Université de Djilali BOUNAÂMA Khemis Miliana
Faculté des sciences et de la technologie
DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Réalisé par :

Mlle : HAMADOU Amel

La transformée de Mellin et quelques applications

Soutenu publiquement le : 12/*juin*/*2017*

Devant le jury :

Mr.	**SADAOUI. B**	Président.
Mr.	**BOUDERBALA. M**	Examinateur.
Mr.	**KRELIFA. A**	Examinateur.
Mr.	**KARRAS. M**	Encadrant.

Année Universitaire **2016/2017**

Remerciements

En préambule à ce mémoire je remercie **ALLAH** qui m'aide et me donne la patience et le courage durant ces langues années d'études.
Je tiens tout d'abord à remercier grandement mon encadrant **Mr M. KARRAS** pour sa grande disponibilité et ses précieux conseils.
Mes vifs remerciments s'adressent à Mr B. SADAOUI d'avoir accepté de présider ce jury.
Je tiens à remercier Mr A. KRELIFA et Mr M. BOUDERBALA qui nous ont fait l'honneur d'examiner ce travail.
J'aimerais remercier tous les étudiants de master 2 au département de mathématiques et informatique de l'Université de Khemis Miliana de l'année universitaire 2016/2017.
Finalement, j'offre mes plus sincères remerciements à toute ma famille qui m'a soutenue tout au cours de cette longue période de mes études et tous les amis.

Résumé

La transformée de Mellin est une transformation intégrale, elle est reliée à la transformation de Laplace et à la trasformation de Fourier. Dans ce mémoire nous avons expliqué comment nous pouvons employer cette transformation pour calculer la valeur moyenne d'une fonction arithmétique multiplicative.

Abstract

The Mellin transform is an integral transformation, it is connected to the Laplace transform and to the integral Fourier transform. In this memoir we have explained how we can use this transformation to calculate the mean value of a multiplicative arithmetic function.

Table des matières

Introduction

En théorie analytique des nombres la recherche de la valeur moyenne d'une fonction arithmétique irrégulière est un axe de recherche intérèssent. Pour cela les chercheurs dans ce domaine ont appliqués plusieurs méthodes élémentaires et analytiques. Les méthodes qui ne sont pas élémentaires utilisent les outils d'analyse réelle et complexe.

Le théorème des résidus et encore le prolongement analytique des fonctions complexes jouent un rôle très importent. Les formules de Perron, le théorème de Selberg-Delang et le théorème d'Ikehara sont parmi les outils répondus dans les travaux souvent rencontrés dans la littérature.

Dans ce travail on s'intérèsse à la transformée de Mellin, après les définitions et quelques propriétés nous appliquons cette transformée pour calculer la valeur moyenne d'une fonction arithmétique multiplicative, on trouve cette étude dans un cours donné par le professeur Ramaré ([11]). Généralement le but est de comprendre cette méthode et voir comment il a utilisé la transformée de Mellin dans les calculs des valeurs moyennes.

Le contenu de ce mémoire se décompose en trois chapitres, le premier contient quelques généralités sur les fonctions arithmétiques et les séries de Dirichlet et encore on trouve les définitions et quelques exemples sur les transformées et les transformées inverses de Fourier et de Laplace. Le deuxième chapitre cible l'étude de la transformée de Mellin, et en injectant quelques exemples. Nous terminons notre travail dans le chapitre trois par une application sur une fonction arithmétique multiplicative.

Notations

Nous donnons quelques notations qui vont nous aider dans la suite de notre travail

1. Les ensembles des nombres seront notés par :
   - $\mathbb{C}$: les nombres complexes.
   - $\mathbb{R}$: les nombres réels.
   - $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}/x \geq 0\}$.
   - $\mathbb{N}$: les entiers naturels, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..\}$.
   - $\mathbb{N}^*$: les entiers naturels positifs $\mathbb{N}^* = \{1, 2, ..\}$.
2. $s = \sigma + it$ désigne un nombre complexe, on note la partie réelle et la partie complexes respectivement par $\sigma = \Re(s)$ et $t = \Im(s)$.
3. On désigne par p un nombre premier.
4. Si m et n sont des entiers positifs, alors
   - $m \mid n$ signifie m divise n.
   - $m \nmid n$ signifie m ne divise pas n.
   - $p^\alpha \parallel n$ signifie p^α divise n et $p^{\alpha+1} \nmid n$.
5. $f(x) = O(g(x))$, c'est-à-dire : il existe un constant $C > 0$ et un réel x_0, tel que pour tout $x \geq x_0$, on a
$$|f(x)| \leq Cg(x).$$
6. La constante d'Euler est le nombre γ défini par
$$\gamma = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0.577215663\ldots$$

Chapitre 1

Généralités

Dans ce chapitre on présente quelques définitions et rappelles concernant les fonctions arithmétiques et les séries de Dirichlet et encore la fonction Gamma, la fonction zéta et les deux transformées Fourier et Laplace.

1.1 Fonctions arithmétiques et séries de Dirichlet

Définition 1.1 *Une fonction arithmétique est une application définie sur l'ensemble des entiers $n \geq 1$, à valeurs complexes.*

1.1.1 Fonctions multiplicatives

Définition 1.2 *Une fonction arithmétique f est dite multiplicative si l'on a $f(1) = 1$ et $f(nm) = f(n)f(m)$ dès que n et m sont premiers entre eux dans $\mathbb{N}^*$.*
La fonction f est dite complètement multiplicative si $f(1) = 1$ et $f(nm) = f(n)f(m)$ pour tout entier n, m.

Remarque 1.1 *Si la fonction f est multiplicative on a*

$$f\left(\prod_{p^\alpha \| n} p^\alpha\right) = \prod_{p^\alpha \| n} f(p^\alpha).$$

La fonction f est complètement multiplicative montre que $f(p^\alpha) = f(p)^\alpha$ donc on a

$$f\left(\prod_{p^\alpha \| n} p^\alpha\right) = \prod_{p^\alpha \| n} f(p)^\alpha.$$

Exemple 1.1 *La fonction $d(n)$ " nombre de diviseurs de l'entier n" est une fonction arithmétique multiplicative.*

???????

1.1.2 Fonctions sommatoires

Définition 1.3 *Soit f une fonction arithmétique. La fonction*

$$M_f(x) = \sum_{n \leq x} f(n),$$

définie pour $x \geq 1$ est dite fonction sommatoire de f.

1.1.3 Fonctions sommatoires lissées

Définition 1.4 *Soit f une fonction arithmétique. On appelle fonction sommatoire lissée associée à f, la série définie par*

$$M_f(\phi) = \sum_{n \geq 1} f(n) \phi(n),$$

où $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de Schwartz[1]*.*

1.1.4 Séries de Dirichlet

Définition 1.5 *On appelle Série de Dirichlet de la variable complexe s, toute série du type*

$$D_f(s) = \sum_{n \geq 1} f(n) n^{-s},$$

où f est une fonction arithmétique.

Définition 1.6 *On note σ_a l'abscisse de convergence absole de la série de Dirichlet est définie par*

$$\sigma_a = \inf \{\sigma \in \mathbb{R} \text{ et } D_f(s) \text{ converge absolement pour } \Re(s) > \sigma\}.$$

Remarque 1.2 *Si $D_f(s)$ converge en s_0, alors $D_f(s)$ converge pour tout s tel que $\sigma \geq \sigma_0$. En général, il existe un nombre réel σ_c dit l'abscisse de convergence de la série $D_f(s)$ tel que la série converge pour $\sigma > \sigma_0$, et diverge pour $\sigma < \sigma_0$.*

[1] Une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite de Schwartz, si elle est de classe C^∞ et vérifie

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \ \left| x^n f^{(m)}(x) \right| \longrightarrow 0 \text{ quand } |x| \longrightarrow +\infty,$$

f est donc une fonction à décroissance plus rapide que tout polynôme à l'infini.

Exemple fondamental

La fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$ est définie pour tout nombre complexe s avec $\sigma > 1$ par

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s}.$$

Proposition 1.1 ([11]) *La fonction $\zeta(s)$ possède un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un pôle simple en $s = 1$, de résidu* 1.

