République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Djilali Bounaâma Khemis Miliana

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département des Mathématiques et Informatique

Etude d'une équation différentielle abstraite d'ordre fractionnaire

Réalisé par : **Azizou Souad** Soutenu publiquement le : 13/juin/2017.

Devant les membres du jury :

Dr. O. Benniche	Université de Djilali BOUNAÂMA.	Président
Dr. B. Chaouchi	Université de Djilali BOUNAÂMA	Encadreur
Dr. M. Houas	Université de Djilali BOUNAÂMA	Examinateur
Dr. M. Hachama	Université de Djilali BOUNAÂMA	Examinateur

Année Universitaire 2016/2017

Dédicaces

Ce travail est dédié

À mon cher père et ma chère mère.

À mes très chers frères et sœurs et leurs enfants.

À mon cher mari.

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier Allah pour la force et la volonté.

J'exprime toute ma reconnaissance à mon encadreur D.Chaouchi belkacem pour son aide, ses conseils et la confiance.

À mon cher père pour tout ce qui m'a donné.

À ma chère mère pour se prére pour moi. Qu'Allah le récompense pour tous ces bienfaits.

À mon cher marie Oussama pour son soutien,sa grande disponibilité.

À mes très chers frères Miloud, Mohamed, Sidali et Sofiane.

À mes très chers sœurs Fatima Zohra, Fadhila, Safia et Salma.

Mes sincères remerciements vont à mon amie intime Cherabli Halima.

Enfin, J'exprime toute ma famille et Je ne saurais oublier l'apport de mes amis.

Table des matières

Notations

$\mathbb{N}$	L'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \diagdown \{0\}$	L'ensemble des entiers naturels supérieurs strictement à zéro.
$\Gamma(\alpha)$	La fonction de Gamma.
$\beta(p,q)$	La fonction de Bêta.
$[\alpha]$	La partie entière de α.
$D(A)$	Domaine de définition de l'opérateur A.
$C(J, D(A))$	L'espace des fonctions continue a valeur dans $D(A)$.
$C(J, E)$	L'espace des fonctions continue a valeur dans E.
$\mathcal{L}(E)$	L'espace des opérateurs linéaires continue sur E.
$B(E)$	L'ensemble des opérateurs linéaire borné sur E.
Id	L'opérateur identité.
$\rho(A)$	L'ensemble résolvant de l'opérateure A.
$\sigma(A)$	Le spectre de l'opérateur A.
$R(.,A)$	L'opérateur résolvante de A.

Introduction

En mathématique, l'analyse fractionnaire constitue une branche très importante de l'analyse fonctionnelle. Elle étudie la possibilité qu'un opérateur différentiel puisse être élevé à un ordre non entier. Du point de vue historique, l'histoire commence en **1695** avec le mathématicien **G. M. Hôpital** (1661-1704) qui demandé à **G. W. Leibniz** (1646-1716) la signification de la dérivée :

$$\frac{d^n}{dx^n},$$

pour

$$n = 1/2.$$

Et en **1819** que le mathématicien de **S. Lacroix** (1765-1843) a mentionné pour la première fois le principe de la dérivée fractionnaire pour la fonction

$$f(x) = x^p.$$

En suite, le mathématicien **N. Abel** (1802-1829) qui découvre la première application du calcul fractionnaire, par la suite cette théorie a été enrichit par **J. Liouville** (1809-1882).
Il faut dire que c'est **J. Liouville** en **1832** et **G. F. Riemann** (1816-1866) en **1847** qui ont mis le point sur cette nouvelle discipline. En suite on assiste à une émancipation d'une nouvelle spécialité, celle de l'analyse fractionnaire avec **L. Euler** (1707-1783), **J. Fourier** (1768-1830), **J. Hadamard** (1865-1963) sans oublié surement les travaux remarquables du mathématicien italien **M. Caputo** en 1967.
L'étude de l'équation différentielle fractionnaire est devenue une branche classique dans les dernières années. Dans cette direction et dans le soucie de donner une étude unifiée d'une classe de plusieurs équations différentielles fractionnaires, les mathématiciens se trouvent dans l'obligation de combiner la théorie des opérateurs avec celle du calcul fractionnaire, cette nouvelle approche se nomme "équation différentielle fractionnaire abstraite".

Dans ce sens là, on s'est focaliser à faire la synthèse d'un travail qui considère l'une des contributions les plus importantes dans ce domaine. Il s'agit du travail de **Emilia Grigorova Bajlekova** publiée en 2001.
Ce travail a été divisé en trois chapitres

1. Le premier chapitre est consacré aux définitions et notations qui seront utiles dans la suite de notre travail.

2. Le deuxième chapitre est consacré pour donner une introduction à l'analyse fractionnaire.

3. Le troisième chapitre sera consacré à l'étude d'une équation différentielle à coefficient opérateur linéaire.

Chapitre 1

Préliminaires et notions de base d'analyse fonctionnelle

1.1 Rappel sur quelques espaces fonctionnels

Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach complexe et $J = (0, T)$ avec $T > 0$, pouvant être fini ou infini.

1.1.1 Les espaces L^p

Définition 1 *Pour $1 \leq p < \infty$, on definit l'espace $L^p(J, E)$ par :*

$$L^p(J, E) = \left\{ f : J \to E, \text{ mesurable tel que } \int_J \|f(t)\|_E^p \, dt < \infty \right\},$$

Remarque 1 *Cette intégrale est une intégrale aux sens de Bochner.*

Définition 2 *L'espace $L^\infty(J, E)$ est défini par :*

$$L^\infty(J, E) = \left\{ f : J \to E, \text{ mesurable tel que } \sup_{t \in J} \|f(t)\|_E < \infty \right\}.$$

Remarque 2 *On rappelle que l'espace $L^p(J, E)$ est un espace de Banach avec la norme*

$$\|f\|_{L^p(J,E)} = \left(\int_J \|f(t)\|_E^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

et l'espace $L^\infty(J, E)$ est un espace de Banach aussi avec la norme

$$\|f\|_{L^\infty(J,E)} = \sup_{t \in J} \|f(t)\|_E.$$

1.1.2 Le produit de convolution

Dans la suite de ce travail, on aura besoin d'introduire le produit de convolution défini par

Définition 3 *Soient $f \in L^1(J,E)$ et $g \in L^1(J,E)$. Le produit de convolution de deux fonctions f et g est défini par :*

$$(g * f)(t) = \int_0^t g(t-s)f(s)ds.$$

Ci-dessous quelques propriétés de ce produit

Proposition 1 *Soient $f \in L^1(J,E)$ et $g \in L^1(J,E)$. Alors, le prodouit $g * f$ est*

1. *commutatif*
$$(f * g)(t) = (g * f)(t).$$
2. *distributife*
$$[\alpha f(t) + \beta g(t)] * h(t) = \alpha (f * h)(t) + \beta (g * h)(t),$$
avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. *assosiatife*
$$[(f * g) * h](t) = [f * (g * h)](t).$$

Preuve. Voir [3] ■

1.1.3 Les espaces Sobolev $W^{m,p}$

Définition 4 *Soient $1 \leq p < \infty$ et $m \in \mathbb{N}$, l'espace de Sobolev est défini par*

$$W^{m,p}(J,E) = \left\{ f \in L^p(J,E) \text{ telle que } f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\, g_{k+1}(t) + \left(g_m * f^{(m)}\right)(t) \right\},$$

avec

$$g_m(t) = \frac{t^{m-1}}{\Gamma(m)},$$

et on a

$$W_0^{m,p}(J,E) = \left\{ f \in W^{m,p}(J,E) \text{ tel que } f^{(k)}(0) = 0, \text{ pour } k < m \right\}.$$

1.2 Les semi-groupes d'opérateurs linéaires

La théorie des semi-groupe d'opérateurs linéaires est l'épine dorsale de la théorie des équations differentielles abstraites, pour la commodité du lecteur, on donnera ici quelques notions et definitions de bases. Donc on considère un opérateur linéaire A de domaine $D(A)$ dans un espace de banach complexe E

$$\begin{aligned} A: \quad & D(A) \subset E \to E, \\ & u \mapsto Au. \end{aligned}$$

L'ensemble

$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda Id)^{-1} \in \mathcal{L}(E)\right\},$$

est l'ensemble résolvant de l'opérateur A, et l'ensemble

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A),$$

représente le spectre de A.

Définition 5 *Une famille $\{S(t), 0 \leqslant t < \infty,\}$ d'opérateurs linéaires bornés de E dans E est un semi-groupe d'opérateurs linéaires si :*

1. $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$ *pour* $t_1 \geqslant 0$ *et* $t_2 \geqslant 0$.
2. $S(0) = Id_E$.

Définition 6 *On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$, l'opérateur A défini par :*

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}, \qquad \textit{pour } x \in D(A),$$

sur le domaine

$$D(A) = \left\{x \in E : \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \ \textit{existe}\right\}.$$

Théorème 1 *Un opérateur linéaire A est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu si et seulement si A est borné.*

Preuve. Pour la démonstration voir [2], page (2). ∎

On donnera par la suite une définition de certains type de semi-groupe qui a un rôle très important dans la théorie des équations abstraites

Définition 7 *On dit qu'un semi-groupe $(S(t))_{t\geqslant 0}$, d'opérateurs linéaires bornés est fortement continu si :*

$$\lim_{t\to 0^+} S(t)x = x, \quad \textit{pour tout } x \in E.$$

On dit aussi que $(S(t))_{t\geqslant 0}$ est un C_0-semigroupe.

Corollaire 1 *Si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t\geq 0}$ sur E, alors $D(A)$ est dense dans E et A est un opérateur fermé.*

Preuve. Pour la démonstration voir [2], page (5). ■

Définition 8 *Soit le secteur $\Sigma = \{z \in \mathbb{C} : \theta_1 < \arg z < \theta_2 \text{ avec } \theta_1, \theta_2 \in (0, \pi)\}$, pour $z \in \Sigma$. La famille $(S(z))_{z\in\Sigma}$ est dite semi-groupe analytique si :*

1. $S(0) = Id_E$. *Pour* $0 \in \Sigma$.
2. $S(z_1 + z_2) = S(z_1)S(z_2)$, *Pour tout* z_1, $z_2 \in \Sigma$.
3. $\lim\limits_{z\to 0,\ z\in\Sigma} S(z)x = x$, *Pour tout* $x \in E$.
4. $z \to S(z)$ *est analytique sur* Σ.

Chapitre 2

Quelques éléments du calcul fractionnaire

Ce chapitre est principalement consacrer à donner un bref rappel sur le calcul fractionnaire. Pour cette raison, on aura besoin d'introduire la fonction g_α définie sur l'intervalle $J = (0, T)$ par :

$$g_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1},$$

où α est un réel (ou complexe) convenablement choisi.

