Université de Djilali BOUNAÂMA Khemis Miliana

INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

MÉMOIRE

PROJET DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

SPÉCIALITÉ : Analyse Mathématique et Application

Présenté par

SAHNOUNE Fatiha

Semi-Groupes Associes Aux Systèmes Dissipatifs

Soutenu publiquement le :. . . ./juin/2017

Devant le jury composé de :

Mme. F.MEGHATRIA	Université de Djilali BOUNAÂMA	Président.
Mme. L.DJOUAMAI	Université de Djilali BOUNAÂMA	Examinateur.
Mr. A.YACH	Université de Djilali BOUNAÂMA	Examinateur.
Mr. A.KELLECHE	Université de Djilali BOUNAÂMA	Directeur de Projet.

Année Universitaire 2016/2017

Remerciements

Je remercie d'abord et avant tout le bon Dieu qui m'a donné le courage et la patience pour réaliser ce travail.

Mes sincères remerciements et reconnaissances vont à mon encadreur Dr A. KELLECHE pour son aide, ainsi que pour la confiance qu'il m'a prodiguée durant la réalisation de ce travail. Il a su motiver chaque étape de mon travail par des remarques pertinentes et a su me faire progresser dans mes recherches.

Mes plus vifs remerciements s'adressent également aux membres de jury qui m'ont

honoré en acceptant d'évaluer ce travail.

Et je veux remercier aussi tous les étudiants de la promotion 2016/2017 de Math de l'université Djilali Bounaâma Khemis Miliana.

MERCI.

Table des matières

Notations générales

X	Espace de Banach.
H	Espace de Hilbert.
H^1, H_0^1, H^2	Espace de Sobolev.
$\Bbbk$	Designe le corps de nombres réels $\mathbb{R}$ ou complexes $\mathbb{C}$.
$C_0(\Omega)$	Fonctions continues à support compact dans Ω.
$L^1(\Omega)$	Espace vectorie ldes fonctions sommables sur l'intervalle Ω
$L^2(\Omega)$	Espace vectoriel des fonctions de carré sommables sur l'intervalle Ω.
$L(X)$	Algèbre de banach des opérateurs linéaires bornés dans E.
$D(A)$	Domaine de l'opérateure A.
$\overline{D(A)}$	Adherence de l'ensemble $D(A)$.
A	Opérateur.
A^*	Adjoint d'un opérateur A.
I	Identite.
$\rho(A)$	Ensemble résolvant de l'opérateure A.
$\sigma(A)$	Spectre de l'opérateur A.
$R(.,A)$	Application résolvante de A.
$r(S(t))$	Rayons pectrale de $S(t)$.
∇u	Gradient de u.
m-dissipatif	Maximal dissipatif

Introduction

Ce travail s'intéresse à la stabilité exponentielle et à l'analyse des C_0-semigroups associés à divers systèmes dissipatifs découlant de la mécanique. La grande partie de ce travail est basée sur des recherches menées par les auteurs ces dernières années.

L'une des principales motivations de l'étude de la stabilité exponentielle vient de la théorie du contrôle. Il existe divers types d'amortissement dans un système mécanique, tels que la conduction thermique, la viscosité, la friction, etc. Il s'avère que le système mécanique correspondant est dissipatif. Certes, il existe de nombreuses bonnes raisons en pratique d'examiner le problème de contrôle correspondant. Par exemple, contrôler la vibration d'une antenne d'un satellite se déplaçant dans l'espace. Il y a une chaleur due à la lumière du soleil dans l'antenne et le problème peut être réduit à un problème de contrôle pour un système thermoélastique linéaire unidimensionnel pour une tige de longueur L.
En ce qui concerne la méthode de la démonstration de la stabilité exponentielle, ce qui va se présenter dans ce projet est une approche systématique développée par les auteurs dans les années passées.

Dans cet esprit le mémoire est divisè en trois chapitres:

- **Premier chapitre :** Ce chapitre est consacré à la théorie des semi-groupes des opérateurs linéaires bornés en particulier les C_0-semi-groupes, tel que: théorèmes de Hille-Yosida et Lumer-Philips. Cette partie rassemble aussi les définitions et les epaces fonctinnels que nous utiliserons dans ce mémoire.

- **Deuxième chapitre :** Dans chapitre nous présentons quelques théorèmes concernant la stabilité exponentielle d'un semi-groupe fortement continu, avec la démonstration.

- **Troisième chapitre :**Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un système thermoèlastique linèaire, à savoir le système thermoélastique linéaire unidimensionnel avec des conditions aux limites de type Derichlet. On présente les résultats d'existence de la solution en utilisant le théorème de Hille-Yosida et un résultat de stabilité exponentielle en exploitant les théorèmes présenté dans le chapitre précédant.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on présentera quelques définitions et théorèmes fondamentales, les espaces de Sobolev et le théorème de Lax-Milgram et le théorème de Hille-Yosida que nous utiliserons dans les chapitres 2 et 3.

1.1 Les espaces

1.1.1 Espace vectoriel normé

Sous-espaces vectoriels

Définition 1 (Sous-espaces vectoriels)
Soit $(E, +, .)$ *un espace vectoriel sur le corps* $\mathbb{k}$ *et soit* F *sous ensemble dans* E*. On dit que* $(F, +, .)$ *est un sous espace vectoriel de* $(E, +, .)$ *si et seulement si*

1. $F \neq \emptyset$.
2. $\forall x \in F, \forall y \in F : x + y \in F$. *Autrement dit* F *est stable par l'addition.*
3. $\forall x \in F$, *pour* $\lambda \in \mathbb{k} : \lambda x \in F$. *Autrement dit,* F *est stable par la multiplication par scalaire.*

Espaces vectoriels normés

Définition 2 (Espaces vectoriels normés)
Soit $(E, +, .)$ *un espaces vectoriel sur* $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*. Une fonction* $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *est appelée*

norme sur E si:

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$. *Séparation.*

2. $\forall \lambda \in K, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$. *Homogénéité.*

3. $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. *Inégalitè triangulaire.*

   Le couple $(E, \|.\|)$ *est alors appelé espace vectoriel normé.*

Espace de Banach

Définition 3 (Espace de Banach)
On dit qu'un espace normé $(E, \|.\|)$ *est de Banach, si pour toute suite de Cauchy dans E est convergent, cela veut dire que E est complet comme un espace métrique de la distance associée comme norme.*

Corollaire 1

1. *Toutes les normes sont équivalentes dans les espaces de dimension finie.*

2. *Tout espace normé de dimension finie est de Banach.*

3. *Si F est de Banach alors Alors l'ensemble des applications linéaires dans* $\mathcal{L}(E, F)$ *est de Banach.*

Espace de Hilbert

Définition 4 (Produit scalaire)
Soit H un espace vectoriel. Un produit scalaire $\langle u, v \rangle$ *est une forme bilinéaire de* $H \times H$ *dans* $\mathbb{R}$ *symétrique, définie positive.*

Lemme 1 *Soit H un espace de Hilbert*

- ***Inégalité de Cauchy-Schwarz :***

$$\forall (u, v) \in H^2 : |\langle u, v \rangle| \leq \langle u, u \rangle^{1/2} \langle v, v \rangle^{1/2} .$$

- $u \in H : \|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$ *est une norme sur* H.

- ***Identité du parallélogramme :***

$$\forall (u,v) \in H^2 : \left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} \left(\|u\|^2 + \|v\|^2 \right).$$

Définition 5 (Espacede Hilbert)
Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle u, v \rangle$ et qui est complet pour la norme $\langle u, u \rangle^2$.

1.1.2 Espace Dual

Définition 6 (Forme Linéaire)
Soit X un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{k}$. On appelle forme linéaire sur X toute les application linéaire de X vers $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k}$ étant considéré comme espace vectoriel sur lui-même).

Définition 7 (Espace Dual)
Soit X un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{k}$. On appelle espace dual de X, et on le note X^*, l'ensemble des formes linéaire sur X.

1.1.3 Topologie Faible *

Définition 8 (Topologie Faible)
La topologie faible $\sigma(X, X^*)$ sur X est la topologie la moins fine telle que toutes les applications $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f \in X^*$ soient continues.

Définition 9 (Topologie Faible *)
La topologie faible $\sigma(X^*, X)$ *sur* X^* *est la topologie la moins fine telle que toutes les applications*

$$\begin{array}{rl} J_x : & X^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ & f \longrightarrow \langle f, x \rangle \end{array},$$

avec $x \in X$ soient continues.

1.1.4 Espace de L^p

Soit $\Omega = [a,b]$ $(-\infty \leq a \leq b \leq +\infty)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$.

Définition 10 *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$. On note par $L^p(\Omega)$ l'espace des classes d'équivalence de fonctions de puissance p-intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$:*

$$L^p(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{C};\ f \text{ mesurable et } \|f\|_{L^p} < \infty \},$$

avec

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $L^p(\Omega)$ *muni de la norme* $\|.\|_{L^p}$ *est un espace de Banach.*
Si $p = +\infty$ *on a*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|,$$

et L^∞ *est l'espace des fonctions essentiellement bornées sur* (a, b)*.*
Si $p = 2$ *alors*

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \left(\int_a^b |f(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\}.$$

$\left(L^2(\Omega), \langle ., . \rangle_{L^2(\Omega)} \right)$ *est un espace de Hilbert, où* $\langle ., . \rangle_{L^2}$ *est le produit scalaire définit comme suite :*

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_a^b f(x).g(x)dx; \quad \forall f, g \in L^2(\Omega).$$

Définition 11 f *est dite essentiellement bornée sur* Ω *s'il* $\exists M > 0$ *telle que,*

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \le x \le b} |f(x)| = \inf \{ M \ge 0; |f(x)| \le M.p.p \text{ sur } \Omega \}.$$

$(L^\infty(\Omega), \|.\|_\infty)$ *est un Banach.*

Théorème 1 (Inégalité de Hölder) [2]
Soit $f \in L^P$ *et* $g \in L^q$ *alors* $fg \in L^1$ *et*

$$\|fg\|_{L^1} \le \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Preuve Voir [2] page 94. ■

Théorème 2 (Inégalité de Young) *Soitent* p *et* q *deux réels vérifiant* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Alors

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad ab \le \frac{\varepsilon}{2} a^p + \frac{1}{q \varepsilon^{\frac{q}{p}}} b^q.$$

Si $p = q = 2$ *on a*

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad ab \le \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2.$$

1.1.5 Espaces de Sobolev

Soit Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition 12 (dérivées faibles)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, u localement intégrable sur Ω et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. On appelle dérivée faible de u d'ordre α, et on note $D^\alpha u$, toute fonction v localement intégrable sur Ω telle que

$$\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) : \int_\Omega u \partial^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \phi dx.$$

Espace $H^1(\Omega)$

Définition 13 (Espace $H^1(\Omega)$)
L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \ \ tq \ \forall i \in [1, n], \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Remarque 1 *La dérivée dans la définition est à comprendre au sens des distributions.*

Théorème 3 *[2] $H^1(\Omega)$ est un espace vectoriel. Muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx,$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left(|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est espace Hilbert.

Preuve Voir [2]. ■

Remarque 2

1. *On sait que $\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}$ et $\|\partial_i u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}$.*

2. *Pour tout Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$, on a*

$$D(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega).$$

Espace $H^m(\Omega)$

Définition 14 (Espace $H^m(\Omega)$)
Espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est défini par :

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m, \quad D^\alpha u \in L^2(\Omega) \right\}.$$

On munit de la norme :

$$\|u\|_{H^m} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha(x)| \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Espace $H_0^1(\Omega)$

Définition 15 (Espace $H_0^1(\Omega)$)
On définit $H_0^1(\Omega)$ comme la fermiture de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Autrement dit,

$$H_0^1(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega)\,; \exists \phi_n \in D(\Omega) \;\; tq \;\; \phi_n \longrightarrow u \;\; dans \;\; H^1(\Omega)\right\}.$$

Trace

Proposition 1 (Trace)
Soit Ω un ouvert borné et régulier. On peut définir une application linéaire et continue

$$\begin{aligned} \psi : H^1(\Omega) &\longrightarrow L^2(\partial\Omega) \\ u &\longrightarrow \psi(u) \end{aligned}.$$

Prolongeant l'application trace pour les fonctions continues sur $\bar{\Omega}$: pour tout

$$u \in H^1(\Omega) \cap C^0\left(\bar{\Omega}\right) : \psi(u) = u|_{\partial\Omega}.$$

L'application trace est continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, ce qui signifie qu'il existe une constante C_Ω telle que

$$\forall u \in H^1(\Omega), \|\psi(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_\Omega \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Inégalité de Poincaré

Proposition 2 (Inégalité de Poincaré)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une constante C_Ω telle que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

1.2 Les théorèmes fondamentaux

Définition 16 (Fonctions Lipschiztiennes, contractantes)
Soient $(X,d), (Y,d')$ deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une fonction. On dit que f est Lipschitzienne sur X, s'il existe une constante $M \geq 0$ telle que

$$d'(f(x), f(y)) \leq Md(x,y), \quad \forall x, y \in X.$$

On dit aussi que f est M-Lipschitzienne.
La plus petite constante M vérifiant cette inégalité est appelée la constante de Lipschitz de f, notée $Lip(f)$ etvérifie

$$Lip(f) = \sup_{x \neq y} \frac{d'(f(x), f(y))}{d(x,y)}.$$

On dit que f est contractante si elle vérifie $Lip(f) < 1$.