Théorème 1.1 ([6]) *Soit $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction multiplicative à croissance modérée*[2]*, et soit*

$$D_f(s) = \sum_{n\geq 1}^{+\infty} f(n)\, n^{-s},$$

alors

$$D_f(s) = \prod_p \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(p^n)}{p^{ns}} \right). \tag{1.1}$$

La formule (1.1) *est dite produit eulérien de la fonction $D_f(s)$.*

Exemple 1.2 *Le produit eulérien de la fonction $\zeta(s)$ est donnée par*

$$\zeta(s) = \prod_p \left(\frac{1}{1-p^{-s}} \right), \ \sigma > 1.$$

Lemme 1.1 ([11]) *Si $s = \sigma + it$ avec $\sigma > 0$, alors on a*

$$\begin{cases} |\zeta(s)| \leq |s| \left(\dfrac{1}{|1-\sigma|} + \dfrac{1}{\sigma} \right) & si \quad |t| \leq 2, \\ |\zeta(s)| \leq 4 + \log|t| & si \quad |t| \geq 2 \ et\ 2 \geq \sigma \geq 1, \\ |\zeta(s)| \leq 6\sigma^{-1} |t|^{1-\sigma} \log|t| & si \quad |t| \geq 2 \ et\ 1 \geq \sigma \geq 0. \end{cases}$$

Proposition 1.2 ([5]) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1) *Il existe un $s_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série $\sum f(n)\, n^{-s_0}$ soit convergente.*
2) *Il existe un nombre réel α tel que $f(n) = O(n^{\alpha})$ quand $n \longrightarrow +\infty$.*
3) *Il existe un nombre réel positif β tel que la série $\sum f(n)\, n^{-s}$ converge normalement sur le demi-plan $\Re(s) \geq \beta$.*

[2] Une fonctions f pour laquelle la série de Dirichlet a une région de convergence non vide appelée à croissance modérée.

1.2 Théorème de Résidus

Définition 1.7 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $s_0 \in U$. Soit f une fonction analytique en s_0. On appelle le résidu de f en s_0, et on le note $Rés\left(f, s_0\right)$, le coefficient a_{-1} de $\left(s-s_0\right)^{-1}$ dans le développement de la série de Laurent de f en s_0*

$$f\left(s\right)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\left(s-s_0\right)^n .$$

Proposition 1.3 ([3]) *Soient f et g deux fonctions méromorphes sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ et soit s_0 un point de U.*
1) *Si f a un pôle simple en s_0, alors*

$$Rés(f, s_0)=\lim_{s\longrightarrow s_0}\left(s-s_0\right) f\left(s\right).$$

Plus généralement, si s_0 est un pôle d'ordre k de f, alors

$$Rés(f, s_0)=\lim_{s\longrightarrow s_0}\frac{1}{(k-1)!}\left[(s-s_0)^k f(s)\right]^{(k-1)}.$$

2) *Si f est holomorphe en s_0 et si g a un zéro simple en s_0, alors*

$$Rés(\frac{f}{g}, s_0)=\frac{f\left(s_0\right)}{g'\left(s_0\right)}.$$

Théorème 1.2 ([3]) *Soient Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, F un ensemble fini de points de Ω, f une fonction holomorphe sur $\Omega\backslash F$ et δ un lacet simple à valeurs dans $\Omega\backslash F$. Alors on a*

$$\int_\delta f\left(s\right)ds=2i\pi\sum_{s_0\in F} Rés\left(f, s_0\right).$$

Théorème 1.3 (Fubini) *Soit f une fonction continue sur un rectangle $[a,b]\times[c,d]$. Alors*

$$\begin{aligned}\int\int_D f\left(x,y\right)dxdy &= \int_a^b\left(\int_c^d f\left(x,y\right)dy\right)dx\\ &= \int_c^d\left(\int_a^b f\left(x,y\right)dx\right)dy.\end{aligned}$$

1.3 Fonction Gamma

Définition 1.8 *Pour tout $\Re(s) > 0$. On définit la fonction Gamma par l'intégrale suivant*

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty \exp(-x)\, x^{s-1} dx. \tag{1.2}$$

Proposition 1.4 ([5]) *La fonction Gamma satisfait les propriétés suivants :*

1) $\Gamma(1) = 1$.
2) Pour tout entier positif n, $\Gamma(n+1) = n!$.
3) Pour tout $\Re(s) > 0$, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.
4) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Proposition 1.5 (Formule des compléments [5]) *Pour tout $s \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, on a*

$$\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} = \frac{\sin \pi s}{\pi}.$$

Lemme 1.2 (Formule de Weierstrass [5]) *Pour tout $s \in \mathbb{C}$, on a*

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s \exp(\gamma s) \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{s}{k}\right) \exp\left(-\frac{s}{k}\right),$$

où γ est la constante d'euler.

Théorème 1.4 *La fonction Γ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, dont les pôles simples sont les éléments de l'ensemble $\mathbb{Z} \diagdown \mathbb{N}^*$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\textit{Rés}\,(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Preuve. Pour $\Re(s) > 0$, on a

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

Par recurrence on obtient

$$\Gamma(s+n+1) = \Gamma(s) \prod_{0 \le j \le n} (s+j),$$

donc il vient

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \frac{\Gamma(s+n+1)}{\prod_{0 \le j \le n} (s+j)} \\ &= \frac{\Gamma(s+n+1)}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n)}. \end{aligned}$$

Pour calculer le résidu de $\Gamma(s)$ en $-n$, on a

$$\begin{aligned} Rés(\Gamma, -n) &= \lim_{s \longrightarrow -n} \frac{(s+n)\Gamma(s+n+1)}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n)} \\ &= \lim_{s \longrightarrow -n} \frac{\Gamma(s+n+1)}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)} \\ &= \frac{\Gamma(1)}{-n(-n+1)(-n+2)\cdots(-2)\times(-1)}, \end{aligned}$$

et comme $\Gamma(1) = 1$ et $-n(-n+1)(-n+2)\cdots(-2)\times(-1) = (-1)^n n!$, alors

$$Rés(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

■

Définition 1.9 (La fonction Bêta) *La fonction Bêta est définie par l'intégrale suivant*

$$\beta(s,r) = \int_0^1 x^{s-1}(1-t)^{r-1}\,dx,$$

avec $\Re(s) > 0$ *et* $\Re(r) > 0$.

La fonction Gamma est liée à la fonction Bêta par la relation exprimée dans le théorème suivant

Théorème 1.5 *Pour tout* $\Re(s) > 0$ *et* $\Re(r) > 0$, *on a*

$$\beta(s,r) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(r)}{\Gamma(s+r)}.$$

Preuve. D'après la formule (1.2) on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\Gamma(r) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{s-1}y^{r-1}\exp(-x)\exp(-y)\,dxdy \\ &= \int_0^{+\infty} x^{s-1}\left(\int_0^{+\infty} y^{r-1}\exp(-x-y)\,dy\right)dx. \end{aligned}$$

Par le changement de variable suivante

$$u = x + y,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\Gamma(r) &= \int_0^{+\infty} x^{s-1}dx \int_x^{+\infty} (u-x)^{r-1}\exp(-u)\,du \\ &= \int_0^{+\infty}\exp(-u)\,du\int_0^{x}(u-x)^{r-1}x^{s-1}dx, \qquad \text{(Par Fubini)}\end{aligned}$$

on pose

$$v=\frac{x}{u},$$

alors

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\Gamma(r) &= \int_0^{+\infty}\exp(-u)\,du\left(\int_0^1 (uv)^{s-1}(u-uv)^{r-1}dx\right) \\ &= \int_0^{+\infty}\exp(-u)(u)^{s+r-1}du\left(\int_0^1 (v)^{s-1}(1-v)^{r-1}dv\right) \\ &= \int_0^{+\infty}\exp(-u)(u)^{s+r-1}du\beta(s,r) \\ &= \Gamma(s+r)\beta(s,r).\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat désiré.Transformée de Laplace ■

Définition 1.10 *Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{C}$ une fonction continue. On appelle transformée de Laplace de f, la fonction $\mathcal{L}(f)$ définie par*

$$\mathcal{L}(f)(s)=\int_{\mathbb{R}^+}\exp(-sx)f(x)\,dx.$$

Pour tout nombre complexe s, lorsque l'intégrale converge.

