

République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
جامعة الجيلالي بونعامة خميس مليانة  
Université Djilali Bounaâma de Khemis Miliana  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département des Sciences de la Matière



*Mémoire de fin d'étude*  
En vue de l'obtention d'un diplôme de **Master** en Physique.  
*Spécialité: physique théorique.*

**Thème :**

**Comportement du condensat de  
Bose Einstein dans un piège  
harmonique**

Devant le jury composé de :

- |                      |              |
|----------------------|--------------|
| - M. Yezli           | Président    |
| - <b>K. Redaouia</b> | Encadreur    |
| - R. Fermous         | .Examinateur |

Présenté par :

Chemani Souria.  
Guettar Siham.

*Année universitaire : 2016 / 2017 .*



## Dédicaces

*Je dédie ce travail :*

*A mes parents les très chers dans le monde, pour leur soutien et  
encouragement.*

*A mes frères et sœurs.*

*A toute ma famille du petit au grand.*

*Aux étudiants de la 02ème promotion au LMD, Surtout les étudiants  
de spécialité «physique théorique»*

*A mon binôme et sa famille*

*A ma promotrice M<sup>elle</sup> Redaouia Keltoum pour ses conseil et ses*

*Consultations qui m'ont aidé à la réalisation de mon travail.*

*Et surtout à mes très chères amies qui font mon équilibre, pour leur  
présence dans ma vie*

*Guettar Siham.*



## Dédicaces

*Je dédie ce travail :*

*A mes parents les très chers dans le monde, pour leur soutien et  
encouragement.*

*A mes frères et sœurs.*

*A toute ma famille du petit au grand.*

*Aux étudiants de la 02ème promotion au LMD, Surtout les étudiants  
de spécialité «physique théorique»*

*A mon binôme et sa famille*

*A ma promotrice M<sup>elle</sup> Redaouia Keltoum pour ses conseil et ses*

*Consultations qui m'ont aidé à la réalisation de mon travail.*

*Et surtout à mes très chères amies qui font mon équilibre, pour leur  
présence dans ma vie*

*Chemani souria.*



## *Remerciements*

*Tout d'abord, nous remercions le dieu, notre créateur de nos  
avoir donné la force, la patience et le courage afin*

*d'accomplir ce travail modeste*

*On remercie tous nos enseignants du primaire jusqu'à la*

*2<sup>ème</sup> année master*

*Nous adressons le grand remerciement à notre encadreur .....qui a  
proposé le thème de ce mémoire, pour ces conseils et ses dirigé du  
début jusqu'à la fin de ce travail.*

*Nous tenons également à remercier messieurs les membres de jury pour  
honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre  
soutenance, nous avoir fait honneur de présider le jury de cette  
mémoire.*

*Enfin, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à  
nos familles qui nous ont toujours soutenues et à tout ce qui  
participe de réaliser ce mémoire. Ainsi que*

*l'ensemble des enseignant que ont contribué à notre formation.*

**Résumé :**

Condensation de Bose Einstein a été prédite par Einstein en 1925. Elle n'a été réalisée expérimentalement qu'en 1995, une fois que les physiciens ont pu refroidir des atomes à très basse température. Cette réalisation a relancé l'intérêt des physiciens pour l'étude des atomes ultra froids, qui satisfont aux statistiques quantiques.

Nous avons considéré un gaz atomique de  $N$  bosons libres dans un piège harmonique à une, deux et trois dimensions. Nous avons déterminé le potentiel chimique, la température de condensation et l'énergie interne  $U$  de ce gaz. Nous avons constaté que le système piégé à une dimension finie présente une condensation. Nous avons montré que la température est petite. Nous avons constaté que ces grandeurs sont proches de leurs expressions thermodynamiques lorsque  $N$  est supérieur à 10000. Elles ont un comportement légèrement différent quand  $N$  est inférieur à ce nombre.

**ملخص:**

اكتشفت نظريه تكثيف بوز و اينشتاين سنة 1925 حيث قام اينشتاين باكمال عمل بوز و تم تحقيقها تجريبيا عند درجات حرارة منخفضة من رتبة نانو كلفن سنة 1995 و منذ ذلك الحين اهتم الفيزيائيون بدراسة الذرات فوق الباردة بشكل مكثف و الخاضعة لفيزياء الإحصائية الكوانتية.

هذه المذكرة تدخل في إطار الدراسة النظرية لبعض مميزات تكثيف بوز اينشتاين لهذا الغاز في بئر كموني ذو بعد واحد، بعدين و ثلاثة أبعاد حيث درسنا تغيرات الكمون الكيميائي بدلالة درجة الحرارة في كل بئر بطريقتين (الحساب الدقيق و الحساب التكاملية) ثم استنتجنا قيمة درجة حرارة التكثيف . درسنا أيضا تغيرات الطاقة الداخلية بدلالة درجة الحرارة لكل بئر.

**Abstract :**

The Bose and Einstein condensation theory was discovered in 1925 when Einstein completed the work of Boz and was experimentally tested at low temperature thermocouples of the nano-calvin class in 1995.

Since then, physicists have been interested in the study of super-cold atoms that are subject to quantum physics,

This note is part of the theoretical study of some of the characteristics of characteristics of Bose Einstein's condensation of this gas in a one-dimensional, one-dimensional, one-dimension well.

We examined the chemical quantification changes in terms of temperature in each well in tow ways (exact calculation and integrative calculation).

We also studied internal energy changes in temperature per well.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Rappels de physique statistique</b>	<b>6</b>
1.1 Introduction . . . . .	6
1.2 Fonction de partition grand-canonique . . . . .	6
1.3 Le gaz parfait quantique . . . . .	8
1.4 Condensation de Bose-Einstein . . . . .	11
1.4.1 La distribution de Bose-Einstein et le phénomène de condensation	11
1.4.2 La température de condensation . . . . .	12
1.5 Description qualitative et grandeurs physiques pertinentes . . . . .	13
1.5.1 La longueur d'onde de De Broglie . . . . .	13
<b>2 Condensation de BE dans un piège harmonique</b>	<b>17</b>
2.1 Introduction . . . . .	17
2.2 Piège harmonique à trois dimensions . . . . .	18
2.2.1 Cas où l'énergie du fondamental est nulle . . . . .	18
2.2.2 Cas où l'énergie du fondamental est non nulle . . . . .	21
2.2.3 l'énergie interne . . . . .	22
2.3 Piège harmonique à deux dimensions . . . . .	23
2.3.1 Cas où l'énergie du fondamental est nulle . . . . .	23
2.3.2 Cas où l'énergie du fondamental est prise non nulle . . . . .	24
2.3.3 L'énergie interne . . . . .	24
2.4 piège harmonique à une dimension . . . . .	25

---

2.4.1	Cas où l'énergie du fondamental est prise nulle ( $\varepsilon_0 = 0$ ) . . . . .	26
2.4.2	Cas où l'énergie du fondamental n'est pas prise nulle . . . . .	26
2.4.3	L'énergie interne . . . . .	28
2.5	Conclusion . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Résultats numériques et discussion</b>	<b>29</b>
3.1	Introduction . . . . .	29
3.2	calcul de la temperature de condensation . . . . .	30
3.2.1	Cas de piege à trois dimension . . . . .	30
3.2.2	cas de piege a deux dimension . . . . .	34
3.2.3	cas de piege a une dimension . . . . .	36
3.3	calcul energie interne . . . . .	39
3.3.1	Cas de piege à 3D . . . . .	40
3.3.2	Cas de piege à 2D . . . . .	41
3.3.3	Cas de piege à 1D . . . . .	42
3.4	Conclusion . . . . .	43
	<b>Conclusion général</b>	<b>44</b>
	<b>Appendices</b>	<b>45</b>
	<b>Bibliographique</b>	<b>47</b>

# Introduction

Suite aux travaux de bengali Satyendra Nath Bose sur le rayonnement du corps noir [1], A. Einstein prédit en 1924 [2, 3] qu'un gaz parfait de bosons devrait subir à basse température une transition de phase, dite condensation de Bose-Einstein, amenant un nombre macroscopique de particules à s'accumuler dans l'état fondamental. Le condensat obtenu est un fluide quantique car cette transition se produit lorsque les effets de statistique quantique commencent à se manifester, autrement dit lorsque la distance inter-atomique devient de l'ordre de la longueur de cohérence des ondes de matière. Plus quantitativement, la condensation de Bose-Einstein survient lorsque la température et la densité de particules  $n$  satisfont la condition  $n\lambda_{dB} \geq 2.612$  où  $\lambda_{dB} = h/\sqrt{2\pi mk_B T}$ ,  $m$  désigne la masse d'une particule et  $k_B$  la constante de Boltzmann,  $k_B = 1,380648 \cdot 10^{23}$ ,  $\lambda_{dB}$  est la longueur d'onde thermique moyenne. Cette prédiction resta à l'état spéculatif jusqu'en 1938, date de la mise en évidence par Kapitza [4], Allen et Misener [5] du caractère superfluide de l'hélium liquide à basse température. F. London [6] fit alors le rapprochement entre la prédiction d'Einstein et ce phénomène expérimental (la température de la transition superfluide  $T_C = 2.2 K$  est remarquablement proche de la température de la condensation de Bose-Einstein d'un gaz parfait de même densité que l'hélium liquide  $T_C = 3,2 K$  et il émit l'idée que les deux phénomènes étaient reliés). Ce fut le début d'une période particulièrement féconde de la physique statistique, dans laquelle furent impliqués parmi certains des plus grands noms de la discipline, tels que L. Landau ou R.P. Feynman. Notons toutefois que l'hélium superfluide étant dans une phase dense [7], sa physique est très loin de celle du gaz parfait décrit initialement par S.N. Bose et A. Einstein. Ceci rend en particulier très difficile toute description de son comportement. Ainsi, à titre d'exemple, on ne sait calculer que depuis très récemment la température de transition superfluide.



Cette situation se trouva brutalement changée en 1995, lorsque fut observée pour la première fois la condensation de Bose-Einstein de gaz d'atomes alcalins ultra froids à Boulder et au MIT [8, 9, 10] sur des atomes de sodium et de rubidium, ce qui valut le prix Nobel à E. Cornell, W. Ketterle et C. Wieman en 2001. Pour la première fois, il était possible d'observer la transition de phase prédite par Einstein dans des systèmes de très faibles densités et donc proches du gaz parfait étudié par Bose et Einstein. Après cette première démonstration expérimentale de la condensation de Bose-Einstein, d'autres expériences du même type suivirent et permirent de compléter la liste des atomes condensés. A ce jour, cette liste compte dans l'ordre chronologique les atomes de  $^{87}\text{Rb}$  [8],  $^{23}\text{Na}$  [9],  $^7\text{Li}$  [11],  $^1\text{H}$  [12],  $^{85}\text{Rb}$  mai 1998,  $^4\text{He}^*$  [13],  $^{41}\text{K}$  [14],  $^{133}\text{Cs}$  [15] et depuis peu un atome de terre rare, l'Ytterbium  $^{147}\text{Yb}$  [16]. L'étude des condensats de Bose Einstein a donné lieu à beaucoup de travaux aussi bien théoriques qu'expérimentaux. Cependant, malgré une grande quantité de résultats, ces condensats et de manière générale le comportement des gaz à basse température (donc satisfaisant aux statistiques quantiques) sont encore peu connus et beaucoup reste à faire. C'est pourquoi nous nous sommes intéressés à l'étude des condensats de Bose Einstein pour contribuer à une meilleure compréhension de leur comportement.

Dans le premier chapitre nous étudions quelques propriétés de la statistique quantique et du phénomène de condensation de Bose Einstein. Nous rappelons aussi les réalisations expérimentales des condensats de BE.

Dans le chapitre deux, nous présentons les résultats du comportement des condensats de BE d'un gaz atomique supposé gaz parfait de bosons sans interactions mutuelles dans un piège harmonique à une, deux et trois dimensions et isotrope. Nous allons prendre les valeurs exactes de l'énergie et de la dégénérescence pour calculer le nombre d'atomes dans les états excités. Notre but dans ce travail est de chercher à comprendre si nous pouvons obtenir la condensation de Bose Einstein d'un gaz piégé dans un piège harmonique à 1D. Dans ce travail nous allons utiliser deux méthodes (somme exacte et approximation par une intégrale) pour calculer le nombre des atomes piégés dans un piège 1,2 et 3D et nous comparons les résultats auxquels elles conduisent. nous allons aussi calculer l'énergie

intèrne pour les trois systèmes.

Nous présentons dans le chapitre trois des résultats numériques sur le comportement des condensats de BE dans un piège harmonique à 1,2 et 3D. Nous allons déterminer la température du condensat à partir de la variation du potentiel chimique. Nous allons comparer les résultats du calcul exact aux résultats théoriques donnés à la limite thermodynamique. Et enfin nous allons étudier le comportement de l'énergie interne à volume constant dans un piège harmonique à une, deux et trois dimensions.

Nous terminons par une conclusion générale .