Théorème 4 (Théorème du point fixe de Banach) [1]
Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application k-contractante .Alors il existe un unique point fixe $x' \in X$ de f dans X (i.e. une unique solution de $f(x') = x'$) et de plus, pour tout choix de $x_0 \in X$, la suite définie par récurrence par

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

converge vers x'. Enfin, on a l'estimation d'erreur

$$d(x_n, x') \leq \frac{k^2}{1-k} d(x_0, x_1), \quad \forall n \geq 0.$$

Preuve Voir [1]. ■

Théorème 5 (Banach-Steinhaus) [8]
Soient E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. On considére une famille $(T_i)_{i \in I}$ d'application linéaires continues de E dans F.Si la famille $(T_i)_{i \in I}$ est ponctuellement bornée, i.e:

$$\forall x \in E, \quad \sup_{i \in I} \|T_i x\|_F < \infty.$$

Alors elle est uniform ement bornée, i.e:

$$\forall x \in E, \quad \sup_{i} \|T_i x\|_F < C \|x\|_E.$$

Preuve Voir [8] page 5. ■

Théorème 6 (Banach-Alaoglu-Bourbaki) [2]
Soit E un espace vectoriel normé. Alors la boule unité de son dual topologique

$$\bar{B}_{E^*} = \{f \in E^* : \|f\| \leq 1\},$$

est compact pour la topologie faible $\sigma(E^*, E)$.*

Preuve Voir [2] page 21. ■

Proposition 3 (l'inégalité Gagliardo-Nirenberg) [5]
Soient $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ à support compact, deux réels $1 \leq q, r \leq \infty$ et un entier m. Soient α un réel et j un entier naturel tels que

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right)\alpha + \frac{1-\alpha}{q},$$

et

$$\frac{j}{m} \leq \alpha \leq 1.$$

Alors, il existe une constante C dépendant de m, n, j, q, r et α telle que

$$\left\| D^j u \right\|_{L^p} \leq C \left\| D^m u \right\|_{L^r}^{\alpha} \left\| u \right\|_{L^q}^{1-\alpha}.$$

1.3 Les opérateurs

Soient E et F deux espaces de Banach. Notons $\|.\|$ la norme dont ils sont munis. Soit un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$.

1.3.1 Défintions

Définition 17 (Opérateur linéaire)
Soient E, F deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire est une application linéaire

$$A : D(A) \subset E \longrightarrow F,$$

i.e.

$$\begin{aligned} \forall (u, v) \in D(A)^2; \; & A(u+v) = Au + Av, \\ \forall \lambda \in \mathbb{C}, \qquad & A(\lambda u) = \lambda Au. \end{aligned}$$

Définition 18 (Domaine)
Un opérateur linéaire A de E dans F est une application linéaire A défini par sur un sous-espace vectoriel $D(A)$ de E appelé domaine de A tel que

$$D(A) = \{u; \quad Au \in F\}.$$

Ainsi,

$$A : D(A) \subset E \longrightarrow F.$$

On dit que A est borné s'il existe $C \geq 0$ telle que:

$$\forall u \in D(A), \qquad \|Au\|_F \leq C \|u\|_E.$$

Dans le cas contraire, A est dit non borné.

Définition 19 (Graphe/Noyau/Image)
***Le graphe** de A est le sous-espace vectoriel de $E \times F$ noté $Gr(A)$ défini par :*

$$Gr(A) = \{(u, Au); u \in D(A)\}.$$

On appelle ***Noyau*** *de A le sous-espace de E noté* $\ker(A)$ *définit par :*

$$\ker(A) = \{u \in D(A)\,; Au = 0\}\,.$$

Et ***Image*** *de A le sous-espace de F noté* $\mathrm{Im}(A)$ *définit par :*

$$\mathrm{Im}(A) = A(D(A)) = \{u \in D(A) : Au = 0\}\,.$$

On dit que A est injectif si $\ker(A) = \{0\}$ *, et que A est surjectif si* $\mathrm{Im}(A) = F$*. L'opérateur est bijectif s'il est à la fois injectif et surjectif.*

Définition 20 (Adjoint)
Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné dans X, de domaine dense dans X. On appelle adjoint de l'opérateur $(A, D(A))$ défini par

$$D(A^*) = \left\{ y \in X' : \exists c \geq 0 \quad \textit{tel que} \quad \langle Ax, y \rangle_{X,X'} \leq c\,\|x\| \quad \forall x \in D(A) \right\},$$

et

$$\langle x, A^* y \rangle_{X,X'} = \langle Ax, y \rangle_{X,X'} \quad \forall x \in D(A) \quad \textit{et} \quad y \in D(A^*).$$

Définition 21 (Opérateur inversible)
On dit qu'un opérateur A de domaine $D(A)$ est inversible si

$$A : D(A) \subset E \to F,$$

est bijectif et a un inverse

$$A^{-1} : F \to D(A) \subset E,$$

borné (comme opérateur de F dans E).

Théorème 7 [3] *Soit X un espace de Banach. Si $A \in B(X)$ est un opérateur tel que $\|A\| < 1$ alors $I - A$ est l'inverse est donnée par*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Preuve Voir [3]. ■

Définition 22 (Opérateurs compacts)
On appelle opérateur compact de E dans F tout élément $A \in \mathcal{L}(E, F)$ pour lequel l'image de la boule unité fermée de E est une partie relativement compacte de F.

Définition 23 (Opérateurs fermés)
Un opérateur A est dit fermé si son graphe $Gr(A) = \{(u, Au)\,; u \in D(A)\}$. est fermé dans $H \times H$.

1.3.2 Quelques propriétés spectrales

Définition 24 (Valeur spectrale)
On appelle valeur spectrale de A tout élément $\lambda \in \mathbb{k}$ tel que $(\lambda I - A)$ ne soit pas inversible. L'ensemble des valeurs spectrales de A est appelé le spectre de T et noté $\sigma(A)$.

Remarque 3 *Un élément de $\mathbb{k}$ qui n'est pas valeur spectrale de A est appelé valeur résolvante de A.*

Proposition 4 [3] *Pour un opérateur borné A sur un espace de Banach X, le spectre $\sigma(A)$ est toujours compact et non vide, d'où son rayon spectral*

$$r(A) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\},$$

est finie et satisfait $r(A) \leq \|A\|$.

Définition 25 (Ensemble des valeurs résolvantes)
L'ensemble des valeurs résolvantes de A est noté $\rho(A)$ et est appelé ensemble résolvant de A. Ainsi,

$$\rho(A) = \mathbb{k} - \sigma(A).$$

Définition 26 (Résolvantes)
On appelle résolvante de A l'application qui à $\lambda \in (\mathbb{k} - \sigma(A))$, On associe l'inverse $(A - \lambda I)^{-1}$,ce que note

$$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}.$$

Théorème 8 [3] *Soit H un espace de Hilbert complexe et soit $A \in B(H)$*

1. *Si $|\lambda| > \|A\|$, alors $\lambda \notin \sigma(A)$.*
2. *$\sigma(A)$ est un ensemble fermé.*

Preuve Voir [3]. ■

1.3.3 Opérateur dissipatif

Définition 27 (Opérateur dissipatif)
Un opérateur linéaire A dans E est dit dissipatif si on a

$$\forall x \in D(A), \forall \lambda > 0, \|\lambda x - Ax\|_E \geq \lambda \|x\|_E.$$

A est dit m-dissipatif si A est dissipatif et pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $I - \lambda A$ est surjectif, i.e

$$\forall y \in X, \forall \lambda > 0, \exists x \in D(A), \lambda x - Ax = y.$$

Théorème 9 *[8] Si A est m-dissipatif alors pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $(\lambda I - A)$ admet un inverse, $(\lambda I - A)^{-1} y$ appartient à $D(A)$ pour tout $y \in X$, et $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné sur X vérifiant*

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Preuve Supposons A est $m-$dissipatif alors

1. $\forall x \in D(A), \lambda > 0, \|\lambda x - Ax\|_E \geq \lambda \|x\|$.

2. $\forall y \in X, \forall \lambda > 0, \exists x \in D(A), \lambda x - Ax = y.$

Montrons que $(\lambda I - A)^{-1}$ existe : On va montre que $(\lambda I - A)$ est bijectif .

1) Montrons que $(\lambda I - A)$ est injectif , comme A est linéaire alors $(\lambda I - A)$ est linéaire, pour cela on va montrer que $\ker(\lambda I - A) = \{0\}$.

On a : $(\lambda I - A)(0) = 0$ donc $0 \in \ker(\lambda I - A)$, soit $x \in \ker(\lambda I - A)$: donc $(\lambda I - A)(x) = 0$ donc $\|(\lambda I - A) x\| = 0$ mais $x \in D(A)$ et d'apres (1) on a :

$$\|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\|,$$

et

$$\|\lambda x - Ax\| = \|(\lambda I - A) x\| = 0 \geq \lambda \|x\|,$$

mais $\lambda > 0$ alors $\|x\| \leq 0$ donc $\|x\| = 0$ donc $x = 0$. c-à-d

$$\ker(\lambda I - A) \subset \{0\},$$

et comme $0 \in \ker(\lambda I - A)$.

D'ou $\ker(\lambda I - A) = \{0\}$. donc $(\lambda I - A)$ est injectif.

2) Montrons que $(\lambda I - A)$ est surjectif, c-à-d on va montrer $\forall z \in X$, $\exists x \in D(A)$ telle que $\lambda x - Ax = z$.

Soit $z \in X$ alors il existe un $x \in D(A)$ tq :

$$\lambda x - Ax = z \ \text{ donc } \ (\lambda I - A) x = z,$$

donc $(\lambda I - A)$ est surjectif. Alors l'opérateur $(\lambda I - A)$ est bijectif, donc $(\lambda I - A)^{-1}$ existe.

Montrons que $\forall y \in X$,**et** $(\lambda I - A)^{-1} \in D(A)$ **on a :**

$$\lambda I - A : D(A) \longrightarrow X \text{ donc } (\lambda I - A)^{-1} : X \longrightarrow D(A),$$

alors

$$\forall y \in X; (\lambda I - A)^{-1} \in D(A).$$

Montrons que $(\lambda I - A)^{-1}$ **est linéaire borné vérifiant :**

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Comme $\lambda I - A$ est linéaire et bijectif alors $(\lambda I - A)^{-1}$ existe et linéaire.
Soit $y \in X$, alors $\exists x \in D(A)$ tq :

$$(\lambda I - A)^{-1} y = x,$$

et

$$y = (\lambda I - A) x,$$

on a

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1} y\right\| = \|x\|,$$

et on a

$$\|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\|,$$

donc

$$\|x\| \leq \frac{1}{\lambda} \|(\lambda - A) x\|,$$

alors

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1} y\right\| \leq \frac{1}{\lambda} \|y\|,$$

donc

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda},$$

alors $(\lambda I - A)^{-1}$ est borné et $\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$.

■

Théorème 10 *[8]Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borne dissipatif dans X. L'operateur A est m-dissipatif si et seulement si*

$$\exists \lambda_0 > 0 \quad tq\ \forall y \in X, \quad \exists x \in D(A) : \lambda_0 x - Ax = y. \tag{1.1}$$

Preuve Il est évident que si l'opérateur A est m-dissipatif alors la condition (1.1) est satisfaite.
Montrons la réciproque.
supposons que (1.1) est satisfaite et montrons que A est m-dissipatif.
On a A est disspatif, alors il suffit de montrer que

$$\forall \lambda > 0 \text{ tq } \forall y \in X, \quad \exists x \in D(A) : \lambda x - Ax = y.$$

Soit $y \in X$ et soit $\lambda > 0$, on va chercher un $x \in D(A)$ tq :

$$\lambda x - Ax = y.$$

On a $\lambda x - Ax = y$ alors

$$\lambda x - \lambda_0 x + \lambda_0 x - Ax = y,$$

donc

$$\lambda_0 x - Ax = y + (\lambda_0 - \lambda)\, x,$$

c-à-d on va chercher un $x \in D(A)$ tq :

$$x = (\lambda_0 I - A)^{-1} \left[y + (\lambda_0 - \lambda)\, x \right],$$

alors x est un point fixe de la fonction Y définit par

$$Y : x \mapsto (\lambda_0 I - A)^{-1} \left[y + (\lambda_0 - \lambda)\, x \right].$$

Donc on va utiliser le Théorème de point fixe et on va montrer que Y est contractante. Soit $x_1, x_2 \in D(A)$ on cherche $0 < k < 1$ tq :

$$\|Y(x_1) - Y(x_2)\| \leq k \|x_1 - x_2\|.$$

On a

$$\begin{aligned}
\|Y(x_1) - Y(x_2)\| &= \left\| (\lambda_0 I - A)^{-1} \left[y + (\lambda_0 - \lambda)\, x_1 \right] - (\lambda_0 I - A)^{-1} \left[y + (\lambda_0 - \lambda)\, x_2 \right] \right\| \\
&= \left\| (\lambda_0 I - A)^{-1} \left(y + (\lambda_0 - \lambda)\, x_1 - y - (\lambda_0 - \lambda)\, x_2 \right) \right\| \\
&= \left\| (\lambda_0 I - A)^{-1} (\lambda_0 - \lambda)(x_1 - x_2) \right\| \\
&\leq \left\| (\lambda_0 I - A)^{-1} \right\| \|(x_1 - x_2)\| \, |\lambda_0 - \lambda|,
\end{aligned}$$

mais A est dissipatif alors on trouve que $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ existe et $\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\lambda_0}$. Donc

$$\left\| (\lambda_0 I - A)^{-1} \right\| \|(x_1 - x_2)\| \, |\lambda_0 - \lambda| \leq \frac{|\lambda_0 - \lambda|}{\lambda_0} \|(x_1 - x_2)\|,$$

alors

$$\|Y(x_1) - Y(x_2)\| \leq \frac{|\lambda_0 - \lambda|}{\lambda_0} \|(x_1 - x_2)\|.$$

Pour que Y est contractante il suffit que $0 < \dfrac{|\lambda_0 - \lambda|}{\lambda_0} < 1$ c-à-d $|\lambda_0 - \lambda| < \lambda_0$ alors

$$\begin{gathered}
-\lambda_0 < \lambda_0 - \lambda < \lambda_0, \\
0 < \lambda < 2\lambda_0,
\end{gathered}$$

donc $\lambda \in \left]0, 2\lambda_0\right[$ on a Y est ontractante et donc x existe. ■

Théorème 11 *Soit $(A, D(A))$ un opérateur non borne dans X. S'il existe $\lambda_0 > 0$ pour lequel l'opérateur $\lambda_0 I - A$ est une bijection de $D(A)$ sur X, et si $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ est opérateur borné sur X, alors A est fermé.*
En particulier, si A est m-dissipatif alors A est fermé.