Proposition 2 *Soient α et β deux nombres complexes avec $\operatorname{Re}\alpha > 0$ et $\operatorname{Re}\beta > 0$. Alors*

$$(g_\alpha * g_\beta)(t) = g_{\alpha+\beta}(t).$$

Pour $\operatorname{Re}\alpha \geq m$, on a

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{(m)} g_\alpha(t) = g_{\alpha-m}(t).$$

Preuve.

1. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, tels que $\operatorname{Re}\alpha > 0$ et $\operatorname{Re}\beta > 0$, on a

$$\begin{aligned}(g_\alpha * g_\beta)(t) &= \int_0^t g_\alpha(t-s) g_\beta(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds,\end{aligned}$$

en utilisant le changement de variable $\tau = \frac{s}{t}$, on obtient

$$\begin{aligned}(g_\alpha * g_\beta)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-\tau)^{\alpha-1}t^{\beta-1}\tau^{\beta-1}td\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}t^{\alpha+\beta-1}\beta(\alpha,\beta) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}t^{\alpha+\beta-1} \\ &= g_{\alpha+\beta}(t).\end{aligned}$$

2. Soit $\operatorname{Re}\alpha \geq m$, on a

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}\right)^{(m)} g_\alpha(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^{(m)}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-m)}t^{\alpha-m-1} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-m)}t^{\alpha-m-1} \\ &= g_{\alpha-m}(t).\end{aligned}$$

■

2.1 Intégrale de Riemann-Liouville

Définition 9 *Soit $f : J \to E$ une fonction intégrable au sens de Bochner, on appelle intégrale de Riemann-Liouville de la fonction f l'intégrale suivante*

$$\begin{aligned}(I^\alpha f)(t) &= (g_\alpha * f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds,\end{aligned}$$

avec $\operatorname{Re}\alpha > 0$.

Remarque 3 *On pose que*

$$\lim_{\alpha\to 0^+} (I^\alpha f)(t) = f(t),$$

avec $f : J \to E$ une fonction intégrable au sens de Bochner.

Proposition 3 *Soit la fonction $f \in L^1(J, E)$. Alors*

1. *Pour α et β complexes telle que* $\operatorname{Re}\alpha > 0$ *et* $\operatorname{Re}\beta > 0$, *on a*

$$I^{\alpha}\left(I^{\beta}f\right)(t) = (I^{\alpha+\beta}f)(t).$$

2. *Pour tout* $k = 0, 1, ..., m-1$, *et* $\operatorname{Re}\alpha \in (m-1, m)$, *on a*

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{k}(I^{\alpha}f)(t) = \left(I^{\alpha-k}f\right)(t);$$

Preuve. on a

1. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, telle que $\operatorname{Re}\alpha > 0$ et $\operatorname{Re}\beta > 0$, on a

$$\begin{aligned} I^{\alpha}\left(I^{\beta}f\right)(t) &= g_{\alpha} * (g_{\beta} * f)(t) \\ &= (g_{\alpha} * g_{\beta}) * f(t) \\ &= g_{\alpha+\beta} * f(t) \\ &= (I^{\alpha+\beta}f)(t), \end{aligned}$$

car

$$g_{\beta} * f \in L^{1}(J, E),$$

aussi.

2. Pour $k = 0, 1, ...m-1$, on a $\operatorname{Re}(\alpha) - k > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d^{k}}{dt^{k}}(I^{\alpha}f)(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^{k}(g_{\alpha} * f)(t) \\ &= \left(\frac{d^{k}}{dt^{k}}g_{\alpha}\right) * f(t) \\ &= g_{\alpha-k} * f(t) \\ &= \left(I^{\alpha-k}f\right)(t). \end{aligned}$$

■

2.2 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 10 *Soient* $f \in L^{1}(J, E)$ *et* $\alpha \in (m-1, m)$ *avec* $m \in \mathbb{N}^{*}$, *on suppose que*

$$g_{m-\alpha} * f \in W^{m,1}(J, E).$$

On appelle dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville la fonction définie par

$$\begin{aligned} \left({}^{RL}D^{\alpha}f\right)(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^{m}\left[\left(I^{m-\alpha}f\right)(t)\right] \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^{m}(g_{m-\alpha} * f)(t). \end{aligned}$$

Théorème 2 *Soit $\alpha \in (m-1, m)$, pour toute fonction $f \in L^1(J, E)$, on a*

1.
$$^{RL}D^{\alpha} I^{\alpha} f = f.$$

2.
$$(I^{\alpha} D^{\alpha} f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} (g_{m-\alpha} * f)^{(k)}(0)\, g_{\alpha+k+1-m}(t). \tag{2.1}$$

3. *Si*
$$g_{m-\alpha} * f \in W_0^{m,1}(J, E),$$
alors
$$(I^{\alpha} D^{\alpha} f)(t) = f(t).$$

4. *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une constante est non nulle.*

Preuve. Soient $f \in L^1(J, E)$ et $\alpha \in (m-1, m)$, alors,

1. on a
$$g_m * f \in W_0^{m,1}(J, E),$$
alors
$$\begin{aligned} ^{RL}D^{\alpha} I^{\alpha} f &= \left(\frac{d}{dt}\right)^m g_{m-\alpha} * (g_{\alpha} * f)(t) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^m (g_{m-\alpha} * g_{\alpha}) * f(t) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^m (g_m * f)(t) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^m (I^m f)(t) \\ &= f(t). \end{aligned}$$

2. On sait que si
$$(g_{m-\alpha} * f)(t) \in W^{m,1}(J, E),$$
alors
$$\begin{aligned} (g_{m-\alpha} * f)(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} (g_{m-\alpha} * f)^{(k)}(0)\, g_{k+1}(t) + \left(g_m * (g_{m-\alpha} * f)^{(m)}\right)(t) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} (g_{m-\alpha} * f)^{(k)}(0)\, g_{k+1}(t) + \left(g_m * \underbrace{g_{-\alpha} * f}_{\varphi(t)}\right)(t), \end{aligned} \tag{*}$$

si on dérive l'équation (p) m-fois on obtient

$$\underbrace{D^m\left(g_{m-\alpha}*f\right)(t)}_{^{RL}D^{\alpha}}=\varphi(t),$$

et par la deuxième composition par I^{α}, on donne

$$I^{\alpha}\circ{}^{RL}D^{\alpha}f(t)=\left(g_{\alpha}*\varphi\right)(t);$$

d'autre part, si on composition (p) par I^{α}, on obtient

$$g_{\alpha}*\left(g_{m-\alpha}*f\right)(t)=\sum_{k=0}^{m-1}\left(g_{m-\alpha}*f\right)^{(k)}(0)\,g_{\alpha+k+1}(t)+\left(g_{\alpha+m}*\varphi\right)(t),$$

on suite si on dérive m-fois on donne

$$f(t)=\sum_{k=0}^{m-1}\left(g_{m-\alpha}*f\right)^{(k)}(0)\,g_{\alpha+k+1-m}(t)+\left(g_{\alpha}*\varphi\right)(t),$$

et par suite on conclut que

$$\left({}^{RL}I^{\alpha}\circ^{RL}D^{\alpha}f\right)(t)=f(t)-\sum_{k=0}^{m-1}\left(g_{m-\alpha}*f\right)^{(k)}(0)\,g_{\alpha+k+1-m}(t).$$

3. Ce qui précède, on a

$$\left(I^{\alpha}D^{\alpha}f\right)(t)=f(t)+\sum_{k=0}^{m-1}\left(g_{m-\alpha}*f\right)^{(k)}(0)\,g_{\alpha+k+1-m}(t),$$

comme

$$g_{m-\alpha}*f\in W_0^{m,1}(J,E),$$

alors

$$\left(g_{m-\alpha}*f\right)^{(k)}(0)=0,$$

pour tout $k\leq m-1$, donc

$$\left({}^{RL}I^{\alpha}D^{\alpha}f\right)(t)=f(t).$$

4. Soit $f(t)=cte$, alors

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D^{\alpha}f(t)&=D^m\left(g_{m-\alpha}*f\right)\\
&=D^m\left[\frac{c}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t(t-s)^{m-\alpha-1}\,ds\right]\\
&=D^m\frac{c}{\Gamma(m-\alpha+1)}t^{m-\alpha}\\
&=\frac{c}{\Gamma(-\alpha+1)}t^{-\alpha}\\
&=cg_{1-\alpha}(t)\\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

■

2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 11 *Soient $f \in C^m(J)$, et $\alpha \in (m-1, m)$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, on appelle dérivée d'ordre α au sens de Caputo de f la fonction définie par :*

$$\begin{aligned}\left({}^{C}D^{\alpha} f\right)(t) &= \left(g_{m-\alpha} * f^{(m)}\right)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{0}^{t} (t-s)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(s) ds.\end{aligned}$$

Proposition 4 *on a*

1. *Pour $\alpha \in (m-1, m)$ et $\beta \in \mathbb{R}/\mathbb{N}$ avec $\beta \geq \alpha$, on a*

$$^{RL}D^{\alpha} g_{\beta} = ^{C} D^{\alpha} g_{\beta} = g_{\beta-\alpha}.$$

2. *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une constante est nulle.*

Preuve. On a

1. Soit $\alpha \in (m-1, m)$ et $\beta \geq \alpha$, on a

$$\begin{aligned}{}^{RL}D^{\alpha} g_{\beta} &= D^{m}\left(g_{m-\alpha} * g_{\beta}\right)(t) \\ &= D^{m}\left(g_{m-\alpha+\beta}\right)(t) \\ &= \left(g_{\beta-\alpha}\right)(t).\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}{}^{C}D^{\alpha} g_{\beta} &= \left(g_{m-\alpha} * D^{m} g_{\beta}\right)(t) \\ &= \left(g_{m-\alpha} * g_{\beta-m}\right)(t) \\ &= g_{\beta-\alpha}.\end{aligned}$$

2. Est évident.

■

Proposition 5 *Soit $m-1 < \alpha < m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, on a les proprietes suiventes*

1. *Soit $f \in L^1(J, E)$, on a*

$$\left({}^{C}D^{\alpha} \circ I^{\alpha} f\right)(t) = f(t). \tag{2.2}$$

2. Soit $f \in C^m(J,E)$, on a

$$I^\alpha \circ {}^C D^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\, g_{k+1}(t). \tag{2.3}$$

3. Soit $f \in W^{m,1}(J,E)$, on a

$${}^C D^\alpha f(t) = {}^{RL} D^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\, g_{k+1}(t) \right). \tag{2.4}$$

4. Si $f \in W_0^{m,1}(J,E)$, on a

$${}^C D^\alpha f(t) = {}^{RL} D^\alpha f(t).$$

Preuve. Soit $m-1 < \alpha < m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, alors