# Chapitre 1

## Rappels de physique statistique

### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons brièvement quelques généralités essentielles sur les statistiques quantiques (statistique de Fermi Dirac et statistique de Bose Einstein ) d'un gaz sans interactions. De nombreux ouvrages de Mécanique Statistique et Quantique traitent du sujet ; voir par exemple [2, 3, 4].

Rappels de physique statistique , nous étudions le cas d'un gaz parfait de bosons piégés dans un potentiel harmonique . Nous mettons en évidence la singularité découverte par Einstein, qui apparait lorsque la densité dans l'espace des phases dépasse une valeur critique.

### 1.2 Fonction de partition grand-canonique

Pour décrire un ensemble des particules quantiques indiscernables, l'ensemble statistique le plus commode est l'ensemble grand-canonique [18, 19, 20]. Il est obtenu en supposant que le système considéré peut échanger de l'énergie et de particules avec un reservoir, supposé beaucoup plus grand [21]. La présence de ce reservoir fixe le nombre moyen de particules  $N$  et l'énergie moyenne  $U$ .

L'état d'équilibre est alors déterminé en choisissant l'opérateur densité du système  $\hat{\rho}$  qui maximise l'information manquante, ou entropie statistique[29] :

$$S(\hat{\rho}) = -k_B \text{Tr}(\hat{\rho} \ln(\hat{\rho})) \quad (1.1)$$

Compte-tenu des deux contraintes :

$$\langle \hat{N} \rangle = N \quad \langle \hat{H} \rangle = U \quad (1.2)$$

Cette maximisation sous contraintes se traite simplement dans le formalisme des multiplicateurs de Lagrange. On obtient :

$$\hat{\rho} = \frac{\exp(-\alpha \hat{N} - \beta \hat{H})}{Z_G} \quad Z_G = \text{Tr}(\exp(-\alpha \hat{N} - \beta \hat{H})) \quad (1.3)$$

La fonction  $Z_G$  est appelée fonction de partition grand-canonique. Les multiplicateurs de Lagrange et sont associés aux contraintes sur  $\langle \hat{N} \rangle$  et  $\langle \hat{H} \rangle$ . Le paramètre  $\beta$  est relié à la

température  $T$  par  $\beta = (k_B T)^{-1}$ . Le paramètre  $\alpha$  est relié au potentiel chimique  $\mu$  (énergie à fournir pour ajouter une particule) par  $\alpha = -\beta\mu$ , ainsi qu'à la fugacité  $z = e^{-\alpha} = e^{\beta\mu}$ .

La détermination des valeurs de  $z$  et  $\beta$  qui vérifient les contraintes (2) se fait par l'intermédiaire de :

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \ln Z_G(z, \beta, V) \quad (1.4)$$

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_G(z, \beta, V) \quad (1.5)$$

qu'il suffit d'inverser pour obtenir  $z$  et  $\beta$  comme fonctions de  $N$  et  $U$ .

Une fois  $Z_G$  déterminée, toutes les grandeurs thermodynamiques s'en déduisent par simple dérivation. Ainsi la pression se détermine à partir de :

$$P = k_B T \frac{\partial}{\partial V} \ln Z_G(z, \beta, V) \quad (1.6)$$

### 1.3 Le gaz parfait quantique

Le calcul explicite de  $Z_G$ , qui permet d'obtenir des résultats explicites à partir d'expressions comme (6) est très ardu dans le cas général d'un fluide en interaction. En revanche, le cas du gaz parfait peut être traité exactement d'une manière remarquablement simple, comme nous allons le voir d'hamiltoniens à un corps :

$$\hat{H} = \hat{h}_1 + \hat{h}_2 + \dots \hat{h}_N. \quad (1.7)$$

Notons  $\{|\lambda\rangle\}$  une base de vecteurs propres de l'hamiltonien à un corps  $\hat{h}$ , et  $\hat{H}$  l'énergie associée à un corps :

$$\hat{h} |\lambda\rangle = \epsilon_\lambda |\lambda\rangle \quad (1.8)$$

Passons maintenant en seconde quantation, et introduisons les opérateurs de destruction  $a_\lambda$  et de création  $a_\lambda^+$  d'une particule dans l'état individuel  $\lambda$ . L'hamiltonien total et l'opérateur nombre de particules s'écrivent :

$$\hat{H} = \sum \epsilon_\lambda a_\lambda^+ a_\lambda \quad \hat{N} = \sum a_\lambda^+ a_\lambda \quad (1.9)$$

Une base d'états propres de l'espace de Fock est  $\{ |N_\lambda, N_{\lambda'}, N_{\lambda''}\rangle \}$  où les nombres d'occupation  $N_\lambda$  des états quantiques individuels (*i*) valent 0 ou 1 dans le cas de fermions, (*ii*) sont des entiers positifs ou nuls quelconques dans le cas de bosons. On note par

commodité  $l$  un ensemble donné  $\{N_\lambda\} : |l\rangle \equiv |N_\lambda, N_{\lambda'}, N_{\lambda''}, \dots\rangle$ . On a donc

$$\hat{N} |l\rangle = N_l |l\rangle \quad \text{avec} \quad N_l = \sum N_\lambda \quad (1.10)$$

$$\hat{H} |l\rangle = E_l |l\rangle \quad \text{avec} \quad E_l = \sum N_\lambda \epsilon_\lambda \quad (1.11)$$

La fonction de partition grand-canonique  $Z_G$  donnée en (3) se calcule aisément dans la base  $|l\rangle$  :

$$\begin{aligned} Z_G &= \sum \exp(-\alpha N_l - \beta E_l) \\ &= \sum \exp -(\alpha + \beta \epsilon_\lambda) N_\lambda \times \exp -(\alpha + \beta \epsilon_{\lambda'}) N_{\lambda'} \times \exp -(\alpha + \beta \epsilon_{\lambda''}) N_{\lambda''} \times \dots \prod \zeta_\lambda \end{aligned} \quad (1.12)$$

ou on a posé :

$$\zeta_\lambda = \sum \exp -(\alpha + \beta \epsilon_\lambda) N_\lambda \quad (1.13)$$

Cette factorisation de  $Z_G$  en produit de fonctions de partition, relatives chacune à un état quantique individuel  $\lambda$  est l'avantage majeur de l'utilisation du formalisme grand-canonique.

#### **Cas des fermions : statistique de Fermi-Dirac :**

Pour des fermions, les valeurs possibles de  $N_\lambda$  dans la somme (1.13) sont  $N_\lambda = 0$  ou  $N_\lambda = 1$  on a donc :

$$\zeta_\lambda^{(F)} = 1 + \exp(-\alpha - \beta \epsilon_\lambda) = 1 + z \exp(-\beta \epsilon_\lambda). \quad (1.14)$$

La fonction de partition vérifie :

$$\ln Z_G = \sum_{\lambda} \ln(1 + z \exp(-\beta\epsilon_{\lambda})). \quad (1.15)$$

En

utilisant (1.4), on en déduit l'expression du nombre de particules total dans le système :

$$N = \sum_{\lambda} N_{\lambda} \quad \text{avec} \quad N_{\lambda} = \frac{1}{\exp \beta(\epsilon_{\lambda} - \mu) + 1} \quad (1.16)$$

Pour un système de température fixée, le potentiel chimique peut prendre n'importe quelle valeur, positive ou négative. Une valeur grande et négative correspond à un nombre moyen de particules très faible, donc à un système bien décrit par la statistique de Boltzmann classique :

$$\mu \rightarrow -\infty \quad N_{\lambda} \simeq z \exp(-\beta\epsilon_{\lambda}). \quad (1.17)$$

Une valeur positive et grande devant  $k_B T$  correspond au contraire à un nombre de particules très élevé, et donc à un gaz de Fermi fortement dégénéré. Les nombres d'occupation  $N_{\lambda}$  valent presque 1 si  $\epsilon_{\lambda} < \mu$  et 0 sinon.

#### Cas des bosons : statistique de Bose-Einstein :

Pour des bosons, le calcul de (13) se ramène à une série géométrique, soit :

$$\zeta_{\lambda}^{(B)} = \frac{1}{1 - \exp(-\alpha - \beta\epsilon_{\lambda})} \quad (1.18)$$

$$N = \sum_{\lambda} N_{\lambda} \quad \text{avec} \quad N_{\lambda} = \frac{1}{\exp \beta(\epsilon_{\lambda} - \mu) - 1} \quad (1.19)$$

Dans ce cas le potentiel chimique peut prendre toutes les valeurs depuis  $-\infty$  jusqu'à  $\epsilon_{\min}$ , qui représente l'énergie du niveau fondamental de  $\hat{h}$ . Pour un potentiel chimique au delà de cette valeur, la population de ce niveau fondamental deviendrait négative, ce qui n'a bien sur aucun sens. Comme pour le gaz de Fermi, les valeurs grandes et négatives de  $\mu$  correspondent à un gaz bien décrit par la physique classique

(distribution de Boltzmann) :

$$\mu \rightarrow -\infty \quad N_\lambda = Z \exp(-\beta\epsilon_\lambda). \quad (1.20)$$

## 1.4 Condensation de Bose-Einstein

### 1.4.1 La distribution de Bose-Einstein et le phénomène de condensation

Considérons un ensemble grand canonique d'atomes bosoniques identiques, sans interactions mutuelles, en contact avec un thermostat. Il s'agit de trouver l'état macroscopique le plus probable du gaz pour des valeurs fixées du nombre total  $N$  d'atomes et de l'énergie totale moyenne  $U$  de ces atomes [17, 18] :

$$\sum_{\nu} N_{\nu} = N \quad \sum_{\nu} N_{\nu} E_{\nu} = U \quad (1.21)$$

Le calcul du nombre d'états microscopiques distincts correspondant à un état macroscopique défini par l'ensemble  $\{N_{\nu}\}$  des nombres d'atomes a été effectué la première fois par A. Einstein [18]. Ce calcul suppose les atomes indiscernables. La recherche du maximum de ce nombre, compte tenu des contraintes (2.20) donne le nombre moyen d'occupation  $n_{\nu} = N_{\nu}/g_{\nu}$  (ou  $g_{\nu}$  la dégénérescence du niveau  $\nu$ ) d'une cellule ou état quantique  $\nu$  d'énergie  $\epsilon_{\nu}$ .

Le nombre total de particules s'écrit :



$$N = \sum_{\nu} N_{\nu} = \sum_{\nu} g_{\nu} n_{\nu} = \sum_{\nu} \frac{g_{\nu}}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_{\nu}} - 1} \quad (1.22)$$

Il faut ensuite inverser cette équation pour obtenir  $z$  en fonction de  $N$  et de  $T$ .

On peut écrire l'équation (1.21) en séparant l'occupation du fondamental de celle des états excités, comme suit

$$N = N_0 + N_e = \frac{z}{1-z} + \sum_{\nu \neq 0} \frac{g_{\nu}}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_{\nu}} - 1} \quad (1.23)$$

Le point important, qui permet de comprendre le phénomène de condensation, est que la valeur de  $N_{e \max}$  est finie. A une température  $T$  et un volume  $V$  fixés, quand le nombre total  $N_{e \max}$  d'atomes piégés devient supérieur à cette valeur  $N_e \max$ , il est impossible pour les populations des états excités d'accueillir l'ensemble des atomes. L'excédent de population  $N - N_{e \max}$  se condense alors nécessairement dans l'état fondamental, c'est-à-dire que pour  $z \rightarrow 1$ , le nombre d'atomes  $N_0$  dans l'état fondamental devient macroscopique. C'est ce phénomène que l'on appelle :

« Condensation de Bose Einstein ».

### 1.4.2 La température de condensation

On définit la température de condensation de Bose Einstein  $T_C$  comme la température pour laquelle le nombre d'atomes dans l'ensemble des états excités est égal au nombre total des atomes du gaz ( $N = N_{e \max}$ ). Pour  $T < T_C$  un grand nombre de particules se condensent dans l'état fondamental ce qui donne  $N_0 \approx N$ . Cette température est la température critique de transition de phase. Cette transition de phase a été prévue par Einstein pour un gaz de bosons, et la conséquence de cette transition est l'apparition d'une nouvelle forme de la matière qui s'appelle condensat de Bose-Einstein. Cette phase est caractérisée par des propriétés remarquables telles que la supraconductivité et la superfluidité. Tous ces effets sont en principe observés aux températures très basses, qui sont déterminées par les propriétés des particules engagées (des paires d'électrons ou des atomes). Les résultats expérimentaux montrent que la température de condensation est très basse, de l'ordre de

quelques centaines de nano kelvins. Nous allons étudier numériquement et théoriquement le comportement de cette température dans un piège harmonique à une, deux et trois dimensions et isotrope.