Définition 1.11 *L'application $\mathcal{L}: f\longrightarrow\mathcal{L}(f)$ est appelée transformation de Laplace.*

Comme dans le cas de la transformée de Fourier, on peut définir une transformation inverse, notée $\mathcal{L}^{-1}$, telle que

$$F(s)=\mathcal{L}(f)(s)\Longleftrightarrow f(x)=\mathcal{L}^{-1}(F(s)).$$

Définition 1.12 *La transformée inverse de Laplace de la fonction $F(s)$, est donnée par*

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-it}^{\sigma+it}\exp(sx)F(s)\,ds.$$

Remarque 1.3 *l'intervalle* $]\sigma - it, \sigma + it[$ *désigne une droite parallèle à l'axe imaginaire et de coordonnée réelle* σ *dans le plan.*

Remarque 1.4 *Si la fonction* f *est à croissance rapide, c'est à dire il existe deux constants réels* $M > 0$ *et* α *tel que*

$$|f(x)| \leq M \exp(\alpha x),$$

pour tout $x \geq 0$*, alors la fonction* $s \mapsto \mathcal{L}(f)(s)$ *est définie et holomorphe sur le demi-plan*

$$\{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > \alpha\}.$$

Exemple 1.3 *Soit* a *un nombre complexe, et soit la fonction* f *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \exp(ax) & si\ x \geq 0, \\ 0 & si\ x < 0. \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(s) &= \int_0^\infty \exp(ax)\exp(-sx)\,dx \\ &= \int_0^\infty \exp(-x(s-a))\,dx, \end{aligned}$$

l'intégrale est converge absolument si $\Re(s) > \Re(a)$*, donc pour tout* $s \in \mathbb{C}$ *on a*

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s-a}.$$

Exemple 1.4 (Translation) *Soit* $a > 0$*, on considère la fonction* f_a *définie par*

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x-a) & si\ x - a \geq 0, \\ 0 & si\ x - a < 0. \end{cases}$$

Cherchons la transformée de Laplace de cette fonction. On a par définition

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_a)(s) &= \int_0^\infty f_a(x)\exp(-sx)\,dx \\ &= \int_0^\infty f(x-a)\exp(-sx)\,dx \\ &= \int_a^\infty f(x-a)\exp(-sx)\,dx, \end{aligned}$$

en posant $u = x - a$, on obtient donc

$$\mathcal{L}(f_a)(s) = \int_0^{\infty} f(u) \exp(-s(u+a))\, du$$
$$= \exp(-sa) \int_0^{\infty} f(u) \exp(-su)\, du,$$

alors

$$\mathcal{L}(f_a)(s) = \exp(-sa)\, \mathcal{L}(f)(s).$$

1.4 Transformée de Fourier

Définition 1.13 ([10]) *Soit f une fonction absolument intégrable*[3] *sur $\mathbb{R}$. La transformée de Fourier de la fonction f, notée $\mathcal{F}_f(\omega) = \tilde{f}(\omega)$ est définie par*

$$\mathcal{F}_f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2i\pi\omega x)\, dx, \ \omega \in \mathbb{R}.$$

On définit également la transformée inverse de Fourier, notée $\mathcal{F}^{-1}$ telle que si

$$\tilde{f}(\omega) = \mathcal{F}_f(\omega),$$

alors $f(x)$ est la transformée inverse de $\tilde{f}(\omega)$. Autrement dit

$$\tilde{f}(\omega) = \mathcal{F}_f(\omega) \Longleftrightarrow f(x) = \mathcal{F}^{-1}_{\tilde{f}}(\omega).$$

Proposition 1.6 *La transformée inverse de Fourier est définie par*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \exp(2i\pi x\omega)\, d\omega.$$

1) *On trouve plusieurs expressions de la transformée de Fourier, par exemple*

$$\begin{cases} \tilde{f}(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-i\pi\omega x)\, dx, \\ et \\ \tilde{f}(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-i\pi\omega x)\, dx. \end{cases}$$

[3] On dit que f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ converge.

2) L'application $\mathcal{F} : f \longrightarrow \mathcal{F}_f$ est appelée transformation de Fourier.
3) $\mathcal{F}_f(\omega)$ est définie par une intégrale dépendante du paramètre réel ω, contrairement à la transformation de Laplace paramètre s est complexe.
4) On a

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \left| f(x) \exp(-2i\pi x \omega) \right| \leq \left| f(x) \right|,$$

donc la fonction $\mathcal{F}_f$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$. On admettra que $\mathcal{F}_f$ est continue.

Exemple 1.5 (Translation) *Soit a un réel fixé et f une fonction vérifié*

$$f_a(x) = f(x-a).$$

On a

$$\mathcal{F}_{f_a}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a) \exp(-2i\pi\omega x)\, dx.$$

On pose $u = x - a$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{f_a}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \exp(-2i\pi\omega(u+a))\, dx \\ &= \exp(-2i\pi\omega a) \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \exp(-2i\pi\omega u)\, dx, \end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{F}_{f_a}(\omega) = \exp(-2i\pi\omega a)\, \mathcal{F}_f(\omega).$$

Chapitre 2

Transformée de Mellin

Le but de ce chapitre est de présenter quelques définitions et propriétés élémentaires de la transformée de Mellin. On calculera la transformée de Mellin de quelques fonctions simples.
La transformée de Mellin appartient à la famille des transformées intégrales, qui établissent une relation entre une fonction f et sa transformée, F sous la forme :

$$F(s) = \int_I K(s,t) f(x)\, dx.$$

Une transformée particulière nécessite donc la définition du noyau $K(s,t)$ et de l'intervalle d'intégration I.
Les transformations les plus utilisées sont celles de Fourier, pour laquelle on a

$$\begin{cases} I = \mathbb{R}, \\ K(s,t) = \exp(-2i\pi sx), \; s \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

et celles de Laplace, pour laquelle on a

$$\begin{cases} I = \mathbb{R}^+, \\ K(s,t) = \exp(-sx), \; s \in \mathbb{C}, \end{cases}$$

et Mellin pour laquelle on a

$$\begin{cases} I = \mathbb{R}^+, \\ K(s,t) = x^{s-1}, \; s \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Définition 2.1 ([2]) *Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$, une fonction de Schwartz. On appelle transformée de Mellin de f, la fonction de la variable complexe s notée $\mathcal{M}[f](s) = \hat{f}(s)$, telle* *que*

$$\hat{f}(s) = \mathcal{M}[f](s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x)\, dx. \tag{2.1}$$

Proposition 2.1 ([8]) *Si on a*
1) f *est définie et continue pour* $x > 0$.
2) *L'intégrale* (2.1) *converge absolument pour* $\Re(s) = \alpha$ *et* $\Re(s) = \beta$.
Alors elle converge absolument pour $\alpha \leq \Re(s) \leq \beta$. *De plus la fonction* $s \longmapsto \mathcal{M}[f](s)$ *est continue et bornée dans cette bande fermée et holomorphe à l'intérieur.*

Exemple 2.1 *Soit la fonction* f *définie par*

$$f(x) = \exp(-x).$$

La transformée de Mellin de la fonction f *est :*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[f](s) &= \int_0^\infty x^{s-1} \exp(-x)\, dx \\ &= \Gamma(s), \end{aligned}$$

est holomorphe pour $\Re(s) > 0$.

Exemple 2.2 *On considère la fonction* f *définie par*

$$f(x) = (1+x)^{-1}.$$

On a

$$\mathcal{M}[f](s) = \int_0^\infty x^{s-1} (1+x)^{-1}\, dx.$$

On pose

$$x + 1 = \frac{1}{(1-t)} \Longrightarrow t = \frac{x}{(x+1)},$$

donc $dt = \dfrac{dx}{(x+1)^2}$, *par suite on a pour* $0 < \Re(s) < 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[f](s) &= \int_0^1 t^{s-1} (1-t)^{-s}\, dt \\ &= \beta(s, 1-s) \\ &= \Gamma(s)\Gamma(1-s), \end{aligned}$$

alors d'après proposition (1.3) *, on a*

$$\mathcal{M}[f](s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

Proposition 2.2 ([2]) *Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de Schwartz et $\hat{f}(s)$ sa transformée de Mellin.*
1) La fonction $\hat{f}(s)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont les seules singularités possibles sont aux entiers négatifs $s = -k$, $k \geq 0$, où $\hat{f}(s)$ peut avoir un pôle simple de résidu $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.
2) Si f est à support[1] compact dans $]0, +\infty[$, la fonction $\hat{f}(s)$ est entière.
3) Dans toute bande verticale $A \leq \sigma \leq B$ avec $0 < A < B$, pour tout $k \geq 1$ on a uniformément

$$\lim_{|s| \longrightarrow \infty} \left| s^k \right| \hat{f}(s) = 0.$$

2.1 Propriétés de la transformée de Mellin

Proposition 2.3 (Linéarité) *Soit f, $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions admettent des transformées de Mellin $\mathcal{M}[f](s)$ et $\mathcal{M}[g](s)$ et soient α, $\beta \in \mathbb{C}$. Alors :*

$$\mathcal{M}[\alpha f + \beta g](s) = \alpha \mathcal{M}[f](s) + \beta \mathcal{M}[g](s).$$

Preuve. Pour tout α, $\beta \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[\alpha f + \beta g](s) &= \int_0^\infty x^{s-1} (\alpha f + \beta g)(x)\, dx \\ &= \int_0^\infty x^{s-1} \alpha f(x)\, dx + \int_0^\infty x^{s-1} \beta g(x)\, dx \\ &= \alpha \int_0^\infty x^{s-1} f(x)\, dx + \beta \int_0^\infty x^{s-1} g(x)\, dx. \end{aligned}$$

Alors

$$\mathcal{M}[\alpha f + \beta g](s) = \alpha \mathcal{M}[f](s) + \beta \mathcal{M}[g](s).$$