1. Soit $f \in L^1(J,E)$, on a

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha \circ I^\alpha f(t) &= I^{m-\alpha} \circ D^m (g_\alpha * f)(t) \\ &= g_{m-\alpha} * (g_{\alpha-m} * f)(t) \\ &= (g_0 * f)(t) \\ &= I^0(f)(t) \\ &= f(t). \end{aligned}$$

2. Soit $f \in C^m(J,E)$, alors

$$\begin{aligned} I^\alpha \circ {}^C D^\alpha f(t) &= I^\alpha \left(I^{m-\alpha} f^{(m)} \right)(t) \\ &= \left(g_\alpha * g_{m-\alpha} * f^{(m)} \right)(t) \\ &= \left(g_m * f^{(m)} \right)(t) \\ &= I^m f^{(m)}(t) \\ &= f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\, g_{k+1}(t). \end{aligned}$$

3. Ce qui précède, on a

$$I^\alpha \circ {}^C D^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\, g_{k+1}(t),$$

on compose par ${}^{RL}D^\alpha$, on obtient

$$\underbrace{{}^{RL}D^\alpha \circ I^\alpha}_{Id} \circ {}^C D^\alpha (f)(t) = {}^{RL} D^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\, g_{k+1}(t) \right).$$

4. Si $f \in W_0^{m,1}(J,E)$, alors $f^{(k)}(0) = 0$, pour $k \leq m-1$, donc

$${}^C D^\alpha f(t) = {}^{RL} D^\alpha f(t).$$

■

2.4 Les fonction de Mittag-Lefler

Définition 12 *La fonction de Mittag-Lefler à deux paramètres joue un rôle très important dans la théorie de EDF cette fonction est bien définie par :*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

telle que et $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{C}$.

Remarque 4 *Dans la littérature $E_{\alpha,1}(z)$ est notée par $E_\alpha(z)$.*

Exemple 1 *On a*

1. $E_1(z,1) = e^z$, $E_1(z,2) = \dfrac{e^z - 1}{z}$.
2. $E_{\frac{1}{2}}(z,2) = \dfrac{sh\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$, $E_{\frac{1}{2}}(z,1) = ch\sqrt{z}$.

Preuve. Voir [4]. ■

Proposition 6 *Soit $0 < \alpha < 2$ et $\beta > 0$, on a le développement asymptotique suivant quand $|z| \to +\infty$,*

1. *Si $|Arg(z)| \leq \frac{1}{2}\alpha\pi$, alors*

$$E_{\alpha,\beta}(z) \simeq \frac{1}{\alpha} z^{\frac{(1-\beta)}{\alpha}} \exp\left(z^{\dfrac{1}{\alpha}} \right) + \varepsilon_{\alpha,\beta}(z). \tag{2.5}$$

2. *Si $|Arg(-z)| < \left(1 - \frac{1}{2}\alpha\right)\pi$, alors*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \varepsilon_{\alpha,\beta}(z),$$

avec

$$\varepsilon_{\alpha,\beta}(z) = -\sum_{n=1}^{N-1} \frac{z^{-n}}{\Gamma(\beta - \alpha n)} + O\left(|z|^{-N}\right), \qquad z \to \infty.$$

Preuve. Voir [4]. ■

2.5 La transformée de Laplace

Définition 13 *Soit f une fonction continue et exponentiellement bornée, c'est-à-dire il existe deux constantes positives $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$, telles que*

$$\|f(t)\| \leq Me^{\omega t}, \qquad t \geq 0.$$

Alors, la fonction

$$F(p) = \mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt, \qquad \mathrm{Re}\, p > 0,$$

est appelée la transformé de Laplace de la fonction f.

On désigne par $\mathcal{L}^{-1}(.)$ la transformée de Laplace inverse de la fonction f.

Proposition 7 *La transformée de Laplace possède les proprietés suivantes :*

1. *La linéarité*
$$\mathcal{L}(\alpha f + g)(p) = \alpha \mathcal{L}(f)(p) + \mathcal{L}(g)(p).$$
2. *La translation*
$$f_\alpha(t) = f(t - \alpha),$$
alors
$$\mathcal{L}(f_\alpha)(p) = e^{-\alpha p} \mathcal{L}(f)(p).$$
3. *La dérivée*
$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)(p) = p^n \mathcal{L}(f)(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{k-1} f^{(n-k)}(0). \tag{2.6}$$
4. *Le produit de convolution*
$$\mathcal{L}(f * g)(p) = \mathcal{L}(f)(p)\, \mathcal{L}(g)(p). \tag{2.7}$$

Preuve. Voir [4]. ■

2.6 La transformée de la Laplace de la dérivée fractionnaire

Proposition 8 *on a*

1. *La transformée de Laplace de la fonction* g_α *est donnée par :*

$$\mathcal{L}\left(g_\alpha\right)(\lambda) = \lambda^{-\alpha}. \tag{2.8}$$

2. *La transformée de Laplace de la fonction de Mittag-leffler est donnée par :*

$$\mathcal{L}\left(E_{\alpha,\beta}\left(\omega t^\alpha\right)\right)(\lambda) = \frac{\lambda^{\alpha-\beta}}{\lambda^\alpha - \omega},$$

avec $\operatorname{Re}\lambda > \omega^{1/\alpha}$ *et* $\omega > 0$.

3. *La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville*

$$\mathcal{L}\left({}^{RL}D^\alpha f : \lambda\right) = \lambda^\alpha \mathcal{L}(f)(\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{m-k-1}\left(g_{m-\alpha} * f\right)^{(k)}(0).$$

4. *La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo*

$$\mathcal{L}\left({}^{C}D^\alpha f : \lambda\right) = \lambda^\alpha \mathcal{L}(f)(\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).$$

Preuve. On a

1. On rappelle que $g_\alpha(t) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$, alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(g_\alpha\right)(\lambda) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} g_\alpha(t)\, dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^{\alpha-1} dt,\end{aligned}$$

on utilise le changement de variable suivant $z = \lambda t$, donc $dt = \frac{1}{\lambda} dz$, on obtient alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(g_\alpha\right)(\lambda) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-z} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\alpha-1} z^{\alpha-1} \frac{1}{\lambda} dz \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\lambda^\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-z} z^{\alpha-1} dz \\ &= \lambda^{-\alpha}.\end{aligned}$$

2. La transformée de Laplace de la fonction de Mittag-leffler

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(E_{\alpha,\beta}\left(\omega t^\alpha\right)\right)(\lambda) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}\left(\omega t^\alpha\right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^{\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + \beta)} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^{\alpha n + \beta - 1} dt,\end{aligned}$$

on utilise le même changement de variable $z = \lambda t$, donc $dt = \frac{1}{\lambda} dz$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(E_{\alpha,\beta}\left(\omega t^{\alpha}\right)\right)(\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{n}}{\Gamma(\alpha n+\beta)} \int_{0}^{+\infty} e^{-z}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\alpha n+\beta-1} z^{\alpha n+\beta-1} \frac{1}{\lambda} dz \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{n}}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\alpha n+\beta} \underbrace{\int_{0}^{+\infty} e^{-z} z^{\alpha n+\beta-1} dt}_{\Gamma(\alpha n+\beta)}, \\
&= \frac{1}{\lambda^{\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{n}}{\lambda^{\alpha n}} \\
&= \frac{1}{\lambda^{\beta}} \frac{1}{1-\frac{\omega}{\lambda^{\alpha}}} \\
&= \frac{\lambda^{\alpha-\beta}}{\lambda^{\alpha}-\omega},
\end{aligned}$$

avec $\operatorname{Re} \lambda > \omega^{1/\alpha}$ et $\omega > 0$.

3. La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Rimann-liouville

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left({}^{RL}D^{\alpha} f : \lambda\right) &= \mathcal{L}\left(\left(g_{m-\alpha} * f\right)^{(m)}\right)(\lambda) \\
&= \lambda^{m} \mathcal{L}\left(g_{m-\alpha} * f\right)(\lambda) - \sum_{k=1}^{m} \lambda^{k-1}\left(g_{m-\alpha} * f\right)^{(m-k)}(0),
\end{aligned}$$

avec l'utilisation de (2.6) et (2.7) et le changement d'indice $i = m - k$, ce qui implique que

$$\mathcal{L}\left({}^{RL}D^{\alpha} f : \lambda\right) = \lambda^{\alpha} \mathcal{L}(f)(\lambda) - \sum_{k=1}^{m} \lambda^{m-k-1}\left(g_{m-\alpha} * f\right)^{(k)}(0).$$

4. La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left({}^{C}D^{\alpha} f : \lambda\right) &= \mathcal{L}\left(g_{m-\alpha} * f^{(m)}\right)(\lambda) \\
&= \lambda^{\alpha-m}\left(\lambda^{m} \mathcal{L}(f)(\lambda) - \sum_{k=1}^{m} \lambda^{k-1} f^{(m-k)}(0)\right) \\
&= \lambda^{\alpha} \mathcal{L}(f)(\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{\alpha-m+k-1} f^{(m-k)}(0),
\end{aligned}$$

avec le changement d'indice $i = m - k$, on obtient

$$\mathcal{L}\left({}^{C}D^{\alpha} f : \lambda\right) = \lambda^{\alpha} \mathcal{L}(f)(\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).$$

■

Remarque 5 *La transformée de la fonction de Mittag-leffler $E_\alpha(\omega t^\alpha)$ est donée par :*

$$\mathcal{L}\left(E_\alpha\left(\omega t^\alpha\right)\right)(\lambda)=\frac{\lambda^{\alpha-1}}{\lambda^\alpha-\omega}, \qquad \operatorname{Re}\lambda>\omega^{1/\alpha} \text{ et } \omega>0. \tag{2.9}$$

Proposition 9 *On a*

$$\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\left(\frac{\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda^\alpha-\omega)}\right)=(-1)^n\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t}E_\alpha\left(\omega t^\alpha\right)dt. \tag{2.10}$$

Preuve. Le résulat est obtenue par reccurence, vue le caractère trop technique, le lecteur peut consulter [1]. ∎

Chapitre 3

Sur une équation différentiable abstraite d'ordre fractionnaire

3.1 Sur l'équation de Volterra abstraite et la notion Solution opérateur ou bien " Operator Solution "

Soit E un espace de Banach complexe. A est un opérateur linéaire non borné de domaine $D(A)$ dense dans E, et $u : J \to E$. L'étude des équations abstraites à coefficiants opérateurs de premier ordre

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) & t > 0, \\ u(0) = x, \end{cases} \tag{3.1}$$

peut passer par l'étude de l'équation de Volterra abstraite suivant

$$u(t) = x + \int_0^t a(t-s)\, Au(s)\, ds, \qquad t \geq 0, \tag{3.2}$$

avec a une fonction de $L^1_{Loc}(\mathbb{R}_+)$. A titre d'exemple, á constate de (3.1) peut être donnée par une version intégrale.