## 1.5 Description qualitative et grandeurs physiques pertinentes

### 1.5.1 La longueur d'onde de De Broglie

En mécanique quantique, toute particule est décrite par une fonction d'onde :

$$|\Psi(\vec{r})|^2 d^3r$$

représente la probabilité de présence de la particule dans l'espace (probabilité de trouver la particule à la position comprise entre  $\vec{r}$  et  $\vec{r} + d\vec{r}$ ). La précision avec laquelle on détermine sa position est régie par le principe d'incertitude de Heisenberg :

$\Delta x \cdot \Delta p > \hbar$  et une relation similaire en  $y$  et en  $z$  ) où  $\Delta x$  est l'extension spatiale de la fonction d'onde  $\Psi$  (incertitude en position) et  $\Delta p_x$  l'incertitude sur l'impulsion de la particule.

Pour un gaz d'atomes ultrafroid ( $T \sim 100 \mu K$ ), la vitesse d'agitation thermique moyenne est très petite. Elle est autour de 20 cm/s.  $\Delta p_x$  est petit, donc  $\Delta x$  est "grand", c'est à dire que la fonction d'onde est plus étendue que la taille de la particule. L'extension spatiale  $\Delta x$  de la fonction d'onde  $\Psi$  vaut :

$\Lambda = \lambda_{db} = \frac{h}{\sqrt{2m\pi k_B T}}$  ou  $\lambda_{db}$  est la longueur d'onde thermique de Broglie. On peut imaginer des situations où la délocalisation des particules, que l'on considère comme des paquets d'onde aux yeux de la mécanique quantique, devient de l'ordre des distances inter atomiques  $\left(n^{-\frac{1}{3}}\right)$ , où  $n$  est la densité spatiale. Par exemple quand la température est très basse (la longueur d'onde thermique est très grande), ou quand la densité est grande (la distance interatomiques diminue). Cette condition se traduit par le critère sur la densité  $D$  dans l'espace des phases, telle que :  $D = n\lambda_{db}^3 \approx 2.612$  [30]

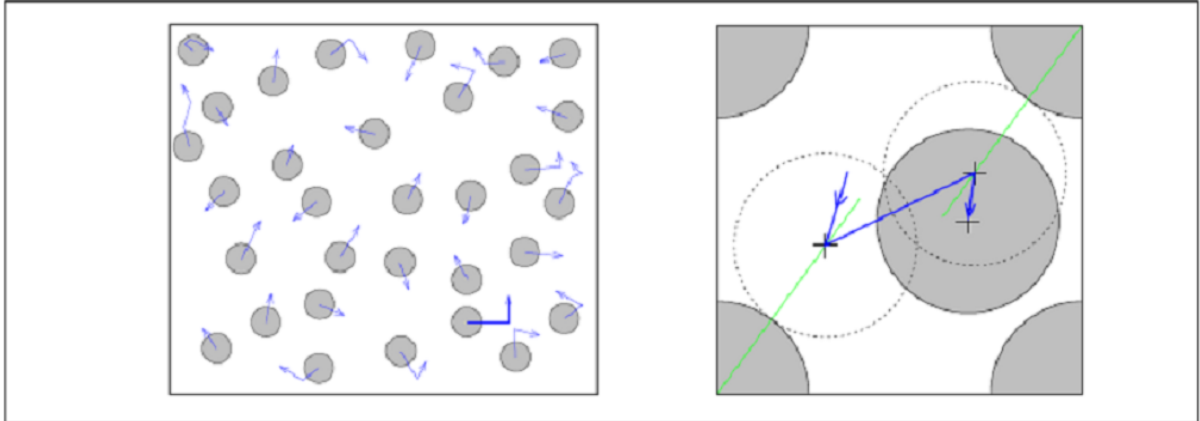


Figure 1-1 : À gauche on voit un gaz dont l'étalement des atomes est déjà bien plus important que dans la vision classique. À droite cet étalement a surpassé les distances interatomiques conduisant à une fusion de tous les paquets d'ondes en un seul. C'est ce qui se produit dans les gaz à très basse température  $T \approx 1\mu K$  conduisant les atomes à constituer un condensât de Bose-Einstein.

### -Ordres de grandeurs

Maintenant qu'on a vu les grandeurs pertinentes, on peut fixer les idées avec quelques ordres de grandeurs. La plupart des condensats atomiques, pour ne pas dire tous, sont réalisés expérimentalement à partir de gaz monoatomiques, issues de la famille des alcalins (première colonne de la classification périodique), comme le Rubidium ou le Césium par exemple. En générale on a :  $n \sim 10^{20} \text{ Atomes}/m^3$ ,  $T \sim 1\mu k$ ,  $N \sim 10^5 \text{ Atomes}$  [14].

### L'observation expérimentales de condensation de BE

L'observation expérimentale des condensats de BE a été possible grâce au développement des techniques de refroidissement d'atomes par laser. Les très basses températures atteintes ont permis d'atteindre le régime de condensation pour des gaz suffisamment dilués pour que les interactions ne masquent pas le phénomène de condensation. En 1995, une condensation proche du cas idéal a pu être réalisée [22] : une équipe du laboratoire NIST/JILA (Boulder, Colorado, États-Unis), dirigée par Eric Cornell et Carl Wieman,

est parvenue à obtenir pendant quelques secondes un condensat de Bose-Einstein ; il était constitué de quelques milliers d'atomes de rubidium pré-refroidis par laser, puis refroidis plus avant par « évaporation » dans un piège magnétique. La température du gaz était alors de l'ordre de 100 nK.

Un troisième chercheur, Wolfgang Ketterle diplômé de l'université Ludwig-Maximilian de Munich, étudie également de son côté « le refroidissement par laser et le piégeage des atomes froids » ainsi que la superfluidité dans les gaz à « haute température ».

Ces trois chercheurs (Cornell, Wieman et Ketterle), recevront en 2001, le prix Nobel de physique « pour la découverte de la condensation de Bose-Einstein dans les gaz et pour des avancées dans l'étude des propriétés de ces condensats ».

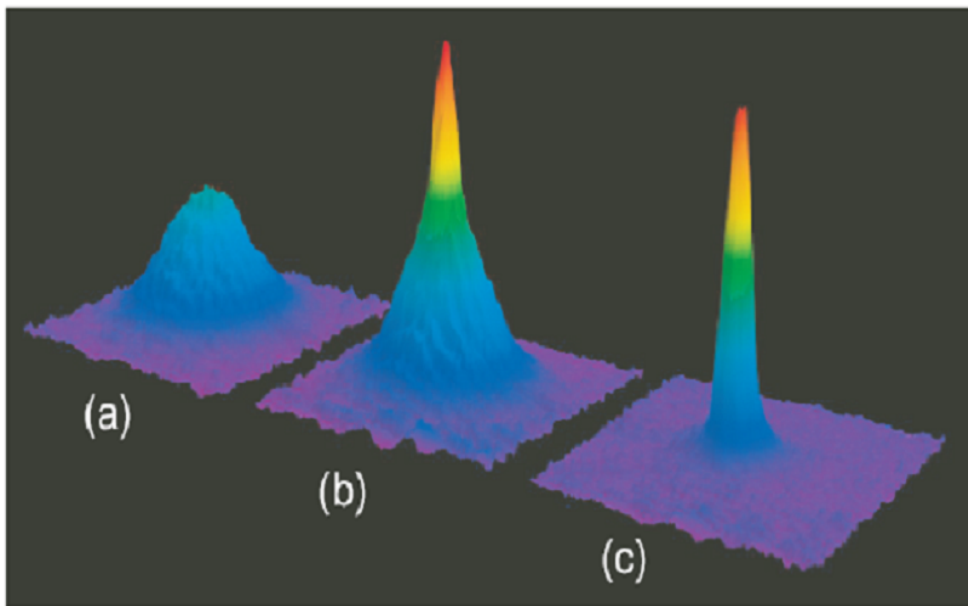


Figure 1-2 : condensation d'un gaz d'atomes de rubidium observé à Boulder dans le groupe d'Eric Cornell et Carl Wieman à Boulder en 1995. La figure donne la distribution en vitesse des atomes dans le piège. A gauche, le nuage d'atomes est encore relativement chaud, la dispersion des vitesses atomiques est grande, et le condensat ne s'est pas formé. Au centre, on observe la superposition du condensat (pic étroit au centre) et d'un piédestal correspondant aux atomes plus énergétiques, non condensés. Sur l'image de droite, le

refroidissement a été suffisamment fort pour que pratiquement tous les atomes soient condensés.

# Chapitre 2

## Condensation de BE dans un piège harmonique

### 2.1 Introduction

Dans cette section, nous considérons la condensation de Bose Einstein d'un système de  $N$  atomes bosoniques piégés dans un potentiel harmonique. Les auteurs [23, 24, 25], obtiennent les expressions différentes du nombre d'atomes dans les états excités pour les systèmes à une, deux et trois dimensions. En particulier, ce nombre est fini pour deux et trois dimensions et infini pour le cas à une dimension lorsque la température se rapproche de la température de condensation. Il est alors admis que la condensation de Bose Einstein se produit dans les systèmes à deux et trois dimensions alors qu'elle ne se produit pas dans les systèmes à une dimension.

Dans une première partie de ce travail, nous proposons des expressions plus précises du nombre de particules dans les états excités pour ces différentes dimensions, obtenues en utilisant les expressions exactes des énergies du fondamental et des niveaux excités. Notre but dans ces expressions est de répondre à la question : peut on obtenir la condensation de BE dans un piège harmonique à une dimension ?

Dans une deuxième partie, nous étudions l'énergie interne et sa fluctuation à volume constant d'un système de particules bosoniques piégées dans un potentiel harmonique à

une, deux puis trois dimensions.

## 2.2 Piège harmonique à trois dimensions

Considérons le cas d'un gaz d'atomes bosoniques sans interactions piégés dans un potentiel harmonique tridimensionnel (3D), qu'on écrit sous la forme suivante :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (2.1)$$

Les bosons sont répartis sur différents niveaux d'énergie individuels de l'hamiltonien  $\hat{h} \left( \hat{h} = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) \right)$  caractérisés par les trois nombres quantiques  $n_x, n_y, n_z$ . La valeur propre  $\varepsilon_n$  de l'état  $\hat{h}$  est égale à :

$$\varepsilon_n = \hbar \left[ \left( \omega_x \left( n_x + \frac{1}{2} \right) + \omega_y \left( n_y + \frac{1}{2} \right) + \omega_z \left( n_z + \frac{1}{2} \right) \right) \right] \quad (2.2)$$

On peut écrire  $\varepsilon_n$  dans le cas d'un potentiel harmonique isotrope à 3D de fréquences  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega_0$  sous la forme :

$$\varepsilon_n = \hbar\omega_0 \left[ n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right] = n\hbar\omega_0 + \varepsilon_0 \quad (2.3)$$

Avec

$$n = n_x + n_y + n_z \text{ et } \varepsilon_0 = \frac{3}{2} \hbar\omega_0 \quad (2.4)$$

$\varepsilon_0$  est l'énergie de l'état fondamental du piège harmonique isotrope. La dégénérescence  $g_{n3}$  de la valeur propre  $\varepsilon_n$  dans le cas à trois dimensions est égale à :

$$g_{n3} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} + 1 \quad (2.5)$$

### 2.2.1 Cas où l'énergie du fondamental est nulle

Les auteurs des références [26, 23] ont considéré que l'énergie de l'état fondamental du piège harmonique 3D, isotrope est nulle ( $\varepsilon_0 = 0$ ). Le nombre de particules dans cet état est donné par l'expression suivante :

$$N_0 = \frac{z}{z-1} \quad (2.6)$$

Et l'occupation dans les états excités est donnée par l'expression suivante :

$$N_e = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_{i3}}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon_i} - 1} \quad (2.7)$$

L'expression de  $N_e$  est obtenue en utilisant d'abord la formule de sommation d'Euler-Mac Laurin [27] puis la méthode d'intégration utilisant le développement en série, présentée dans les appendices (A, B et C) :

$$N_e = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{(x^2 + 3x)ze^{-\alpha x} dx}{1 - ze^{-\alpha x}} = \frac{1}{\alpha^3} \text{poly log}(3, z) + \frac{3}{2\alpha^2} \text{poly log}(2, z) \quad (2.8)$$

Où  $\text{poly log}(m, z)$  est la fonction Polyogarithme (voir appendice A)

et  $\alpha = \frac{\hbar\omega_0}{k_B T}$

L'expression (8) a été obtenue en négligeant le dernier terme de  $g_{n3}$ . La fonction de Bose  $g_m(z)$ , utilisée dans certains livres [28] et définie par :

$$g_m(z) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{z^{-1}e^x - 1} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^m} \quad (2.9)$$

est équivalente à la fonction  $\text{poly log}(m, z)$

Donc le nombre total  $N$  de particules dans le piège est tel que :

$$N = N_0 + N_e = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{\alpha^3} \text{poly log}(3, z) + \frac{3}{2\alpha^2} \text{poly log}(2, z) \quad (2.10)$$

### Température de condensation et fraction condensée

En se limitant au premier terme de l'équation (2.7) :

$$N_e = \frac{1}{\alpha^3} \text{poly log}(3, z) \quad (2.11)$$

$N_e$  est une fonction croissante de  $z$ . où  $z$  est limité par 1. Donc  $N_e$  prend une valeur maximale lorsque  $z \rightarrow 1$



$$N_{e(\max)} = \frac{1}{\alpha^3} \text{poly log}(3, 1) = \frac{1}{\alpha^3} 1, 202 \quad (2.12)$$

