Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Djilali BOUNAAMA, Khemis Miliana

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

Master en mathématiques

Département de Mathématiques et Informatique

Spécialité : **Analyse Mathématique et Applications**

Présenté par

Salima BEKHTAOUI

Sur la notion de solutions pour les équations différentielles semi-linéaires

Soutenue publiquement le 12/06/ 2017

devant le jury composé de

Président du jury : **Mr A. KRELIFA**
Maitre assistant à l'université de Djilali BOUNAAMA.

Encadrant : **Mr O. BENNICHE**
Maitre de conférence à l'université de Djilali BOUNAAMA.

Examinateur : **Mr M. BENBACHIR**
Professeur à l'université de Djilali BOUNAAMA.

Mr B. CHAOUCHI
Maitre de conférence à l'université de Djilali BOUNAAMA.

Table des matières

Remerciements

En premier lieu, je remercie **ALLAH** le tout puissant qui m'a donné la force, l'amour de savoir et surtout la patience pour pouvoir produire ce modeste travail.

Je tiens à adresser ma sincère gratitude et mes remerciements à mon encadreur Mr **Omar BENNICHE**, Docteur à l'université de Khemis Miliana. pour ses précieux conseils, ses directives, ainsi que pour son aide.
En fait, je ne saurais exprimer toute ma gratitude en quelques lignes. je voulais lui dire un grand merci.

Je veux exprimer mes remerciements aux examinateurs Mr. **BENBACHIR Maaamar**, Mr. **CHAOUCHI Belkacem** qui m'ont honorées en acceptant d'examiner ce travail. Je voudrais également remercie Monsieur **KRELIFA Ali** ma fait l'honneur d'être président du jury.

Je tiens à remercier tous les enseignants de département Mathématiques et Informatique.

Un grande merci à ma très chère mère, à mon père, mes frères et mes sœurs, Mes amies.
Mes remerciements s'adressent également à toutes les personnes qui m'a apportée aide, conseils, et soutient.

MERCI.

Introduction

Les équations différentielles linéaires jouent un rôle primordial dans la modélisation des phénomènes, en particulier, on les rencontrent dans la physique, la biologie l'économie est d'autres disciplines....

Dans ce mémoire on s'intéresse à la notion de solutions d'une équation différentielle semi-linéaire ayant la forme

$$y' = Ay + f, \tag{1}$$

où A est un opérateur linéaire générant un semi-groupe et f est une fonction localement intégrable.

Ce travail est devisé en trois chapitres. Dans le premier chapitre on fait rappelle à quelques notions de bases. On discutera la notion de solution d'une équation différentielle non-linéaire ayant la forme

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(a) = x$$

où $f : I \times X \to X$, I est un sous intervalle de $\mathbb{R}$ et X et un espace de Banach. Cette équation différentielle est un cas particulier de l'équation différentielle (1) i.e. ($A = 0$). On donnera aussi quelques outils d'analyse fonctionnel à savoir : Le théorème d'Arzela– Ascoli, le théorème de Banach–Steinhaus et le théorème de point fixe de Banach.

La théorie des semi-groupes est un outil fondamental dans l'étude des équations différentielles semi-linéaires. Pour cela on en s'intéresse dans le deuxième chapitre. Après donner les définitions générales d'un semi-groupe, on en démontrera les principales propriétés. Plusieurs exemples sont donnés. La notion du générateur infinitésimale d'un semi–groupe sera aussi introduite.

Dans le troisième chapitre on s'intéresse à la notion de solution d'une équation différentielle semi-linéaire. En particulier, on distinguera entre trois types de solutions : La solution classique, la solution absolument continue et enfin la solution douce. On présentera aussi quelques résultats d'existence et d'unicité d'un problème de Cauchy semi–linéaire.

Chapitre 1

Rappelle sur quelques notions de base

Dans ce chapitre on fait rappelle à quelques notions de bases. En particulier, on discutera la notion de solution d'une équation différentielle non-linéaire ayant la forme $y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(a) = x$ où $f : I \times \Omega \to X$, I est un sous intervalle de $\mathbb{R}$, $\Omega \subset X$ un ouvert, X un espace de Banach, $a \in I$ et $x \in \Omega$. Quelques résultats d'analyse fonctionnel seront aussi présentés en particulier on rappelle le théorème d'Arzela– Ascoli, le théorème de Banach–Steinhaus et le théorème de point fixe de Banach.

