(n-1)\alpha_i))}\int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1}s^{(n-1)\alpha_i}ds \\ &= \frac{L^n|\overline{y}-\overline{z}|}{\Gamma(1+n\alpha_i)}I^{\alpha_i}t^{\alpha_i(n-1)} \\ &= \frac{L^n}{\Gamma(1+n\alpha_i)}I^{\alpha_i}t^{-\alpha_i}t^{n\alpha_i}|\overline{y}-\overline{z}| \\ &= \frac{L^n t^{n\alpha_i}I^{\alpha_i}t^{-\alpha_i}}{\Gamma(1+n\alpha_i)}|\overline{y}-\overline{z}| \\ &= \frac{(Lt^{\alpha_i})^n}{\Gamma(1+n\alpha_i)}|\overline{y}-\overline{z}| \leq \frac{L^n|\overline{y}-\overline{z}|}{\Gamma(1+n\alpha_i)}X^{n\alpha_i},\ (t=X)\end{aligned}$$

Par consequence, nous obtenous :

$$|A_i^n\overline{y}(t)-A_i^n\overline{z}(t)| \leq \frac{(L\chi^{\alpha_i})^n}{\Gamma(n\alpha_i+1)}|\overline{y}-\overline{z}|$$

Nous avons maintenant démontré que l'operateur A_i satisfait les hypothèses du théorème de point fixe du Banach (tel que $\beta_n = (L\chi^{\alpha_i})^n/\Gamma(n\alpha_i+1)$). Afin d'appliquer le théorème (2.4), nous devons vérifier que la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\beta_n$ converge. Cependant, cela est un résultat bien connu que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(L\chi^{\alpha_i})^n}{\Gamma(n\alpha_i+1)}:=E_{\alpha_i}(L\chi^{\alpha_i}),$$

Est fonction mittag-Leffler de l'ordre α_i, évalués à $L\chi^{\alpha_i}$. Par conséquent, d'aprét le théorème de point fixe géniralisé A_i converge vers unique point fixe A_i^*. Par conséquent. A converge $(A_1^*,...,A_n^*)$, qui est unique. ■

3.3 Dépendance des solutions par les conditions initiales

Théorème 3.3 [9]*Soient les fonctions : $f=(f_1,...,f_n):w\to\mathbb{R}$, de classe C^1*

Où

$$w=[0,\alpha^*]\times\prod_{j=1}^{n}[y_j[0]-l_j,y_j[0]+l_j],\chi^*>0,l_j>0$$

soit $\overline{f}=(f_1....f_n)$ est lipshizienne par rapport la deuxieme variable :i.e :

$$|f_i(t,\overline{y}(t))-f_i(t,\overline{z}(t))|\leq L\,|\overline{y}(t)-\overline{z}(t)|\,,\forall i \tag{3.8}$$

Soient $\overline{y}(t)$ et $\overline{z}(t)$ sont des solutions de PVI :

$$\begin{aligned}D_*^{\alpha_i}y_i(t)&=f_i(t,\overline{y}(t)),\quad y_i^{(k)}(0)=C_k^i,...1\leq i\leq n;\quad 0\leq k\leq m_i\\ D_*^{\alpha_i}z_i(t)&=f_i(t,\overline{z}(t)),\quad z_i^{(k)}(0)=d_k^i,...1\leq i\leq n;\quad 0\leq k\leq m_i\end{aligned}$$

respectivement, ou $m_i\leq\alpha_i\leq m_i+1$, tel que :

$$|y_i(t)-z_i(t)|\leq\left\|\overline{T}-\overline{T'}\right\|E_{\alpha_i}(Lt^{\alpha_i})$$

Ou $\overline{T}(t)=(T_1(t),...,T_n(t))^t$, $\overline{T'}(t)=(T_1'(t),...,T_n'(t))^t$

Ou $T_i=\sum\limits_{k=1}^{m_i}C_k^i\frac{t^k}{k!}$ et $T_i'=\sum\limits_{k=1}^{m_i}d_k^i\frac{t^k}{k!}$ et E_{α_i} est la fonction de Miltag-Leffler.

Preuve. Considerons les sequences d'itération $y_j^m(t)$, définie pour $m=1,2,...$

$$\begin{aligned}\left(A_i^0\overline{y}\right)(t)&=\sum_{k=1}^{m_i}C_k^i\frac{t^k}{k!},\quad \left(A_i^m\overline{y}\right)(t)=\sum_{k=1}^{m_i}C_k^i\frac{t^k}{k!}+\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t(t-s)^{\alpha_i-1}f(\tau,A_i^{m-1}(\tau))d\tau\\ \left(A_i^0\overline{z}\right)(t)&=\sum_{k=1}^{m_i}d_k^i\frac{t^k}{k!},\quad \left(A_i^m\overline{z}\right)(t)=\sum_{k=1}^{m_i}d_k^i\frac{t^k}{k!}+\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t(t-s)^{\alpha_i-1}f(\tau,A_i^{m-1}(\tau))d\tau\end{aligned}$$

Nous observons que pour m=1,2,...