Lorsque  $N > N_{e(\max)}$ , la différence  $N_0 = N - N_{e(\max)}$  s'accumule dans le fondamental. On a condensation de Bose Einstein. Cette condensation commence à se produire pour  $T = T_C$  telle que :

$$N = \left( \frac{k_B T_C}{\hbar \omega_0} \right)^3 1, 202 \quad (2.13)$$

$$\frac{T_C}{T'} = N^{\frac{1}{3}} \quad (2.14)$$

Avec

$$T' = \frac{0.94 \hbar \omega_0}{k_B} \quad (2.15)$$

On peut écrire (2.14) sous la forme :

$$k_B T_C \approx \hbar \omega_0 N^{\frac{1}{3}} \quad (2.16)$$

Le mécanisme qui induit la condensation est donc la saturation de la population totale dans les états excités. Elle se produit d'après (2.12) quand le potentiel chimique devient égal à l'énergie de l'état fondamental). La fraction d'atomes condensés dans l'état ( $\mu \rightarrow \varepsilon_0$ ) fondamental est :

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_C} \right)^3 \text{ pour } T \leq T_C \quad (2.17)$$

Comme on a  $N \gg 1$ , on voit clairement que de (2.16)  $k_B T_C$  (l'énergie thermique) peut être beaucoup plus grande que  $\hbar \omega_0$  (l'intervalle d'énergie entre deux états consécutifs du piège), donc l'approximation  $\frac{\hbar \omega_0}{k_B T_C} \ll 1$  est valid

### La limite thermodynamique

La limite thermodynamique est obtenue en faisant tendre  $N$  vers l'infini. Il y a condensation de Bose Einstein d'un gaz bosonique confiné dans un piège harmonique  $3D$  et isotrope si  $T_C \neq 0$ , lors d'une telle limite. L'équation (2.14) montre qu'il faut également faire tendre  $\omega_0$  vers zéro quand  $N \rightarrow \infty$ , en gardant  $\omega_0 N^{\frac{1}{3}}$  ou  $N\omega_0^3$  constant. C'est-à-dire

$$N \rightarrow \infty, \omega_0 \rightarrow 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 N^{\frac{1}{3}} = cte \quad (2.18)$$

L'interprétation physique de(2.16) est claire. En effet l'expression(2.11) montre que  $N_e$  varie en  $\frac{1}{\alpha^3}$  et  $\frac{1}{\omega_0^3}$ , la condition  $N\omega_0^3 = cte$  signifie que la densité moyenne du nuage thermique reste constante quand on augmente  $N$ .

### 2.2.2 Cas où l'énergie du fondamental est non nulle

Nous considérons des particules dans un piège harmonique à trois dimensions. Nous prenons les valeurs exactes des niveaux d'énergie en particulier la valeur exacte de l'énergie du fondamental (qui est non nulle). Nous prenons aussi la dégénérescence exacte des niveaux d'énergie.

L'occupation de l'état fondamental est :

$$N_0 = \frac{z_1}{1 - z_1} \quad \text{avec} \quad z_1 = z_1 e^{-\frac{3\alpha}{2}} \quad (2.19)$$

C'est donc la fugacité effective  $z_1$  (et non la fugacité  $z$ ) qui tend vers 1 à la température de condensation.

L'occupation des niveaux excités est :

$$N_e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n 3}{e^{\beta(\varepsilon_n - \mu)} - 1} \quad (2.20)$$

On utilise la formule de sommation d'Euler-Mac Laurin avec le 2<sup>ème</sup> terme puis la méthode d'intégration développée dans les appendices [A, B et C], pour obtenir l'expression de  $N_e$  suivante :

$$N_e = \int_1^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)/2}{z_1^{-1}e^{\alpha x} - 1} dx + \frac{1}{4} \frac{5z_1e^{-\alpha}}{1 - z_1e^{-\alpha}} \quad (2.21)$$

Donc le nombre total d'atomes s'écrit :

$$N = \frac{z_1}{z_1 - 1} + \frac{1}{\alpha^3} \text{poly log} [3, z_1e^{-\alpha}] + \frac{5}{2\alpha^2} \text{poly log} [2, z_1e^{-\alpha}] + \frac{3}{\alpha} \text{poly log} [1, z_1e^{-\alpha}] + \frac{1}{4} \frac{5z_1e^{-\alpha}}{1 - z_1e^{-\alpha}} \quad (2.22)$$

### 2.2.3 l'énergie interne

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à l'énergie interne à volume constant de ce gaz. Nous pensons que notre approximation qui consiste à utiliser une énergie du fondamental non nulle conduira à des résultats différents de ceux de la littérature (où l'on prend  $\varepsilon_0 = 0$ )

l'énergie interne  $U$  définie par l'expression :

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_{n3}\varepsilon_n}{e^{\beta(\varepsilon_n - \mu)} - 1} \quad (2.23)$$

En prenant l'expression exacte des niveaux d'énergie , on a :

$$U = \hbar\omega_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n + 3/2)g_{n3}}{e^{\frac{\hbar\omega_0}{k_B T}(n+3/2 - \mu')} - 1}$$

Avec

$$\mu' = \frac{\mu}{\hbar\omega_0} \quad (2.24)$$

On utilise toujours la formule de sommation d'Euler Mac Laurin puis la méthode d'intégration développée dans les appendices [A,B et C], on trouve :

$$\frac{U}{\hbar\omega_0} = \frac{3}{\alpha^4} \text{PoyLog}(4, z_1) + \frac{9}{2\alpha^3} \text{PoyLog}(3, z_1) + \frac{13}{4\alpha^2} \text{PoyLog}(2, z_1) + \frac{3}{2\alpha} \text{PoyLog}(1, z_1) \quad (2.25)$$

- pour  $T < T_C$  on a  $z_1 = 1$  et  $N \approx \frac{1}{\alpha^3} \frac{k_B T_C}{\hbar\omega_0} \text{PoyLog}(3, z_1)$

L'énergie interne  $U$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$U \approx 3Nk_B T \left( \frac{T}{T_C} \right)^3 \frac{\text{PoyLog}(4, 1)}{\text{PoyLog}(3, 1)} \quad (2.26)$$

cette equation on peut dire que l'énergie  $U$  est discontinue en  $T = T_C$

- pour  $T > T_C$  on a  $N \approx \frac{1}{\alpha^3} \text{PoyLog}(3, z_1)$  ; l'engie interne s'ecrit :

$$U \approx 3Nk_B T \frac{\text{PoyLog}(4, z_1 e^{-\alpha})}{\text{PoyLog}(3, z_1 e^{-\alpha})} \quad (2.27)$$

- pour cette limite on a  $z_1 e^{-\alpha} \ll 1$  (  $\text{PoyLog}(4, z_1) \approx \text{PoyLog}(3, z_1 e^{-\alpha}) \approx z_1 e^{-\alpha}$  )

l'engie interne devient :  $U \approx 3Nk_B T$  c'est une equation d'etat d'un gaz parfaits a la limite classique.

## 2.3 Piège harmonique à deux dimensions

Considérons un gaz idéal de bosons piégés dans un potentiel hamonique à 2D et isotrope ( $\omega_0 = \omega_x = \omega_y$ )

Les niveaux d'énergie s'écrivent :

$$\varepsilon_n = \hbar\omega_0(n_x + n_y + 1) = n\hbar\omega_0 + \varepsilon_0 \quad (2.28)$$

Avec

$$n = (n_x + n_y) \quad \text{et} \quad \varepsilon_0 = \hbar\omega_0 \quad (2.29)$$

$\varepsilon_0$  est l'énergie de l'état fondamental du piège harmonique isotrope. La dégénérescence  $g_{n2}$  de la valeur propre  $\varepsilon_n$  est égale à :

$$g_{n2} = n + 1 \quad (2.30)$$

### 2.3.1 Cas où l'énergie du fondamental est nulle

Les précédents auteurs [26, 25 et 24] considèrent énergie de l'état fondamental du piège harmonique à 2D et isotrope nulle. Le nombre de particules dans cet état fondamental est

donné par l'équation (2.6).

Le nombre de particules dans les états excités est alors :

$$N_e = \int_0^{\infty} \frac{x z e^{-\alpha x} dx}{1 - z e^{-\alpha x}} = \frac{1}{\alpha^2} \text{poly log}(2, z) \quad (2.31)$$

Cette expression est obtenue en négligeant le terme constant dans la dégénérescence  $g_{n2}$ .

Le nombre total d'atomes est donné par la relation :

$$N = \frac{z}{1 - z} + \frac{1}{\alpha^2} \text{poly log}(2, z) \quad (2.32)$$

### 2.3.2 Cas où l'énergie du fondamental est prise non nulle

Considérons maintenant l'énergie de l'état fondamental du piège harmonique à 2D et isotrope non nulle ; le nombre de particules dans cet état est :

$$N_0 = \frac{z_1}{1 - z_1} \quad (2.33)$$

Où  $z_1 = z e^{-\alpha}$ . L'occupation des niveaux excités est :

$$N_e = \frac{1}{\alpha^2} \text{poly log} [2, z_1 e^{-\alpha}] + \frac{2}{\alpha} \text{poly log} [1, z_1 e^{-\alpha}] + \frac{1}{2} \frac{2z_1 e^{-\alpha}}{1 - z_1 e^{-\alpha}} \quad (2.34)$$

Le nombre moyen total  $N$  de bosons piégés dans le potentiel harmonique est alors :

$$N = \frac{z_1}{z_1 - 1} + \frac{1}{\alpha^2} \text{poly log} [2, z_1 e^{-\alpha}] + \frac{2}{\alpha} \text{poly log} [1, z_1 e^{-\alpha}] + \frac{1}{2} \frac{2z_1 e^{-\alpha}}{1 - z_1 e^{-\alpha}} \quad (2.35)$$

### 2.3.3 L'énergie interne

L'énergie interne est donnée par :

$$U = \hbar\omega \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) g_{n2}}{e^{\alpha(N+1-\mu')} - 1} \quad (2.36)$$

On utilise toujours la formule de sommation d'Euler-maclaurin puis la méthode d'intégration développée dans les appendices [A, B et C], l'équation (2.35) pour déterminer l'énergie  $U$  :

$$\frac{U}{\hbar\omega_0} = \frac{2}{\alpha^3} \text{poly log}(3, z_1) + \frac{2}{\alpha^2} \text{poly log}(2, z_1) + \frac{1}{\alpha} \text{poly log}(1, z_1) \quad (2.37)$$

• Pour  $T < T_C$  on a  $z_1 = 1$ ;  $N \approx (k_B T_C / \hbar\omega)^2 \text{poly log}(2, 1)$ . L'expression de l'énergie interne  $U$  devient :

$$U \approx 2Nk_B T \left( \frac{T}{T_C} \right)^2 \frac{\text{poly log}(3, 1)}{\text{poly log}(2, 1)} \quad (2.38)$$

• Pour  $T > T_C$  on a  $N \approx (k_B T_C / \hbar\omega)^2 \text{poly log}(2, 1)$ . L'expression de l'énergie interne  $U$  devient :

$$U \approx 2Nk_B T \frac{\text{poly log}(3, z_1)}{\text{poly log}(2, z_1)} \quad (2.39)$$

• Pour cette limite on a  $z_1 \ll 1$ , l'énergie interne devient :  $U \approx 2Nk_B T$  c'est une équation d'état d'un gaz parfait à la limite classique.

## 2.4 piège harmonique à une dimension

On considère maintenant un gaz idéal de bosons piégé dans un potentiel harmonique à 1D

$$(\omega_0 = \omega_x)$$

$$\varepsilon_n = \hbar\omega_0 \left( n_x + \frac{1}{2} \right) = n\hbar\omega_0 + \varepsilon_0 \quad (2.40)$$

$$n = n_x \quad \text{et} \quad \varepsilon_0 = \hbar\omega_0/2 \quad (2.41)$$

$\varepsilon_0$  est l'énergie de l'état fondamental du piège harmonique isotrope à 1D. Les valeurs propres sont  $\varepsilon_n$  non dégénérées.

### 2.4.1 Cas où l'énergie du fondamental est prise nulle ( $\varepsilon_0 = 0$ )

Les précédents auteurs [26, 25 et 24] considèrent l'énergie de l'état fondamental du piège harmonique à 1D et isotrope nulle; le nombre de particules dans cet état est alors donné par l'équation (2.6).

Le nombre de particules dans les états excités est :

$$N_e = \frac{K_B T}{\hbar \omega_0} \text{poly log}(1, z) \quad (2.42)$$

Et le nombre total d'atome est :

$$N = N_0 + N_e = \frac{z}{1-z} + \frac{K_B T}{\hbar \omega_0} \text{poly log}(1, z) \quad (2.43)$$

Lorsque  $z$  tend vers 1, le nombre de particules non condensées tend vers l'infini (  $N_e \rightarrow \infty$  ) .