1.1 Rappelle sur les équations différentielles

Soit le problème de Cauchy

$$y'(t) = f(t, y(t)), \, y(a) = x, \tag{1.1}$$

où $f : I \times \Omega \to X$, I est un sous intervalle de $\mathbb{R}$, $\Omega \subset X$ un ouvert, X un espace de Banach, $a \in I$ et $x \in \Omega$.

Définition 1.1.1 *On dit que $y : J \subset I \to X$ est une solution classique du problème de Cauchy* (1.1) [1] *où $J \subset I$ est un sous intervalle de I si :*
- $y(a) = x$.
- *y est différentiable en tout point $t \in J$ satisfaisant l'équation $y'(t) = f(t, y(t))$ pour tout $t \in J$.*

1. Dans le cas où f est continue, les auteurs, souvent, utilise l'appellation *solution de classe C^1*

Remarque 1.1.1 — *Si $J = I$ on dit que la solution y est globale, sinon elle est dite locale.*
— *La solution y est dite maximale si elle ne peut pas être prolonger à une autre solution.*

La proposition suivante donne une caractérisation importante d'une solution classique du problème de Cauchy (1.1) dans le cas où f est continue.

Proposition 1.1.1 *Supposons que la fonction f est continue sur $I \times \Omega$ et $X = \mathbb{R}^n$. La fonction $y : J \to \mathbb{R}^n$ est une solution classique du problème de Cauchy* (1.1) *si et seulement si y est continue sur J et*

$$y(t) = x + \int_a^t f(s, y(s))ds,$$

pour tout $t \in J$.

Preuve 1.1.1 *1. On va montrer que si y est une solution classique du problème de Cauchy* (1.1)*, alors elle est continue sur J et*

$$y(t) = x + \int_a^t f(s, y(s))ds,$$

pour tout $t \in J$. En effet, on sait que f est continue sur $I \times \Omega$. En plus, la solution y satisfait l'équation

$$y'(t) = f(t, y(t)),$$

pour tout $t \in J$. Par conséquent, elle est aussi continue sur J. Ainsi la fonction

$$s \mapsto f(s, y(s))$$

est continue sur J. En intégrant les deux membres de l'équation ci-dessus entre a et t, on obtient donc

$$\begin{aligned}
\int_a^t y'(s)ds &= \int_a^t f(s, y(s))ds \\
y(t) - y(a) &= \int_a^t f(s, y(s))ds \\
y(t) &= y(a) + \int_a^t f(s, y(s))ds \\
y(t) &= x + \int_a^t f(s, y(s))ds,
\end{aligned}$$

pour tout $t \in J$.

2. *Réciproquement, on a f est continue sur $I \times \Omega$, si y est continue sur J, alors la fonction*

$$s \mapsto f(s, y(s))$$

est continue sur J. et comme

$$y(t) = x + \int_a^t f(s, y(s))ds,$$

pour tout $t \in J$ alors la fonction y est dérivable sur J. Ce qui donne

$$y'(t) = f(t, y(t)),$$

pour tout $t \in J$. Il est aussi clair que $y(a) = x$. Ce qui achève la preuve.

Remarque 1.1.2 *Dans la proposition ci–dessus, on a établi l'équivalence entre une solution du problème de Cauchy* (1.1) *et l'équation intégrale*

$$y(t) = x + \int_a^t f(s, y(s))ds, \tag{1.2}$$

pour tout $t \in J$. Il est important à noter que C. Carathéodory a défini une solution du problème de Cauchy (1.1) *au sens large. Plus précisément, une fonction $y : J \subset I \to \mathbb{R}^n$ est dite une solution au sens de Carathéodory du problème de Cauchy* (1.1) *si $y(a) = x$ et $y'(t) = f(t, y(t))$ p.p*[2] *sur J. L'équivalence entre une solution au sens de Carathéodory et l'équation intégrale* (1.2) *n'est pas toujours vrai. Dans la suite on va introduire une classe de fonction qui va résoudre ce problème.*