Preuve Soit $(x_n)_n$ une suite de $D(A)$ convergeant vers x dans X, et supposons que $(Ax_n)_n$ converge vers y dans X. L'opérateur $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ étant borné, nous obtenons

$$x_n = (\lambda_0 I - A)^{-1} (\lambda_0 x_n - Ax_n) \rightarrow (\lambda_0 I - A)^{-1} (\lambda_0 x - y) \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Par conséquent, nous avons

$$x = (\lambda_0 I - A)^{-1} (\lambda_0 x_n - y) \in D(A),$$

et

$$(\lambda_0 I - A)x = \lambda_0 x_n - y,$$

soit encore $Ax = y$. La preuve est complète. ■

Corollaire 2 *[8]Soit A un opérateur m-dissipatif. L'espace $\left(D(A), \|.\|_{D(A)}\right)$ est un espace de Banach et $A|_{D(A)} \in \mathcal{L}(D(A), X)$.*

Preuve Avec le Théoréme (11), on peut facilement vérifier que $(D(A), \|.\|_{D(A)})$ est un espace de Banach. Par définition de $\|.\|_{D(A)}$, il est évident que $A|_{D(A)} \in \mathcal{L}(D(A), X)$.
Du Théorème (9), il découle que l'opérateur $(\lambda I - A)|_{D(A)}$ est un isomorphisme de $D(A)$ sur X. Par abus nous dirons parfois que l'opérateur $(\lambda I - A)$ est un isomorphisme de $D(A)$ sur X.
■

Théorème 12 *Soit A un opérateur m-dissipatif de domaine dense dans X. Alors*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|\lambda R(\lambda, A) x - x\| = 0; \quad \forall x \in X.$$

De plus

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|A_\lambda x - Ax\| = 0; \quad \forall x \in D(A).$$

Preuve Soit $x \in D(A)$, on a:

$$\lambda R(\lambda, A)x - x = (\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1} x - x + A(\lambda I - A)^{-1} x = (\lambda I - A)^{-1} Ax.$$

Nous en déduisons

$$\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| \leq \frac{1}{\lambda} \|Ax\| \rightarrow 0 \text{ quand } \lambda \rightarrow 0. \tag{1.2}$$

Le premier résultat est donc démontré pour tout $x \in D(A)$.
Soit $x \in X$ et soit $(x_n)_n$ une suite dans $D(A)$ convergeant vers x dans X. Comme

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1,$$

nous avons

$$\begin{aligned}\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| &\leq \|\lambda R(\lambda, A)x_n - x_n\| + \|\lambda R(\lambda, A)\| \|x_n - x\| + \|x_n - x\| \\ &\leq \|\lambda R(\lambda, A)x_n - x_n\| + 2 \|x_n - x\| .\end{aligned}$$

La fin est standard.
Pour tout $x \in D(A)$, nous avons

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|A_\lambda x - Ax\| = \lim_{\lambda\to\infty} \|\lambda R(\lambda, A)Ax - Ax\| = 0.$$

■

1.3.4 Opérateurs m-dissipatifs dans un espace de Hilbert

Théorème 13 *Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans H, est dissipatif si et seulement si*

$$\forall x \in D(A) : \langle Ax, x\rangle \leq 0.$$

Dans le cas d'un espace de Hilbert complexe, la condition précédente est remplacée par

$$\forall x \in D(A) : \mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle \leq 0.$$

Preuve Supposons que A est dissipatif. Pour tout $x \in D(A)$, non nul, et tout $\lambda > 0$, posons

$$y_{x,\lambda} = \lambda x - Ax,$$

et

$$z_{x,\lambda} = \frac{y_{x,\lambda}}{\|y_{x,\lambda}\|}.$$

L'opérateur A étant dissipatif, on a

$$\lambda \|x\| \leq \|\lambda x - Ax\| = (\lambda x - Ax, z_{x,\lambda}) = \lambda\,\mathrm{Re}\,(x, z_{x,\lambda}) - \mathrm{Re}\,(Ax, z_{x,\lambda}) \leq \lambda \|x\| - \mathrm{Re}\,(Ax, z_{x,\lambda}) .$$

Par conséquent, nous avons

$$\mathrm{Re}\,(Ax, z_{x,\lambda}) \leq 0,$$

et

$$\mathrm{Re}\,(Ax, z_{x,\lambda}) \geq \|x\| - \frac{1}{\lambda} \|Ax\| .$$

La suite $(z_{x,\lambda})_\lambda$ étant bornée dans H, il existe $z_x \in H$ et une suite $(\lambda_n)_n$ convergeant vers l'infini tels que

$$\lim_{n\to\infty} z_{x,\lambda_n} = z_x.$$

Avec les inégalités précédentes, par passage à la limite, nous obtenons

$$\mathrm{Re}\,(Ax, z_x) \leq 0,$$

et

$$\mathrm{Re}\,(x, z_x) \geq \|x\|\,.$$

Comme

$$\mathrm{Re}\,(x, z_x) \leq |(x, z_x)| \leq \|x\|\,.$$

nous avons donc

$$\mathrm{Re}\,(x, z_x) \leq 0.$$

Réciproquement, supposons que $\mathrm{Re}(Ax, x) \leq 0$ pour tout $x \in D(A)$. Alors nous avons

$$\|\lambda x - Ax\|\,\|x\| \geq |(\lambda x - Ax, x)| \geq \mathrm{Re}(\lambda x - Ax, x) \geq \lambda\,\|x\|^2$$

La condition de dissipativité en découle. ■

Théorème 14 *Si A est m-dissipatif alors $D(A)$ est dense dans H.*

Preuve Soit $y_0 \in H$ tel que $(y_0, x) = 0$ pour tout $x \in D(A)$. On a $(I-A)^{-1}y_0 \in D(A)$,

$$(y_0, (I-A)^{-1}y_0) = 0,$$

et

$$((I-A)(I-A)^{-1}y_0, (I-A)^{-1}y_0) = 0.$$

L'opérateur A étant m-dissipatif, il vient

$$\left\|(I-A)^{-1}y_0\right\|^2 = (A(I-A)^{-1}y_0, (I-A)^{-1}y_0) \leq 0.$$

Donc $(I-A)^{-1}y_0 = 0$, $y_0 = 0$, et $D(A)$ est dense dans H. ■

Théorème 15 *Soit A un opérateur dissipatif et de domaine dense dans H. Alors A est m-dissipatif si et seulement si A est fermé et A^* est dissipatif.*

Preuve Supposons que A est m-dissipatif. Nous savons que A est fermé (Théorème 11), nous devons montrer que A^* est dissipatif. De manière à simplifier la preuve nous identifions H et

H'. Dans ce cas, $D(A^*)$ est un sous-espace vectoriel de H'.
Pour tout $y \in D(A^*)$, nous avons

$$\begin{aligned}(A^*y, \lambda R(\lambda, A)\, y) &\leq (y, \lambda A R(\lambda, A)\, y) \\ &= (y, A_\lambda y) \\ &= \left(y, \lambda^2 R(\lambda, A)\, y - \lambda y\right) \\ &\leq \lambda\,(y, \lambda R(\lambda, A)\, y) - \lambda \|y\|^2 \leq 0,\end{aligned}$$

et

$$(A^*y, \lambda R(\lambda, A)\, y) \underset{\lambda \to 0}{\longrightarrow} (A^*y, y) \ .$$

On en déduit que

$$(A^*y, y) \leq 0.$$

Donc que A^* est dissipatif. ■

Définition 28 *Un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$, de domaine dense dans H est dit auto-adjoint si $A = A^*$. Il est dit anti-adjoint si $A = -A^*$*

1.4 Semi-groupe fortement continu

Tout au long de cette section, $(\xi, \|.\|)$ désignera un espace de Banach.

Définition 29 (Semi-groupe fortement continu)
Une famille $\{S(t), t \geq 0\}$ d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach X est appelée semi-groupe fortement continue si

1. *$S(0) = I$, (I est l'opérateur identité sur ξ).*
2. *$S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$; $\forall t_1, t_2 \geq 0$, (Propriété de semi-groupe).*
3. *Pour chaque $x \in X$, $S(t)x$ est continue en t sur $[0, +\infty)$.*
   Ce type de semi groupe sera simplement appelé un C_0-semi-groupe

Définition 30 *Un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés est dit :*

1. *Uniformément continu si*

$$\lim_{t \to 0^+} \|S(t) - I\| = 0.$$

2. *Fortement continu ou de classe C_0 si*

$$\lim_{t \to 0^+} S(t)x = x, \quad \forall x \in X.$$

3. *Semi-groupe de contraction de classe C_0 s'il est de classe C_0 et*

$$\|S(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Remarque 4 *Si $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu,alors*

$$\lim_{t \to s} \|S(t) - S(s)\| = 0.$$

Définition 31 (Générateur infinitésimal)
Le générateur infinitésimal de $S(t)$ est l'opérateur linéaire A de domaine

$$D(A) = \left\{ x \in H : \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t} \quad existe \right\},$$

défini par

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} A_t x = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}; \qquad x \in D(A).$$

Proposition 5 [6] *Soit $S(t)$ un C_0-semigroupe. Il existe deux constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telles que :*

$$\|S(t)\|_{L(H)} \leq Me^{\omega t}; \ \forall t \geq 0.$$

Remarque 5

1. *Dans le cas oú $\|S(t)\|_{L(H)} \leq Me^{\omega t}$; $\forall t \geq 0$. on dit que $\{S(t); t \geq 0\}$ est de type (M, ω).*

2. *Si $(M, \omega) = (1, 0)$, on dit que $\{S(t); t \geq 0\}$ est C_0-semi groupe de contration.*

Preuve Montrons qu'il existe $\tau > 0$ tel que $\|S(t)\|$ est borné pour tout $0 \leq t \leq \tau$.
Supposons qu'il existe une suite $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ telle que

$$\lim_{n \to \infty} t_n = 0,$$

et

$$\|S(t_n)\| \geq \tau.$$

En utilisant le Théorème de Banach-Steinhaus (5) on déduit qu'il existe $x \in X$ tel que $\|S(t_n)\|$ est non borné. Ce qui contredit la condition (3) de la définition (29).
Par conséquent , il existe $\tau > 0$ et $M > 0$ tel que

$$\|S(t)\| \leq M \qquad \text{pour tout } 0 \leq t \leq \tau.$$

Comme $S(0)=I$, alors $M\geq 1$.
Soit $t\geq 0$ et soient $n=\frac{t}{\tau}\in\mathbb{N}^*$ et $0\leq\theta\leq\tau$, tels que $t=n\tau+\theta$. Alors

$$\begin{aligned}\|S(t)\| &= \|S(n\tau+\theta)\| \\ &= \|S(n\tau)S(\theta)\| \\ &\leq \|S(n\tau)\|\,\|S(\theta)\| \\ &\leq \|S(\tau)\|^n\,\|S(\theta)\| \\ &\leq M^n M \\ &\leq M^{\frac{t}{\tau}}M \\ &\leq Me^{\frac{t}{\tau}\ln(M)},\end{aligned}$$

on pose $\omega=\frac{t}{\tau}\ln(M)$, donc $\|S(t)\|\leq Me^{\frac{t}{\tau}\ln(M)}$. ■

Définition 32 [3] *Soit $A:D(A)\subset X\longrightarrow X$ un opérateur fermé. Alors*

$$T(A):=\sup\{\operatorname{Re}\lambda:\lambda\in\sigma(A)\},$$

est appelée la borne spectrale de A.
Pour le générateur A d'un semigroupe fortement continu $\tau=(S(t))_{t\geq 0}$, la borne spectrale $T(A)$ est toujours dominé par la borne de croissance

$$\omega_0=\omega_0(\tau)=\inf\left\{\omega\in\mathbb{R},\ \exists M_\omega\geq 1:\|S(t)\|\geq M_\omega e^{\omega t}\quad\forall t\geq 0\right\}.$$

Définition 33 [3] *Pour la borne spéctrale $T(A)$ de générateur A et pour la borne de croissance ω_0 du semigroupe génére $(S(t))_{t\geq 0}$, on a*

$$-\infty\leq T(A)\leq\omega_0=\inf$$

Corollaire 3 [7] *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $S(t)$ satisfaisant*

$$\|S(t)\|\leq Me^{\omega t}.$$

Soit $\eta>\max(0,\omega)$. Si $x\in D(A^2)$, alors

$$S(t)x=\frac{1}{2\pi i}\int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty}e^{\lambda t}R_\lambda(A)\,xd\lambda.$$

Et pour tout $\delta>0$, l'intégrale converge uniformément en t pour $t\in\left[\delta,\frac{1}{\delta}\right]$.

Preuve Voir [7] page 29. ■

Proposition 6 [3] *Soient* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi groupe et* A *son générateur infinitésimal. Si* $x \in D(A)$*, alors* $S(t)x \in D(A)$ *et on a l'égalité :*

$$S(t)Ax = AS(t)x, \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve Soit $x \in D(A)$. Alors pour tout $t \geq 0$, nous avons :

$$S(t)Ax = S(t)\lim_{h\to 0}\frac{S(h)x - x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h}.$$

Donc $S(t)x \in D(A)$ et on a

$$S(t)Ax = AS(t)x, \forall t \geq 0.$$

■

Proposition 7 [3] *Soient* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0-*semi groupe et* A *son générateur infinitésimal. Alors l'application :*

$$[0,\infty) \ni t \longmapsto S(t)x \in \varepsilon,$$

est dérivable sur $[0,\infty)$*, pour tout* $x \in D(A)$ *et nous avons :*

$$\frac{d}{dt}S(t)x = S(t)Ax = AS(t)x, \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve Soient $x \in D(A), t \geq 0$ et $h > 0$. Alors :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} - S(t)Ax\right\| &\leq \|S(t)\|\left\|\frac{S(h)x - x}{h} - Ax\right\| \\ &\leq Me^{\omega t}\left\|\frac{S(h)x - x}{h} - Ax\right\|.\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} = S(t)Ax,$$

d'ou :

$$\frac{d^+}{dt}S(t)x = S(t)Ax, \quad \forall t \geq 0.$$

Si $t - h > 0$, alors on a :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{S(t-h)x - S(t)x}{-h} - S(t)Ax\right\| &\leq \|S(t-h)\|\left\|\frac{S(h)x - x}{h} - Ax + Ax - S(t)Ax\right\| \\ &\leq Me^{\omega(t-h)}\left(\left\|\frac{S(h)x - x}{h} - Ax\right\| + \|S(h)Ax - Ax\|\right).\end{aligned}$$

Par suite :

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(t-h)x - S(t)x}{-h} = S(t)Ax,$$

et

$$\frac{d^-}{dt}S(t)x = S(t)Ax, \quad \forall t \geq 0.$$

Il s'ensuit que l'application considérée dans l'énoncé est dérivable sur $[0, \infty)$, quel que soit $x \in D(A)$. De plus, on a l'égalité :

$$\frac{d}{dt}S(t)x = S(t)Ax = AS(t)x, \quad \forall t \geq 0.$$

■

Lemme 2 [6] *Soit* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi-groupe. Alors :*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)xds = S(t)x,$$

quels que soient $x \in \xi$ *et* $t \geq 0$.