Donc dans ce cas, il n'y a pas de condensation de BE.

Les auteurs [26, 25 et 24] en ont déduit que la condensation de BE n'a pas lieu pour un piège à une dimension.

### 2.4.2 Cas où l'énergie du fondamental n'est pas prise nulle

Nous tenons compte systématiquement du fait que l'énergie du fondamental n'est pas nulle et prenons les expressions exactes des niveaux d'énergie.

$$N_0 = \frac{z_1}{1-z_1} \quad (2.44)$$

L'occupation des niveaux excités est :

$$N_e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_1 e^{-\alpha n}}{1-z_1 e^{-\alpha n}} = \int_1^{\infty} \frac{z_1 e^{-\alpha x} dx}{1-z_1 e^{-\alpha x}} + \frac{1}{2} \frac{z_1 e^{-\alpha}}{1-z_1 e^{-\alpha}} \quad (2.45)$$

$$z_1 = z e^{-\alpha/2}$$

Pour le calcul de ce type d'intégrale voir les appendices C et D

En prend le premier terme de l'équation (2.43) on trouve

$$N_e = \frac{1}{\alpha} \text{poly log}[1, z_1 e^{-\alpha}] \quad (2.46)$$

Donc le nombre total  $N$  est :

$$N = \frac{z_1}{1 - z_1} + \frac{1}{\alpha} \text{poly log}[1, z_1 e^{-\alpha}] \quad (2.47)$$

La condensation de Bose Einstein se produit lorsque  $z_1 \rightarrow 1$ . Nous constatons alors  $N_e \text{ max} = \frac{1}{\alpha} \text{poly log}[1, e^{-\alpha}]$  est maintenant fini : il y a donc condensation de Bose Einstein dans les systèmes piégés à une dimension, au moins quand la taille du système considéré est finie.

Le théorème de non existence d'une transition à 1D n'y est pas applicable (car il s'applique à la limite thermodynamique).

- Pour  $T = T_C$ , correspondant à  $z_1 = 1$  ( $\mu \approx \varepsilon_0$ ) on a :

$$N = \frac{K_B T_C}{\hbar \omega_0} \left[ -\log \left( 1 - e^{-\frac{\hbar \omega_0}{K_B T_C}} \right) \right] \quad (2.48)$$

- Pour  $T > T_C$  correspondant à  $\mu < \varepsilon_0$  on a :

$$N = \frac{K_B T}{\hbar \omega_0} \left[ -\log \left( 1 - e^{-\frac{3\hbar \omega_0}{2K_B T}} \right) \right] \quad (2.49)$$

- Pour  $T < T_C$  on a toujours  $z_1 \rightarrow 1$  ( $\mu \rightarrow \varepsilon_0$ ) :

$$N = N_0 + \frac{K_B T}{\hbar \omega_0} \log \left[ -\log \left( 1 - e^{-\frac{\hbar \omega_0}{K_B T}} \right) \right] \quad (2.50)$$

Comme  $k_B T_C \gg \hbar \omega_0$ , on peut développer  $1 - e^{-\hbar \omega_0 / K_B T_C}$ , ce qui conduit à la relation suivante :

$$N = N_0 + \frac{K_B T_C}{\hbar \omega_0} \log \frac{K_B T_C}{\hbar \omega_0} \quad (2.51)$$



### 2.4.3 L'énergie interne

l'énergie interne  $U$  est définie comme suit :

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n + 1/2) \hbar \omega_0}{e^{(n+1/\mu')} - 1} \quad (2.52)$$

On utilise toujours la formule de sommation d'Euler Mac Laurin puis la méthode d'intégration développée dans les appendices [A, B et C], l'équation (2.50) donne :

$$\frac{U}{\hbar \omega_0} = \frac{1}{\alpha^2} \text{poly log} (2, z_1 e^{-\alpha}) + \frac{3}{2\alpha} \text{poly log} (1, z_1 e^{-\alpha}) \quad (2.53)$$

## 2.5 Conclusion

Nous avons calculé l'expression du nombre  $N_e$  dans les états excités pour des atomes piégés dans un potentiel harmonique isotrope à différentes dimensions. Dans ce but, nous avons pris les valeurs exactes des énergies, en particulier celle du fondamental. Nous constatons que les expressions de  $N$  sont similaires dans les trois dimensions ; en particulier, elles contiennent toutes le terme  $\frac{j}{\alpha} \text{PolyLog} [1, z_1 e^{-\alpha}]$  ( $j$  est la dimension du système), qui tendait vers l'infini dans les calculs des précédents auteurs et qui est ici fini même quand la fugacité tend vers 1. Nous en concluons que la condensation de Bose Einstein est présente dans les systèmes piégés à une dimension de taille finie et que du point de vue condensation, les systèmes piégés se comportent de la même façon, quelle que soit leur dimension. De plus, nous avons vérifié analytiquement que notre approximation est meilleure que celle de Ketterle et collaborateurs[29]. Nous avons utilisé notre approximation pour calculer l'énergie interne dans tous les systèmes piégés 1,2, et 3D.

# Chapitre 3

## Résultats numériques et discussion

### 3.1 Introduction

En utilisant les expressions exactes des niveaux d'énergie et de la dégénérescence, le potentiel chimique  $\mu$ , dans un piège harmonique isotrope 3D, avec deux méthodes (somme exacte et intégration). Nous avons élaboré un programme Fortran pour les trois sommations sur les nombres quantiques  $(n_x, n_y, n_z)$  tels que  $n = n_x + n_y + n_z$ ; selon les deux méthodes suivantes :

**- la première avec sommation :**

Piège à 3D

$$N = N_0 + N_e = \frac{1}{e^{\alpha(\frac{3}{2}-\mu')} - 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)/2}{e^{\alpha(n+\frac{3}{2}-\mu')} - 1} \quad (3.1)$$

piège à 2D

$$N = N_0 + N_e = \frac{1}{e^{\alpha(1-\mu')} - 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{e^{\alpha(n+1-\mu')} - 1} \quad (3.2)$$

piège à 1D

$$N = N_0 + N_e = \frac{1}{e^{\alpha(\frac{1}{2}-\mu')} - 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\alpha(n+\frac{1}{2}-\mu')} - 1} \quad (3.3)$$

On peut écrire :

On trouve, pour  $\omega_0 = 10^3 \text{ sec}^{-1}$  et  $T$  en nano kelvins :  $\alpha = \frac{7,63}{T}$

**-la deuxième avec intégrale :**

On a utilisé les mêmes données précédentes pour harmonique à 3D :

$$N = \int_0^{\infty} \frac{(x+1)(x+2)/2 dx}{e^{\alpha(x+\frac{3}{2}-\mu')} - 1}$$

Qui admet pour solution la relation suivante :

$$N = \frac{z_1}{1-z_1} + \frac{1}{\alpha^3} \text{poly log}(3, z_1 e^{-\alpha}) + \frac{5}{2\alpha^2} \text{poly log}(2, z_1 e^{-\alpha}) + \frac{3}{\alpha} \text{poly log}(1, z_1 e^{-\alpha}) \quad (3.4)$$

pour piege à 2D :

$$N = \int_0^{\infty} \frac{(x+1)}{e^{\alpha(x+1-\mu')} - 1}$$

$$N = \frac{z_1}{1-z_1} + \frac{1}{\alpha^2} \text{poly log}(2, z_1 e^{-\alpha}) + \frac{2}{\alpha} \text{poly log}(1, z_1 e^{-\alpha}) \quad (3.5)$$

pour piege à 1D :

$$N = \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{\alpha(x+1-\mu')} - 1}$$

$$N = \frac{z_1}{1-z_1} + \frac{1}{\alpha} \text{Poly log}(1, z_1 e^{-\alpha}) \quad (3.6)$$

## 3.2 calcul de la temperature de condensation

### 3.2.1 Cas de piege à trois dimension

Pour calculer le potentiel chimique, nous fixons dans chaque cas, le nombre d'atomes  $N$ , puis nous faisons varier la température  $T$ . Pour chaque valeur de  $T$ , nous ajustons le potentiel chimique réduit  $\mu'$  pour obtenir la valeur de  $N$  que nous avons fixée. Nous étudions les variations du potentiel chimique réduit  $\mu'$  en fonction de la température  $T$  [

fig3-1] puis nous déterminons la température critique  $T_C$  d'après les figures suivante ;  $T_C$  correspond à la valeur de la température pour laquelle  $\mu'$  diminue brutalement .

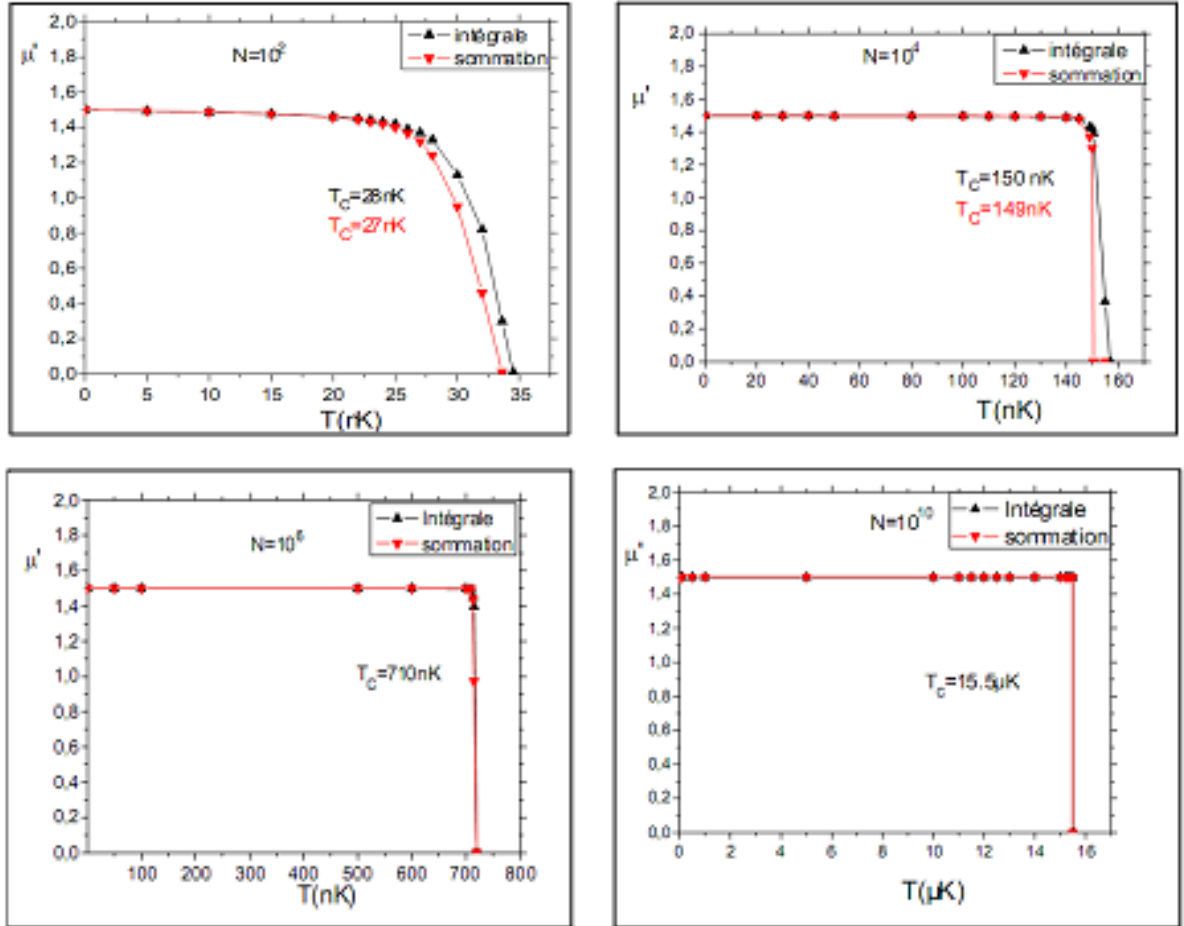


Figure 3-1 : Courbes de variation du potentiel chimique réduit  $\mu'$  en fonction de  $T$  pour des bosons condensés dans un piège harmonique à 3D et isotrope pour  $N = 10^2, 10^4, 10^6, 10^{10}$

### Discussions :

Les figures(3.1) représentent les courbes  $\mu' = f(T)$  pour différentes valeurs de  $N$  :

Les deux méthodes utilisées (intégrale et sommation discrète) donnent les mêmes résultats pour  $N$  grand, mais pour  $N$  petit ( $N = 10^2, 10^4$ ), il y a une petite différence comme on peut le voir sur le tableau suivant :

$N = 10^2$			$N = 10^4$		
T(nK)	valeurs $\bar{\mu}$ (Intégrale)	valeurs de $\bar{\mu}$ (Somation exacte)	T(nk)	valeurs de $\bar{\mu}$ (Intégrale)	valeurs de $\bar{\mu}$ (Somation exacte)
0	1,5	1,5	0	1,5	1,5
10	1,4863	1,4860	20	1,49987	1,49987
15	1,4770	1,4760	50	1,49879	1,49879
20	1,461	1,4570	80	1,49876	1,49875
25	1,419	1,4	100	1,49815	1,4981
26	1,39	1,3654	140	1,491	1,4895
27	1,37	1,32	145	1,484	1,478
28	1,33	1,24	149	1,43	1,37
30	1,13	0,95	150	1,4233	1,3
33,6	0,3	0,01	155	1,3921	1E-2
34,5	.01	.001	157	1E-3	1E-3

Tableau 3-1 : Tableau du résultat de potentiel chimique réduit  $\mu'$  dans un piège à  $3D$  avec sommation exacte et intégrale pour  $N = 10^2, 10^4$

### Comment trouver la température de condensation ?

Il existe une température critique  $T_C$  pour laquelle un nombre macroscopique  $N_0$  d'atomes se trouve dans l'état fondamental du système. On voit sur les courbes qu'au voisinage de  $T = T_C$  le potentiel chimique  $\mu$  tend vers  $\varepsilon_0$ .