Définition 1.1.2 *Soit X un espace de Banach. On dit que $y : J \longrightarrow X$ est absolument continue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition finie $([a_i, b_i])_{i=1}^{i=n} \subset J$ vérifiant $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$, on aura alors $\sum_{i=1}^n \|f(b_i) - f(a_i)\| < \epsilon$.*

Il est claire que toute fonction absolument continue est continue. On peut aussi démontrer que toute fonction Lipschitzienne est absolument continue. Si $X = \mathbb{R}^n$ alors une fonction $y : J \to X$ est absolument continue si et seulement si elle est p.p différentiable sur J. Pour plus de détail concernant les fonctions absolument continues on réfère à [5]. Si X est de dimension infinie une fonction $y : J \to X$ absolument continue n'est pas forcément p.p différentiable sauf si l'espace X a la propriété de Radon–Nycodym, voir le cinquième chapitre dans [5].

L'existence des solutions classiques du problème de Cauchy (1.1) a fait objet de plusieurs études. Dans le cas où X est de dimension fini, G. Peano a démontré en 1890 un résultat d'existence des solution du problème du Cauchy (1.1), voir [4].

2. p.p est l'abréviation de presque partout

Théorème 1.1.1 *Supposons que $X = \mathbb{R}^n$. Si f est continue sur $I \times \Omega$ et $\Omega \subset X$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ alors pour tout $(a, x) \in I \times X$, le problème de Cauchy* (1.1) *admet au moins une solution classique $y : J \subset I \to X$ où J est un sous intervalle de I contenant a.*

On note ici que le théorème de G. Peano ne garantit pas l'unicité des solutions. En fait, en 1890, G. Peano a donné un exemple montrant que la continuité de f n'est pas suffisante pour garantir l'unicité de solution.

Exemple 1.1.1 *On prend dans le problème de Cauchy* (1.1) $f(t, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$, *$I = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}$, $a = 0$ et $x = 0$. Il y a deux solutions classiques : La solution identiquement nulle et la fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(t) = t^3$.*

Pour assurer l'unicité du solution, des conditions supplémentaires sur la fonction f seront imposées. On fait rappelle aux notions suivantes.

La fonction $f : I \times \Omega \longrightarrow X$ est dite lipschitzienne, s'il existe une constante $k > 0$ telle que pour tout (t, y), $(\bar{t}, \bar{y}) \in I \times \Omega$, on a

$$\|f(t, y) - f(\bar{t}, \bar{y})\| \leq k(|t - \bar{t}| + \|y - \bar{y}\|).$$

La fonction f est dite contractante si f est lipschitzienne de constante $k < 1$.

La fonction $f : I \times \Omega \longrightarrow X$ est dite lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, s'il existe une constante $k > 0$ telle que pour tout (t, y), $(t, \bar{y}) \in I \times \Omega$, on a

$$\|f(t, y) - f(t, \bar{y})\| \leq k\|y - \bar{y}\|.$$

La fonction $f : I \times \Omega \longrightarrow X$ est dite localement lipschitzienne si pour tout $(a, x) \in I \times \Omega$, ils existent $b > a$, $r > 0$ et une constante $k = k(a, x) > 0$ telle que $[a, b] \times B(x, r) \subset I \times \Omega$ et telle que

$$\|f(t, y) - f(\bar{t}, \bar{y})\| \leq k(|t - \bar{t}| + \|y - \bar{y}\|),$$

pour tout (t, y), $(\bar{t}, \bar{y}) \in [a, b] \times B(x, r)$.

La fonction $f : I \times \Omega \longrightarrow X$ est dite localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, si pour tout point $(a, x) \in I \times \Omega$, ils existent $b > a$, $r > 0$ et une constante $k = k(a, x) > 0$ telle que $[a, b] \times B(x, r) \subset U$ et telle que

$$\|f(t, y) - f(t, \bar{y})\| \leq k\|y - \bar{y}\|,$$

pour tout (t, y), $(t, \bar{y}) \in [a, b] \times B(x, r)$.