Preuve Voir [6] page 43. ■

Proposition 8 [3] *Soient* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi-groupe et* A *son générateur infinitésimal. Si* $x \in \xi$, *alors*

$$\int_0^t S(t)xds \in D\left(A\right),$$

et on l'égalité:

$$A\int_0^t S(s)xds = S(t)x - x, \ \forall t \geq 0.$$

Preuve Voir [3] page 50. ■

Théorème 16 [3] *Soient* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi-groupe et* A *son générateur infinitésimal. Alors* $x \in D\left(A\right)$ *et* $Ax = y$ *si et seulement si*

$$S(t)x - x = \int_0^t S(s)yds, \ \forall t \geq 0.$$

Preuve Voir [3] page 50. ■

Théorème 17 [6] *Soient* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi-groupe et* A *son générateur infinitésimal. Alors*

1. $\overline{D(A)} = \xi$.
2. *A est un opérateur fermé.*

Preuve Voir [6] page 45. ■

Corollaire 4 *Soit A le générateur infitésimal d'un semigroupe de contraction $S(t)$. L'ensemble résolvant de A contient toujours le demi-plan ouvert droit, i.e*

$$\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subseteq \rho(A),$$

et pour λ

$$\|R(\lambda, \lambda)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}.$$

Dans toute la suite H désigne un espace de Hilbert.

1.5 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 18 (Lax-Milgram) [2]
Soit A bilinéaire continue et coercive. Pour $\varphi \in H^*$, il existe $u \in H$ unique tq

$$\forall v \in H : A(u, v) = \varphi(v).$$

Si A est symétrique, alors u est caractérisé par

$$u \in H : \frac{1}{2}A(u, u) - \varphi(u) = \min_{v \in K}\left(\frac{1}{2}A(v, v) - \varphi(v)\right).$$

Remarque 6 *Une forme bilinéaire $A : H \times H \to \mathbb{R}$ est*

- *Continue s'il existe C tq pour tout (u, v),*

$$|A(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|.$$

- *Coercive s'il existe $\alpha > 0$ tq pour tout $u \in H$,*

$$A(u, u) \geq \alpha\|u\|^2.$$

Preuve Théorème de Lax-Milgram voir [2] page 164. ■

1.6 Théorème de Hille-Yosida

Théorème 19 (Théorème de Hille-Yosida 1) [6]
Un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$ dans X est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:

1. *A est fermé, et $D(A)$ est dense dans X,*

2. *Pour tout* $\lambda > 0$, $(\lambda I - A)$ *est une application bijective de* $D(A)$ *sur* X, *et* $(\lambda I - A)^{-1}$ *est un opérateur borné sur* X *vérifiant*

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Théorème 20 (Théorème de Hille-Yosida 2) [6]
Un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$ *dans* X *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur* X *si et seulement si* A *est* m*-dissipatif et de domaine dense dans* X.

Preuve
$\Longrightarrow$ Supposons que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X. Soit A est fermé et de domaine dense $(D(A) = X)$. Pour $\lambda > 0$, on pose

$$R_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) x dt.$$

Comme $S(t)$ est un semi-groupe de contractions sur X, on a

$$\|S(t)x\| \leq \|x\|\,, \text{ pour tout } x \in X,$$

et $\lambda > 0$, R_λ est bien défini et

$$R_\lambda(\lambda I - A) = I \quad \text{et} \quad R_\lambda(\lambda I - A)x = x \quad \forall x \in D\,(A)\,.$$

Pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned}
\frac{S(h) - I}{h} R_\lambda x &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[S(h) - I\right] S(t) x dt \\
&= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[S(h)S(t) - S(t)\right] x dt \\
&= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[S(h+t) - S(t)\right] x dt \\
&= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(h+t) x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) x dt.
\end{aligned}$$

On pose

$$I = \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(h+t) x dt.$$

Posons $h + t = u$ alors

$$du = dt$$
$$t \longrightarrow 0 \text{ donc } u \longrightarrow h$$
$$t \longrightarrow \infty \text{ donc } u \longrightarrow \infty,$$

d'ou

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(u-h)}S(u)xdu \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda u}S(u)xdu \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda u}S(u)xdu + \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda u}S(u)xdu - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda u}S(u)xdu \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda u}S(u)xdu - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda u}S(u)xdu.
\end{aligned}$$

On peut écrire

$$I = \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}S(t)xdt.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{S(h)-I}{h}R_\lambda x &= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}S(t)xdt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt \\
&= \left(\frac{e^{\lambda h}-1}{h}\right)\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}S(t)xdt.
\end{aligned}$$

En passant à la limite quand $h \longrightarrow 0$ Donc

$$AR_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x \text{ pour tout } x \in X.$$

Pour montrer que

$$R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}.$$

Pour tout $x \in D(A)$.

$$\begin{aligned}
R_\lambda Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)Axdt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}AS(t)xdt.
\end{aligned}$$

Du Proposition (7) , on déduit

$$\int_0^T e^{-\lambda t}AS(t)xdt = A\int_0^T e^{-\lambda t}S(t)xdt.$$

Comme A est supposé fermé, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda t}AS(t)xdt &= \lim_{T\to\infty} A\int_0^T e^{-\lambda t}S(t)xdt \\
&= A\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt.
\end{aligned}$$

Donc

$$R_\lambda Ax = A\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt = AR_\lambda x.$$

Soit encore

$$R_\lambda (\lambda I - A)\, x = x \quad \forall x \in D(A).$$

Nous avons donc montré que, pour tout $\lambda > 0$, $\lambda I - A$ est inversible, et que son inverse R_λ vérifie l'estimation

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Donc l'opérateur A est m-dissipatif.

$\Longleftarrow$ Supposons que A est m-dissipatif et $\overline{D\,(A)}$ est dense dans X. Montrons que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X. On pose

$$A_\lambda = \lambda A\,(\lambda - A)^{-1}\,,$$

qui est un opérateur borné car

$$A_\lambda = \lambda^2 A\,(\lambda - A)^{-1} - \lambda I.$$

En conséquence, A_λ engendre un groupe d'opérateurs uniformément continu $e^{A_\lambda t}$.

En outre, il s'agit de contractions car

$$\left\|e^{tA_\lambda}\right\| = \left\|e^{t\left(\lambda^2 A(\lambda-A)^{-1}-\lambda I\right)}\right\| \leq e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2\left\|(\lambda-A)^{-1}\right\|} \leq 1.$$

Pour tout $x \in D(A)$, on a

$$A\,(\lambda - A)^{-1}\, x = (\lambda - A)^{-1}\, Ax,$$

qui tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$ d'aprés Théorème (19) (2) .

Par densité de $D(A)$, cette covergence ponctuelle est vraie partout. Donc pour $x \in D(A)$,

$$A_\lambda x = \lambda\,(\lambda - A)^{-1}\, Ax = \left(I + A\,(\lambda - A)^{-1}\right) Ax \overset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} Ax.$$

Comme A_λ et A_μ commutent,

$$e^{A_\lambda t} x - e^{A_\lambda t} x = \int_0^1 \frac{d}{ds} e^{stA_\lambda + (1-s)tA_\mu} x ds = \int_0^1 e^{stA_\lambda + (1-s)tA_\mu} t\,(A_{\lambda -} A_\mu)\, x ds.$$

De plus

$$\begin{aligned}
\left\|e^{tA_\lambda} - e^{tA_\mu}\right\| &= \left\|\int_0^1 \frac{d}{ds}\left(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu}\right) x ds\right\| \\
&\leq \int_0^1 t\left\|\left(e^{tsA\lambda} e^{t(1-s)A_\mu}\right)(A_\lambda x - A_\mu x)\right\| ds \\
&\leq t\,\|A_\lambda x - A_\mu x\|\,.
\end{aligned}$$

d'ou

$$\left\|e^{A_\lambda t} - e^{A_\lambda t}\right\| \leq t\,\|A_{\lambda -} A_\mu\|\,.$$

On en déduit que pour tout $x \in D(A)$, $e^{A_\lambda t}x$ converge vers un point $S(t)x$ uniformément en t dans un intervalle. Ce résultat s'étend sur X par densite car $e^{A_\lambda t}$ sont des contractions.
On obtient facilement que $S(t)$ est un semi-groupe de contractions.
Il reste à voir que le générateur infinitésimal de $S(t)$ est A. Pour cela, on utilise la formule

$$S(t)x - x = \lim_{\lambda \to +\infty} e^{A_\lambda t}x - x = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^t e^{A_\lambda s} A_\lambda x ds.$$

Car $\frac{d}{dt} e^{A_\lambda t} = e^{A_\lambda t} A_\lambda$. De plus $e^{A_\lambda s} A_\lambda$ converge vers $S(t)Ax$ uniformément sur $[0, t]$. On a donc

$$S(t)x - x = \int_0^t S(s)Axds.$$

Notons $(B, D(B))$ le générateur infinitésimal de $(S(t))_{t>0}$. En divisant l'égalité précédente par t et en faisant tendre t vers zéro, on obtient

$$Bx = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} = Ax \quad \forall x \in D(A).$$

On a donc

$$D(B) \supset D(A) \quad \forall x \in D(A).$$

L'opérateur $(B, D(B))$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe de contractions $(S(t))_{t>0}$.
De la première partie de la preuve, nous déduisons que B est m-dissipatif. Donc $(I - B)$ est un isomorphisme de $D(B)$ sur X. Nous avons

$$(B - I)\, D(A) = (A - I)\, D(A) = X.$$

Car $Bx = Ax \quad \text{si} \quad x \in D(A)$, et $(A - I)\, D(A) = X$.
Car A est m-dissipatif. Donc

$$D(B) = (B - I)^{-1} X = (B - I)^{-1} (B - I)\, D(A) = D(A).$$

■

Remarque 7 [7] *Soit A le générateur infitésimal d'un semigroupe de contraction $S(t)$. L'ensemble résolvant de A contient toujoursle demi-plan ouvert droit, i.e, $\{\lambda : \quad \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subseteq \rho(A)$ et pour λ*

$$\|R(\lambda, \lambda)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}.$$

Dans toute la suite H désigne un espace de Hilbert.

1.7 Théoréme de Lumer-Phillips

Définition 34 *Soit X espace be Banach muni de la norme $\|.\|$, et soit X l'espace dual du X^*, posons:*

$$F(x) = \left\{x^* \in X^*, \ \ \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2 \right\}.$$

Définition 35 *Un opérateur linéaire A est dissipatif si pour tout $x \in D(A) \subset X$, il existe $x^* \in F(x)$ tel que*

$$\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0.$$

Proposition 9 *Un opérateur linéaire $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ est dissipatif si et suelement si pour tout $\lambda > 0$ on a :*

$$\|(\lambda I - A)\, x\| \geq \lambda \|x\| \qquad \forall x \in D(A).$$

Preuve Supposons que l'opérateur $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ est dissipatif, donc pour tout $x \in X$, il existe $x^* \in F(x)$ tel que:

$$\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0.$$

Si $\lambda > 0$ alors on a:

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - A)\, x\| \, \|x\| &= \|(\lambda I - A)\, x\| \, \|x^*\|_{X^*} \\ &\geq |\langle (\lambda I - A)\, x, x^* \rangle| \\ &\geq \operatorname{Re} \langle (\lambda I - A)\, x, x^* \rangle \\ &= \operatorname{Re} \langle \lambda x, x^* \rangle - \operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \\ &\geq \lambda \|x\|^2 . \end{aligned}$$

Donc:

$$\|(\lambda I - A)\, x\| \geq \lambda \|x\| .$$

Réciproquement, soit $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ tel que pour tout $\lambda > 0$ et $x \in D(A)$ on a:

$$\|(\lambda I - A)\, x\| \geq \lambda \|x\| .$$

On pose $y_\lambda^* \in F\left((\lambda I - A)\, x\right)$ donc :

$$\langle (\lambda I - A)\, x, y_\lambda^* \rangle = \|(\lambda I - A)\, x\|^2 = \|y_\lambda^*\|^2 .$$

D'ou

$$\|y_\lambda^*\| = \|(\lambda I - A)\, x\| \geq \lambda \|x\| .$$

Posons :

$$t_\lambda^* = \frac{y_\lambda^*}{\|y_\lambda^*\|_{X^*}}.$$

Soit $\bar{B}_{X^*}$ la boule unité de X^* tel que

$$\bar{B}_{X^*} = \{x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\},$$

et $\partial \bar{B}_{X^*}$ sa frontiére, donc $t^*_\lambda \in \partial \bar{B}_{X^*}$.
De plus

$$\begin{aligned} \lambda \|x\| &\leq \|(\lambda I - A)\, x\| \\ &= \frac{1}{\|y^*_\lambda\|} \langle (\lambda I - A)\, x, y^*_\lambda \rangle \\ &= \left\langle (\lambda I - A)\, x, \frac{y^*_\lambda}{\|y^*_\lambda\|} \right\rangle \\ &= \langle (\lambda I - A)\, x, t^*_\lambda \rangle \\ &= \operatorname{Re} \langle \lambda x, t^*_\lambda \rangle - \operatorname{Re} \langle Ax, t^*_\lambda \rangle \\ &\leq |\langle \lambda x, t^*_\lambda \rangle| - \operatorname{Re} \langle Ax, t^*_\lambda \rangle \\ &\leq \lambda \|x\| \, \|t^*_\lambda\| - \operatorname{Re} \langle Ax, t^*_\lambda \rangle . \end{aligned} \tag{1.3}$$