■

[1] Soit f une fonction réelle définie sur une partie Ω. On appelle support de f l'ensemble

$$\overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

Proposition 2.4 *La transformée de Mellin de la dérivée f' d'une fonction f est donnée par la relation suivant :*

$$\mathcal{M}\left[f'\right](s) = (-1)(s-1)\hat{f}(s-1).$$

Preuve. Pour établir ce résultat, il faut intégrer par parties l'intégrale définissant la transformée de Mellin de la dérivée

$$\mathcal{M}\left[f'\right](s) = \left[x^{s-1}f(x)\right]_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty}(s-1)\,x^{s-2}f(x)\,dx.$$

La fonction f étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$, cela implique que sa limite est nulle pour x tend vers $+\infty$ et x tend vers 0. Par suite on a

$$\mathcal{M}\left[f'\right](s) = -\int\limits_0^{+\infty}(s-1)\,x^{s-2}f(x)\,dx,$$

alors on a

$$\mathcal{M}\left[f'\right](s) = (-1)(s-1)\hat{f}(s-1).$$

On démontre facilement par récurrence une généralisation de ce résultat sur les dérivées successives de f. En effet

$$\mathcal{M}\left[f^{(k)}(x)\right](s) = (-1)^{(k)}(s-k)_k\,\hat{f}(s-k),$$

tel que

$$\begin{aligned}(s-k)_k &= (s-k)(s-k+1)\cdots(s-1)\\ &= \frac{(s-1)!}{(s-k-1)!}\\ &= \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-k)}.\end{aligned}$$

■

Proposition 2.5 *Si on a pour $\alpha < \Re(s) < \beta$, $\mathcal{M}[f](s) = \hat{f}(s)$ alors $\mathcal{M}[x^z f](s) = \hat{f}(s+z)$, pour tout z complexe et $\Re(s+z) \in\,]\alpha,\beta[$.*

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left[x^z f\right](s) &= \int_0^\infty x^{s-1} x^z f(x)\, dx \\ &= \int_0^\infty x^{s+z-1} f(x)\, dx \\ &= \hat{f}(s+z).\end{aligned}$$

■

2.1.1 Convolution de Mellin

Définition 2.2 *Soient f, g deux fonction continue, on définit le produit de convolution de Mellin par :*

$$(f \hat{*} g)(x) = \int_0^{+\infty} f(y)\, g\left(\frac{x}{y}\right) \frac{dy}{y}.$$

Proposition 2.6 *On a*

$$\mathcal{M}[f \hat{*} g](s) = \mathcal{M}[f](s)\mathcal{M}[g](s).$$

Preuve. Pour la démonstration on utilise le changement suivant $u = \dfrac{x}{y}$, alors $dx = ydu$.

Par suite, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{M}[f \hat{*} g](s) &= \int_0^{+\infty} (f * g)(x)\, x^{s-1} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(y)\, g\left(\frac{x}{y}\right) y^{-1} dy \right) x^{s-1} dx \\ &= \int_0^{+\infty} f(y)\, y^{s-1} \left(\int_0^{+\infty} g(u)\, u^{s-1} y y^{-1} du \right) dy \qquad \text{(Par Fubini)} \\ &= \left(\int_0^{+\infty} f(y)\, y^{s-1} dy \right) \left(\int_0^{+\infty} g(u)\, u^{s-1} du \right).\end{aligned}$$

Alors

$$\mathcal{M}[f \hat{*} g](s) = \mathcal{M}[f](s)\mathcal{M}[g](s).$$

■

Propriétés de convolution de Mellin

Le produit de convolution de Mellin vérifier les propriétés suivants :

1. La commutativité
$$(f\hat{*}g) = (g\hat{*}f)\,.$$

2. L'associativité
$$(f\hat{*}g)\hat{*}h = f\hat{*}(g\hat{*}h).$$

Preuve. Pour la première assertion on a

$$(f\hat{*}g)\,(s) = \int_{0}^{+\infty} f\,(y)\,g\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y}.$$

On pose $u = \dfrac{x}{y}$, donc

$$\begin{cases} du = -\dfrac{x}{y^2}dy, \\ \text{et} \\ -\dfrac{du}{u} = \dfrac{dy}{y}, \end{cases}$$

par suite, on a

$$\begin{aligned}(f\hat{*}g)\,(s) &= \int_{0}^{+\infty} f\,(y)\,g\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y} \\ &= \int_{0}^{+\infty} f\left(\frac{x}{u}\right)g\,(u)\,\frac{du}{u},\end{aligned}$$

donc

$$(f\hat{*}g)\,(s) = (g\hat{*}f)\,(s)\,.$$

Pour la deuxième assertion on a

$$
\begin{aligned}
(f\hat{*}g)\hat{*}h &= \int_0^{+\infty} (f\hat{*}g)(y)\, h\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y} \\
&= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(t)\, g\left(\frac{y}{t}\right)\frac{dt}{t}\right) h\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y} \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(t)\, g\left(\frac{y}{t}\right) h\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y}\frac{dt}{t} && \text{(Par Fubini)} \\
&= \int_0^{+\infty} f(t)\left(\int_0^{+\infty} g\left(\frac{y}{t}\right) h\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y}\right)\frac{dt}{t}.
\end{aligned}
$$

Posons $\dfrac{y}{t} = z$, alors

$$
\begin{cases}
y = tz, \\
\text{et} \\
\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z},
\end{cases}
$$

par suite on a

$$
\begin{aligned}
(f\hat{*}g)\hat{*}h &= \int_0^{+\infty} f(t)\left(\int_0^{+\infty} g(z)\, h\left(\frac{x}{tz}\right)\frac{dz}{z}\right)\frac{dt}{t} \\
&= \int_0^{+\infty} f(t)\left(\int_0^{+\infty} g(z)\, h\left(\frac{\left(\frac{x}{t}\right)}{z}\right)\frac{dz}{z}\right)\frac{dt}{t} \\
&= \int_0^{+\infty} f(t)\int_0^{+\infty} (g\hat{*}h)\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t},
\end{aligned}
$$

donc

$$(f\hat{*}g)\hat{*}h = f\hat{*}(g\hat{*}h).$$

■

2.1.2 La relation entre la transformée de Mellin et les transformations qui précédents

Avec la transformée de Laplace

On a

$$\mathcal{M}[f](s) = \int_{0}^{+\infty} f(x)\, x^{s-1} dx.$$

Par le changement de variable

$$\begin{cases} x = \exp(-t), \\ dx = -\exp(-t)\, dt. \end{cases}$$

La transformée de Mellin devient

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[f](s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\exp(-t)) \exp(-t(s-1)) \exp(-t)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\exp(-t)) \exp(-st)\, dt. \end{aligned}$$

Alors

$$\mathcal{M}[f](s) = \mathcal{L}[f(\exp(-t))](s). \tag{2.2}$$

Avec la transformée de Fourier

Nous pouvons aussi définir la transformation de Mellin en termes de la transformation de Fourier, alors en remplaçant s par $\sigma + i2\pi\omega$ dans l'égalité (2.2), ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[f](s) &= \mathcal{L}[f(\exp(-t))](s) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\exp(-t)) \exp(-st)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\exp(-t)) \exp(-(\sigma + i2\pi\omega)t)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\exp(-t)) \exp(-i2\pi\omega t) \exp(-\sigma t) dt. \end{aligned}$$

Ainsi, ce implique

$$\mathcal{M}[f](s) = \mathcal{F}[f(\exp(-t)) \exp(-\sigma t)](\omega).$$

2.1.3 Quelques propriétés fondamentales

On a les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}
&1)\ \mathcal{M}\left[f\left(ax\right)\right](s)=a^{-s}\hat{f}\left(s\right).\\
&2)\ \mathcal{M}\left[f\left(x^{a}\right)\right](s)=\frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{s}{a}\right).\\
&3)\ \mathcal{M}\left[\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)\right](s)=\hat{f}\left(1-s\right).\\
&4)\ \mathcal{M}\left[f\left(x\right)\left(\log x\right)^{n}\right](s)=\hat{f}^{(n)}\left(s\right).
\end{aligned}$$

Preuve. Soit a un nombre réel positif.
1) On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[f\left(ax\right)\right](s)&=\int_{0}^{+\infty}x^{s-1}f\left(ax\right)dx\\
&=\int_{0}^{+\infty}f\left(t\right)\left(\frac{t}{x}\right)^{s-1}\frac{dt}{a},
\end{aligned}$$

alors

$$\mathcal{M}\left[f\left(ax\right)\right](s)=a^{-1}\hat{f}\left(s\right).$$

2) On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[f\left(x^{a}\right)\right](s)&=\int_{0}^{+\infty}x^{s-1}f\left(x^{a}\right)dx\\
&=\frac{1}{a}\int_{0}^{+\infty}t^{\frac{s}{a}-1}f\left(t\right)dt,
\end{aligned}$$

alors

$$\mathcal{M}\left[f\left(x^{a}\right)\right](s)=\frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{s}{a}\right).$$

■

2.2 Formule d'inversion de Mellin

La transformée de Mellin admet une transformée inverse notée $\mathcal{M}^{-1}\left[\hat{f}\right]$, avec

$$\mathcal{M}^{-1}\left[\hat{f}\right](x)=f(x)\Leftrightarrow\hat{f}(s)=\mathcal{M}\left[f\right](s),$$

où son expression est donnée par la proposition suivante :

Proposition 2.7 *Soit* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$, *une fonction continue et* $\hat{f}$ *sa transformée de Mellin. Alors*

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(\sigma)} x^{-s} \hat{f}(s)\, ds. \tag{2.3}$$

où la notation $\int_{(\sigma)}$ *signifie une intégration (complexe) sur la droite verticale* $\Re(s) = \sigma$.