Le théorème suivant portant le nom de Cauchy–Lipshitz donnera des conditions suffisantes pour assurer l'unicité du solution du problème de Cauchy (1.1).

Théorème 1.1.2 *Supposons que* $X = \mathbb{R}^n$. *Si* $f : I \times \Omega \to X$ *est continue sur* $I \times \Omega$ *et localement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Alors pour tout* $(a, x) \in I \times \Omega$, *le problème de Cauchy* (1.1) *admet une unique solution maximale définie sur un intervalle* $J \subset I$ *contenant* a.

Pour la preuve, voire le deuxième chapitre dans [2].

Dans la dimension infinie le théorème de G.Peano n'est demeure pas vrai. Deux contres exemples ont été établis par Dieudonne en 1950, voir [7].

On finit cette section par un critère d'intégrabilité concernant les fonctions $f : [a, b] \to X$ où X est un espace de Banach. Il est bien connu que si X est de dimension fini alors on peut donner un sens à l'intégrale $\int_{[a,b]} f(x) d\lambda x$, soit au sens de Riemann ou bien plus généralement au sens de Lebesgue. Dans le cas où X est de dimension infini on définit l'intégrale au sens de Bochner. La construction de l'intégrale de Bochner se fait par définir l'intégrale des fonctions étagées puis mesurables positives et enfin mesurables quelconques. Le théorème suivant qui a été démontré par Bochner en 1938 caractérise les fonctions intégrable au sens de Bochner.

Théorème 1.1.3 *Soit* $f : [a, b] \to X$ *où* X *est un espace de Banach. On dit que* f *est intégrable au sens de Bochner si et seulement si* f *est mesurable et* $\int_{[a,b]} \|f(x)\| dx < +\infty$.

1.2 Rappelle sur quelques théorèmes d'analyse fonctionnel

Soit X un espace topologique séparé. On rappelle qu'une partie $A \subset X$ est dite compacte si de tout recouvrement d'ouvert de A on peut en extraire un sous recouvrement fini. Cela veut dire que si $(\Omega_i)_{i \in I} \subset X$ est une famille de parties ouvertes satisfaisant

$$A \subset \cup_{i \in I} \Omega_i,$$

alors il existe un sous ensemble $J \subset I$ fini tel que

$$A \subset \cup_{i \in J} \Omega_i.$$

Cette définition est équivalente à la suivante : Une partie $A \subset X$ est dite compacte si de toute suite d'éléments de A on peut en extraire une sous-suite convergente dans A.

Si X est de dimension finie alors une partie $A \subset X$ est compacte si elle est fermée et bornée. Ce résultat n'est pas vrai si X es de dimension infinie. On rappelle le théorème de Riesz, la boule unité de X est compacte[3] si et seulement si X est de dimension fini.

3. On la note désormais par $\mathbb{B}$.

Si la partie A est compacte alors elle est fermée. La partie A est dite *relativement compact* si l'adhérence de A est compact. Par conséquent, les parties relativement compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les parties bornées. Pour plus de détail, on réfère au livre [6].

Dans la suite on désigne par $C([a,b];\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{F} \subset C([a,b],\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.2.1 *On dit que $\mathcal{F}$ est equicontinue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$, tel que pour tout s et $t \in [a,b]$ vérifiant $|s-t| < \delta$ on aura $|f(t) - f(s)| \leq \epsilon$, pour tout $f \in \mathcal{F}$.*

Le théorème suivant, portant le nom du théorème d'Arzela–Ascoli, caractérise la compacité d'un sous ensemble $\mathcal{F}$ de $C([a,b],\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1.2.1 *L'ensemble $\mathcal{F} \subset C([a,b],\mathbb{R}^n)$ est relativement compact si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *$\mathcal{F}$ est equicontinues.*
2. *pour tout $t \in [a,b]$ l'ensemble $\{f(t),\, f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact dans $\mathbb{R}^n$.*

Soit X un espace de Banach dont la norme sera notée par $\|\cdot\|$ [4] et $A : D(A) \subseteq X \to X$ un opérateur linéaire défini sur $D(A) \subset X$ [5]. On rappelle que $A : D(A) \subseteq X \to X$ est dit linéaire si pour tout $x, y \in D(A)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$A(x+y) = A(x) + A(y),$$

et

$$A(\alpha x) = \alpha A(x).$$

L'opérateur linéaire A est dit continu (borné) s'il existe $c > 0$, tel que

$$\|Ax\| \leq c\|x\|, \text{ pour tout } x \in D(A).$$

L'opérateur A est dit fermé si son graphe de est fermé, i.e., L'ensemble $\{x, Ax;\, x \in D(A)\}$ est fermé dans $X \times X$.