### Dans quelle valeur de $N$ peut on avoir la limite thermodynamique ?

On a étudié numériquement la variation de la température critique  $T_C$  avec le nombre d'atomes  $N$ , en traçant point par point la courbe  $\log\left(\frac{T_C}{T'}\right) = f(\log N)$  [fig3-2], où  $T_C$  est déduit de la courbe  $\mu = f(T)$ , (pour  $\mu \rightarrow \varepsilon_0$ , on a  $T = T_C$ ).

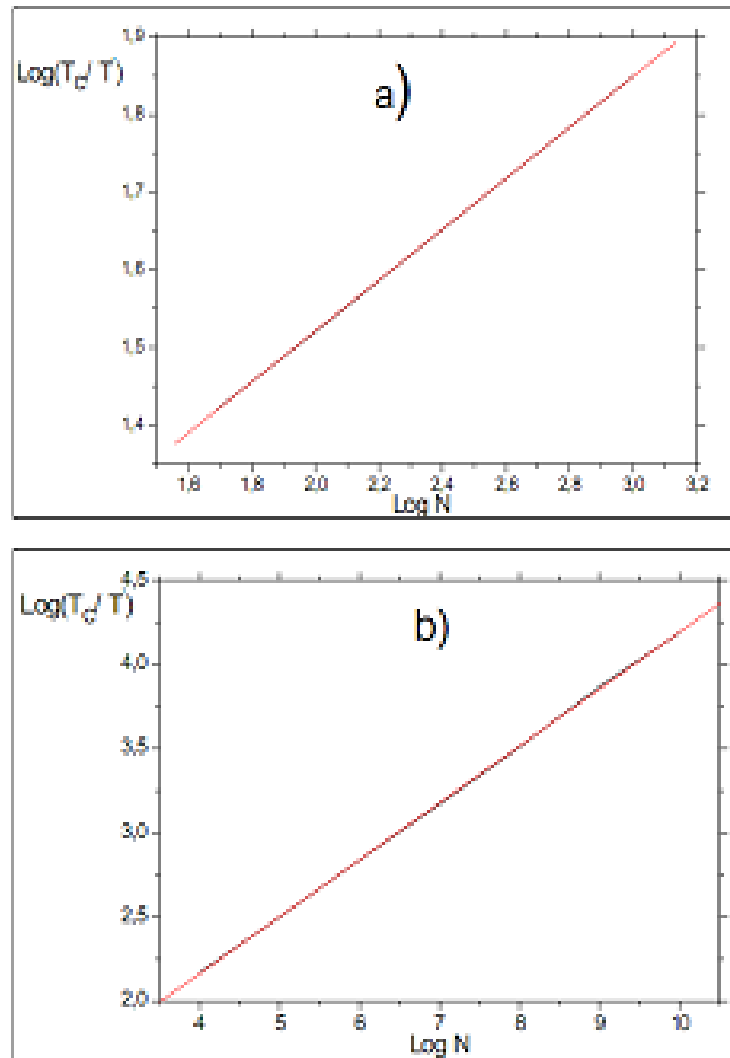


Figure 3-2 : Courbe de variation de  $\log(\frac{T_c}{T'})$  en fonction de  $\log N$

a) pour  $(N \leq 10^4)$

et

b) pour  $(N > 10^4)$

Nous remarquons que la courbe est une droite. On a donc  $\log(\frac{T_c}{T'}) = a \log N + b$ , où  $a$  et  $b$  sont déduits de la courbe de [Figure3.2].

- pour  $N < 10^4$  on constate que  $a = 0.32$  et  $b = 0.863$ . On peut écrire :

$$\log\left(\frac{T_c}{T'}\right) = 0.32 \log N + 0.863$$

Donc

$$\frac{T_C}{T'} \approx N^{0.321}$$

- pour  $N > 10^4$  on constate que  $a = 0.33$  et  $b = 0.81$ . On peut écrire :

$$\log \left( \frac{T_C}{T'} \right) = 0.33 \log N + 0.81 = \frac{1}{3} \log N + 0.81 = \log N^{\frac{1}{3}} + 0.81$$

- Pour  $N \gg 1$  on peut écrire :

$$\frac{T_C}{T'} \approx N^{\frac{1}{3}} \quad \left( \frac{T_C}{T'} \text{ est proportionnel à } N^{1/3} \right) \quad (3.7)$$

On voit que la limite thermodynamique est obtenue avec une bonne approximation dès que  $N > 10^4$

Nous avons aussi étudié numériquement la variation de  $U$  (énergie interne) avec la température  $T$  pour des valeurs finies de  $N$ .

Nous avons pour cela élaboré un programme pour calculer les sommes exactes de l'énergie interne  $U$  expression (2.23)

### 3.2.2 cas de piège a deux dimension

Nous déterminons numériquement la température critique  $T_C$ , à partir de la variation du potentiel chimique  $\mu'$  en fonction de la température  $T$  [Figure 3-2] (la même procédure a été appliquée pour déterminer la valeur critique de la température dans un piège harmonique à 3D et isotrope). (pour  $T = T_C$  on a  $\mu \rightarrow \varepsilon_0$ ). On a  $T = T_C$

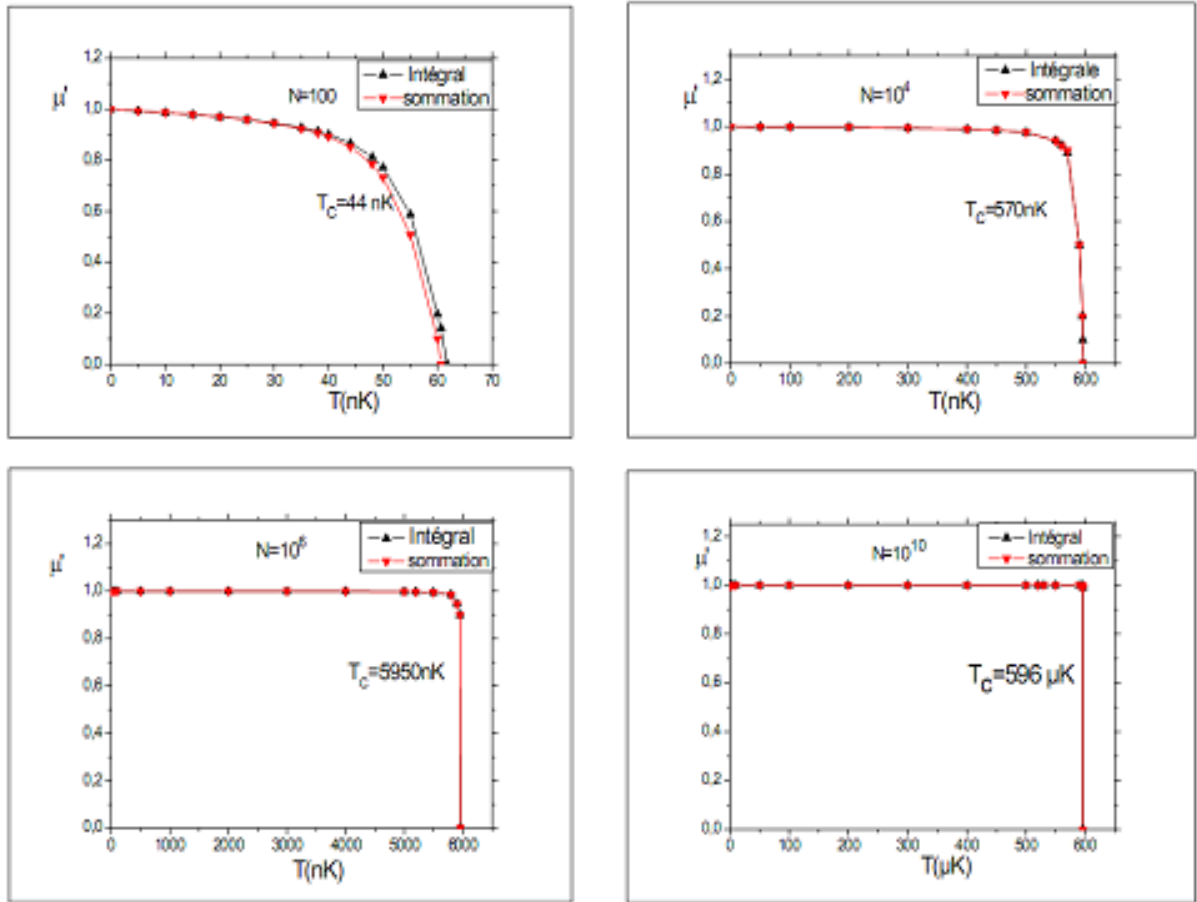


Figure 3-3 : Courbes de la variation du potentiel chimique réduit  $\mu'$  en fonction de la température  $T$  pour des bosons condensés dans un piège harmonique à 2D isotrope pour  $N = 10^2, 10^4, 10^6, 10^{10}$

#### Discussions :

- Les figures précédentes représentent les courbes  $\mu' = f(T)$  pour différentes valeurs de  $N$  : On voit que le potentiel chimique  $\mu'$  diminue quand  $T$  augmente. Pour  $T = T_C$  on a  $\mu_C \approx \varepsilon_0$

- Les deux méthodes (sommation et intégrale) donnent les mêmes résultats, sauf pour le cas de  $N = 10^2$ . Les résultats dans ce cas sont représentés sur le tableau suivant.



$N = 10^2$		
$T(nK)$	valeurde(ù)Intégale	valeurde(ù)sommationexacte
0	1	1
10	0.98665	0.9865
20	0.9705	0.9697
30	0.9466	0.9439
40	0.901	0.892
44	0.8673	0.852
48	0.8125	0.785
50	0.7715	0.7327
55	0.587	0.507
60	0.196	0.1
62	0.001	0.001

Tableau 3-2 : Tableau du résultat de potentiel chimique réduit  $\mu'$  dans un piège à 2D avec sommation exacte et intégrale pour  $N = 10^2$  .

### 3.2.3 cas de piéage a une dimension

On détermine  $T_C$  à partir de l'étude de la variation du potentiel chimique réduit  $\mu'$  en fonction de la température  $T$  (Fig 3-3) (pour  $T = T_C$  on a  $\mu \rightarrow \varepsilon_0$ ).