Exemple 2 *Soit le problème de Cauchy suivant*

$$\begin{cases} u'(t) = f'(t) + Au(t), & t \geq 0, \\ u(0) = f(0), \end{cases} \tag{3.3}$$

si on intègre, on obtient

$$\int_0^t u'(s)\,ds = \int_0^t f'(s)\,ds + \int_0^t Au(s)\,ds,$$

$$u(t) - u(0) = f(t) - f(0) + \int_0^t Au(s)\,ds,$$

donc

$$\begin{aligned} u(t) &= f(t) + \int_0^t Au(s)\,ds \\ &= f(t) + (1 * Au)(t), \end{aligned}$$

donc, dans notre situation

$$a = 1.$$

Remarque 6 *Remarque que $D(A)$ est un espase de Banach car A est fermé et s'injecte continûment et d'une manière dense de E et $\left(D(A), \|.\|_{D(A)}\right)$ est un Banach*

$$\|u\|_{D(A)} = \|u\|_E + \|Au\|_E,$$

Remarque 7 *Pour alléger les notations, on préfère l'utilisation du produit de convolution*

$$(a * f)(t) = \int_0^t a(t-s) f(s)\,ds,$$

alors, on peut écrire :

$$u(t) = f(t) + (a * Au)(t).$$

On donne ici une définition très importante

Définition 14 *Une fonction $u \in C(J, E)$ se nomme*

1. *Solution forte (strong solution) si $u \in C(J, D(A))$, et vérifié l'équation (3.2).*
2. *"Mild solution" si $a * u \in C(J, D(A))$, et $u(t) = f(t) + A(a * u)(t)$.*

Remarque 8 *Toute solution forte de l'équation (3.2) est une "mild solution".*

Une question importante s'impose, c'est la relation entre la notion de problème bien posé et l'équation de Volterra abstraite. Alors, dans [3], on trouve la définition suivante :

Définition 15 *L'équation (3.2) est dite bien posée si pour tout $x \in D(A)$, il existe une unique solution forte dépendent de la valeur initiale x, on la noté par :*

$$S(t)\,x := u(t,x)\,,$$

sur $\mathbb{R}_+$.

Maintenant, on suppose que le problème est bien posé, et

$$S(t)\,x = u(t,x)\,, \qquad x \in D(A)\,, t \geq 0, \tag{3.4}$$

on a

Proposition 10 *La solution (3.4) est vérifiée*

1. *$S(0)\,x = x$.*
2. *$S(t)\,x$ est continue par rapport à t.*
3. *$S(t)$ est bornée par rapport à x.*

Preuve. On a

1. $$S(0)\,x = x.$$
2. D'autre part, $S(t)\,x$ est continue par rapport à t car $S(t)$ est une solution forte.
3. On montre que $S(t)$ est bornée. On raisonne par l'absurde, supposons que $S(t)$ est non bornée ie,
$$\exists\,(y_n) \in D(A) \text{ tele que } \|S(t)\,y_n\| \to +\infty.$$
Soit
$$\|y_n\| \leq 1,$$
et
$$\|S(t)\,y_n\| \geq n,$$
si on pose
$$x_n = \frac{y_n}{n} \to 0,$$
alors
$$\|S(t)\,x_n\| \to 0,$$
car le problème (3.2) est bien posé alors
$$1 \leq \frac{\|S(t)\,y_n\|}{n} = \|S(t)\,x_n\| \to 0,$$
donc $S(t)$ est bornée.

■

Maintenant, on peut donner un mot sur la notion Solution opérateur ou bien " Operator Solution " via la définition suivante

Définition 16 *Une famille d'opérateur* $\{S(t)\}_{t\geq 0} \in B(E)$ *est dite solution opérateur si les propriétés suivants sont vérifiées*

1. $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *est fortement continue sur* $\mathbb{R}_+$ *et* $S(0) = Id_E$.
2. $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *est commute avec* A *ie,* $\begin{cases} AS(t)x = S(t)Ax \text{ pour } x \in D(A), \\ \text{et} \\ S(t)D(A) \subset D(A). \end{cases}$
3. *L'equation intégrale est verifiée* $\forall x \in D(A)$,

$$S(t)x = x + \int_0^t a(t-s)AS(s)xds, \qquad t \geq 0.$$

Et on a le résultat suivant

Proposition 11 *Le problème (3.2) est bien posé si et seulement si le problème (3.2) admet une solution opérateur. De plus, on a*

$$\operatorname{Im}(a * S(t)) \subset D(A), \qquad \text{pour } t \geq 0,$$

et

$$S(t)x = x + A\int_0^t a(t-s)S(s)xds, \qquad t \geq 0 \quad \text{et} \quad x \in E,$$

en particulier, on a $Aa * S$ *est fortement continue dans* E.

Preuve. Pour la démonstration voir [3], page (32). ■

Corollaire 2 *Le problème (3.2) admet au plus une solution opérateur* $S(t)$.

Preuve. Soit $S_1(t)$,$S_2(t)$ sont deux solutions opérateurs de problème (3.2) donc pour tout $x \in D(A)$, on a

$$\begin{aligned} 1 * S_1x &= (S_2 - a * AS_2) * S_1x \\ &= S_2 * S_1x - a * AS_2 * S_1x \\ &= S_2(S_1x - a * AS_1x) \\ &= S_2 * x \\ &= 1 * S_2x, \end{aligned}$$

donc $S_1 = S_2$. ■

3.2 Etude d'une équation differentielle fractionnaire abstraite

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}u(t) = Au(t) & t > 0, \\ u^{(k)}(0) = x_k, & k \in \{0, 1, ..., m-1\}, \end{cases} \tag{3.5}$$

ici

- $m = [\alpha] + 1$.
- A est un opérateure lineaire non borné du domaine $D(A)$ dense dans E.

Tout d'abord, on s'inspire du cadre classique développé dans la référence [3], pour l'introduction de la notion de solution forte adaptée au problème fractionnaire (3.5).

Définition 17 *Une fonction $u \in C(\mathbb{R}_+, E)$ est dite solution forte du problème (3.5) si*

1.
$$u \in C(\mathbb{R}_+, D(A)) \cap C^{m-1}(\mathbb{R}_+, E).$$

2.
$$g_{m-\alpha} * \left(u - \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0)\, g_{k+1} \right) \in C^m(\mathbb{R}_+, E).$$

3. *Les conditions aux limites ainsi l'équation (3.5) sont vérifiées.*

Avant de passer à l'étude du problème fractionnaire (3.5), il faut dire un mot sur la notion de problème fractionnaire bien posé

Définition 18 *On dit que le problème (3.5) est bien posé si pour tout $x_k \in D(A)$, $k \in \{0, 1, ..., m-1\}$, il existe une unique solution forte $u(t, x_1, ..., x_{m-1})$.*

Dans le but d'alléger les calculs, on se contente de considérer le problème suivant

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}u(t) = Au(t), & t > 0, \\ u(0) = x, & \\ u^{(k)}(0) = 0, & k \in \{1, ..., m-1\}. \end{cases} \tag{3.6}$$

Lemme 1 *La version intégrale (équation intégrale de Volterra) relative à notre problème (3.6)est donnée par :*

$$u(t) = x + \int_0^t g_\alpha(t-s) Au(s) ds, \tag{3.7}$$

avec

$$g_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}.$$

Preuve. En effet si on applique, (2.3), il vient alors que

$$I^\alpha \circ^C D^\alpha u(t) = I^\alpha (Au)(t).$$

Donc

$$u(t) - \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0) g_{k+1}(t) = (g_\alpha * Au)(t),$$

par conséquent

$$u(t) - u(0) = \int_0^t g_\alpha(t-s) Au(s) ds,$$

car

$$u^{(k)}(0) = 0,$$

et cela pour toute $k \in \{1, ..., m-1\}$, ce qui implique que

$$u(t) = x + \int_0^t g_\alpha(t-s) Au(s) ds.$$

■

3.2.1 Notion de " Solution opérateur fractionnaire "

Avec le même principe que dans le cadre classique, on peut définir la solution opérateur relative au cadre fractionnaire

Définition 19 *Une famille d'opérateur $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0} \in B(E)$ est dite solution opérateur du problème (3.6) si les propriétés suivantes sont vérifiées*

1. $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ *est fortement continue sur* $\mathbb{R}_+$ *et* $S_\alpha(0) = Id_E$.
2. $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ *est commute avec* A *ie,* $\begin{cases} AS(t)x = S(t)Ax \text{ pour } x \in D(A), \\ \text{et} \\ S(t)D(A) \subset D(A). \end{cases}$

3. $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ *vérifiée l'équation intégrale*

$$\forall x \in D(A) : S_\alpha(t)\,x = x + \int_0^t a(t-s)\,AS_\alpha(s)\,xds \qquad t \geq 0.$$

Définition 20 *Un opérateur* $A \in C^\alpha(M,\omega)$ *si le probleme (3.6) admet une solution* $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ *vérifiant*

$$\|S_\alpha(t)\| \leq Me^{\omega t}, \qquad t \geq 0.$$

3.2.2 Sur la notion de la résolvante fractionnaire

On introduit maintenant une nouvelle notion qui s'appelle opérateur résolvante fractionnaire à l'aide de la transformée de Laplace de la " solution opérateur "

Proposition 12 *Soit* $A \in C^\alpha(M,\omega)$*. Alors, la transformé de Laplace de la solution opérateur correspondant donnée par*

$$H(\lambda) = \mathcal{L}(S_\alpha(t))(\lambda),$$

se nomme résolvante fractionnaire et on a

$$H(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha Id - A)^{-1}.$$

De plus

$$\{\lambda^\alpha : \operatorname{Re}\lambda > \omega\} \subseteq \rho(A). \tag{3.8}$$