On note par $\mathcal{L}(X)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus sur X, i.e.,

$$\mathcal{L}(X) = \{A : X \longrightarrow X\ ;\ A \text{ linéaire et continu}\}.$$

4. La norme d'un espace de Banach sera toujours notée par $\|\cdot\|$. Pour éviter l'ambiguïté, dans certaines situations on indexe la norme par le nom de l'espace du Banach où elle est définie, e.g., $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$.
5. Dans ce cas on dit que le domaine de l'opérateur A est $D(A)$.

Si $A \in \mathcal{L}(X)$, alors on a :

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|.$$

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ est dit compact si $T(\mathbb{B})$ est relativement compact où $\mathbb{B}$ est la boule unité de X.

On termine ce chapitre par un rappel de deux théorèmes qui seront d'un grand intérêt dans la suite, leurs preuves est très connues dans la littérature. Le premier théorème est celui de point fixe de Banach.

Théorème 1.2.2 *Soient X un espace de Banach, et $A : X \longrightarrow X$ un opérateur contractant, alors A admet un unique point fixe. i.e,*

$$\textit{il existe unique } y \in X \textit{ tel que } Ay = y.$$

Le deuxième théorème est celui de Banach–Steinhaus.

Théorème 1.2.3 *Soit X un espace de Banach et soit $(A_i)_{i\in I}$ [6] une famille d'élément de $\mathcal{L}(X)$. telle que*

$$\sup_{i\in I} \|A_i x\| < +\infty,$$

pour tout $x \in X$. Alors

$$\sup_{i\in I} \|A_i\| < +\infty,$$

i.e., il existe une constante $c > 0$ telle que : $\|A_i(x)\| \leq c\|x\|$ pour tout $x \in X$ et pour tout $i \in I$.

6. On peut aussi considérer une famille d'opérateurs $(A_i)_{i\in I}$ où $A_i : X \to Y$, X un espace de Banach et Y un espace vectoriel normé.

Chapitre 2

Sur la théorie des semi-groupes

La théorie des semi-groupes est un outil fondamental dans l'étude des équations différentielles semi-linéaires. Dans ce chapitre on s'intéresse essentiellement à deux types de semi–groupes : les semi–groupes uniformément continus et les C_0 semi–groupes. La notion de générateur infinitésimal d'un semi-groupe sera aussi étudiée.

Pour bien comprendre l'intérêt d'un semi–groupe dans les équations différentielle, on commencera par un exemple très simple mais aussi fondamental. Soit le problème de Cauchy

$$y'(t) = ay(t), \, y(0) = x, \tag{2.1}$$

où $a \in \mathbb{R}^\star$ et $x \in \mathbb{R}$. Une solution classique du problème de Cauchy (2.1) est donnée par :

$$y(t) = e^{at}x,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si on définit une application $S(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui associe à chaque $x \in \mathbb{R}$, l'élément $S(t)x = e^{at}x$, alors $S(t)$ aura les propriétés suivante :

— $S(0) = Id_{\mathbb{R}}$, où $Id_{\mathbb{R}}$ est l'application identité de $\mathbb{R}$, i.e. $Id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Id_{\mathbb{R}}(x) = x$.

— $S(t+s) = S(t)S(s)$, pour tout $t, s \in \mathbb{R}^+$.

Cette caractérisation demeure vraie si on considère le cas où l'EDO (2.1) est sous la forme :

$$y'(t) = Ay(t), \, y(0) = x$$

et A est une matrice carrée. La famille $S(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$ est appelée semi–groupe.

Dans ce chapitre on donnera un sens à la notion de semi–groupe dans le cas où $A : D(A) \subseteq X \to X$ est un opérateur linéaire borné et X est un espace de Banach.