Donc :

$$\operatorname{Re} \langle Ax, t^*_\lambda \rangle \leq 0.$$

D'où

$$-\operatorname{Re} \langle Ax, t^*_\lambda \rangle \leq |\operatorname{Re} \langle Ax, t^*_\lambda \rangle| \leq \|Ax\|,$$

et d'aprés éqation (1.3) on a:

$$\lambda \|x\| \leq \lambda \operatorname{Re} \langle x, t^*_\lambda \rangle + \|Ax\|,$$

par suite

$$\operatorname{Re} \langle x, t^*_\lambda \rangle \geq \|x\| - \frac{1}{\lambda} \|Ax\|,$$

et d'aprés le théorème Banach-Aloglu-Bourbaki (6) la boule $\bar{B}_{X^*}$ est compact pour la topologie faible*, $\sigma(X, X^*)$ et puisque X^* est un espace de banach donc de tout suite de $\bar{B}_{X^*}$ on peut éxtraire une sous suite convergente.
Par suite il existe une sous suite $(t^*_\alpha)_{\alpha>0} \subset (t^*_\lambda)_{\lambda>0}$ et il existe $t^* \in \bar{B}_{X^*}$ tel que : $t^*_\alpha \longrightarrow t^*$ et $\alpha \longrightarrow +\infty$ pour la topologie faible, car $\operatorname{Re} \langle Ax, t^*_\alpha \rangle \leq 0$, et

$$\operatorname{Re} \langle Ax, t^*_\alpha \rangle \geq \|x\| - \frac{1}{\alpha} \|Ax\|.$$

On obtient par passage à limite pour $\alpha \longrightarrow +\infty$ $\operatorname{Re} \langle Ax, t^* \rangle \leq 0$,et

$$\operatorname{Re} \langle x, t^* \rangle \geq \|x\|.$$

Mais comme

$$\operatorname{Re} \langle x, t^* \rangle \leq \langle x, t^* \rangle \leq \|x\|.$$

Alors:

$$\langle x, t^* \rangle = \|x\|.$$

On pose:

$$x^* = \|x\| t^*.$$

Il vient

$$\langle x, x^* \rangle = \langle x, \|x\| t^* \rangle.$$

Ainsi on a:

$$x^* \in F(x); \quad \operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0.$$

■

Proposition 10 *Soit $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ un opérateur dissipatif s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que*

$$\operatorname{Im}(\lambda_0 I - A) = X.$$

Alors, pour tout $\lambda > 0$ on a:

$$\operatorname{Im}(\lambda I - A) = X.$$

Théorème 21 (Lumer-Phillips) [7]
Soit $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ un opérateur tel que $\overline{D(A)} = X$

1. *Si A est dissipatif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 I - A$ est surjectif, alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions.*

2. *Si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions, alors $\lambda I - A$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$ et A est dissipatif.*

Preuve

1. Soit A un opérateur dissipatif pour tout $\lambda > 0$ et soit $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 I - A$ est surjectif. D'après la proposition (9) de l'opérateur dissipatif, A est inversible .
Il s'en suit que A est fermé. Pour appliquer le théorème de Hille-Yosida (19), il reste a montrer que $\forall \lambda > 0$, $(\lambda I - A)$ est surjective ce qui équivaut a inversible et d'inverse borné par $\dfrac{1}{\lambda}$ d'après la proposition (9)

$$\left\| (\lambda I - A)^{-1} x \right\| \leq \frac{1}{\lambda}; \quad \forall \lambda > 0.$$

L'ensemble

$$\Phi = \{\lambda > 0, \qquad \lambda I - A \text{ est surjective}\},$$

est ouvert car l'ensemble des application inversible est un ouvert.

Soit $\lambda_n \in \Phi$ convergeant vers $\lambda_\infty > 0$ et soit $y \in D(A)$. Soit x_n tel que

$$\lambda_n x_n - A x_n = y.$$

On sait que

$$\|x_n\| \leq \lambda_n^{-1} \|y\|,$$

et en outre

$$\lambda_m \|x_n - x_m\| \leq \|\lambda_m (x_n - x_m) - A (x_n - x_m)\| = |\lambda_n - \lambda_m| \|x_n\|.$$

Donc (x_n) est suite de Cauchy et converge vers x. Comme

$$A x_n = \lambda_n x_n - y,$$

et que A est fermé, on a que $x \in D(A)$ et

$$\lambda_\infty x - A x = y.$$

Donc $\lambda_\infty \in \Phi$. A est ouvert et fermé non vide et donc $\Phi = \mathbb{R}_+^*. (]0, +\infty[\in \rho(A))$.

Ainsi d'aprés le Théorème de Hille-Yosida (19), l'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contraction.

2. Si A est le générateur infinitésimal de C_0 semi-groupe de contraction $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, d'aprés le Théorème de Hille-Yosida (19) on a:

$$]0, +\infty[\subseteq \rho(A).$$

Par suite $\lambda I - A$ est surjectif pour tout $\lambda, > 0$, si $x \in D(A)$ et $x^* \in F(x)$ on a:

$$|\langle T(t)x, x^* \rangle| \leq \|x\| \|T(t)x\| \leq \|x\|^2.$$

Ainsi

$$\operatorname{Re} \langle T(t)x - x, x^* \rangle = \operatorname{Re} \langle T(t)x, x^* \rangle - \|x\|^2 \leq 0.$$

Donc

$$\lim_{t \to 0} \operatorname{Re} \left\langle \frac{T(t)x - x}{t}, x^* \right\rangle \leq 0.$$

Par suite

$$\operatorname{Re} \langle Ax - x, x^* \rangle \leq 0.$$

■

Théorème 22 [5] *Soit A un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ dense dans un espace de Hilbert H. Si A est dissipatif et $0 \in \rho(A)$, l'ensemble résolvant de A, alors est le générateur infinitisimal d'un C_0-semi-groupe de contraction dans H.*

Preuve Voir [5] page 3. ■

1.8 Résolution d'un probléme d'évolution

Etant donné, le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega \times [0, +\infty[\\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{1.4}$$

Théorème 23 (Hille-Yosida) [1]
Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ il existe une fonction unique

$$u \in C^1\left([0,\infty[\,; H\right) \cap C\left([0,\infty[\,; D(A)\right),$$

solution du (1.4).
De plus on a

$$|u(t)| \leq |u(t)|,$$

et

$$\left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0.$$

Remarque 8 *L'intérêt principal du Théorème 23 réside dans le fait que pour résoudre le problème d'évolution (1.4) on se ramene à vérifier que A est maximal monotone, c'est-à-dire, à étudier l'équation stationnaire*

$$u + Au = f.$$

Chapitre 2

Stabilité Exponentielle

Dans ce chapitre on a définit les différents type de stabilité : uniforme, exponentielle, uniformément exponentielle, nous avons encore cité deux théorèmes équivalents et démontrer leurs équivalence et un parmis eux.

2.1 Stabilité pour les semi-groupes

Définition 36 *Le semi-groupe $S(t) = e^{At}$ est dit être exponentiellement stable s'il existe deux constantes $\omega > 0$ et $M \geq 1$ tel que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{-\omega t}; \quad \forall t \geq 0.$$

Définition 37 *Soit $S(t)_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe de générateur A dans un espace de Banach X. $S(t)_{t\geq 0}$ est dit*

1. *Uniformément exponetiellement stable s'il existe $\omega > 0$ tel que*

$$\lim_{t\to\infty} e^{\omega t} \|S(t)\| = 0.$$

2. *Uniformément stable si*

$$\lim_{t\to\infty} \|S(t)\| = 0.$$

3. *Fortement stable si*

$$\lim_{t\to\infty} \|S(t)x\| = 0; \forall x \in X.$$

4. *Faiblement stable si*
$$\lim_{t\to\infty} \langle S(t)x, x^*\rangle = 0; \forall x \in X, x^* \in X^*.$$

Proposition 11 *Pour un C_0-semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ dans un espace de Banach, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. $(S(t))_{t\geq 0}$ *est uniformément exponentiellement stable.*
2. $(S(t))_{t\geq 0}$ *est uniformément stable.*
3. *Il existe $\omega > 0$ tel que*
$$\lim_{t\to\infty} e^{\omega t}\|S(t)x\| = 0; \forall x \in X.$$

Preuve Il est clair que, (1) implique (2) et (3).
((2) $\implies$ (1)) D'après le définition (32)
$$e^{\omega_0 t} = r(S(t)) \leq \|S(t)\|, \forall t \geq 0,$$
car $\omega_0 = \inf_{t\geq 0} \frac{1}{t}\log\|S(t)\|$ .Alors
$$\omega_0 \geq \frac{1}{t}\log\|S(t)\|; \quad \forall t \geq 0,$$
donc
$$e^{\omega_0 t} \leq \|S(t)\|; \quad \forall t \geq 0,$$
donc (2) entraire que $\omega_0 < 0$
$$\omega_0 := \inf\left\{\omega \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t\to 0} e^{-\omega t}\|S(t)\| = 0\right\},$$
donc $\exists\omega$ tel que $\omega_0 < \omega < 0$, tel que $\lim_{t\to 0} e^{-\omega t}\|S(t)\| = 0$.On choisit $\eta = -\omega$ alors
$$\lim_{t\to 0} e^{\eta t}\|S(t)\| = 0.$$
On obtient alors (1).
((3) $\implies$ (1)) Si (3) est vérifiée, alors $(e^{\eta t}S(t))_{t\geq 0}$ est fortement donc unifoemément, bornée alors $\exists\beta > 0$ tel que:
$$\begin{aligned}\|e^{\eta t}S(t)\| \leq \beta \quad &\implies e^{\eta t}\|S(t)\| \leq \beta \\ &\implies e^{\frac{\eta}{2}t}\|S(t)\| \leq \beta e^{-\frac{\eta}{2}t},\end{aligned}$$
qui implique $\lim_{t\to\infty} e^{\frac{\eta}{2}t}\|S(t)\| = 0$. Donc (1). ■

2.2 Stabilité exponentielle

Théorème 24 [5] *Soit $S(t) = e^{At}$ un C_0-semi-groupe sur un espace de Hilbert. Alors $S(t)$ est exponentiellement stable si et seulement si*

$$\sup \{\mathrm{Re}(\lambda) ; \lambda \in \rho(A)\} < 0, \tag{2.1}$$

et

$$\sup_{\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0} \left\| (\lambda I - A)^{-1} \right\| < \infty. \tag{2.2}$$

Théorème 25 [5] *Soit $S(t) = e^{At}$ un C_0-semi-groupe des contractions sur un espace de Hilbert. Alors $S(t)$ est exponentiallement stable si et selement si*

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}, \tag{2.3}$$

et

$$\overline{\lim_{|\beta| \to \infty}} \left\| (i\beta I - A)^{-1} \right\| < \infty. \tag{2.4}$$

Dans la suite, on donne la preuve de l'équivalence de ces deux théorème à condition que $S(t) = e^{A}$ est un C_0-semigroupe des contractions sur espace de Hilbert.

Preuve D'abord, nous prouvons que (2.1) et (2.2) impliquent (2.3) et (2.4). Supposons que

$$\sup \{\mathrm{Re}(\lambda) ; \lambda \in (A)\} < 0,$$

alors $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, si $\mathrm{Re}\, \lambda \geq 0$ on a $\lambda \notin \sigma(A)$. Par suite $i\mathbb{R} \subset (A)$, donc (2.1) entraîne (2.3).
Si

$$\sup_{\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0} \left\| (\lambda I - A)^{-1} \right\| < \infty.$$

Alors

$$\left\| (ikI - A)^{-1} \right\| \leq \sup_{\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0} \left\| (\lambda I - A)^{-1} \right\| < \infty \quad \forall k \geq |\beta| .$$

Donc

$$\sup_{k \geq |\beta|} \left\| (ikI - A)^{-1} \right\| \leq \sup_{\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0} \left\| (\lambda I - A)^{-1} \right\| < \infty,$$

ce qui implique que

$$\inf_{|\beta|} \left(\sup_{k \geq |\beta|} \left\| (ikI - A)^{-1} \right\| \right) < \infty.$$

On a

$$\overline{\lim_{|\beta| \to \infty}} \left\| (i\beta I - A)^{-1} \right\| < \infty.$$

Alors (2.2) entraîne (2.4) .

Ensuite, montrer que (2.3) et (2.4) implique (2.1) et (2.2) à condition que $\|S(t)\| \leq 1$. D'après la remarque (7), l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A contient le demi-plan ouvert droit, i.e

$$\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subseteq \rho(A),$$

avec

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}.$$

Ceci implique que pour tout $\delta_0 < 0$ donné, quand $\operatorname{Re}\lambda > |\delta_0|$, nous avons

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda} < \frac{1}{|\delta_0|}.$$

Alors

$$\sup_{\operatorname{Re}\lambda \geq} \left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| < \frac{1}{|\delta_0|}. \tag{2.5}$$

Puis, montrons qu'il existe $\sigma_0 < 0$ avec $|\sigma_0|$ étant suffisamment petite tel que

$$\sigma(A) \subseteq \{\lambda, \operatorname{Re}\lambda \leq \sigma_0\}.$$

On pose $\lambda = u + iv$,

$$\lambda I - A = uI + ivI - A = (ivI - A)\left(u\,(ivI - A)^{-1} + I\right).$$

D'aprés (2.3) $ivI - A$ est inversible et pour $|u|$ suffisamment petit, par Théorème (7)

$$u\,(ivI - A)^{-1} + I$$

est inversible.