Preuve. Soit $A \in C^\alpha(M,\omega)$ ie,

$$\|S_\alpha(t)\| \leq Me^{\omega t}, \qquad t \geq 0,$$

ce que implique, pour tout $\lambda > \omega$, et $x \in D(A)$,

$$\begin{aligned} H(\lambda)\,x &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S_\alpha(t)\,xdt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} xdt + \mathcal{L}(g_\alpha * AS_\alpha(t)\,x)(\lambda) \\ &= \frac{x}{\lambda} + \mathcal{L}(g_\alpha)(\lambda)\,.\mathcal{L}(AS_\alpha(t)\,x)(\lambda) \\ &= \frac{x}{\lambda} + \lambda^{-\alpha} AH(\lambda)\,x, \end{aligned}$$

d'après (2.7) et (2.8) et comme $S_\alpha(t)$ est commute avec A. Donc

$$\begin{aligned} \lambda^\alpha H(\lambda)\,x &= x\lambda^{\alpha-1} + AH(\lambda)\,x \\ &= x\lambda^{\alpha-1} + H(\lambda)\,Ax, \end{aligned}$$

donc

$$H(\lambda)(\lambda^{\alpha} Id - A)x = x\lambda^{\alpha-1},$$

c'est-à-dire

$$H(\lambda)(\lambda^{\alpha} Id - A) = \lambda^{\alpha-1};$$

donc

$$H(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}(\lambda^{\alpha} Id - A)^{-1};$$

on pose

$$R(\lambda^{\alpha}, A) := (\lambda^{\alpha} Id - A)^{-1},$$

on obtient ainsi

$$H(\lambda) = \lambda^{\alpha-1} R(\lambda^{\alpha}, A) = \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda t} S_{\alpha}(t)\, dt, \tag{3.9}$$

avec

$$\{\lambda^{\alpha} : \operatorname{Re}\lambda > \omega\} \subseteq \rho(A).$$

■

Théorème 3 *Soient $\alpha > 0$ et $A \in C^{\alpha}(M, \omega)$. Alors, la solution correspondante $\{S_{\alpha}(t)\}_{t\geq 0}$, est uniformément continue si et seulement si l'opérateur A est borné.*

Preuve. On rappelle que pour $\alpha > 0$, $\lambda > \omega$ si $A \in C^{\alpha}(M, \omega)$, alors

$$\|S_{\alpha}(t)\| \leq M e^{\omega t}, \qquad t \geq 0.$$

- "$\Rightarrow$" On suppose que $\{S_{\alpha}(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformément continue ie, la fonction

  $$\eta(t) := \|S_{\alpha}(t) - Id\|,$$

  est continue pour $t \geq 0$, de plus on a

  $$\eta(0) = 0,$$

  et

  $$\eta(t) \leq M e^{\omega t} + 1.$$

  En effet

  $$\begin{aligned} \|S_{\alpha}(t) - Id\| &\leq \|S_{\alpha}(t) + Id\| \\ &\leq \|S_{\alpha}(t)\| + \|Id\| \\ &\leq M e^{\omega t} + 1. \end{aligned}$$

D'autre part de (3.9) on obtient

$$\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^{\alpha},A)-\lambda^{-1}Id=\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda t}\left[S_{\alpha}(t)-Id\right]dt,$$

donc

$$\begin{aligned}\left\|\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^{\alpha},A)-\lambda^{-1}Id\right\| &\leq \int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda t}\eta(t)\,dt\\ &\leq \int_{0}^{\delta}e^{-\lambda t}\eta(t)\,dt+\int_{\delta}^{+\infty}e^{-\lambda t}\eta(t)\,dt\\ &\leq \frac{\varepsilon}{\lambda}+o\left(\frac{1}{\lambda}\right).\end{aligned}$$

En effet, on a par continuité de $\eta(t)$, sur $[0,\delta]$

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,:\eta(t)\leq\varepsilon,$$

donc

$$\int_{0}^{\delta}e^{-\lambda t}\eta(t)\,dt\leq\frac{\varepsilon}{\lambda},$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\delta}^{+\infty}e^{-\lambda t}\eta(t)\,dt &\leq \int_{\delta}^{+\infty}e^{-\lambda t}\left[Me^{\omega t}+1\right]dt\\ &\leq M\int_{\delta}^{+\infty}e^{-\lambda t}e^{\omega t}dt+\int_{\delta}^{+\infty}e^{-\lambda t}dt\\ &\leq \frac{M}{\lambda-\omega}e^{-(\lambda-\omega)\delta}+\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda\delta}\\ &= o\left(\frac{1}{\lambda}\right);\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\|\lambda^{\alpha}R(\lambda^{\alpha},A)-Id\| &\leq \varepsilon+\lambda\ o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\\ &< 1,\end{aligned}$$

comme

$$\lambda\ o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\to 0,$$

on conclut que

$$R(\lambda^{\alpha},A)=(\lambda^{\alpha}Id-A)^{-1},$$

est inversible donc $\lambda^{\alpha}Id-A$ est borné aussi d'où le résultat.

- "$\Leftarrow$" On pose A borné et
$$S_\alpha(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+1)},$$
cette série est converge pour toute $t \geq 0$ car
$$\begin{aligned} \frac{A^{n+1}t^{\alpha(n+1)}}{\Gamma(\alpha(n+1)+1)} \frac{\Gamma(\alpha n+1)}{A^n t^{\alpha n}} &= \frac{\Gamma(\alpha n+1)}{\Gamma(\alpha(n+1)+1)} A t^\alpha \\ &= \frac{\Gamma(\alpha n+1)}{(\alpha n+\alpha)\dots(\alpha n+1)\Gamma(\alpha n+1)} A t^\alpha \\ &= \frac{A t^\alpha}{(\alpha n+\alpha)\dots(\alpha n+1)}, \end{aligned}$$
or
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A t^\alpha}{(\alpha n+\alpha)\dots(\alpha n+1)} = 0.$$
Et de plus $S_\alpha(t)$ est un opérateur lineaire borné**,** en effet
$$\|S_\alpha(t)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+1)} = E_\alpha(\|A\| t^\alpha).$$
Montré que $A \in C^\alpha$ ou bien que $S_\alpha(t)$ est exponentiellement bornée, on distingue deux cas

1^{ére}cas: si $0 < \alpha < 2$, on peut utiliser le relation (2.5), alors pour
$$|\arg(\|A\| t^\alpha)| \leq \frac{1}{2}\alpha\pi,$$
on a
$$E_\alpha(\|A\| t^\alpha) = \frac{1}{\alpha}\exp\left(\|A\|^{1/\alpha} t\right) + \varepsilon_{\alpha,1}(\|A\| t^\alpha),$$
avec
$$\varepsilon_{\alpha,1}(\|A\| t^\alpha) = -\sum_{n=1}^{N-1} \frac{(\|A\| t^\alpha)^{-n}}{\Gamma(1-\alpha n)} + O\left(|\|A\| t^\alpha|^{-N}\right),$$
et avec la continuité de la fonction de Mittag-Lefler pour toute $t \geq 0$ il existe une constante C tels que
$$\begin{aligned} S_\alpha(t) &= E_\alpha(\|A\| t^\alpha) && (3.10) \\ &\leq C\exp\left(\|A\|^{1/\alpha} t\right). && (3.11) \end{aligned}$$

2^{éme}cas: si $\alpha > 2$ alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$ avec $\alpha < 2k$
$$\begin{aligned} \|S_\alpha(t)\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^{(1/k)kn} t^{(\alpha/k)kn}}{\Gamma((\alpha/k)kn+1)} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^{(1/k)n} t^{(\alpha/k)n}}{\Gamma((\alpha/k)n+1)} \\ &= E_{\alpha/k}\left(\|A\|^{1/k} t^{\alpha/k}\right), \end{aligned}$$

on obtient ainsi (3.10) avec le changement d'indice $j = n-1$, on a

$$\begin{aligned} \|S_\alpha(t) - Id\| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|A\|^n t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|A\|^{j+1} t^{\alpha(j+1)}}{\Gamma(\alpha(j+1)+1)} \\ &= t^\alpha \|A\| E_{\alpha,\alpha+1}(\|A\| t^\alpha) \overset{t\to 0}{\to} 0, \end{aligned}$$

or

$$\lim_{t\to 0} t^\alpha \|A\| E_{\alpha,\alpha+1}(\|A\| t^\alpha) = 0.$$

Donc la solution opérateur est uniformément continue.

■

Théorème 4 *Si $A \in C^\alpha(M,\omega)$ et $\alpha > 2$. Alors, l'opérateur A est borné.*

Preuve. Soit $\lambda \in \rho(A) \subset \mathbb{C}$, alors

$$\lambda = |\lambda| e^{i\theta} = |\lambda| [\cos\theta + i \sin\theta],$$

avec $0 < \theta < \pi$,

$$\lambda^\alpha = |\lambda|^\alpha e^{i\alpha\theta}.$$

Donc

$$\lambda^\alpha \in \rho(A),$$

si et seulement si

$$0 < \alpha\theta < \pi.$$

Donc $0 < \theta < \dfrac{\pi}{\alpha}$. Maintenant, on considère

$$\mu = \lambda^\alpha \in \rho(A),$$

alors

$$\|\mu R(\mu, A)\| = \left\| \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S_\alpha(t)\, dt \right\|,$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
\left\| \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S_\alpha(t)\, dt \right\| &\leq M\left|\lambda\right| \int_0^{+\infty} e^{-(\operatorname{Re}\lambda - \omega)t} dt \\
&\leq \frac{M\left|\lambda\right|}{-\left(\operatorname{Re}\lambda - \omega\right)} \left[e^{-(\lambda-\omega)t}\right]_0^{+\infty} \\
&\leq \frac{M\left|\lambda\right|}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} \\
&\leq \frac{M\left|\lambda\right|}{\left|\lambda\right|\cos\theta - \omega} \\
&\leq \frac{M\left|\lambda\right|}{\left|\lambda\right|\cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) - \omega}.
\end{aligned}$$

Or

$$\lim_{\mu \to +\infty} \frac{M\left|\lambda\right|}{\left|\lambda\right|\cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) - \omega} = \frac{M}{\cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)},$$

donc A est borné. ■

Proposition 13 *On a*

$$\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\left[\lambda^{\alpha-1}R\left(\lambda^\alpha, A\right)\right] = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} S_\alpha(t)\, dt. \tag{3.12}$$

Preuve. On raisonne par récurrence.

Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\lambda^{\alpha-1}R\left(\lambda^\alpha, A\right)\right] &= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S_\alpha(t)\, dt\right] \\
&= \int_0^{+\infty} - t e^{-\lambda t} S_\alpha(t)\, dt.
\end{aligned}$$

On considère la propriété de récurrence $P(n)$ définie par

$$\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\left[\lambda^{\alpha-1}R\left(\lambda^\alpha, A\right)\right] = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} S_\alpha(t)\, dt.$$

On a

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial\lambda^{n+1}}\left[\lambda^{\alpha-1}R\left(\lambda^\alpha, A\right)\right] = (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-\lambda t} S_\alpha(t)\, dt.$$

Il vient alors que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n+1}}{\partial\lambda^{n+1}}\left[\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^{\alpha},A)\right] &= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{\partial^{n}}{\partial\lambda^{n}}\left(\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^{\alpha},A)\right)\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(-1)^{n}\int_{0}^{+\infty} t^{n}e^{-\lambda t}S_{\alpha}(t)\,dt\right] \\ &= (-1)^{n+1}\int_{0}^{+\infty} t^{n+1}e^{-\lambda t}S_{\alpha}(t)\,dt.\end{aligned}$$

Donc (3.12) est vrai. ■

Le résulta suivant est la version fractionnaire du Théorème (1.3) de [3], la démonstration est assez difficile et fait intervenir le développement en série de Taylor de la fonction

$$\lambda \to \frac{\partial^{n}}{\partial\lambda^{n}}\left[\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^{\alpha},A)\right].$$

Théorème 5 *Soit $0<\alpha\leq 2$. Alors, $A\in C^{\alpha}(M,\omega)$ si et seulement si*

$$(\omega^{\alpha},\infty)\in\rho(A)$$

et

$$\left\|\frac{\partial^{n}}{\partial\lambda^{n}}\left[\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^{\alpha},A)\right]\right\|\leq\frac{Mn!}{(\lambda-\omega)^{n+1}},\lambda>\omega,n\in\mathbb{N}_{0}.$$

Théorème 6 *Soit $0<\alpha\leq 2$. Alors, $A\in C^{\alpha}(M,\omega)$ si et seulement si $(\omega^{\alpha},\infty)\in\rho(A)$ et il existe une solution opérateur fortement continue $(S_{\alpha}(t))$ vérifiant*

$$\|S_{\alpha}(t)\|\leq Me^{\omega t},$$

pour $t\geq 0$ tel que

$$\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^{\alpha},A)\,x=\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda t}S_{\alpha}(t)\,xdt,\qquad \lambda>\omega,x\in E.$$

Preuve. On montre la double implication

- " $\Rightarrow$ " Soient $0<\alpha\leq 2$. D'après le théorème (5) on $(\omega^{\alpha},\infty)\in\rho(A)$, et comme $A\in C^{\alpha}(M,\omega)$, alors, la solution correspondant satisfait

  $$\|S_{\alpha}(t)\|\leq Me^{\omega t},$$

  ce qui implique la transformée de Laplace existe et donnée par

  $$\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^{\alpha},A)\,x=\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda t}S_{\alpha}(t)\,xdt,\qquad \lambda>\omega,x\in E.$$

  Et d'après le théorème (3), on sait que $S_{\alpha}(t)$ est uniformément continue donc elle est fortement continue, d'où le résultat.

- " $\Leftarrow$ " On suppose que

$$(\omega^{\alpha}, \infty) \subset \rho(A),$$

et il existe un opérateur fortement continu $S_{\alpha}(t)$ que satisfait

$$\|S(t)\| \leq M e^{\omega t},$$

pour $t \geq 0$ tel que

$$\lambda^{\alpha-1} R(\lambda^{\alpha}, A) x = \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t} S_{\alpha}(t) x dt, \qquad \lambda > \omega, x \in E.$$

donc

$$A \in C^{\alpha}(M, \omega).$$

■

Dans la suite, on aura besoin de ce lemme parement technique,

Lemme 2 *Soit $A \in C^{\alpha}(M, \omega)$, on a*

$$\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n}\left(\lambda^{\alpha-1} R(\lambda^{\alpha}, A)\right) = \frac{(-1)^n}{\lambda^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} b_{k,n+1}^{\alpha} \left(\lambda^{\alpha} R(\lambda^{\alpha}, A)\right)^k, \qquad n \in \mathbb{N}, \alpha > 0, \tag{3.13}$$

avec $b_{k,n}^{\alpha}$ sont donné par les relations de récurrence

$$\begin{cases} b_{1,1}^{\alpha} = 1, \\ b_{k,n}^{\alpha} = (n-1-k\alpha) b_{k,n-1}^{\alpha} + \alpha(k-1) b_{k-1,n-1}^{\alpha}, 1 \leq k \leq n, n = 2, 3, ..., \\ b_{k,n}^{\alpha} = 0, k > n, n = 1, 2, ... \end{cases} \tag{3.14}$$

Preuve. On raisonne par récurrence que

$$\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n}\left(\lambda^{\alpha-1} R(\lambda^{\alpha}, A)\right) = \frac{(-1)^n}{\lambda^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} b_{k,n+1}^{\alpha} \left(\lambda^{\alpha} R(\lambda^{\alpha}, A)\right)^k, \qquad n \in \mathbb{N}, \alpha > 0,$$

1. Tout d'abord, on a pour $n = 0$,

$$\begin{aligned} \lambda^{\alpha-1} R(\lambda^{\alpha}, A) &= \frac{1}{\lambda} b_{1,1}^{\alpha} \lambda^{\alpha} R(\lambda^{\alpha}, A) \\ &= \lambda^{\alpha-1} R(\lambda^{\alpha}, A), \end{aligned}$$

car

$$b_{1,1}^{\alpha} = 1.$$

2. On considère la propriété de récurrence $P(n)$ et on pose qu'elle est vraie pour tout $n \geq 1$,

$$P(n) : \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left(\lambda^{\alpha-1} R(\lambda^\alpha, A) \right) = \frac{(-1)^n}{\lambda^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} b_{k,n+1}^\alpha \left(\lambda^\alpha R(\lambda^\alpha, A) \right)^k .$$

3. On montre que

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial \lambda^{n+1}} \left(\lambda^{\alpha-1} R(\lambda^\alpha, A) \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^{n+2}} \sum_{k=1}^{n+2} b_{k,n+2}^\alpha \left(\lambda^\alpha R(\lambda^\alpha, A) \right)^k ;$$

donc on a

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{n+1}}{\partial \lambda^{n+1}} \left(\lambda^{\alpha-1} R(\lambda^\alpha, A) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left(\lambda^{\alpha-1} R(\lambda^\alpha, A) \right) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{(-1)^n}{\lambda^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} b_{k,n+1}^\alpha \left(\lambda^\alpha R(\lambda^\alpha, A) \right)^k \right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (n+1) \lambda^n}{\lambda^{2n+2}} \sum_{k=1}^{n+1} b_{k,n+1}^\alpha \left(\lambda^\alpha R(\lambda^\alpha, A) \right)^k \\ &+ \frac{(-1)^n}{\lambda^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} b_{k,n+1}^\alpha \underbrace{\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\lambda^\alpha R(\lambda^\alpha, A) \right)^k}_{\varphi} . \end{aligned}$$

Pour calculer

$$\varphi := \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\lambda^\alpha R(\lambda^\alpha, A) \right)^k ,$$

on aura besoin à $P(1)$. Alors

$$\begin{aligned} P(1) &= \frac{\partial^1}{\partial \lambda^1} \left(\lambda^{\alpha-1} R(\lambda^\alpha, A) \right) \\ &= \frac{(-1)^1}{\lambda^2} \sum_{k=1}^{2} b_{k,2}^\alpha \left(\lambda^\alpha R(\lambda^\alpha, A) \right)^k \\ &= \frac{-1}{\lambda^2} \left[b_{1,2}^\alpha \lambda^\alpha R(\lambda^\alpha, A) + b_{2,2}^\alpha \left(\lambda^\alpha R(\lambda^\alpha, A) \right)^2 \right] \\ &= \frac{(\alpha - 1)}{\lambda^2} \lambda^\alpha R(\lambda^\alpha, A) - \frac{\alpha}{\lambda^2} \left(\lambda^\alpha R(\lambda^\alpha, A) \right)^2 ; \end{aligned}$$

car

$$\begin{cases} b_{1,2}^\alpha = (1 - \alpha) , \\ b_{2,2}^\alpha = \alpha. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda^{\alpha}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right)^{k} \\
&= k\left(\lambda^{\alpha}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right)^{k-1}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda^{\alpha}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right) \\
&= k\left(\lambda^{\alpha}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right)^{k-1}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda\lambda^{\alpha-1}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right) \\
&= k\left(\lambda^{\alpha}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right)^{k-1}\left[\lambda^{\alpha-1}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)+\lambda\underbrace{\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda^{\alpha-1}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right)}_{P(1)}\right] \\
&= \frac{\alpha k}{\lambda}\left(\lambda^{\alpha}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right)^{k}-\frac{\alpha k}{\lambda}\left(\lambda^{\alpha}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right)^{k+1}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{n+1}}{\partial\lambda^{n+1}}\left(\lambda^{\alpha-1}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{\lambda^{n+2}}\sum_{k=1}^{n+1}b_{k,n+1}^{\alpha}\left(\lambda^{\alpha}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right)^{k} \\
&+ \frac{(-1)^{n}}{\lambda^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}b_{k,n+1}^{\alpha}\frac{\alpha k}{\lambda}\left(\lambda^{\alpha}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right)^{k} \\
&- \frac{(-1)^{n}}{\lambda^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}b_{k,n+1}^{\alpha}\frac{\alpha k}{\lambda}\left(\lambda^{\alpha}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right)^{k+1}, \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^{n+2}}\sum_{k=1}^{n+1}\left(n+1-\alpha k\right)b_{k,n+1}^{\alpha}\left(\lambda^{\alpha}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right)^{k} \\
&+ \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^{n+2}}\sum_{k=1}^{n+1}\alpha k b_{k,n+1}^{\alpha}\left(\lambda^{\alpha}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right)^{k+1};
\end{aligned}$$

soit le changement d'indice suivant

$$i = k+1,$$

alors, si

$$\begin{cases} k=1 & \text{alors} \quad i=2 \\ k=n+1 & \phantom{\text{alors}} \quad i=n+2 \end{cases}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n+1}\alpha k b_{k,n+1}^{\alpha}\left(\lambda^{\alpha}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right)^{k+1} = \sum_{i=2}^{n+2}\alpha\left(i-1\right)b_{i-1,n+1}^{\alpha}\left(\lambda^{\alpha}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right)^{i},$$

d'ou

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^{n+1}}{\partial\lambda^{n+1}}\left(\lambda^{\alpha-1}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right)\\
&=\frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^{n+2}}\sum_{k=1}^{n+1}\left(n+1-\alpha k\right)b^{\alpha}_{k,n+1}\left(\lambda^{\alpha}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right)^{k}\\
&+\frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^{n+2}}\sum_{k=2}^{n+2}\alpha\left(k-1\right)b^{\alpha}_{k-1,n+1}\left(\lambda^{\alpha}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right)^{k},
\end{aligned}
$$