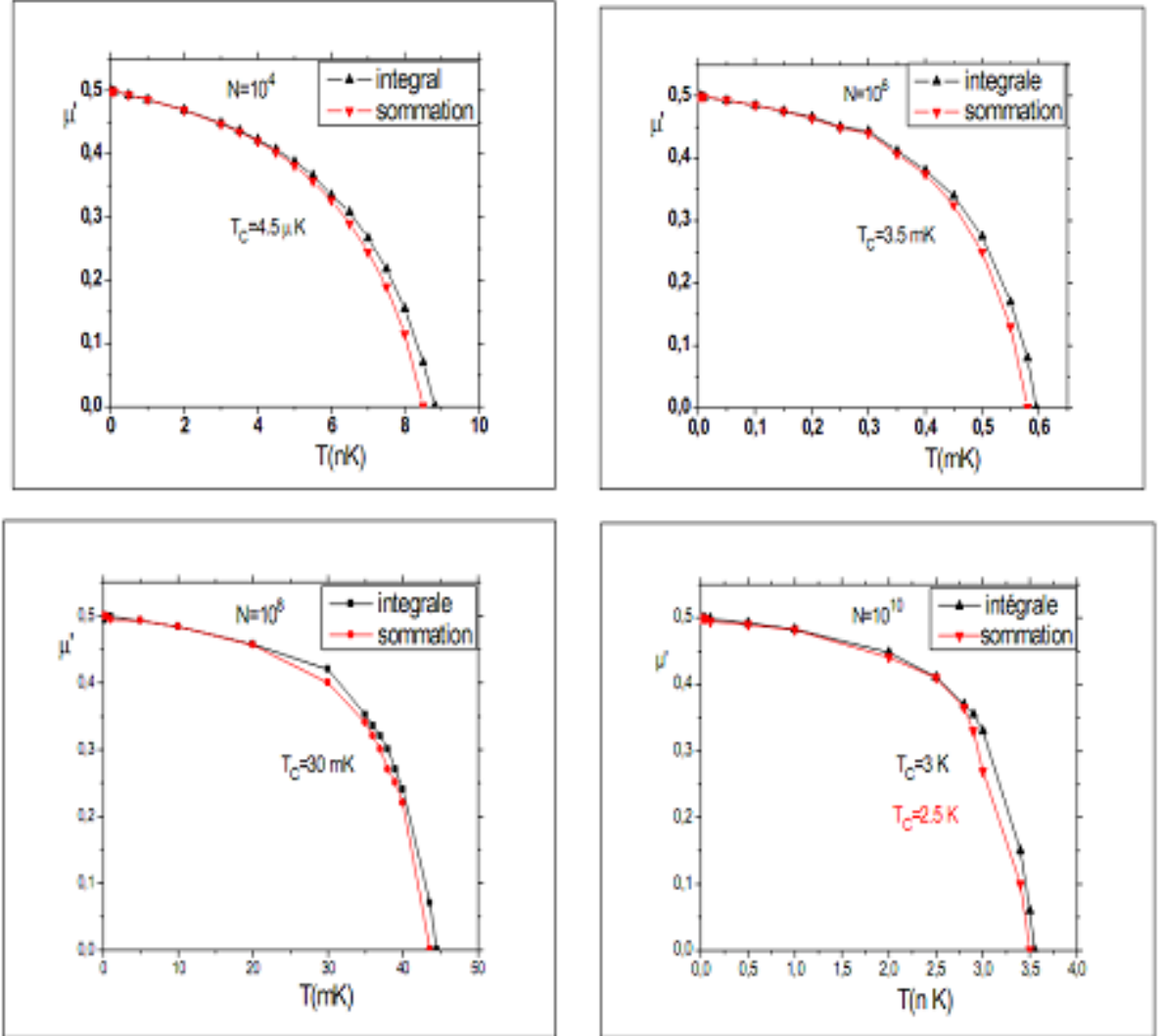


Figure 3.4 : Courbes de variation du potentiel chimique réduit  $\mu'$  en fonction de  $T$  pour des bosons condensés dans un piège harmonique à 1D pour  $N = 10^4, 10^6, 10^8, 10^{10}$ .

**Discussion :** pour Les figures 3.4 représentent les courbes  $\mu' = f(T)$  pour différentes valeurs de  $N$  :

- Les deux méthodes donnent les mêmes valeurs de la température critique  $T_C$ , et des valeurs du potentiel chimique proches. voir les resultats du potentiel chimique dans le tableau suivant pour  $N = 10^6$

$N = 10^6$		
$T(nK)$	valeurde( $\mu'$ )Intégale	valeurde( $\mu'$ )sommationexacte
0	0.5	0.5
50	0.5	0.5
100	0.4999	0.4999
1000	0.49987	0.49987
10000	0.49868	0.49868
100000	0.476	0.4755
150000	0.476	0.4755
200000	0.4665	0.464
300000	0.444	0.44
400000	0.381	0.375
500000	0.275	0.25
550000	0.17	0.13
580000	0.08	0.001

Tableau 3-3 : Tableau du résultat de potentiel chimique réduit  $\mu'$  dans un piège à 1D avec sommation exacte et intégrale pour  $N = 10^6$  .

· Dans ces courbes, nous ne pouvons pas localiser la température de la condensation automatiquement. Pour localiser cette température, nous utilisons une méthode

mathématique : nous traçons une tangente (1) en point avant la courbure et nous traçons d'autre tangente(2)après cette courbure. Le point d'intersection de ces tangentes détermine la température de condensation  $T_C$  (voir la figure suivante) :

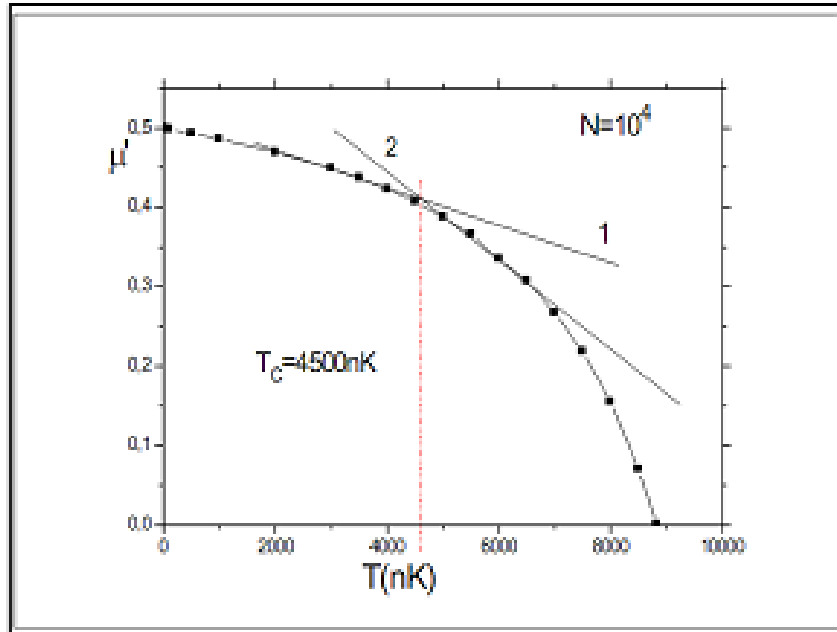


Figure 3-5 : Détermination de la température critique  $T_C$  à partir de l'étude la variation de potentiel chimique réduit  $\mu'$  en fonction de  $T$  .

· On voit qu'au voisinage de  $T \approx T_C$  le potentiel chimique  $\mu$  tend vers  $\epsilon_0$ .

### 3.3 calcul energie interne

Nous avons aussi étudié numériquement la variation de énergie interne  $U$  avec la température  $T$  pour des valeurs finies de  $N$  pour des atomes piégés à 3,2 et 1D. Nous avons pour cela élaboré un programme pour calculer les sommations exactes de l'énergie interne ,expression(2.50).

### 3.3.1 Cas de piege à 3D

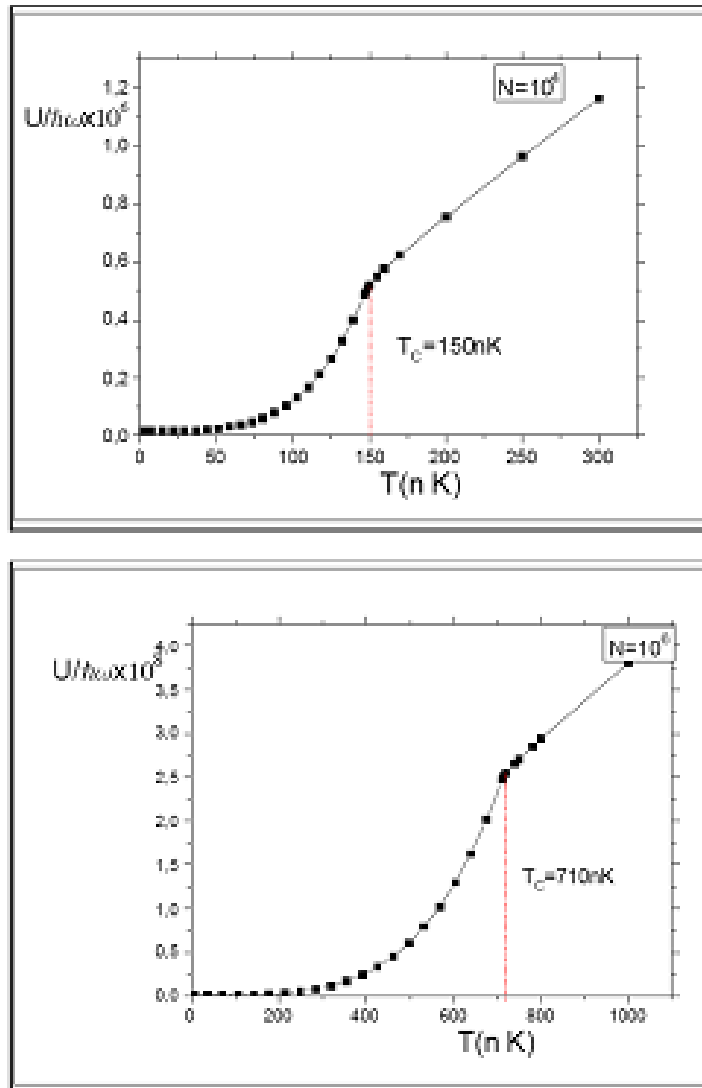


Figure 3.6 : Courbes de la variation de l'énergie interne  $U$  en fonction de la température  $T$  pour des valeurs finies de  $N$  pour des atomes piégés à 3D.

On voit que l'énergie interne  $U$  croît rapidement entre  $T = 0$  et  $T = 150$  nK pour  $N = 10^4$ . Le comportement est similaire entre  $T = 0$  et  $T = 710$  nK pour  $N = 10^6$ . Pour  $T > 150$  nK l'énergie  $U$  prend une allure linéaire. Donc on appelle cette température  $T = 150$  nK la température critique  $T_C$  qui est le même résultat que celui de la figure (3.1) lorsque  $N = 10^4$ .

## 3.3.2 Cas de piege à 2D

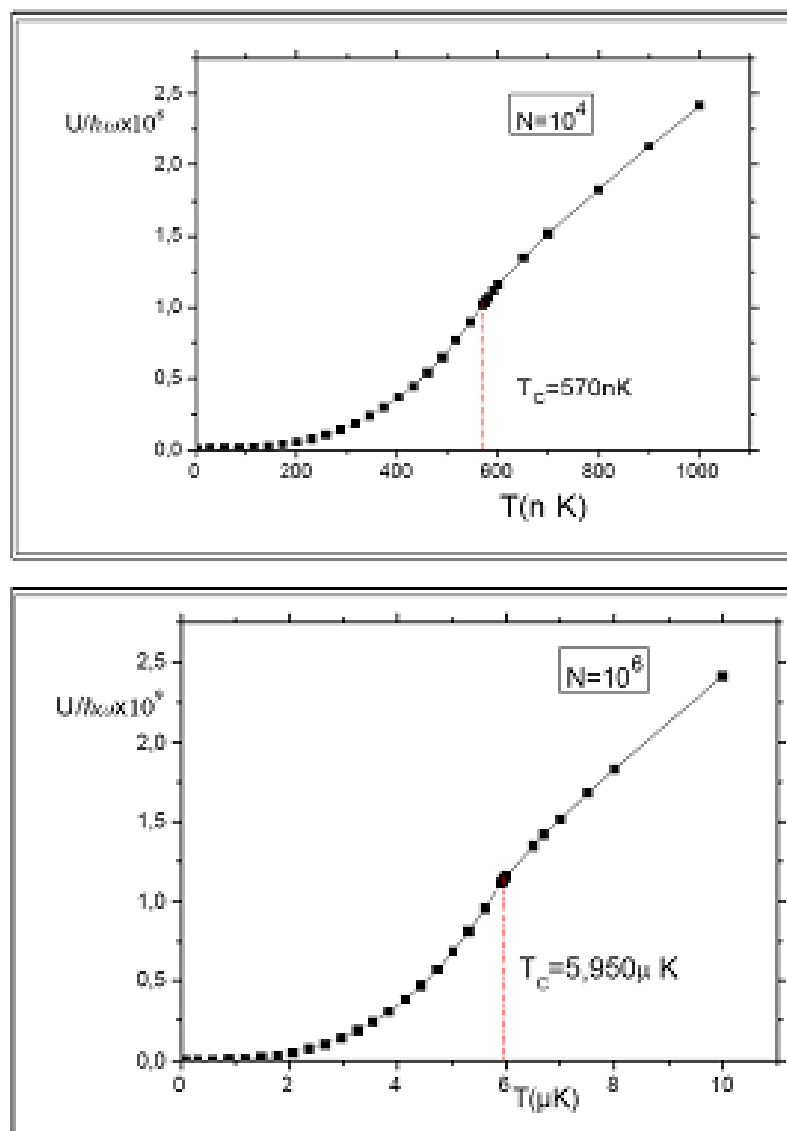


Figure 3-7 : Courbes de la variation de  $U/h\omega_0$  en fonction de  $T$  pour des valeurs finies de  $N$  pour des bosons piégés dans un potentiel harmonique à 2D.