Ainsi (2.3) implique

$$\sigma(A) \subseteq \{\lambda, \operatorname{Re}\lambda \leq \sigma_0 < 0\},$$

avec $|\sigma_0|$ suffisammaent petit, par conséquent

$$\sigma_0(A) \subseteq \{\operatorname{Re}\lambda, \lambda \in \sigma(A) \leq \sigma_0 < 0\},$$

et pour $\operatorname{Re}\lambda \leq |\delta_0| \leq |\sigma_0|$, $\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq 2M$, car d'aprés (2.4)

$$\sup_{v\in\mathbb{R}} \left\|(ivI - A)^{-1}\right\| \leq M,$$

et on choisit $|u| \leq \dfrac{1}{2M}$ d'abord, on a

$$\begin{aligned}
\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| &= \left\|(ivI - A)^{-1}\left(u(ivI - A)^{-1} + I\right)^{-1}\right\| \\
&\leq \left\|(ivI - A)^{-1}\right\| \left\|(u(ivI - A)^{-1} + I)^{-1}\right\| \\
&\leq M \left\|(u(ivI - A)^{-1} + I)^{-1}\right\|,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

avec
$$|u| \leq \frac{1}{2M} \leq \frac{1}{2\left\|(ivI-A)^{-1}\right\|}.$$
Alors
$$\left\|u\,(ivI-A)^{-1}\right\| \leq |u|\left\|(ivI-A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{2M}M < 1.$$
Donc par Théorème (7) $u(ivI-A^{-1})+I$ est inversible et l'inverse est donnée par
$$\left(u(ivI-A)^{-1}+I\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(u(ivI-A)^{-1}\right)^{n}.$$

Donc
$$\begin{aligned}\left\|\left(u(ivI-A)^{-1}+I\right)^{-1}\right\| &= \left\|\sum_{n=0}^{\infty}\left(u(ivI-A)^{-1}\right)^{n}\right\| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty}\left\|\left(u(ivI-A)^{-1}\right)^{n}\right\| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty}\left\|\left(u(ivI-A)^{-1}\right)\right\|^{n} \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1-\|(u(ivI-A)^{-1})\|^{n}}{1-\|(u(ivI-A)^{-1})\|}.\end{aligned}$$

Comme $\|(u(ivI-A)^{-1})\| < 1$. Alors
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\|(u(ivI-A)^{-1})\|^{n}}{1-\|(u(ivI-A)^{-1})\|} = \frac{1}{1-\|(u(ivI-A)^{-1})\|}.$$
Donc
$$\left\|\left(u(ivI-A)^{-1}+I\right)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|(u(ivI-A)^{-1})\|}.$$
Comme $\|(ivI-A)^{-1}\| \leq M$, et $|u| < \frac{1}{2M}$. On obtient
$$\left\|\left(u(ivI-A)^{-1}+I\right)^{-1}\right\| \leq 2. \tag{2.7}$$

On somme (2.6) et (2.7), on obtient $\|(\lambda I-A)^{-1}\| \leq 2M$. En combinant ceci avec (2.5), (2.2) se résullte. ■

Théorème 26 [5] *Soit $S(t)=e^{At}$ un C_0-semi-groupe sur un espace de Hilbert. supposons que*
$$\rho(A) \supseteq \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}, \tag{2.8}$$

Alors, A est analytique si et seulement si
$$\overline{\lim_{|\beta|\to\infty}}\left\|(i\beta I-A)^{-1}\right\| < \infty. \tag{2.9}$$

Preuve

($\Longleftarrow$) D'aprés (2.9), il existe une constante positive M telle que pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\left\|\beta\left(i\beta I - A\right)^{-1}\right\| \leq M. \tag{2.10}$$

Supposons que l'ensemble $\left\{\lambda : \ -\frac{|\mathrm{Im}\,\lambda|}{2M} \leq \mathrm{Re}\,\lambda \leq 0\right\}$, est également comprend dans $\rho\left(A\right)$.
On pose $\lambda = \alpha + i\beta$, avec $-\frac{\beta}{2M} \leq \alpha \leq 0$. Il est evident que :

$$\lambda I - A = \left(\alpha + i\beta\right) I - A = \alpha I + \left(i\beta I - A\right) = \left(i\beta I - A\right)\left(\alpha\left(i\beta I - A\right)^{-1} + I\right).$$

D'aprés (2.10) $i\beta I - A$ est inversible et pour $|\alpha|$ est suffisamment petit, par (2.10) le Théorème de l'application contraction (4) $\alpha\left(i\beta I - A\right)^{-1} + I$, est inversible.

Ainsi $\left(\alpha + i\beta\right) I - A$, Est inversible et

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\left(\alpha + i\beta\right) I - A\right)^{-1}\right\| &= \left\|\left(i\beta I - A\right)^{-1}\left(\alpha(i\beta I - A)^{-1} + I\right)^{-1}\right\| \\
&\leq \left\|\left(i\beta I - A\right)^{-1}\right\| \left\|\left(\alpha(i\beta I - A)^{-1} + I\right)^{-1}\right\| \\
&\leq \frac{1}{|\beta|}\left\|\beta\left(i\beta I - A\right)^{-1}\right\| \left\|\alpha(i\beta I - A)^{-1} + I\right\|^{-1} \\
&\leq \frac{1}{|\beta|}\left\|\beta\left(i\beta I - A\right)^{-1}\right\| \left[\frac{|\alpha|}{|\beta|}\left\|\beta(i\beta I - A)^{-1}\right\|\right]^{-1} \\
&\leq \frac{M}{|\beta|}\left[\frac{1}{|\beta|} \times \frac{|\beta|}{2M} \times M\right]^{-1} \\
&\leq \frac{M}{|\beta|}\left[\frac{1}{2} + I\right]^{-1} \\
&\leq \frac{2M}{|\beta|} \\
&\leq \frac{C}{|\lambda|}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Avec $C = \sqrt{(4M^2 + 1)}$.
($\Longrightarrow$) Par le Corollaire (5), pour tout $\eta > 0$ et $x \in D(A^2)$, on a

$$S(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\eta - i\infty}^{\eta + i\infty} e^{\lambda t}\left(\lambda I - A\right)^{-1} x d\lambda, \tag{2.12}$$

et pour tout $\delta > 0$, l'intégrale converge uniformément en t pour $t \in \left[\delta, \frac{1}{\delta}\right]$.
Pour tout $y \in H$, nous avons

$$\left(S\left(t\right)x, y\right) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\beta \to +\infty}\int_{\eta - i\beta}^{\eta + i\beta}\left(e^{\lambda t}\left(\lambda I - A\right)^{-1} x, y\right) d\lambda. \tag{2.13}$$

Soit θ_1 et θ_2 deux angles tels que $\tan(\theta_i) = -\frac{1}{2M}$, avec $\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \pi, \quad \pi < \theta_2 < \dfrac{3\pi}{2}$. Considérons la courbe fermée dans le plan complexe $\lambda : \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, avec

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda = \eta, \quad -\beta \leq \operatorname{Im}\lambda \leq \beta\}, \\
\Gamma_1 &= \left\{\lambda : \operatorname{Im}\lambda = \beta, \quad -\frac{\beta}{2M} \leq \operatorname{Re}\lambda \leq \eta\right\}, \\
\Gamma_2 &= \left\{\lambda : \lambda = \rho e^{i\theta_1}, \quad 0 \leq \rho \leq \frac{C\beta}{2M}\right\}, \\
\Gamma_3 &= \left\{\lambda : \lambda = \rho e^{i\theta_2}, \quad 0 \leq \rho \leq \frac{C\beta}{2M}\right\}, \\
\Gamma_1 &= \left\{\lambda : \operatorname{Im}\lambda = -\beta, \quad -\frac{\beta}{2M} \leq \operatorname{Re}\lambda \leq \eta\right\}.
\end{aligned}$$

Puisque $\left(e^{\lambda t}(\lambda I - A)^{-1}, y\right)$ est analytique en

$$\lambda \in \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda \geq 0\} \cup \left\{\lambda : -\frac{|\operatorname{Im}\lambda|}{2M} \leq \operatorname{Re} \leq 0\right\} \subset \rho(A).$$

Par le Théorème de Cauchy (4) dans la théorie des fonctions analytiques, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\eta-i\beta}^{\eta+i\beta} \left(e^{\lambda t}(\lambda I - A)^{-1} x, y\right) d\lambda &= \underbrace{\int_{-\frac{|\beta|}{2M}}^{\eta} \left(e^{(\delta+i\beta)t}\left((\delta+i\beta) I - A\right)^{-1} x, y\right) d\delta}_{I_1^\beta} \\
&+ \underbrace{\int_{\frac{|\beta|}{2M}}^{\eta} \left(e^{(\delta+i\beta)t}\left((\delta+i\beta) I - A\right)^{-1} x, y\right) d\delta}_{I_2^\beta} \\
&+ \underbrace{e^{i\theta_1} \int_0^{\frac{C|\beta|}{2M}} \left(e^{\rho e^{i\theta_1} t}\left(\rho e^{i\theta_1} I - A\right)^{-1} x, y\right) d\rho}_{I_3^\beta} \\
&+ \underbrace{e^{i\theta_2} \int_0^{\frac{C|\beta|}{2M}} \left(e^{\rho e^{i\theta_2} t}\left(\rho e^{i\theta_2} I - A\right)^{-1} x, y\right) d\rho}_{I_4^\beta} \\
&= I_1^\beta + I_2^\beta + I_3^\beta + I_4^\beta.
\end{aligned}$$

Comme $S(t)$ est un semi-groupe de contraction, par corllaire (4), pour λ à $\operatorname{Re}\lambda > 0$, on a

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|\lambda|}. \tag{2.14}$$

Sommons (2.11) et (2.14), on obtient

$$\begin{aligned}\left|I_1^\beta\right| &= \left|\int_{-\frac{|\beta|}{2M}}^{\eta} \left(e^{(\delta+i\beta)t}\left((\delta+i\beta)I-A\right)^{-1}x,y\right)d\delta\right| \\ &\leq \int_{-\frac{|\beta|}{2M}}^{\eta} \left|\left(e^{(\delta+i\beta)t}\left((\delta+i\beta)I-A\right)^{-1}x,y\right)\right|d\delta \\ &\leq \frac{C}{\beta}\int_{-\frac{|\beta|}{2M}}^{\eta} e^{\delta t}d\delta\,\|c\|\,\|y\| \longrightarrow 0,\ si\ \beta\longrightarrow+\infty.\end{aligned}$$

Le même argument aboutit également à $\left|I_2^\beta\right| \longrightarrow 0$, comme $\beta \longrightarrow +\infty$.

Par (2.11), nous avons

$$\left|I_3^\beta\right| \leq C\int_0^{\frac{c\beta}{2M}} \frac{1}{\rho}e^{\rho t\cos\theta_1}d\rho\,\|x\|\,\|y\|\,. \tag{2.15}$$

Il suit quand $\beta \longrightarrow +\infty$, I_3^β converge vers

$$I_3 = e^{i\theta_1}\int_0^{+\infty}\left(e^{\rho e^{i\theta_1}t}\left(\rho e^{i\theta_1}I-A\right)^{-1}x,y\right)d\rho.$$

Le même argument donne aussi I_4^β converge vers

$$I_4 = e^{i\theta_2}\int_0^{+\infty}\left(e^{\rho e^{i\theta_2}t}\left(\rho e^{i\theta_1}I-A\right)^{-1}x,y\right)d\rho.$$

Ces intégrales convergent uniformément pour $t\in\left[\tau,\frac{1}{\tau}\right]$. Ainsi, nous avons

$$(S(t)x,y) = I_3+I_4,\quad \forall t>0.$$

Il est facile de voir que I_3 et I_4 sont différentiables par rapport à t pour $t>0$. Nous avons

$$\begin{aligned}(S'(t)x,y) &= e^{i\theta_1}\int_0^{+\infty}\left(e^{\rho e^{i\theta_1}t}\left(\rho e^{i\theta_1}I-A\right)^{-1}x,y\right)d\rho \\ &+ e^{i\theta_2}\int_0^{+\infty}\left(e^{\rho e^{i\theta_2}t}\left(\rho e^{i\theta_2}I-A\right)^{-1}x,y\right)d\rho.\end{aligned}$$

Donc

$$|(S'(t)x,y)| \leq C\left(\int_0^{+\infty}e^{\rho t\cos\theta_1}d\rho+\int_0^{+\infty}e^{\rho t\cos\theta_2}d\rho\right)\|x\|\,\|y\| = \frac{C_1}{t}\|x\|\,\|y\|\,. \tag{2.16}$$

Avec $C_1 = -\frac{C}{\cos(\theta_1)}-\frac{C}{\cos(\theta_2)}$. Puisque y est un élément arbitraire et $D\left(A^2\right)$ est dense dans H, il s'en suit de la forme (2.16) et l'argument de densite que

$$\|S'(t)\| = \|AS(t)\| \leq \frac{C_1}{t},\quad t>0.$$

Et du Théorème Hillo-Yosida (19) que $S(t)$ est analytique. ■

Chapitre 3

Application à un systèmes thermoélastiques linéaires

Dans ce chapitre, nous avons d'abord formulé le problème de Cauchy associé à un système thermoélastique linéaire unidimensionnel. Considérons une barre thermoélastique homogène linéaire de longueur l avec une densité unitaire. Soit $u(x,t)$ le déplacement transversale et $\theta(x,t)$ la différence de température par rapport à la température de référence à la poistion x et à l'instant t,réspectivement. Alors u et θ satisfont au système thermoélastique linéaire unidimensionnel suivant

$$u_{tt} - au_{xx} + \gamma\theta_x = 0, \qquad]0,l[\times]0,+\infty[\,, \tag{3.1}$$

$$c_0\theta_t + \gamma u_{xt} - k\theta_{xx} = 0, \qquad]0,l[\times]0,+\infty[\,, \tag{3.2}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad \theta|_{t=0} = \theta_0(x), \tag{3.3}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = \theta(0,t) = \theta(l,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{3.4}$$

où a, γ, c_0 et k sont des coefficients (supposés constants) avec $a > 0$, $c_0 > 0$, $b \neq 0$. On s'intérèsse aux conditions aux limites suivantes à $x = 0$ ou l:

$$u = 0,\ \theta = 0.$$

3.1 Existence et unicité

Pour étudier le problème (3.1) – (3.3) et (3.4) par la théorie du semi-groupe, nous introduisons la nouvelle variable:

$$v = u_t.$$

Alors le problème (3.1) − (3.3) et (3.4) est réduit au problème de Cauchy abstrait suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = Ay, \qquad \forall t > 0, \\ y|_{t=0} = y_0 = (u_0, u_1, \theta_0)^T. \end{cases} \tag{3.5}$$

Avec

$$y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix},$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ D^2 & 0 & -\gamma D \\ 0 & -\gamma D & kD^2 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

tel que

$$D^i = \frac{\partial^i}{\partial x^i},$$

où I est l'opérateur identité.

Soit $\Omega = (0, l)$ et

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega). \tag{3.7}$$

On le munit du produit scalaire :

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \langle Du_1, Du_2 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle + \langle \theta_1, \theta_2 \rangle$$

où $y_1 = (u_1, v_1, \theta_1)^T$, $y_2 = (u_2, v_2, \theta_2)^T \in \mathcal{H}$.

La norme de $\mathcal{H}$ correspondant est donnée par

$$\|y\|_{\mathcal{H}} = \left(\|Du\|^2 + \|v\|^2 + \|\theta\|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.8}$$

où $\|.\|$ est la norme L^2 dans Ω.