nous distribuons les deux sommes, on obtient alors

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^{n+1}}{\partial\lambda^{n+1}}\left(\lambda^{\alpha-1}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right)\\
&=\frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^{n+2}}\underbrace{\left(n+1-\alpha\right)b^{\alpha}_{1,n+1}\lambda^{\alpha}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)}_{k=1}\\
&+\frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^{n+2}}\sum_{k=2}^{n+1}\left(n+1-\alpha k\right)b^{\alpha}_{k,n+1}\left(\lambda^{\alpha}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right)^{k}\\
&+\frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^{n+2}}\sum_{k=2}^{n+1}\alpha\left(k-1\right)b^{\alpha}_{k-1,n+1}\left(\lambda^{\alpha}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right)^{k}\\
&+\frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^{n+2}}\underbrace{\alpha\left(n+1\right)b^{\alpha}_{n+1,n+1}\left(\lambda^{\alpha}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right)^{n+2}}_{k=n+2};
\end{aligned}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^{n+1}}{\partial\lambda^{n+1}}\left(\lambda^{\alpha-1}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right)\\
&=\frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^{n+2}}\underbrace{\left(n+1-\alpha\right)b^{\alpha}_{1,n+1}}_{b^{\alpha}_{1,n+2}}\lambda^{\alpha}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\\
&+\frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^{n+2}}\sum_{k=2}^{n+1}\underbrace{\left[\left(n+1-\alpha k\right)b^{\alpha}_{k,n+1}+\alpha\left(k-1\right)b^{\alpha}_{k-1,n+1}\right]}_{b^{\alpha}_{k,n+2}}\left(\lambda^{\alpha}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right)^{k}\\
&+\underbrace{\alpha\left(n+1\right)b^{\alpha}_{n+1,n+1}}_{b^{\alpha}_{n+2,n+2}}\left(\lambda^{\alpha}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right)^{n+2},
\end{aligned}
$$

car

$$
\begin{cases}
b^{\alpha}_{k,n+2}=\left(n+1-\alpha k\right)b^{\alpha}_{k,n+1}+\alpha\left(k-1\right)b^{\alpha}_{k-1,n+1},\\
b^{\alpha}_{1,n+2}=\left(n+1-\alpha\right)b^{\alpha}_{1,n+1},\\
b^{\alpha}_{n+2,n+2}=\alpha\left(n+1\right)b^{\alpha}_{n+1,n+1},
\end{cases}
$$

par suite on a

$$
\frac{\partial^{n+1}}{\partial\lambda^{n+1}}\left(\lambda^{\alpha-1}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^{n+2}}\sum_{k=1}^{n+2}b^{\alpha}_{k,n+2}\left(\lambda^{\alpha}R\left(\lambda^{\alpha},A\right)\right)^{k},
$$

ce qui achève la démonstration.

■

Corollaire 3 *Si* $A \in C^1(\omega)$ *. Alors,* $A \in C^\alpha\left(\omega^{1/\alpha}\right)$ *, pour toute* $\alpha \in (0,1)$ *.*

Preuve. Pour montrer ce résultat, on sait que si $A \in C^1(\omega)$, il existe une constante $M \geq 1$ tel que $R(\lambda, A)$ existe pour $\lambda > \omega$, et on a

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \qquad \lambda > \omega, n \in \mathbb{N}. \tag{3.15}$$

Pour montrer que

$$A \in C^\alpha\left(M_1, \omega^{1/\alpha}\right),$$

il suffit de montrer que

$$\|S_\alpha(t)\| \leq M_1 e^{\omega^{1/\alpha} t},$$

tels que

$$\left\|\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n}\left(\lambda^{\alpha-1} R(\lambda^\alpha, A)\right)\right\| \leq \frac{M_1 n!}{(\lambda - \omega^{1/\alpha})^{n+1}}, \qquad \lambda > \omega^{1/\alpha}, n \in \mathbb{N}. \tag{3.16}$$

on utilise le lemme précédent, on a

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n}\left(\lambda^{\alpha-1} R(\lambda^\alpha, A)\right) \\ &= (-1)^n \lambda^{-(n+1)} \sum_{k=1}^{n+1} b_{k,n+1}^\alpha \left(\lambda^\alpha R(\lambda^\alpha, A)\right)^k, \qquad n \in \mathbb{N}, \alpha > 0, \end{aligned} \tag{3.17}$$

dans le cas de $\alpha \in (0,1)$ on a $b_{k,n}^\alpha > 0$. et on a $\lambda > \omega^{1/\alpha}$ donc

$$\left\|\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n}\left(\lambda^{\alpha-1} R(\lambda^\alpha, A)\right)\right\| \leq \sum_{k=1}^{n+1} b_{k,n+1}^\alpha \lambda^{k\alpha-n-1} \left\|R(\lambda^\alpha, A)^k\right\|; \tag{3.18}$$

d'ou on obtient d'apré (3.15) on a

$$\begin{aligned} &\left\|\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n}\left(\lambda^{\alpha-1} R(\lambda^\alpha, A)\right)\right\| \\ &\leq M \sum_{k=1}^{n+1} b_{k,n+1}^\alpha \frac{\lambda^{k\alpha-n-1}}{(\lambda^\alpha - \omega)^k} \\ &\leq (-1)^n M \left\{\frac{(-1)^n}{\lambda^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} b_{k,n+1}^\alpha \left(\frac{\lambda^\alpha}{\lambda^\alpha - \omega}\right)^k\right\} \\ &= (-1)^n M \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n}\left\{\frac{\lambda^{\alpha-1}}{\lambda^\alpha - \omega}\right\}, \end{aligned}$$

lorsque la dernière égalité suite comme un cas particulier de (3.13) D'apres (2.9) et (2.10) on a

$$\frac{\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda^\alpha - \omega)} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} E_\alpha(\omega t^\alpha)\, dt,$$

donc

$$(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n}\left(\frac{\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda^\alpha-\omega)}\right)=\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t}E_\alpha(\omega t^\alpha)\,dt,$$

donc, on obtient

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\left(\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^\alpha,A)\right)\right\| &\leq M(-1)^n\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\left\{\frac{\lambda^{\alpha-1}}{\lambda^\alpha-\omega}\right\}\\ &\leq M\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t}E_\alpha(\omega t^\alpha)\,dt\\ &\leq M\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t}\left\|E_\alpha(\omega t^\alpha)\right\|dt\\ &\leq \underbrace{MC}_{M_1}\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t}e^{\omega^{1/\alpha}t}dt,\end{aligned}$$

car

$$E_\alpha(\omega t^\alpha)\leq Ce^{\omega^{1/\alpha}t},\quad \text{pour } \alpha\in(0,2),$$

donc

$$\left\|\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\left(\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^\alpha,A)\right)\right\|\leq M_1\int_0^\infty t^n e^{-\left(\lambda-\omega^{1/\alpha}\right)t}dt,$$

avec le changement de variable

$$z=\left(\lambda-\omega^{1/\alpha}\right)t,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\left(\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^\alpha,A)\right)\right\| &\leq M_1\int_0^\infty e^{-z}z^n\left(\frac{1}{\lambda-\omega^{1/\alpha}}\right)^{n+1}dz\\ &\leq M_1\frac{n!}{\left(\lambda-\omega^{1/\alpha}\right)^{n+1}},\qquad n\in\mathbb{N},\end{aligned}$$

donc $A\in C^\alpha\left(\omega^{1/\alpha}\right)$. ■

Proposition 14 *Soit $\alpha>0$ et $A\in C^\alpha$. Alors la solution opérateur correspondante à $S_\alpha(t)$ est*

$$S_\alpha(t)x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n+1}b^\alpha_{k,n+1}\left(Id-(t/n)^\alpha A\right)^{-k}x, \tag{3.19}$$

avec $b^\alpha_{k,n}$ donnée par (3.14). Cette convergence est uniforme pour toute $x\in E$ et $t\geq 0$.

Preuve. Voir [1]. ■

Remarque 9 *L'expression (3.19) c'est une généralisation de la représentation exponentiele d'une C_0-semigroupe*

$$S_1(t)\,x = \lim_{n\to\infty}\left(Id - \frac{t}{n}A\right)^{-n} x, \qquad x \in E,$$

uniformément sur les sous intervalles bornés de $t \geq 0$.en suite, nous exprimons l'operateur A en termes de la solution operateur correspondant $S_\alpha(t)$.

Le but de resultat suivant, et donner un lien entre la solution $S_\alpha(t)$ et l'operateur A.

Proposition 15 *Soit $S_\alpha(t)$ est une solution opérateur du probleme (3.6) alors*

$$Ax = \Gamma(\alpha+1)\lim_{t\to0^+}\frac{S_\alpha(t)\,x - x}{t^\alpha}, \tag{3.20}$$

pour toute $x \in E$ si cette limite est existe.

Preuve. Pour toute fonction $v(.) \in C(\mathbb{R}_+; E)$, on a

$$\lim_{t\to0} v(t) = \lim_{t\to0}\frac{I_t^\alpha v(t)}{g_{\alpha+1}(t)},$$

on pose $v(t) = \left({}^C D_t^\alpha S_\alpha\right)(t)\,x$ et on utilise (3.6) et la relation (2.3) on obtient (3.20). ■

3.3 Sur la notion "Solution opérateur analytique"

On considere le secteur $\Sigma_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \theta_0 \leq \pi/2\}$ et soit $z \in \Sigma_{\theta_0}$,

Définition 21 *La solution opérateur $S_\alpha(z)$ du problème (3.6) est dite analytique de type (θ_0, ω_0) si pour tout $\theta < \theta_0$ et $\omega > \omega_0$, il existe une constante $M(\theta, \omega)$ tels que*

$$\|S_\alpha(z)\| \leq Me^{\omega\,\mathrm{Re}\,z}, \qquad z \in \Sigma_{\theta_0}.$$

Remarque 10 *Généralement la solution opérateur correspondant d'opérateur*

$$A \in C^\alpha(M, \omega)$$

est analytique, dans ce cas on note

$$A \in \mathcal{A}^\alpha(\theta_0, \omega_0).$$

Si $\alpha = 1$ on obtient l'ensemble de toute les générateur de semi-groupes analytiques.

Théorème 7 *Soit $\alpha \in (0,2)$, A est un opérateur linéaire fermée a domaine dense, alors*

$$A \in \mathcal{A}^{\alpha}(\theta_0, \omega_0),$$

si et seulement si $\lambda^{\alpha} \in \rho(A)$ pour toute $\lambda \in \Sigma_{\theta_0+\pi/2}$, et pour tout $\omega > \omega_0$ et $\theta < \theta_0$, il existe une constante $C = C(\theta, \omega)$ telle que

$$\|H(\lambda)\| = \left\|\lambda^{\alpha-1} R(\lambda^{\alpha}, A)\right\| \leq \frac{C}{|\lambda - \omega|}. \tag{3.21}$$

Corollaire 4 *Soit $\alpha \in (0,2)$, alors*

$$A \in \mathcal{A}^{\alpha}(\theta_0, 0),$$

si et seulement si $\Sigma_{\theta_0+\pi/2} \subset \rho(A)$, et pour tout $\theta < \theta_0$,

$$\|R(\lambda, A)\| \leq C|\lambda|, \qquad \lambda \in \Sigma_{\alpha(\theta_0+\pi/2)}.$$

Un autre résulat pratique est donné par :

Corollaire 5 *Soit $\alpha \in (0,1)$. Si $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(A)$, et s'il existe une constante C tel que*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{C}{\operatorname{Re}\lambda}, \qquad \operatorname{Re}\lambda > 0,$$

alors $A \in \mathcal{A}^{\alpha}\left(\min\left\{\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}, 0\right)$.