2.1 Semi-groupes d'opérateurs linéaires

Soit $S(t) : X \longrightarrow X$, $t \geq 0$ une famille d'opérateurs linéaires continus définis sur un espace de Banach X.

2.1.1 Semi-groupe uniformément continu

Définition 2.1.1 *La famille d'opérateurs linéaires $S(t) : X \longrightarrow X$, $t \geq 0$ est dit semi-groupe uniformément continu si :*

1. $S(0) = I_X$.
2. $S(s+t) = S(s)S(t); \qquad \forall t, s \geq 0.$
3. $\lim\limits_{t \to 0^+} \|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$

Exemple 2.1.1 *Soient $X = \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On défini la famille d'opérateurs linéaires $S(t) : X \longrightarrow X$ par :*

$$S(t)x = e^{at}x,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. On vérifie aisement que la famille $S(t) : X \longrightarrow X$, $t \geq 0$ est un semi–groupe uniformément continu.

1. $S(0) = I_X$. *En effet, on a pour tout $x \in X$*

$$S(0)x = e^{a(0)}x = x.$$

2. $S(t+s) = S(t)S(s)$, *pour tout s, $t \in \mathbb{R}^+$. Cela est vrai puisque on a pour tout $x \in X$ et pour tout s, $t \in \mathbb{R}^+$*

$$e^{a(t+s)}x = e^{at}e^{as}x = e^{at}\left(e^{as}x\right)$$

3. $\lim\limits_{t \to 0^+} \|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R})} = 0$. *En effet,*

$$\begin{aligned}
\|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R})} &= \sup_{|x| \leq 1} |\left(S(t) - I\right)x| \\
&\leq \sup_{|x| \leq 1} |e^{at}x - x| \\
&\leq \sup_{|x| \leq 1} |\left(e^{at} - 1\right)x| \\
&\leq \sup_{|x| \leq 1} |e^{at} - 1||x| \\
&\leq \sup_{|x| \leq 1} |e^{at} - 1| \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

On conclut que la famille $S(t) : X \to X$, $t \in \mathbb{R}^+$ est un semi–groupe uniformément continu.

2.1.2 C_0 semi-groupe

On s'intéresse maintenant à une classe plus générale que celle des semi-groupes uniformément continus, à savoir la classe des C_0 semi–groupes.

Définition 2.1.2 *Une famille d'opérateurs linéaires continus $S(t) : X \longrightarrow X$, $t \geq 0$, est dit C_0 semi-groupe, si elle vérifie les propriétées suivantes :*

1. $S(0) = I_X$.
2. $S(s+t) = S(s)S(t) \qquad \forall t, s \geq 0.$
3. *Pour tout $x \in X$, on a*

$$\lim_{t \to 0^+} S(t)x = x \quad i.e, \quad \lim_{t \to 0^+} \|S(t)x - x\| = 0.$$

Exemple 2.1.2 *Soit X l'espace de Banach définit par :*

$$X = C_{ub}(\mathbb{R}_+) = \{f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ est continue et uniformément borné}\}.$$

Pour tout $t > 0$, on définit l'opérateur $S(t) : X \longrightarrow X$ par :

$$(S(t)f)(s) = f(t+s),$$

pour tout $t, s \in \mathbb{R}_+$. On démontre que la famille $S(t) : X \longrightarrow X$, $t \geq 0$ est un C_0 semi–groupe.

1. $S(0) = I_X$. *En effet, on a*

$$(S(0)f)(s) = f(0+s) = f(s),$$

pour tout $f \in X$ et pour tout $s \in \mathbb{R}^+$. Ce qui veut dire

$$S(0) = I_X.$$

2. $S(s+t) = S(s)S(t)$, *pour tout $t, s \geq 0$. On fixe $f \in X$ et $s, t \in \mathbb{R}^+$. Alors :*

$$(S(t+s)f)(k) = f(t+s+k), \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{R}_+.$$

D'autre part, si on pose

$$g = S(s)f,$$

on obtient donc

$$\begin{aligned} S(t)[S(s)f](k) &= S(t)(g)(k) \\ &= g(t+k) \\ &= S(s)f(t+k) \\ &= f(s+t+k). \end{aligned}$$