Le domaine de l'opérateur $\mathcal{A}$:

$$D(\mathcal{A}) = \left[\left(H^2 \cap H_0^1\right) \times H_0^1 \times \left(H^2 \cap H_0^1\right)\right]^2. \tag{3.9}$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ est un opérateur à demaine dans dense dans $\mathcal{H}$.

On définie l'énergie du système (3.1)-(3.2) par

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left(u_t^2 + au_x^2 + c_0\theta^2\right) dx.$$

Théorème 27 *Pour tout $y_0 = (u_0, v_0, \theta_0) \in \mathcal{H}$ le probléme (3.5) admet une solution unique $y = (u, v, \theta)$ satisfaisant*

$$(u, v, \theta) \in C\left([0, \infty[, \mathcal{H}\right).$$

De plus, si $y_0 \in D(\mathcal{A})$ alors la solution satisfait

$$y \in C^1\left([0, \infty[, \mathcal{H}\right) \cap C\left([0, \infty[, D(\mathcal{A})\right).$$

Preuve

1. Montrons que $\mathcal{A}$ est un opérateur dissipatif.

$$\mathcal{A}y = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ D^2 & 0 & -\gamma D \\ 0 & -\gamma D & kD^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ D^2 u - \gamma D\theta \\ -\gamma Dv + kD^2\theta \end{pmatrix}.$$

alors

$$\begin{aligned} \langle Ay, y\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle v, u\rangle_{H_0^1} + \left\langle D^2u - \gamma D\theta \right\rangle_{L^2} + \left\langle -\gamma Dv + kD^2\theta \right\rangle_{L^2} \qquad (3.10)\\ &= \int_0^l (Dv.Du)\,dx + \int_0^l \left(D^2u.v - \gamma D\theta.v\right) dx + \int_0^l \left(-\gamma Dv.\theta + kD^2\theta.\theta\right) dx \\ &= \int_0^l (Dv.Du)\,dx + \int_0^l \left(D^2u.v\right) dx - \gamma \int_0^l (D\theta.v)\,dx - \gamma \int_0^l Dv.\theta dx + k\int_0^l D^2\theta.\theta dx \\ &= [Du.v]_0^l - \gamma\,[v.\theta]_0^l + [D\theta.\theta]_0^l - k\int_0^l D^2\theta dx \\ &= -k\,\|D\theta\|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A}$ est un opérateur dissipatif.

2. Prouver que $\mathcal{A}$ génère un C_0-semi groupe de contractions sur $\mathcal{H}$. Par le Théorème (22), il reste à prouver que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Soit $F = (f_1, f_2, f_3)^T \in \mathcal{H}$, Considérons l'équation

$$\mathcal{A}y = F, \tag{3.11}$$

i.e

$$v = f_1, \tag{3.12}$$

$$D^2u - \gamma D\theta = f_2, \tag{3.13}$$

$$-\gamma Dv + kD^2\theta = f_3. \tag{3.14}$$

On remplace (3.12) dans (3.14), il vient

$$kD^2\theta = f_3 + \gamma Df_1 \in L^2. \tag{3.15}$$

Il reste à prouver qu'il existe u satisfaisant

$$D^2u - \gamma D\theta = f_2 = g_1 \in L^2, \tag{3.16}$$

$$kD^2\theta = f_3 + \gamma Df_1 = g_2 \in L^2. \tag{3.17}$$

On définit l'espace $\Psi = H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l)$. En multipliant les deux équations (3.16) et (3.17) par des fonctions $\tilde{u} \in C_0^1(0,l)$, $\tilde{\theta} \in C_0^1(0,l)$ respectivement et on intégre sur $[0,l]$, on obtient

$$\int_0^l D^2u.\tilde{u}dx - \gamma \int_0^l D\theta.\tilde{u}dx = \int_0^l g_1\tilde{u}dx,$$

$$k\int_0^l D^2\theta.\tilde{\theta}dx = \int_0^l g_2\tilde{\theta}dx, \tag{3.18}$$

ce qui implique que

$$[Du.\tilde{u}]_0^l - \int_0^l Du.D\tilde{u}dx - \gamma\,[\theta.\tilde{u}]_0^l + \gamma\int_0^l \theta.D\tilde{u}dx = \int_0^l g_1\tilde{u}dx.$$

$$k\left[Du.\tilde{\theta}\right]_0^l - k\int_0^l D\theta.D\tilde{\theta}dx = \int_0^l g_2\tilde{\theta}dx.$$

Donc

$$-\int_0^l Du.D\tilde{u}dx + \gamma\int_0^l \theta.D\tilde{u}dx = \int_0^l g_1\tilde{u}dx, \tag{3.19}$$

$$-k\int_0^l D\theta.D\tilde{\theta}dx = \int_0^l g_2\tilde{\theta}dx, \tag{3.20}$$

additionnons (3.19) à (3.20), on obtient

$$\int_0^l Du.D\tilde{u}dx + k\int_0^l D\theta.D\tilde{\theta}dx - \gamma\int_0^l \theta.D\tilde{u}dx = -\int_0^l \left(g_1\tilde{u} + g_2\tilde{\theta}\right)dx.$$

Pour $y := (u,\theta)$ et $\tilde{y} := (\tilde{u},\tilde{\theta})$ on définit sur Ψ une forme bilinéair $a(.,.)$ et une forme linéair $L(.)$ par

$$a(y,\tilde{y}) = \int_0^l Du.D\tilde{u}dx + k\int_0^l D\theta.D\tilde{\theta}dx - \gamma\int_0^l \theta.D\tilde{u}dx.$$

$$L(\tilde{y}) = -\int_0^l \left(g_1\tilde{u} + g_2\tilde{\theta}\right)dx.$$

On applique le Théorème de Lax-Milgram (18), sur l'espace W pour la forme bilinéaire $a(y,\tilde{y})$ et la forme linéaire $L(\tilde{y})$.

* Continuité de $a(.,.)$

$$\begin{aligned}|a(y,\tilde{y})| &= \left|\int_0^l Du.D\tilde{u}dx + k\int_0^l D\theta.D\tilde{\theta}dx - \gamma\int_0^l \theta.D\tilde{u}dx\right| \\ &= \left|\int_0^l Du.D\tilde{u} + kD\theta.D\tilde{\theta} - \gamma\theta.D\tilde{u}dx\right|,\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz (1) , on obtient

$$
\begin{aligned}
&|a(y,\tilde{y})| \\
&\leq \|Du\|_{L^2}\|D\tilde{u}\|_{L^2} + k\|D\theta\|_{L^2}\left\|D\tilde{\theta}\right\|_{L^2} + \gamma\|D\theta\|_{L^2}\|\tilde{u}\|_{L^2} \\
&\leq \max(k,\gamma)\left(\|u\|_{H_0^1}\|\tilde{u}\|_{H_0^1} + \|\theta\|_{H_0^1}\left\|\tilde{\theta}\right\|_{H_0^1} + \|\theta\|_{H_0^1}\|\tilde{u}\|_{H_0^1} + \left\|\tilde{\theta}\right\|_{H_0^1}\|u\|_{H_0^1} + \left\|\tilde{\theta}\right\|_{H_0^1}\|u\|_{H_0^1}\right) \\
&\leq \max(k,\gamma)\left(\|u\|_{H_0^1}\|\tilde{u}\|_{H_0^1} + \|\theta\|_{H_0^1}\left\|\tilde{\theta}\right\|_{H_0^1} + \|\theta\|_{H_0^1}\|\tilde{u}\|_{H_0^1} + \left\|\tilde{\theta}\right\|_{H_0^1}\|u\|_{H_0^1}\right) \\
&\leq P_1\left(\|u\|_{H_0^1} + \|\theta\|_{H_0^1}\right)\left(\|\tilde{u}\|_{H_0^1} + \left\|\tilde{\theta}\right\|_{H_0^1}\right) \\
&\leq P_1\|y\|_\Psi\|\tilde{y}\|_\Psi .
\end{aligned}
$$

Donc $a(.,.)$ est continue.

** Coercivité de $a(.,.)$

$$a(y,y) = \int_0^l Du.Dudx + k\int_0^l D\theta.D\theta dx - \gamma\int_0^l \theta.Dudx$$

en utilisant l'inégalité de Young (2), on aura

$$\int_0^l \theta.Dudx \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_0^l (Du)^2\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^l \theta^2 dx,$$

donc

$$-\int_0^l \theta.Dudx \geq -\frac{\varepsilon}{2}\int_0^l (Du)^2\,dx - \frac{\varepsilon}{2}\int_0^l \theta^2 dx.$$

On a

$$
\begin{aligned}
a(y,y) &\geq \int_0^l (Du)^2\,dx + k\int_0^l (D\theta)^2\,dx - \gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\int_0^l (Du)^2\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^l \theta^2 dx\right) \\
&\geq \left(1-\gamma\frac{\varepsilon}{2}\right)\int_0^l (Du)^2\,dx + k\int_0^l (D\theta)^2\,dx - \gamma\frac{\varepsilon}{2}\int_0^l \theta^2 dx.
\end{aligned}
$$

On prend $1-\gamma\frac{\varepsilon}{2} = S$, il résulte

$$
\begin{aligned}
a(y,y) &\geq S\int_0^l (Du)^2\,dx + k\int_0^l (D\theta)^2\,dx - \gamma\frac{\varepsilon}{2}\int_0^l \theta^2 dx \\
&\geq S\int_0^l (Du)^2\,dx + k\int_0^l (D\theta)^2\,dx \\
&\geq \min(S,k)\int_0^l \left((Du)^2 + (D\theta)^2\right)dx.
\end{aligned}
$$

Notons que $\int_0^l (Du)^2\,dx$ et $\int_0^l (D\theta)^2\,dx$ définissent une norme sur $H_0^1(0,1)$, on oura

$$a(y,y) \geq P_2\|y\|_\Psi^2 .$$

*** Continuité de $L(.)$

$$\begin{aligned}
|L(\tilde{y})| &= \left| \int_0^l \left(g_1 \tilde{u} + g_2 \tilde{\theta} \right) dx \right| \\
&\leq \|g_1\|_{L^2} \|\tilde{u}\|_{L^2} + \|g_2\|_{L^2} \left\| \tilde{\theta} \right\|_{L^2} \\
&\leq \max \left(\|g_1\|_{L^2}, \|g_2\|_{L^2} \right) \left(\|\tilde{u}\|_{L^2} + \left\| \tilde{\theta} \right\|_{L^2} \right) \\
&\leq P_3 \left(\|\tilde{u}\|_{H_0^1} + \left\| \tilde{\theta} \right\|_{H_0^1} \right) \\
&\leq P_3 \|\tilde{y}\|_{\Psi} .
\end{aligned}$$

Donc $L(.)$ est continue.

$a(.,.)$ est bilinéaire, continue et coercive sur Ψ, et $L(.)$ est linéaire et continue sur Ψ. D'après le Théorème de Lax-Milgram (18), on conclut qu'il existe une solution unique

$$(u, \theta)^T \in \Psi = H_0^1(0, l) \times H_0^1(0, l),$$

telle que

$$a(y, \tilde{y}) = L(\tilde{y}), \qquad \forall \tilde{y} \in \Psi.$$

Ce qui signifie que

$$u \in H_0^1(0, l), v = f_1 \in H_0^1(0, l), \theta \in H_0^1(0, l),$$

il reste à montrer que $u, \theta \in H^2(0, l)$.

En prenant

$$\left(\tilde{u}, \tilde{\theta} \right) = (\tilde{u}, 0) \in C^1(0, l) \times C^1(0, l) \subset \Psi,$$

dans (3.19) elle devient

$$-\int_0^l Du.D\tilde{u}dx + \gamma \int_0^l \theta.D\tilde{u}dx = \int_0^l g_1 \tilde{u}dx.$$

Alors

$$\int_0^l Du.D\tilde{u}dx = \gamma \int_0^l \theta.D\tilde{u}dx - \int_0^l g_1 \tilde{u}dx = \int_0^l (\gamma\theta - g_1)\, \tilde{u}dx,$$

ce qui signifie que u_x admet une dérivée faible dans $L^2(0, l)$, car $(\gamma\theta - g_1) \in L^2(0, l)$, et on a

$$D^2 u = D(Du) = (\gamma\theta - g_1),$$

par suite $Du \in H_0^1(0, l)$ donc $u \in H^2(0, l)$.

De la même manière si on prend $\left(\tilde{u}, \tilde{\theta} \right) = \left(0, \tilde{\theta} \right)$, on prouve que $\theta \in H^2(0, l)$ .Donc, $\exists (u, v, \theta)^T \in D(\mathcal{A})$ vérifiant $\mathcal{A}y = F$ pour tout $F \in \mathcal{H}$, et $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Le Théorème de Hille-Yosida assure l'existence et l'unicité de la solution de (3.5), ceci termine la démonstration.