Preuve. Soit $\alpha \in (0,1)$ et $\theta_0 = (1/\alpha - 1)\pi/2$. alors $\alpha(\theta_0 + \pi/2) < \pi/2$ alors $\Sigma_{\alpha(\theta_0+\pi/2)} \subset \rho(A)$. Soit β tel que $\alpha(\theta_0 + \pi/2) < \beta < \pi/2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda, A)\| &\leq \frac{C}{\operatorname{Re}\lambda} \\
&\leq \frac{C}{|\lambda|\cos\varphi} \\
&\leq \frac{C}{|\lambda|\cos\beta}, \qquad \lambda \in \Sigma_{\alpha(\theta_0+\pi/2)},
\end{aligned}$$

avec $\varphi = \arg\lambda$, donc

$$\|R(\lambda, A)\| \leq C|\lambda|, \qquad \lambda \in \Sigma_{\alpha(\theta_0+\pi/2)}.$$

■

3.4 Exemples

Cette section est consacrée à donner des exemples concrets où le théorème abordé dans ce travail s'applique

Exemple 1 Soient $0 < \alpha < 2$ et $x \in (0,1)$ on consider le probléme suivent

$$(E_0)\begin{cases} {}^{C}D_t^{\alpha}u = u_{xx}, \\ u(x,0) = f(x), \\ u(0) = u_x'(1) = 0, & t > 0, \\ u_t(x,0) = 0, & \text{si } 1 < \alpha < 2. \end{cases} \tag{3.22}$$

Pour résoudre cette problème, on va étudier la résolvant de l'opérateur A que est définie par

$$\begin{cases} Au = u_{xx}, \\ D(A) = \{u \in W^{2,p}(0,1) \text{ tel que } u(0) = u'(1) = 0\}. \end{cases}$$

Donc on considère le problème spectral

$$\begin{cases} u''(x) - \lambda u(x) = g(x), & \text{sur } (0,1), \\ u(0) = 0, \\ u_x'(1) = 0, \end{cases}$$

La solution générale de l'équation sans le second membre est de la forme

$$u(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Par la méthode de la variation de la constante, on obtient

$$\begin{cases} A'(x)e^{\sqrt{\lambda}x} + B'(x)e^{-\sqrt{\lambda}x} = 0, \\ \sqrt{\lambda}A'(x)e^{\sqrt{\lambda}x} - \sqrt{\lambda}B'(x)e^{-\sqrt{\lambda}x} = g(x), \end{cases}$$

ainsi

$$\begin{cases} A(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\lambda}}\displaystyle\int_0^x e^{-\sqrt{\lambda}s}g(s)ds + A_0, \\ \\ B(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{\lambda}}\displaystyle\int_0^x e^{\sqrt{\lambda}s}g(s)ds + B_0. \end{cases}$$

Donc

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x \sinh\sqrt{\lambda}(x-s)\ g(s)\ ds + A_0e^{\sqrt{\lambda}x} + B_0e^{-\sqrt{\lambda}x},$$

et

$$u'(x) = \int_0^x \cosh\sqrt{\lambda}(x-s)\ g(s)\ ds + \sqrt{\lambda}A_0e^{\sqrt{\lambda}x} - \sqrt{\lambda}B_0e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Les conditions aux limites donnent

$$\begin{cases} A_0 = -\displaystyle\int_0^1 \frac{\cosh\sqrt{\lambda}(1-s)}{2\sqrt{\lambda}\cosh\sqrt{\lambda}}\ g(s)ds, \\ \\ B_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cosh\sqrt{\lambda}(1-s)}{2\sqrt{\lambda}\cosh\sqrt{\lambda}}\ g(s)ds. \end{cases}$$

En se basant sur la théorie de fonction de Green, par conséquent, la solution du problème (P) s'écrit

$$(A-\lambda)^{-1} g = u(x) = -\int_0^1 K_z(x,\tau)\ g(\tau)\ d\tau, \tag{3.23}$$

où, le noyau de Green est donné par la formule suivante

$$K_z(x,\tau) = \begin{cases} \dfrac{\sinh\sqrt{\lambda}\tau\ \ \cosh\sqrt{\lambda}(1-x)}{\sqrt{\lambda}\cosh\sqrt{\lambda}} & \text{si } \ 0 \leqslant \tau \leqslant x, \\ \\ \dfrac{\sinh\sqrt{\lambda}x\ \ \cosh\sqrt{\lambda}(1-\tau)}{\sqrt{\lambda}\cosh\sqrt{\lambda}} & \text{si } \ x \leqslant \tau \leqslant 1. \end{cases}$$

Par un calcul purement technique, on obtient l'estimation suivante

$$\exists K > 0 : \forall \lambda \geqslant 0 \quad \left\| (A-\lambda)^{-1} \right\|_{L(E)} \leqslant \frac{K}{1+\lambda}. \tag{3.24}$$

Il est alors connu que cette hypothèse implique l'existence d'un $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ et d'un $\omega_0 > 0$ tels que $\rho(A)$ contient un secteur de la forme

$$\Sigma_{\omega_0,\theta_0} = \{\lambda \in \mathbb{C}^* : |\arg\lambda| \leqslant \theta_0\} \cup \overline{B(0,\omega_0)}.$$

donc le corollaire (5) implique que $A \in \mathcal{A}^\alpha \left(\min\left\{ \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}, 0 \right)$ avec $\alpha \in (0,1)$.

Exemple 2 Soit $0 < \alpha < 1, \theta \in [0, \pi)$ on considère le problème

$$\begin{cases} D_t^\alpha u = -e^{i\theta} D_x^1 u, & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

soit $E = L^p(0,1)$. On a

$$A_\theta = -e^{i\theta} D_x^1,$$

avec

$$D(A_\theta) = \left\{ f \in W^{1,p}(0,1) \ \text{ tel que } f(0) = 0 \right\}.$$

Il est bien connu que A_0 génère un C_0-semigroupe

$$\| R(\lambda, A_0) \| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}, \qquad \operatorname{Re}\lambda > 0. \tag{3.25}$$

on utilise le corollaire (5) on obtient

$$A_0 \in \mathcal{A}^{\alpha}\left(\min\left\{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\},0\right),$$

pour des raisons génerales $\theta \in (0,\pi)$, nous avons par (3.25)

$$\begin{aligned}\|R(\lambda,A_\theta)\| &= \left\|R\left(\lambda,e^{i\theta}A_\theta\right)\right\| \\ &= \left\|R\left(\lambda e^{-i\theta},A_\theta\right)\right\| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|\cos(\varphi-\theta)}, \qquad \lambda \in \Sigma_{\pi/2-\theta},\end{aligned}$$

avec $\varphi = \arg\lambda$, donc $\Sigma_{\frac{\pi}{2}-\theta} \subset \rho(A_\theta)$, et

$$\|R(\lambda,A_\theta)\| \leq \frac{M(\varepsilon)}{|\lambda|}, \qquad \lambda \in \Sigma_{\frac{\pi}{2}-\theta-\varepsilon}.$$

d'ou $A_\theta \in \mathcal{A}^{\alpha}\left(\min\left\{\frac{\pi/2-\theta}{\alpha}-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\},0\right)$ si $|\theta| < (1-\alpha)\pi/2$, notez que $A_\theta \in C^1$ seulement si $\theta = 0$. On applique la méthode de la transformé de Laplace on obtient l'expression explicite de la solution

$$u(x,t) = e^{-i\theta}t^{-\alpha}\int_0^x \Phi_\alpha\left(se^{-i\theta}t^{-\alpha}\right)f(x-s)\,ds,$$

pour $|\theta| < (1-\alpha)\pi/2$, et Φ_α est la fonction Wright definie par

$$\Phi_\gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(-\gamma(n+1)+1)}, \tag{3.26}$$

avec $0 < \gamma < 1$.

Bibliographie

[1] **E. G. Bajlekova**, *Fractional Evolution Equations in Banach Spaces*, Phd dessertation , Delft University, 2001.

[2] **A. Pazy,** *Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Di erential Equations.* Applied Mathematical Sciences 44, Springer Verlag,New York (1983).

[3] **J. Prüss**, *Evolutionary Integral Equations and Applications.* Birkhauser, Basel, Boston, Berlin (1993).

[4] **A. Samko, A. Kilbas, O. I. Marichev**, *Integral and Derivatives of Fractional Order*, Gordon Breach, New York (1993).

3.5 Annexe

La fonction Gamma

Définition 22 *La fonction Gamma d'Euler est une fonction spéciale notée Γ que prolonge la fonction factorielle aux valeurs réelles aux complexes qui est définie par*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

avec $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Proposition 16 *Par le principe du prolongement analytique, on peut étendre la définition de la fonction Gamma aux valeurs* $\mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}^{-}$,

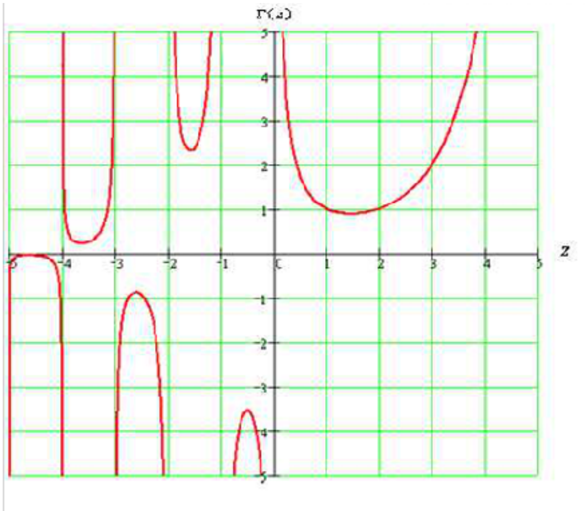

Fig.1 Allure de la fonction Gamma

Proposition 17 *On a* $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, *cas particulier* $\Gamma(n+1) = n!$.

La fonction Bêta

Définition 23 *La fonction Bêta d'Euler est définie par l'intégrale suinente*

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt,$$

avec $\mathrm{Re}(p) > 0$, *et* $\mathrm{Re}(q) > 0$.

Proposition 18 *La relation de Gamma et Bêta est donne par*

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

avec $\mathrm{Re}(p) > 0$, *et* $\mathrm{Re}(q) > 0$.

Résumé

Dans cette mémoire, on étudie une équation différentielle abstraite fractionnaire. Ce travail est principalement basé sur la synthèse du papier de E. G. Bajlekova, intitulé “Fractional Evolution Equations in Banach Spaces”.

Abstract

In this memory, we study an abstract fractional differential equation. This work is mainly based on the paper of E. G. Bajlekova, untitled “Fractional Evolution Equations in Banach Spaces”.