Proposition 2.8 *La transformation de Mellin est essentiellement une version multiplicative de la transformation de Fourier.*

Preuve. En effet, pour $s = \sigma + it$, avec $\sigma > 0$ fixé, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\hat{f}(s) &= \int_0^\infty x^{s-1} f(x)\, dx \\
&= \int_0^\infty \exp(s \log x)\, f(x) \frac{dx}{x} \\
&= \int_0^\infty \exp(\sigma \log(x)) \exp(it \log(x))\, f(x) \frac{dx}{x}.
\end{aligned}$$

Par le changement de variable

$$\begin{cases} u = \log(x), \\ du = \dfrac{dx}{x}. \end{cases}$$

On obtient

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\sigma u) \exp(itu)\, f(\exp(u))\, du,$$

et avec le changement $u = -2\pi x$ on a

$$\hat{f}(s) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2it\pi x) \exp(-2\pi\sigma x)\, f(\exp(-2\pi x))\, dx.$$

De sorte que $\hat{f}(\sigma + it) = \tilde{f}_\sigma(t)$, pour σ fixé et $t \in \mathbb{R}$ est la transformée de Fourier de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g_\sigma(x) = 2\pi \exp(-2\pi\sigma x)\, f(\exp(-2\pi x)).$$

Utilisons la formule inverse de Fourier

$$g_\sigma(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2i\pi\sigma t)\,\hat{f}(\sigma+it)\,dt.$$

On en déduit que

$$\exp(-2\pi\sigma t)\, f(\exp(-2\pi t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2i\pi\sigma t)\,\hat{f}(\sigma+it)\,dt,$$

si on pose $u = \exp(-2\pi t)$, on trouve

$$f(u)\,u^{\sigma} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u^{-it}\,\hat{f}(\sigma+it)\,dt,$$

d'autre part

$$f(u) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u^{-(\sigma+it)}\,\hat{f}(\sigma+it)\,idt.$$

Finalement

$$f(u) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(\sigma)} u^{-s}\hat{f}(s)\,ds.$$

■

Exemple 2.3 *Soit la fonction f, telle que*

$$f(x) = \exp(-x) - 1.$$

On a

$$\mathcal{M}[f](s) = \int_0^{\infty} (\exp(-x) - 1)\,x^{s-1}dx,$$

pour $-1 < \Re(s) < 0$, on a

$$\mathcal{M}[f](s) = \Gamma(s).$$

On vérifie que pour tout $-1 < \sigma < 0$,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(s)\,x^{-s}ds = \exp(-x) - 1.$$

En effet, comme la fonction $s \mapsto \Gamma(s)\, x^{-s}$ *admet une infinité de pôles simples et par le théorème du résidu on a*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(s)\, x^{-s}ds &= \sum_{n=1}^{\infty} Rés\{x^{-s}\Gamma(s)\,,\ s=-n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n - 1 \\ &= \exp(-x) - 1\end{aligned}$$

Alors

$$\mathcal{M}^{-1}\left[\hat{f}\right](x) = \exp(-x) - 1.$$

Proposition 2.9 *Pour tout* $x > 0$ *et* $a > 0$, *on a*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^{-s}}{s^2}ds = \begin{cases} -\log x & si\ x < 1, \\ 0 & si\ x \geq 1. \end{cases}$$

Preuve. Pour la démonstration, on considère la fonction

$$g(x) = \frac{x^{-s}}{s^2},$$

qui est définit et holomorphe sur $\mathbb{C}/\{0\}$, donc le point 0 est un pôle d'ordre 2, d'après ce qui précède, on a

$$Rés\,(g, 0) = -\log x,$$

et par le théorème des résidus on a

$$\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{x^{-s}}{s^2}ds + \int_{b+iT}^{a+iT}\frac{x^{-s}}{s^2}ds - \int_{a+iT}^{a-iT}\frac{x^{-s}}{s^2}ds + \int_{a-iT}^{b-iT}\frac{x^{-s}}{s^2}ds = 2i\pi Rés\,(g, 0)\,.$$

1) Pour $x \geq 1$, en appliquant le théorème des résidus sur le rectangle de sommets $[a-iT, a+iT]$ et $[b+iT, b-iT]$, qui ne contient pas le pôle 0.

En effet

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{x^{-s}}{s^2}ds + \frac{1}{2i\pi}\int_{b+iT}^{a+iT}\frac{x^{-s}}{s^2}ds + \frac{1}{2i\pi}\int_{a+iT}^{a-iT}\frac{x^{-s}}{s^2}ds + \frac{1}{2i\pi}\int_{a-iT}^{b-iT}\frac{x^{-s}}{s^2}ds = 0,$$

donc

$$\int_{a+iT}^{a-iT} \frac{x^{-s}}{s^2} ds = \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{x^{-s}}{s^2} ds + \int_{b+iT}^{a+iT} \frac{x^{-s}}{s^2} ds + \int_{a-iT}^{b-iT} \frac{x^{-s}}{s^2} ds,$$

et par suite on a

$$\begin{aligned}
\left| \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{x^{-s}}{s^2} ds \right| &= \left| \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{x^{-(b+it)}}{(b+it)^2} idt \right| \\
&\leq \int_{-T}^{T} \frac{x^{-b}}{b^2} dt \\
&\leq \frac{x^{-b}}{b^2} \int_{-T}^{T} dt \\
&\leq \frac{2Tx^{-b}}{b^2} \longrightarrow 0 \text{ quand } b \longrightarrow +\infty,
\end{aligned}$$

et pour tout $\frac{1}{|s|} \leq \frac{1}{T}$, on a

$$\begin{aligned}
\left| \int_{a-iT}^{b-iT} \frac{x^{-s}}{s^2} ds \right| &= \left| - \int_{b+iT}^{a+iT} \frac{x^{-s}}{s^2} ds \right| \\
&= \int_{b+iT}^{a+iT} \frac{x^{-(\sigma+it)}}{(\sigma+it)^2} d\sigma \\
&\leq \int_{a}^{b} \frac{x^{-\sigma}}{T^2} d\sigma \\
&\leq \frac{x^{-b}}{T^2 \log x} \longrightarrow 0 \text{ quand } T \longrightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

Comme l'intégrale sur un chemin infini est la limite de l'intégrale sur un chemin fini, donc

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^{-s}}{s^2} ds = \lim_{T \longrightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{a-iT}^{a+iT} \frac{x^{-s}}{s^2} ds = 0.$$

2) Pour $x < 1$, on considère le rectangle des sommets $[a - iT, a + iT]$ et $[-b - iT - b + iT]$, qui contient le pôle 0.

Et par le théorème des Résidus, on a

$$\int_{a-iT}^{a+iT}\frac{x^{-s}}{s^2}ds+\int_{a+iT}^{-b+iT}\frac{x^{-s}}{s^2}ds+\int_{-b+iT}^{-b-iT}\frac{x^{-s}}{s^2}ds+\int_{-b-iT}^{a-iT}\frac{x^{-s}}{s^2}ds=2i\pi\left(-\log x\right),$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_{-b+iT}^{-b-iT}\frac{x^{-s}}{s^2}ds\right| &= \left|-\int_{-b-iT}^{-b+iT}\frac{x^{-s}}{s^2}ds\right| \\ &\leq \int_{-T}^{T}\frac{x^{-b}}{b^2}dt \\ &\leq \frac{2Tx^{-b}}{b^2}\longrightarrow 0 \text{ quand } b\longrightarrow+\infty,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left|\int_{a\pm iT}^{-b\pm iT}\frac{x^{-s}}{s^2}ds\right| &= \left|\int_{-b\pm iT}^{-b\pm iT}\frac{x^{-(\sigma+it)}}{\left(\sigma+it\right)^2}d\sigma\right| \\ &\leq \int_{a}^{-b}\frac{x^{-\sigma}}{\sigma^2}d\sigma \\ &\leq \frac{x^b}{T\log x}\longrightarrow 0 \text{ quand } T\longrightarrow+\infty.\end{aligned}$$