■

Lemme 3 *Soit* (u, θ) *est la solution du* (3.1) − (3.2) *alors lénergie* $E(t)$ *vérifie*

$$\frac{d}{dt}E(t) = -k\int_0^l \theta_x^2 dx < 0.$$

Preuve On multiplie (3.1) par u_t et on intègre sur $]0, l[$, il vient

$$\int_0^l u_{tt}u_t dx - a\int_0^l u_{xx}u_t dx + \gamma\int_0^l \theta_x u_t dx = 0.$$

Par intégration par partie, il découle

$$\int_0^l u_{tt}u_t dx - a\left[u_x u_t\right]_0^l + a\int_0^l u_x u_{xt} dx + \gamma\int_0^l \theta_x u_t dx = 0,$$

vu que $u = 0$ et $\theta = 0$ en 0 et l donc

$$\int_0^l u_{tt}u_t dx + a\int_0^l u_x u_{xt} dx + \gamma\int_0^l \theta_x u_t dx = 0,$$

et par suite

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l u_t^2 dx + \frac{a}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l u_x^2 dx + \gamma\int_0^l \theta_x u_t dx = 0 \tag{3.21}$$

On multiplie (3.2) par θ et on intègre sur $[0, l]$, il vient

$$c_0\int_0^l \theta_t\theta dx + \gamma\int_0^l u_{xt}\theta dx - k\int_0^l \theta_{xx}\theta dx = 0.$$

Ce qui implique que

$$c_0\int_0^l \theta_t\theta dx + \gamma\left[u_t\theta\right]_0^l - \gamma\int_0^l u_t\theta_x dx - k\left[\theta_x\theta\right]_0^l + k\int_0^l \theta_x\theta_x dx = 0,$$

vu que $u = 0$ et $\theta = 0$ en 0 et l, donc

$$c_0\int_0^l \theta_t\theta dx - \gamma\int_0^l u_t\theta_x dx + k\int_0^l \theta_x\theta_x dx = 0.$$

On obtient

$$\frac{c_0}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l \theta^2 dx - \gamma\int_0^l u_t\theta_x dx + k\int_0^l \theta_x^2 dx = 0. \tag{3.22}$$

Combinons (3.21) et (3.22), on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l u_t^2 dx + \frac{a}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l u_x^2 dx + \gamma\int_0^l \theta_x u_t dx + \frac{c_0}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l \theta^2 dx - \gamma\int_0^l u_t\theta_x dx + k\int_0^l \theta_x^2 dx$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^l u_t^2 dx + a\int_0^l u_x^2 dx + c_0\int_0^l \theta^2 dx\right\} + k\int_0^l \theta_x^2 dx,$$

on a alors

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^l \left(u_t^2 + a u_x^2 + c_0\theta^2\right) dx\right] = -k\int_0^l \theta_x^2 dx,$$
$$\frac{d}{dt}E(t) = -k\int_0^l \theta_x^2 dx.$$

D'ou

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq 0,$$

alors le systéme (3.1)-(3.2) est dissipatif. ■

3.2 Stabilité exponentielle

Dans cette section, nous prouvons que le semi-groupe $S(t)$, généré par l'opérateur $\mathcal{A}$, est exponentiellement stable.

Théorème 28 [2] *Le semi-groupe $S(t)$, généré par l'opérateur $\mathcal{A}$, définie dans (3.6) est exponentiellement stable, c'est-à-dire, qu'il existe deux constantes positives M, α tel que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{-\alpha t}. \tag{3.23}$$

Preuve Nous utilisons maintenant le Théorème (25) pour prouver notre résultat principal (28). Nous prouvons d'abord (26). Cela comprend les étapes suivantes:

1. Puisque $0 \in \rho(\mathcal{A})$, en utilisant le théorème du point fixe pour une application contractante (4) pour n'importe quel nombre réel β avec $|\beta| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$, l'opérateur

$$i\beta I - \mathcal{A} = \mathcal{A}\left(i\beta\mathcal{A}^{-1} - I\right),$$

est inversible. De plus, $\left\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\right\|$ est continue dans l'intervalle $\left]-\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}, \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}\right[$.

2. Si

$$\sup\left\{\left\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\right\| \quad | \quad |\beta| < \left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|^{-1}\right\} = M < \infty,$$

alors pour $|\beta_0| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$, l'opérateur

$$i\beta I - \mathcal{A} = (i\beta_0 I - \mathcal{A})\left(I + i(\beta - \beta_0)(i\beta_0 I - \mathcal{A})^{-1}\right),$$

est inversible si

$$\left\|i(\beta - \beta_0)(i\beta_0 I - \mathcal{A})^{-1}\right\| < 1,$$

ce qui donne

$$|\beta - \beta_0| \left\|(i\beta_0 I - \mathcal{A})^{-1}\right\| < 1,$$

alors

$$|\beta - \beta_0| < \frac{1}{\left\|(i\beta_0 I - \mathcal{A})^{-1}\right\|} < \frac{1}{M}.$$

En utilisant la définition de M on obtient, $i\beta I - \mathcal{A}$ est inversible pour $|\beta - \beta_0| < \dfrac{1}{M}$.
Il s'avère qu'en choisissant $|\beta_0|$ comme près de $\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$ que nous le pouvons, alors

$$\left\{\beta : |\beta| < \left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|^{-1} + \frac{1}{M}\right\} \subset \rho(\mathcal{A}),$$

car, $i\beta I - \mathcal{A}$ inversible pour $|\beta_0| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$, et $|\beta - \beta_0| < \dfrac{1}{M}$,comme

$$||\beta| - |\beta_0|| < |\beta - \beta_0|,$$

alors

$$\begin{aligned} |\beta| - |\beta_0| < \tfrac{1}{M} \Longrightarrow \quad |\beta| &< \frac{1}{M} + |\beta_0| \\ &< \frac{1}{M} + \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}, \end{aligned}$$

et $\left\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\right\|$ est continue dans l'intervalle $\left]- \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} + \frac{1}{M}, \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} + \frac{1}{M}\right[$. Alors, le sous-ensemble

$$\{i\beta, |\beta| < |\omega|\} \subset \rho(\mathcal{A}),$$

peut être prolongé si

$$\sup\left\{\left\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\right\|,\ |\beta| < |\omega|\right\} < \infty.$$

3. Ainsi, il résulte de l'argument en (2) que si (26) n'est pas vrai, alors il y a $\omega \in \mathbb{R}$ à

$$\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|^{-1} \leq |\omega| < \infty,$$

tels que

$$\{i\beta : |\beta| < |\omega|\} \subset \rho(\mathcal{A}),$$

et

$$\sup\left\{\left\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\right\| : |\beta| < |\omega|\right\} = \infty.$$

Dans ce cas, nous pouvons trouver une suite $(\beta_n) \in \mathbb{R}$ à $\beta_n \longrightarrow \omega$, $|\beta_n| < |\omega|$ et une suite de vecteurs unitaires $(y_n) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ avec

$$\|y_n\|_{\mathcal{H}} = \left(\|Du_n\|^2 + \|v_n\|^2 + \|\theta_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

tel que

$$\|(i\beta_n I - \mathcal{A})\, y_n\|_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0. \tag{3.24}$$

Comme $n \longrightarrow \infty$, c-à-d

$$i\beta_n u_n - v_n \longrightarrow 0 \qquad \text{dans} \quad H_0^1, \tag{3.25}$$

$$i\beta_n v_n - D^2 u_n + \gamma D\theta_n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2, \tag{3.26}$$

$$i\beta_n \theta_n - kD^2\theta_n + \gamma Dv_n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2. \tag{3.27}$$

Prenant le produit scalaire de $(i\beta_n I - \mathcal{A})\, y_n$ avec y_n en $\mathcal{H}$ et en prenant ensuite sa partie réelle donne

$$\operatorname{Re}\langle (i\beta_n I - \mathcal{A})\, y_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}} = k\,\|D\theta_n\|^2 \longrightarrow 0. \tag{3.28}$$

Ce qui suit est de (3.27) et (3.28) et l'inégalité de Poincaré (2) que

$$kD^2\theta_n - \gamma Dv_n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2. \tag{3.29}$$

Intégrer (3.29) de 0 à x donne

$$kD\theta_n - kD\theta_n(0) - \gamma v_n(x) \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2. \tag{3.30}$$

La combinaison de (3.30) avec (3.28) donne

$$kD\theta_n(0) - \gamma v_n(x) \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2. \tag{3.31}$$

En $\|y_n\|_{\mathcal{H}}$ et (3.25), nous obtenons que $\|Dv_n\|$ est uniformément borné par rapport à n. Ainsi, il résulte de (3.29) que $\|D^2\theta_n\|$ est uniformément borné. Par l'inégalité Gagliardo-Nirenberg (3), on obtient que

$$|D\theta_n(0)| \leq \|D\theta_n\|_{L^\infty} \leq C_1 \left\|D^2\theta_n\right\|^{\frac{1}{2}} \|D\theta_n\|^{\frac{1}{2}} + C_2 \|D\theta_n\| \longrightarrow 0. \tag{3.32}$$

La combinaison de (3.32) avec (3.31) donne

$$v_n(x) \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2. \tag{3.33}$$

En prenant le produit scalaire de (3.26) avec u_n en L^2 et de l'intégration par parties aussi donne

$$\|Du_n\| \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2. \tag{3.34}$$

Donc (3.28), (3.33) et (3.34) contredisent $\|y_n\|_H = 1$, et la preuve de (2.3) est complète. La preuve sera donnée par l'argument de la contradiction.

Supposons (2.4) n'est pas vrai. Alors, il existe une suite β_n avec $|\beta_n| \longrightarrow +\infty$ et une suite de vecteurs unitaires (y_n). De plus, nous avons (3.28). la preuve restante est plus délicate que celle en (3) parce que $\beta_n \longrightarrow \infty$ maintenant. En divisant (3.27) par β_n et en utilisant l'inégalité poincaré (2), on obtient

$$\frac{kD^2\theta_n - \gamma Dv_n}{\beta_n} \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2. \tag{3.35}$$

En divisant (3.25) par β_n et en utilisant (3.35), on obtient

$$\frac{kD^2\theta_n}{\beta_n} - i\gamma Du_n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2. \tag{3.36}$$

Depuis $\|Du_n\| \leq 1$, (3.36) signifie que $\left\|\frac{kD^2\theta_n}{\beta_n}\right\|$ est limité. En prenant le produit de (3.36) à Du_n sur L^2 donne

$$\left(\frac{kD^2\theta_n}{\beta_n}, Du_n\right) - i\gamma \|Du_n\|^2 \longrightarrow 0. \tag{3.37}$$

Par l'intégration par parties, nous avons

$$\left(\frac{kD^2\theta_n}{\beta_n}, Du_n\right) = \left.\frac{kD\theta_n D\bar{u}_n}{\beta_n}\right|_{x=l} - \left.\frac{kD\theta_n D\bar{u}_n}{\beta_n}\right|_{x=0} - \left(\frac{kD\theta_n}{\beta_n}, D^2u_n\right). \tag{3.38}$$

En divisant (3.26) par β_n en utilisant (3.28) et le fait que $\|v_n\| \leq 1$, nous déduisons que $\left\|\frac{D^2u_n}{\beta_n}\right\|$ est bornée. ainsi, il suit à partir de (3.28) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz (1) que

$$\left(\frac{kD\theta_n}{\beta_n}, D^2u_n\right) \longrightarrow 0. \tag{3.39}$$

Par l'inégalité de Galiardo-Nirenberg (3), nous avons

$$\left\|\frac{D\theta_n}{\sqrt{|\beta_n|}}\right\|_{L^\infty} \leq C_1 \|D\theta_n\|^{\frac{1}{2}} \frac{\|D^2\theta_n\|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{|\beta_n|}} + C_2 \frac{\|D\theta_n\|}{\sqrt{|\beta_n|}} \to 0, \tag{3.40}$$

et

$$\left\|\frac{Du_n}{\sqrt{|\beta_n|}}\right\|_{L^\infty} \leq C_1 \|Du_n\|^{\frac{1}{2}} \frac{\|D^2u_n\|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{|\beta_n|}} + C_2 \frac{\|Du_n\|}{\sqrt{|\beta_n|}} \leq C, \tag{3.41}$$

et (3.41) que

$$\left\|\frac{kD\theta_n D\bar{u}_n}{\beta_n}\right\|_{L^\infty} \leq \frac{\|D\theta_n\|_{L^\infty}}{\sqrt{|\beta_n|}} \frac{\|Du_n\|_{L^\infty}}{\sqrt{|\beta_n|}} \longrightarrow 0. \tag{3.42}$$

En combinant (3.37) avec (3.39)

$$\|Du_n\| \longrightarrow 0. \tag{3.43}$$

Donc par (3.23) , on a

$$\frac{Dv_n}{\beta_n} \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2. \tag{3.44}$$

En prenant le produit intérieur de (3.24) avec v_n sur L^2 et en divisant le résultat par β_n, nous abtenons cela

$$i\|v_n\|^2 + \left(Du_n, \frac{Dv_n}{\beta_n}\right) \longrightarrow 0. \tag{3.45}$$

Par conséquent, (3.43) et (3.45), nous abtenons cela

$$v_n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2. \tag{3.46}$$

Ainsi, (3.46), (3.28) et (3.43) contredisent $\|y_n\|_{\mathcal{H}} = 1$. La preuve du Théorème (28) est terminée.

■

Bibliographie

[1] **H. Brezis,** Analyse Fonctionnelle Théorie et Application, Masson, Paris, 1983.

[2] **G. CARLIER**, ANALYSE FONCTIONNELLE, ENS, 2009-2010.

[3] **K. Engel, R. Nagel,** One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Alfred A.Knopf, 1995

[4] **F.L. Huang**, Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces, Ann. of Diff. Eqs, 1(1) (1985), 43-56.

[5] **Z. Liu, S. Zheng,** Semigroups Associated with Dissipative Systems, Chapman & Hall, 1999.

[6] **S. LUBKIN,** C_0-Semigroups and applications, Elsevier Science B. V. 2003.

[7] **A. Pazy,** Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Sepringer-Verlag New York, 1983.

[8] **J. RAYMOND,** Equations D'évolution, Université Paul Sabatier.

[9] **A. Wyler,** Stability of wave equations with dissipative boundary conditions in a bounded domain, Differential and Integral Equations, Vol. 7, No.2(1994), 345-366.

Résumé

Ce mémoire s'intérèsse à présenter une nouvelle méthode pour prouver la stabilité et l'analyticité exponentielle d'un C_0-semi-groupes de contractions dans un espace de Hilbert. Ce qu'on a présenté dans ce travail est un sysnthèse de l'investissement de certains auteurs au cours de ces dernières années. L'esprit de cette méthode est de combiner un théorème par Huang [4] dans la théorie du semi-groupe avec un resultat obtenu dans [9]. Certes, cette approchee est très différente de certaines autres méthodes dans la littérature, telles que la méthode de l'énergie classique, et la méthode d'estimation directe du spectre. Nous espérons que le lecteur trouvera que cette méthode est puissante et simple.

Mots clés: Système dissipatif, Hille-Yosida, Lumer-Phillips, C_0-semigroupes, Thermoélasticité.

Abstract

This paper intends to present a new method to prove the stability and exponential analyticity of a C_0-semi-groups of contractions in a Hilbert space. What has been presented in this work is the investigation of certain authors in recent years. Theoretically, this method consists to combine a theorem by Huang [4] in the semigroup theory with a result obtained in [9]. This approach is, of course, very different from some other methods in the literature, such as the classical energy method and the direct spectrum estimation method. We hope that the reader will find that this method is powerful and simple.

Key words: Dissipative system, Hille-Yosida, Lumer-Phillips, C_0-semigroup, Thermoelasticity.