$$\begin{aligned}
|A_i^m\overline{y}(t)-A_i^m\overline{z}(t)| &= \left|\sum_{k=1}^{m_i} C_k^i\frac{t^k}{k!}+\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t(t-s)^{\alpha_i-1}f(\tau,A_i^{m-1}(\tau))d\tau\right.\\
&\left.-\sum_{k=1}^{m_i} d_k^i\frac{t^k}{k!}+\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t(t-s)^{\alpha_i-1}f(\tau,A_i^{m-1}(\tau))d\tau\right|\\
&=\sum_{k=1}^{m_i}\left(C_k^i-d_k^i\right)\frac{t^k}{k!}+\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t(t-s)^{\alpha_i-1}d\tau\times\\
&\big(f_i(\tau,A_i^{m-1}(\tau)\big)-\big(f_i(\tau,A_i^{m-1}(\tau)\big))
\end{aligned}$$

On a$|A_i^m(\overline{y})-A_i^m(\overline{z})|\leq\frac{(Lt^{\alpha_i})^p}{\Gamma(p\alpha_i+1)}$

Alors :

$$\begin{aligned}
|A_i^m(\overline{y})-A_i^m(\overline{z})| &\leq \left|\sum_{k=1}^{m_i}(C_k^i-d_k^i)\frac{t^k}{k!}\right|+\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha_i-1}d\tau\\
&\big|f_i(\tau,A_i^{m-1}\overline{y}(\tau)-f_i(\tau,A_i^{m-1}\overline{z}(\tau)\big|\\
&\leq\left|\sum_{k=1}^{m_i}(C_k^i-d_k^i)\frac{t^k}{k!}\right|\sum_{k=1}^{m_i}\frac{(Lt^{\alpha_i})^p}{\Gamma(p\alpha_i+1)}
\end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{m\to\infty}|(A^m\overline{y})(t)-(A^m\overline{z})(t)|\leq\left|T_i-T_i^{'}\right|E_{\alpha_i}(Lt^{\alpha_i})$$

Donc

$$|y_i(t)-z_i(t)|\leq\left\|\overline{T}-\overline{T'}\right\|E_{\alpha_i}(Lt^{\alpha_i}) \tag{3.9}$$

Alors la solution est unique. ■

conclusion

Dans ce mémoire, on a étudier les systèmes d'équations différentielles fractionnaires non une dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo et avec les intégrales fractionnaires.

Pour le système(PVI) avec conditions initial, en utilisant les techniques de points fixes, nous avons établi des résultats d'existence et d'unicité de certains problèmes différentiels d'ordres fractionnaires dans des espaces de Banach.

On verifié les résultats d'existence et d'unicité sur les systèmes impulsive.

Bibliographie

[1] AISSAOUI Moussa et BEN-AISSA Mohammed El-amine, l'intégrale et la dérivée fractionnaires au sens de Riemann-Liouville, Mémoire pour l'obtention du diplôme de licence en Mathématique, univercité Abou Beker Belkaid Tlemcen, année 2012 - 2013

[2] Ahmet Gkdoğana, Emrah Ünalb,,existence and Uniqueness Theorems for Sequential Linear Conformable Fractional Differential Equations, Ercan çelik, Department of Mathematical Engineering, Gümüşhane University, 29100 Gümüşhane, Turke.

[3] Belakroum Kheireddine, existence et positivité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire, Univercitée Badji Mokhter Annaba,

[4] François Benoît-Marand et autres, Identification de systèmes fractionnaires non linéaires par réseaux neuronaux à temps continu, Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle Bâtiment de Mécanique,France

[5] JinRong Wang ; XiWang Dong and Wei Wei, on the existence of solutions for a class of fractional differential equations.

[6] Mr DAOUD IDIOU, Implémentation Analogique de Dérivateur et d'Intégrateur d'Ordre Fractionnaire Variable, Mémoire de magister, univercitée Mentouri de Constantine,Année 2008/2009.

[7] SabahYessaad Mokhtari, analyse fractionnaire appliquée aux systèmes différentiels non linéaire, mémoire Présenté en vue de l'obtention du diplôme de magister en mathematiques, univercité Badji Mokhtar Annaba.

[8] V. Parthiban and K. Balachandran, solutions of System of Fractional Partial Differential Equations, Department of Mathematics Bharathiar University, April 11, 2012.

[9] Varsha Daftardar-Gejji ; Hossein Jafari, AAanalysis of a system of nonautonoous fractional differential equations involving Caputo derivatives, departement of mathematics, univercity of pune, ganeshkhind ; india, 5 july 2006.

[10] Yong Zhou, exictence and uniquness of solutions for a system of fractionnal differential equations, School of Math. and Comput. Sci. Xiangtan University Hunan,CHINA, volume 12, 2009.

[11] Bouzaroura Asma,étude d'une équation différentielle fractionnaire impulsive dans un espace de Banach, thése doctorat, Université Badji Mokhtar
Annaba, Année 2014.

[12] K. B. Oldam, J. Spanier, The fractional calculus, Academic Press. Inc (1974).

[13] Adam Loverro, fractional calculus : history, definitions and applications for the engineer, department of aerospace and Mechanical Engineering, University of Notre Dame, Notre Dame,in 46556, U.S.A, may 8, 2004.