Par suite on a

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^{-s}}{s^2}ds=\lim_{T\longrightarrow\infty}\int_{a-iT}^{a+iT}\frac{x^{-s}}{s^2}ds=2i\pi\left(-\log x\right).$$

Alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^{-s}}{s^2}ds=-\log x.$$

■

Proposition 2.10 *Pour tout $x>0$ et $a>0$. On a*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{2x^{-s}}{s\left(s+1\right)\left(s+2\right)}ds=\begin{cases}\left(1-x\right)^2 & si\ x<1,\\ 0 & si\ x\geq 1.\end{cases}$$

Preuve. *Si on pose*

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\left(1-x\right)^2 & si\ x<1,\\ 0 & si\ x\geq 1,\end{cases}$$

alors f est la transformée inverse de Mellin de la fonction $\hat{f}$ définie par

$$\hat{f}(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)},$$

donc les points 0, -1 et -2 sont les pôles simple, d'après ce qui précède, on a

$$\begin{cases} Rés\left(\hat{f},0\right) = 1, \\ Rés\left(\hat{f},-1\right) = -2x, \\ Rés\left(\hat{f},-2\right) = x^2. \end{cases}$$

1) *Si $x \geq 1$: En appliquant le théorème des résidus sur le rectangle de sommets $[a+iT, a-iT]$ et $[A+iT, A-iT]$ qui ne contient pas les pôles.*

En effet, pour $A \geq a$,

$$\int_{a-iT}^{a+iT} \frac{2x^{-s}}{s(s+1)(s+2)}ds + \int_{a+iT}^{A+iT} \frac{2x^{-s}}{s(s+1)(s+2)}ds + \int_{A+iT}^{A-iT} \frac{2x^{-s}}{s(s+1)(s+2)}ds + \int_{A-iT}^{a-iT} \frac{2x^{-s}}{s(s+1)(s+2)}ds = 0,$$

donc

$$\int_{a-iT}^{a+iT} \frac{2x^{-s}}{s(s+1)(s+2)}ds = \int_{A+iT}^{a+iT} \frac{2x^{-s}}{s(s+1)(s+2)}ds + \int_{A-iT}^{A+iT} \frac{2x^{-s}}{s(s+1)(s+2)}ds + \int_{a-iT}^{A-iT} \frac{2x^{-s}}{s(s+1)(s+2)}ds,$$

et on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{A-iT}^{A+iT} \frac{2x^{-s}}{s(s+1)(s+2)}ds \right| &= \left| \int_{A-iT}^{A+iT} \frac{2x^{-(A+it)}}{(A+it)((A+it)+1)((A+it)+2)} i dt \right| \\ &\leq 2\int_{-T}^{T} \frac{x^{-A}}{A^3}dt \\ &= 2\frac{x^{-A}}{A^3}\int_{-T}^{T} dt \\ &= 4T\frac{x^{-A}}{A^3} \longrightarrow 0, \ \text{quand } A \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Maintenant, nous intégrons sur les côtés horizontaux $[a-iT, A-iT]$ *et* $[A+iT, a+iT]$ *et on a* $\dfrac{1}{|s|} \leq \dfrac{1}{T}$, *donc*

$$\begin{aligned}\left|\int_{a-iT}^{A-iT} \frac{2x^{-s}}{s(s+1)(s+2)} ds\right| &\leq \frac{2}{T^3}\int_a^A x^{-\sigma} d\sigma \\ &\leq \frac{2}{T^3}\int_a^A x^{-\sigma} d\sigma = \frac{1}{T^3}\int_a^A \exp\left(-\sigma x \log x\right) d\sigma \\ &= \frac{2x^{-A}}{T^3 \log x} \longrightarrow 0, \ \textit{quand } T \longrightarrow \infty,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left|\int_{A+iT}^{a+iT} \frac{2x^{-s}}{s(s+1)(s+2)} ds\right| &= \left|-\int_{a-iT}^{A-iT} \frac{2x^{-s}}{s(s+1)(s+2)} ds\right| \\ &\leq \frac{2}{T^3}\int_a^A x^{-\sigma} d\sigma \\ &\leq \frac{2}{T^3}\int_a^A x^{-\sigma} d\sigma \\ &= \frac{1}{T^3}\int_a^A \exp\left(-\sigma x \log x\right) d\sigma \\ &= \frac{2x^{-A}}{T^3 \log x} \longrightarrow 0, \ \textit{quand } T \longrightarrow \infty.\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{2x^{-s}}{s(s+1)(s+2)} ds = 0.$$

2) *Si* $x < 1$: *On considère le rectangle des sommets* $[a+iT, a-iT]$ *et* $[-A+iT, -A-iT]$ *qui contient les pôles,*

D'après le théorème des résidus, on trouve

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{a-iT}^{a+iT} \frac{2x^{-s}}{s(s+1)(s+2)} ds + \int_{a+iT}^{-A+iT} \frac{2x^{-s}}{s(s+1)(s+2)} ds \\
&+ \int_{-A+iT}^{-A-iT} \frac{2x^{-s}}{s(s+1)(s+2)} ds + \int_{-A-iT}^{a-iT} \frac{2x^{-s}}{s(s+1)(s+2)} ds \\
I &= 2i\pi (1-x)^2 ,
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{-A+iT}^{-A-iT} \frac{2x^{-s}}{s(s+1)(s+2)} ds \right| &= \left| - \int_{-A-iT}^{-A+iT} \frac{2x^{-s}}{s(s+1)(s+2)} ds \right| \\
&\leq 4T \frac{x^A}{A^3},
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{cases}
\left| \int_{a+iT}^{-A+iT} \frac{2x^{-s}}{s(s+1)(s+2)} ds \right| \leq \frac{2x^A}{T^3 \log x}, \\
\text{et} \\
\left| \int_{a-iT}^{-A-iT} \frac{2x^{-s}}{s(s+1)(s+2)} ds \right| \leq \frac{2x^A}{T^3 \log x}.
\end{cases}
$$

Alors si $T \longrightarrow \infty$, *on a*

$$
\frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{2x^{-s}}{s(s+1)(s+2)} ds = (1-x)^2 .
$$

■

Chapitre 3

Application de la transformée de Mellin dans la théorie des nombres

Dans ce chapitre on présente un résultat concernant la valeur moyenne de la fonction arithmétique f définie par

$$f(n) = \prod_{p|n} (p-2).$$

On va voir comment on utilise la transformée inverse de Mellin pour calculer la moyenne des fonctions arithmétiques multiplicatives, on trouve cet exemple dans ([11]).

Proposition 3.1 (Formule intégrale) *Soit ϕ une fonction de Schwartz, f une fonction arithmétique à croissance modérée. Soit $c > 0$ tels que $D_f(s)$ converge absolument sur la droite $\Re(s) = c$.*
1) *On a*

$$\sum_{n\geq 1} f(n)\,\phi(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} D_f(s)\hat{\phi}(s)\,ds, \tag{3.1}$$

où la notation $\int_{(c)}$ signifie une intégration (complexe) sur la droite verticale $\Re(s) = c$. Pour tout σ tel que $\sigma > 0$ et $D_f(s)$ converge absolument pour $\Re(s) = \sigma$.
2) *Pour $y > 0$. On a*

$$\sum_{n\geq 1} f(n)\,\phi\left(\frac{n}{y}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} D_f(s)\hat{\phi}(s)\,y^s ds. \tag{3.2}$$

Preuve. 1) Par la formule (2.3), pour tout $n \geq 1$, on a

$$\phi(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \hat{\phi}(s)\,n^{-s} ds,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} f(n)\,\phi(n) &= \sum_{n\geq 1} f(n)\,\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \hat{\phi}(s)\,n^{-s}ds\\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n\geq 1}\int_{(c)} f(n)\,\hat{\phi}(s)\,n^{-s}ds.\end{aligned}$$

L'échange de $\sum$ et $\int$ est justifiée par la convergence absolue de $D_f(s)$ et de $\phi(s)$. En effet

$$\begin{aligned}\left|\int_{(c)} f(n)\,\hat{\phi}(s)\,n^{-s}ds\right| &\leq |f(n)|\,n^{-c}\int_{(c)}\left|\hat{\phi}(s)\right| ds\\ &\leq K\,|f(n)|\,n^{-c}.\end{aligned}$$

Comme la série de Dirichlet $D_f(s)$ est converge absolument alors $|f(n)|\,n^{-c}$ est le terme général d'une série convergente, donc il vient

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty}\int_{(c)} f(n)\,\hat{\phi}(s)\,n^{-s}ds\right| \leq K\sum_{n=N}^{\infty}|f(n)|\,n^{-c} \longrightarrow 0, \text{ quand } N \longrightarrow \infty.$$

On a donc

$$\sum_{n\geq 1} f(n)\,\phi(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \hat{\phi}(s)\sum_{n\geq 1} f(n)\,n^{-s}ds.$$