### 3.3.3 Cas de piege à 1D

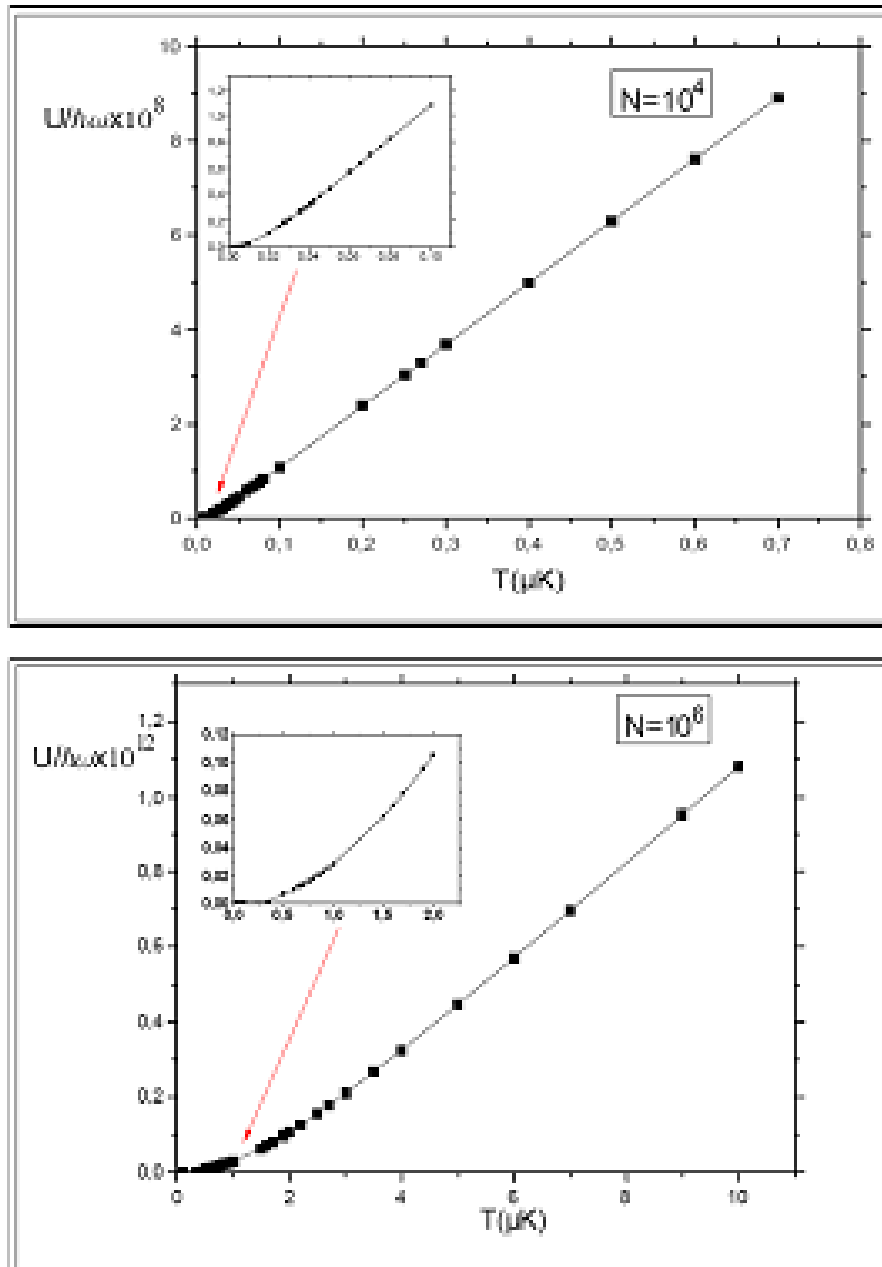


Figure3-8 : Courbes de la variation de  $U/h\omega_0$  en fonction de  $T$  pour des valeurs finies de  $N$  pour des bosons piégés dans un potentiel harmonique à 1D.

**Discussion** • On voit que le comportement l'énergie interne  $U$  est similaire pour les trois pièges 1, 2 et 3D. elle croît rapidement entre  $T = 0$  et  $T = T_C$  .

- Pour  $T > T_C$  l'énergie  $U$  prend une allure linéaire, qui correspond à l'équation d'état d'un gaz parfait.
- On voit aussi que les valeurs de la température critique  $T_C$  sont les mêmes que ceux trouver dans les figures (3 – 1, 3 – 3 et 3 – 4).

## 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons d'abord considéré un système de particules bosoniques confinées dans un pièges harmonique à trois et deux et une dimensions . Nous avons étudié les variations du potentiel chimique en fonction de la température. Nous avons utilisé pour cela les niveaux d'énergie exacts et nous avons effectué les sommations (discretes et continus) sur les nombres quantiques. Nous avons constaté que le potentiel chimique, d'abord pratiquement constant, chute brutalement au voisinage de la température critique de condensation, ce qui permet de situer cette dernière. Nous avons étudié les variations de température critique en fonction du nombre de particules pour piège à  $3D$ , nous avons montre que le nombre de particule la limite thermodynamique est autour de 10000. Nous avons étudié aussi les variations de l'enrgie interne en fontion de la temperature, qui est croissante rapidement jusqu'à  $T = T_C$  et apres elle prend une allure lineaire qui correspond a l'étude classique ( la limite thermodynamique).



# Conclusion general

Dans ce travail, nous avons d'abord rappelé quelques concepts en mécanique statistique quantique utiles pour traiter le phénomène de la condensation de Bose Einstein. Nous avons rappelé les conditions nécessaires pour obtenir cette transition de phase et présenté l'expression de la température de condensation, dans la limite thermodynamique. nous avons calculé l'expression du nombre  $N_e$  de particules non condensées pour des atomes piégés considère dans un potentiel harmonique isotrope à différentes dimensions. Dans ce but, nous avons pris les expressions exactes des énergies, en particulier celle du fondamental. Nous avons montré que la condensation de Bose Einstein est présente même dans les systèmes piégés à une dimension

Nous avons ensuite étudié le comportement d'un condensat de Bose Einstein d'un gaz atomique de  $N$  bosons confinés dans piégés harmonique à trois et deux et une dimensions. Nous avons étudié les variations du potentiel chimique de ce gaz en fonction de la température pour différentes valeurs de  $N$ . Ce potentiel chimique, d'abord pratiquement constant, varie brutalement au voisinage de la température critique  $T_C$  de condensation, ce qui permet de localiser cette température critique. Nous avons montré que la température de la condensation est très petite . Puis nous avons montré numériquement que pour des valeurs de  $N$  supérieurs à 10 000, la température critique est proportionnelle à  $N^{1/3}$  ( $T_C \approx N^{1/3}$ ) pour un piège a 3D, ce qui est en accord avec l'expression à la limite thermodynamique. nous avons étudié aussi les variations de l'énergie interne en fonction de la température, elle est croissante jusqu'à la température critique et varie lineairement pour  $T > T_C$  dans cette limite le gaz comporte comme un gaz parfait classique.

# Appendices

A-Fonction Polylogarithme :

$$Polylog [n, z] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i^n} \quad (3.8)$$

Les dérivées du polylogarithme sont :

$$z \frac{\partial poly \log [n, z]}{\partial z} = poly \log [n - 1, z] \quad (3.9)$$

valeurs particulière :

$$poly \log [1, z] = -\log [1 - z] \quad (3.10)$$

$$Polylog [0, z] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z}{1 - z} \quad (3.11)$$

Relation avec la fonction de Zeta de Riemann :

Pour  $z = 1$ , le Polylogarithme se réduit à la fonction Zeta de Riemann

$$poly \log [n, 1] = \xi (n) \quad (3.12)$$

B- Formule de sommation d'Euler Mac Laurin :

Elle permet de remplacer une sommation discrète par une sommation continue ; nous contenterons de l'approximation suivante :

$$\sum_{n=a}^b f(n) \approx \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{2} [f(b) + f(a)] + \frac{1}{12} [f'(b) - f'(a)] + \dots \quad (3.13)$$

C- Quelques intégrales utiles :

Il est facile de voir que :  $\int_{\alpha}^{\infty} e^{-yx} dx = \frac{e^{-\gamma\alpha}}{\gamma}$

En dérivant l'expression précédente par rapport à  $\gamma$ , nous avons :

$$\int_{\alpha}^{\infty} x e^{-yx} dx = \frac{\alpha e^{-\gamma\alpha}}{\gamma} + \frac{e^{-\gamma\alpha}}{\gamma^2} \quad (3.14)$$

et

$$\int_{\alpha}^{\infty} x^2 e^{-yx} dx = \frac{\alpha^2 e^{-\gamma\alpha}}{\gamma} + \frac{2\alpha e^{-\gamma\alpha}}{\gamma^2} + \frac{2e^{-\gamma\alpha}}{\gamma^3} \quad (3.15)$$

D- Nous utilisons la progression géométrique :  $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$  pour écrire l'intégrale

$\int_{\alpha}^{\infty} \frac{dx}{z^{-1}e^x - 1}$  sous la forme :

$$\int_{\alpha}^{\infty} \frac{dx}{z^{-1}e^x - 1} = \int \frac{ze^{-x} dx}{1 - ze^{-x}} = \sum_{i=0}^{\infty} z^{i+1} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-(i+1)x} dx \quad (3.16)$$

On obtient facilement :

$$\int_{\alpha}^{\infty} \frac{dx}{z^{-1}e^x - 1} = \text{poly log} [1, ze^{-\alpha}] \quad (3.17)$$

# Bibliographique

- [1] S.N. Bose, Z. Phys. 26, 178 (1924).
- [2] A.Einstein, Sitzber. Kgl. Preuss. Akand. Wiss. 261 (1924).
- [3] A. Einstein, Sitzber. Kgl. Preuss. Akand. Wiss. 3 (1925).
- [4]P. Kapitza, Nature 141, 74 (1938).
- [5] J.F. Allen, A.D. Misener, Nature 141, 75 (1938).
- [6] F. London, Nature 141, 643 (1938)
- [7] L.D. Landau, J. Phys. USSR 5, 71(1941).
- [8] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman et E. A. Cornell, Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor Science 269, 198 (1995).
- [9]K.B.Davis, H.O.mewes, M.R.Andrews, N.J.van Druten, D.S.Durfree, D.M.Kurn and W.Ketterle, Phys.Rev.Lett 75, 3969 (1995)
- [10] E.A. Cornell et C. Wieman, La condensation de Bose-Einstein, Pour la Science, mai 1998, pp. 92-97.
- [11] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet, Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions, Phys. Rev. Lett. 75 (1995), no. 9,1687.
- [12] D. G. Fried, T. C. Killian, L. Willmann, D. Landhuis, S. C. Moss, D. Kleppner, and T. J. Greytak, Bose-Einstein condensation of atomic hydrogen, Phys. Rev. Lett. 81(1998), no. 18, 3811.
- [13] A. Robert, O. Sirjean, A. Browaeys, J. Poupard, S. Nowak, D. Boiron, C.I. Westbrook, and A. Aspect, A Bose-Einstein condensate of metastable atoms, Science 292 (2001), 461.

- [14] G. Modugno, G. Ferrari, G. Roati, R. J. Brecha, A. Simoni, and M. Inguscio, Bose-Einstein condensation of potassium atoms by sympathetic cooling, *Science* 294 (2001), 1320.
- [15] T. Weber, J. Herbig, M. Mark, H.-C. Nägerl, and R. Grimm, Bose-Einstein condensation of Cesium, *Science* 299 (2003), 232.
- [16] Y. Takasu, K. Maki, K. Komori, T. Takano, K. Honda, M. Kumakura, T. Yabuzaki, and Y. Takahashi, Spin-singlet Bose-Einstein condensation of two-electron atoms, *Phys. Rev. Lett.* 91 (2003), no. 4, 040404—1.
- [17] C. Cohen Tannoudji Séminaire Poincaré 2003 : La condensation de Bose-Einstein
- [18] C. Cohen-Tannoudji, J. Dalibard et F. Laloé, La condensation de Bose Einstein dans les gaz, dans *Einstein aujourd'hui PARIS 2005*.
- [19] K. Huang, *Statistical Mechanics* (Wiley, New-York, 1963)
- [20] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, B. Roulet, *Physique statistique* (Hermann, Paris, 1989).
- [21] M. Le Bellac et F. Mortessagne, *Thermodynamique statistique* (Dunod, Paris, 2001)
- [22] Jacek Kasprzak, Maxime Richard « La condensation de Bose-Einstein en phase solide », *Images de la physique*, CNRS, 2007, p. 42-49
- [23] K.B. Davis, H.O. mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.S. Durfree, D.M. Kurn and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* 75, 3969 (1995)
- [24] H. Haugerud, T. Haugest and F. Ravndat A more accurate analysis of Bose-Einstein condensation in harmonic traps et al *phys. Rev. Lett.* A225(1997)1822. Cv NKS11.09.07.05.ON
- [25] W. Ketterle, N.J. van Druten, *Phys Rev A*, 54 656 (1996) [LAN41] L.D. Landau, *J. Phys. USSR* 5, 71(1941).
- [26] C. Cohen-Tannoudji, *Cours au Collège de France* (1997-98).
- [27] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1972).
- [28] W. Ketterle, N.J. van Druten, *Phys Rev A*, 54 656 (1996)
- [29] A. MILOUDI Mémoire master physique théorique, 2016

[30] D.S. Durfee, and W. Ketterle ,these de doctorat, Experimental studies of Bose Einstein condensation, Department of physics and Research laboratory of Electronics ,Massachusetts Institue of Technology, Cambridge, MA02139 (1998)