Finalemment

$$\sum_{n\geq 1} f(n)\,\phi(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} D_f(s)\hat{\phi}(s)\,ds.$$

2) Pour déduire le (3.2) il suffit d'appliquer ce qui précède à

$$\phi_y(x) = \phi\left(\frac{x}{y}\right),$$

et on démontre que

$$\hat{\phi}_y(s) = y^s\hat{\phi}(s).$$

En effet

$$\hat{\phi}_y(s) = \int_0^{+\infty}\phi\left(\frac{x}{y}\right)x^{s-1}dx.$$

Par le changement de variable

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y} = u,\\ dx = ydu,\end{cases}$$

on trouve

$$\hat{\phi}_y(s) = \int_0^{+\infty} \phi(u)(yu)^{s-1} ydu,$$

donc

$$\hat{\phi}_y(s) = y^s \hat{\phi}(s),$$

d'après la formule (3.1), on a

$$\sum_{n\geq 1} f(n)\phi\left(\frac{n}{y}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} D_f(s)\hat{\phi}(s) y^s ds.$$

■

Théorème 3.1 *Soit f une fonction arithmétique définie par :*

$$f(n) = \prod_{p|n}(p-2),$$

soit X un réel positif, on a

$$\sum_{n\leq x} f(n)\exp\left(-\frac{n}{x}\right) = C_0 X^2 + O\left(X^{\frac{7}{4}}\right),$$

où la constante C_0 est donnée par

$$C_0 = \prod_p \left(1 - \frac{3}{p(p+1)}\right).$$

La démonstration du théorème repose sur les lemmes suivants :

Lemme 3.1 *La fonction f est multiplicative.*
Preuve. *Pour tout m et n deux entiers premiers entre eux, on a*

$$f(mn) = \prod_{p|mn}(p-2),$$

Les nombres premiers p qui divisent le produit mn se séparent, d'après le lemme de Gauss, en effet

$$\begin{aligned} f(mn) &= \prod_{p|m}(p-2)\prod_{p|n}(p-2) \\ &= f(m) f(n). \end{aligned}$$

Par suite on a

$$f(1) = \prod_{p|1}(p-2) = 1,$$

la fonction f est bien multiplicative. ■

Lemme 3.2 *La série de Dirichlet associée à f est*

$$D_f(s) = \prod_p \left(1 + \frac{p-2}{p^s - 1}\right).$$

Preuve. On a par définition

$$\begin{aligned} D_f(s) &= \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} \\ &= \prod_p \left(\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{f(p^\alpha)}{p^{\alpha s}}\right) \qquad \text{(Produit d'Euler)} \\ &= \prod_p \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{f(p^\alpha)}{p^{\alpha s}}\right), \end{aligned}$$

et on a

$$f(p^\alpha) = \prod_{p \mid p^\alpha} (p-2) = (p-2),$$

il résulte que

$$\begin{aligned} D_f(s) &= \prod_p \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{(p-2)}{p^{\alpha s}}\right) \\ &= \prod_p \left(1 + (p-2) \sum_{\alpha=1}^{\infty} p^{-\alpha s}\right), \end{aligned}$$

et comme on a pour $\Re(s) > 1$

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} p^{-\alpha s} = \left(p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \cdots\right) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1 - p^{-ns}}{1 - p^{-s}}\right) p^{-s} = \frac{p^{-s}}{1 - p^{-s}},$$

alors

$$D_f(s) = \prod_p \left(1 + p^{-s} \frac{p-2}{1 - p^{-s}}\right),$$

et donc

$$D_f(s) = \prod_p \left(1 + \frac{p-2}{p^s - 1}\right). \tag{3.3}$$

■

Lemme 3.3 *Pour $\sigma > \frac{3}{2}$, on a*

$$D_f(s) = H(s)\,\zeta(s-1), \tag{3.4}$$

tel que

$$H(s) = \prod_p \left(1 - \frac{2p^{s-1} + p - 3}{(p^s - 1)\,p^{s-1}}\right).$$

Preuve. Le produit infini
$$\prod_p \left(1-\frac{2p^{s-1}+p-3}{\left(p^s-1\right)p^{s-1}}\right),$$
est converge absolument si et seulement si la série
$$\sum_p \left(\frac{2p^{s-1}+p-3}{\left(p^s-1\right)p^{s-1}}\right),$$
est convergente absolument. En effet
$$\begin{aligned}\left|\sum_p \left(\frac{2p^{s-1}+p-3}{\left(p^s-1\right)p^{s-1}}\right)\right| &\leq \sum_p \left(\frac{2p^{\sigma-1}+p-3}{\left(p^\sigma-1\right)p^{\sigma-1}}\right)\\ &= \sum_p \left(\frac{2}{p^\sigma-1}+\frac{1}{p^{\sigma-2}\left(p^\sigma-1\right)}+\frac{3}{p^{\sigma-1}\left(p^\sigma-1\right)}\right),\end{aligned}$$
cette dernière série est converegente si et seulement si $2\sigma-2>1$, donc on a $\sigma>\frac{3}{2}$.
(pour la convergence du produits infinis voir par exemple [5]).
D'après la formule (3.3) , on obtient
$$\begin{aligned}D_f(s) &= \prod_p \left(1+\frac{p-2}{p^s-1}\right)\\ &= \prod_p \left(1+\frac{p-2}{p^s-1}\right)\left(1-\frac{1}{p^{s-1}}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p^{s-1}}\right)\\ &= \prod_p \left(1-\frac{2p^{s-1}+p-3}{\left(p^s-1\right)p^{s-1}}\right)\left(1-\frac{1}{p^{s-1}}\right)^{-1}.\end{aligned}$$
Alors si on pose $H(s)=\prod_p \left(1-\frac{2p^{s-1}+p-3}{\left(p^s-1\right)p^{s-1}}\right)$ alors on trouve
$$D_f(s)=H(s)\,\zeta(s-1).$$

■

Lemme 3.4 *La série de Dirichlet $D_f(s)$ admet un pôle simple en $s=2$, de résidu*
$$H(2)=\prod_p \left(1-\frac{3}{p(p+1)}\right).$$

Preuve. Par le lemme (3.4) on a
$$D_f(s)=H(s)\,\zeta(s-1).$$

Comme $\zeta(s)$ admet un pôle simple en $s=1$, de résidu 1, donc $\zeta(s-1)$ admet un pôle simple en $s=2$, de résidu 1, et comme $H(s)$ est holomorphe pour $\Re(s)>\frac{3}{2}$, alors elle admet un pôle simple en $s=2$, telle que

$$Rés\left(D_f(s), 2\right) = \lim_{s\longrightarrow 2}(s-2)\,D_f(s) = H(2),$$

car

$$\lim_{s\longrightarrow 2}(s-2)\,\zeta(s-1) = 1,$$

et d'après la formule (3.4), on a

$$\begin{aligned} H(2) &= \prod_p \left(1 - \frac{2p+p-3}{(p^2-1)\,p}\right) \\ &= \prod_p \left(1 - \frac{3(p-1)}{(p-1)(p-1)\,p}\right). \end{aligned}$$

Alors

$$H(2) = \prod_p \left(1 - \frac{3}{p(p+1)}\right).$$

■

Lemme 3.5 *Pour* $1+\frac{3}{4} \leq \sigma \leq 2$ *et* $|t| \geq 2$, $(t\in\mathbb{R})$, *on a*

$$|D_f(s)| \leq 120\,|t|^{2-\sigma} \log|t|.$$

Preuve. Soit

$$D = \left\{ s=\sigma+it \in \mathbb{C} \diagup |t| \geq 2, \text{ et } 1+\frac{3}{4} \leq \sigma \leq 2 \right\},$$

et pour tout $s\in D$, on a

$$\begin{aligned} |H(s)| &\leq \prod_p \left(\frac{2p^{\sigma-1}+p-3}{(p^{\sigma}-1)\,p^{\sigma-1}}\right) \\ &\leq \prod_p \left(\frac{3p-3}{\left(p^{\frac{7}{4}}-1\right)p^{\frac{3}{4}}}\right) \\ &= k_p. \end{aligned}$$

Pour un calcul (Excel), on voir que k_p converge vers une limite qui est ≤ 20.
On a

$$|D_f(s)| \leq |H(s)|\,|\zeta(s-1)|,$$

et comme $|t| \geq 2$ et $1+\frac{3}{4} \leq \sigma \leq 2$, on a alors $\frac{3}{4} \leq \sigma - 1 \leq 1$, donc par le lemme (3.1), on obtient

$$|D_f(s)| \leq \frac{120}{\sigma-1} |t|^{2-\sigma} \log|t|.$$

■

Lemme 3.6 *Pour* $x \geq 10$, *on a*

$$\sum_{n\geq 1} f(n) \exp\left(-\frac{n}{x}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} D_f(s)\,\Gamma(s)\, x^s ds.$$

Preuve. Par la proposition (3.1), on a

$$\sum_{n\geq 1} f(n)\, \phi\left(\frac{n}{x}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} D_f(s)\,\hat{\phi}(s)\, x^s ds,$$

on pose $\phi(x) = \exp(-x)$ et $c = 3$, alors

$$\begin{cases} \phi\left(\frac{n}{x}\right) = \exp\left(-\frac{n}{x}\right), \\ \text{et} \\ \hat{\phi}(s) = \Gamma(s). \end{cases}$$

Donc on obtient

$$\sum_{n\geq 1} f(n) \exp\left(-\frac{n}{x}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} D_f(s)\,\Gamma(s)\, x^s ds.$$

■

Lemme 3.7 ([11]) *L'inégalité suivante*

$$|\Gamma(\sigma+it)| \leq c_2 |t|^{\sigma-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\pi|t|}{2}\right), \tag{3.5}$$

existe pour une constante c_2 *et pour tout* $1 \leq \sigma \leq 3$ *et* $|t| \geq 1$.

Lemme 3.8 *Pour tout* $x \geq 10$, *on a*

$$\sum_{n\geq 1} f(n) \exp\left(-\frac{n}{x}\right) = H(2)\, x^2 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{7}{4}-i\infty}^{\frac{7}{4}+i\infty} D_f(s)\,\Gamma(s)\, x^s ds.$$

Preuve. Par le théorème de Cauchy

on a

$$I=\int_{\delta} D_f(s)\,\Gamma(s)\,x^s ds \qquad (\ \delta \text{ est le lacet dans le figure 5 })$$
$$=2i\pi Rés\left(D_f(s)\,\Gamma(s)\,x^s,2\right),$$

avec

$$H(s)=D_f(s)\,\Gamma(s)\,x^s,$$

et on a

$$Rés\left(H(s)\,,2\right)=H(2)\,x^2,$$

par conséquent

$$I=\int_{3-iT}^{3+iT} D_f(s)\,\Gamma(s)\,x^s ds+\int_{3+iT}^{\frac{7}{4}+iT} D_f(s)\,\Gamma(s)\,x^s ds-\int_{\frac{7}{4}-iT}^{\frac{7}{4}+iT} D_f(s)\,\Gamma(s)\,x^s ds+\int_{\frac{7}{4}-iT}^{3-iT} D_f(s)\,\Gamma(s)\,x^s ds \tag{3.6}$$

$$=2\pi iH(2)\,x^2.$$

Nous estimons les intégrales dans l'égalité (3.6) sur les segments horizontaux $\left[3+iT,\frac{7}{4}+iT\right]$ et $\left[\frac{7}{4}-iT,3-iT\right]$.
Pour $T\geq 2$, $\sigma\geq\frac{7}{4}$, on a

$$\left|\int_{3+iT}^{\frac{7}{4}+iT} D_f(s)\,\Gamma(s)\,x^s ds\right|=\left|-\int_{\frac{7}{4}-iT}^{3-iT} D_f(s)\,\Gamma(s)\,x^s ds\right|$$
$$\leq\int_{\frac{3}{4}}^{2}\left|H(s)\,\zeta(s-1)\right|\left|\Gamma(s)\right|\left|x^s\right|\left|ds\right|$$
$$\leq 20\int_{\frac{3}{4}}^{2}\left|\zeta(u+iT)\right|\left|\Gamma(u+1+iT)\right|x^3du$$
$$\leq 20c_2\,(4+\log T)\,x^3T^{3-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{-\pi T}{2}\right)\longrightarrow 0 \text{ qaund } T\longrightarrow+\infty.$$

Et par le lemme (3.6), on a

$$\sum_{n\geq 1} f(n)\exp\left(-\frac{n}{x}\right) = H(2)\,x^2 + \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{7}{4}-iT}^{\frac{7}{4}+iT} D_f(s)\,\Gamma(s)\,x^s ds.$$

■

Lemme 3.9 *On a*

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\frac{7}{4}-i\infty}^{\frac{7}{4}+i\infty} D_f(s)\,\Gamma(s)\,x^s ds\right| = O\left(X^{\frac{7}{4}}\right).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\left|\int_{\frac{7}{4}-iT}^{\frac{7}{4}+iT} D_f(s)\,\Gamma(s)\,X^s ds\right| &\leq \int_{\frac{7}{4}-iT}^{\frac{7}{4}+iT} |D_f(s)|\,|\Gamma(s)|\,|X^s|\,dt \\ &\leq X^{\frac{7}{4}}\int_{\frac{7}{4}-iT}^{\frac{7}{4}+iT} |D_f(s)|\,|\Gamma(s)|\,dt \\ &\leq 20X^{\frac{7}{4}}\int_{\frac{7}{4}-iT}^{\frac{7}{4}+iT} |\zeta(s-1)|\,|\Gamma(s)|\,dt \\ &\leq 20X^{\frac{7}{4}}\int_{-T}^{T}\left|\zeta\left(\frac{3}{4}+it\right)\right|\left|\Gamma\left(\frac{7}{4}+it\right)\right| dt,\end{aligned}$$

et on a d'après le lemme (3.1)

$$\left|\zeta\left(\frac{3}{4}+it\right)\right| \leq 4+\log|t|,$$

et par le formule (3.5) , on a

$$\left|\Gamma\left(\frac{7}{4}+it\right)\right| \leq c_2\,|t|^{\frac{7}{4}-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{\pi|t|}{2}\right).$$

Alors

$$\begin{aligned}\left|\int_{\frac{7}{4}-iT}^{\frac{7}{4}+iT} D_f(s)\,\Gamma(s)\,X^s ds\right| &\leq 20X^{\frac{7}{4}}\int_{-T}^{T}(4+\log|t|)\,c_2\,|t|^{\frac{5}{4}}\exp\left(-\frac{\pi|t|}{2}\right) dt \\ &\leq CX^{\frac{7}{4}},\end{aligned}$$

car l'intégrale à droite dans l'inégalité précédente est égale $O(1)$, par conséquent

$$\left| \int_{\frac{7}{4}-iT}^{\frac{7}{4}+iT} D_f(s)\,\Gamma(s)\,X^s ds \right| = O\left(X^{\frac{7}{4}}\right).$$

■

Lemme 3.10 *On a*

$$\sum_{n\leq x} f(n)\exp\left(-\frac{n}{x}\right) = H(2)\,X^2 + O\left(X^{\frac{7}{4}}\right).$$

Preuve. *Pour* $x \geq 1$, *on a*

$$\sum_{n\geq 1} f(n)\exp\left(-\frac{n}{x}\right) = \sum_{n\leq x} f(n)\exp\left(-\frac{n}{x}\right) + \sum_{n>x} f(n)\exp\left(-\frac{n}{x}\right),$$

quand x *assez-grand, on a*

$$\sum_{n>x} f(n)\exp\left(-\frac{n}{x}\right) = O(1),$$

donc

$$\sum_{n\leq x} f(n)\exp\left(-\frac{n}{x}\right) = H(2)\,X^2 + O\left(X^{\frac{7}{4}}\right).$$

■

Bibliographie

[1] **S. Colombo. J. Lavoine.** Transformations de Laplace et de Mellin. Formulaires. Mode d'utilisation. Mémorial des sciences mathématiques, fascule 169 (1972) , P.

[2] **Emmanuel Kowalski**. Un cours de théorie analytique des nombre. France, 2004.

[3] **Mourad Bellassoued.** Cours et exercices d'analyse Complexe, 2008 − 2009.

[4] **Jean-Marie Nicolas.** Application de la transformée de Mellin, étude des lois statistiques de l'imagerie cohérente. Paris, 2006.

[5] **Michèle Audin.** Un cours sur les fonctions spéciales, 26 novembre 2012.

[6] **Hans Antonio Coricaza Rivas**. Fonction zêta et corps quadratiques, théorie analytique des séries de Dirichlet. Université de Fribourg, 15 mars 2007.

[7] **Jean-Luc. Raimbault.** Transformées de Laplace des fonctions et des distributions. Université de Paris -Sud- 2008.

[8] **Yves Driencourt.** Résumé du cours d'Analyse 3 (L3 Maths). Printemps 2010.

[9] **Daniel Fiorilli.** Irrégularités dans la distribution des nombre premiers et des suites plus générales dans les progressions arithmétiques. Université de Montréal, 25 août 2011.

[10] **Benoît Marx**. Harmonisation en Mathématiques, séries et transformée de Fourier et de Laplace. Maître de Conférences à l'université de Lorraine.

[11] **Olivier Ramaré**. Moyenne de fonctions arithmétiques. l'approche analytique. Une introduction agrémentée d'exercices. Cours donnés à l'université de Nouakchott, 8 october 2013.