3. *Il reste à démontrer que,* $\lim_{t\to 0^+} \|S(t)f - f\|_X = 0$*, pour tout* $f \in X$*. On fixe* $f \in X$*. Ainsi*

$$\begin{aligned} \|S(t)f - f\|_X &= \sup_{s\in\mathbb{R}} |\,[S(t)f(s)] - f(s)| \\ &= \sup_{s\in\mathbb{R}} |f(t+s) - f(s)| \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0. \end{aligned}$$

Donc $S(t) : X \longrightarrow X$*,* $t \geq 0$*, est un* C_0 *semi-groupe.*

Remarque 2.1.1 *Il est claire que tout semi-groupe uniformément continu est un* C_0 *semi-groupe. En effet, soit* $S(t) : X \longrightarrow X$*,* $t \geq 0$ *un semi-groupe uniformément continu. Pour montrer que* $S(t) : X \longrightarrow X$ *est un* C_0 *semi-groupe, il suffit de montrer que*

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t)x - x\| = 0.$$

Bien evidemment, on a :

$$\|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = sup_{\|x\|\leq 1}\|S(t)x - x\| \geq \|S(t)x - x\|,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ *et pour tout* $x \in X$*. Tenant en compte que* $S(t) : X \longrightarrow X$*,* $t \geq 0$ *est un semi-groupe uniformément continu, il s'ensuit donc que*

$$\|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = sup_{\|x\|\leq 1}\|S(t)x - x\| \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0.$$

Donc, on déduit que

$$\|S(t)x - x\| \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0.$$

D'où, $S(t) : X \longrightarrow X$ *est un* C_0 *semi-groupe.*

2.2 Générateur infinitésimale d'un C_0 semi-groupe

Définition 2.2.1 *On appel génerateur infinitésimale du* C_0 *semi–groupe* $S(t) : X \longrightarrow X$*,* $t \geq 0$*, l'opérateur* $A : D(A) \subseteq X \to X$ *défini par son domaine :*

$$D(A) = \{x \in X\ ;\ \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \quad existe\},$$

et si $x \in D(A)$*, alors*

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}.$$

On peut également dire que A *génère le* C_0 *semi-groupe* $S(t) : X \longrightarrow X$*,* $t \geq 0$*.*

Remarque 2.2.1 — *Il est claire que $D(A) \neq \emptyset$. En effet, $0 \in D(A)$ puisque*

$$A0 = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)0 - 0}{t} = 0.$$

— *Le génerateur infinitésimale est linéaire, car pour tout $x, y \in D(A)$, et pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on a*

$$\begin{aligned} A(x+y) &= \lim_{t\to 0} \frac{S(t)(x+y) - (x+y)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{S(t)y - y}{t} \\ &= Ax + Ay. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} A(\alpha x) &= \lim_{t\to 0} \frac{S(t)(\alpha x) - (\alpha x)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\alpha S(t)(x) - (\alpha x)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \alpha \frac{S(t)(x) - (x)}{t} \\ &= \alpha Ax. \end{aligned}$$

— *Le générateur infinétisimal d'un C_0-semi groupe n'est pas forcement borné.*

Exemple 2.2.1 *Soit $X = \mathbb{R}^n$. On définit l'opérateur $S(t) : X \longrightarrow X$ par :*

$$S(t)x = e^{tB}x,$$

pour tout $x \in X$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, où $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (matrice carrée à valeurs dans $\mathbb{R}$). Le génerateur infinitésimale du C_0 semi–groupe $S(t) : X \longrightarrow X$ est donné par

$$\begin{aligned} Ax &= \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{tB}x - x}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n B^n}{n!} x - x}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n B^n x}{n!} \right] \\ &= \lim_{t\to 0^+} \left[Bx + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^{n-1} B^n x}{n!} \right] \\ &= Bx. \end{aligned}$$

Donc
$$Ax = Bx.$$

Exemple 2.2.2 *Soit $X = C_{ub}(\mathbb{R}_+)$, on définit l'opérateur $S(t) : X \longrightarrow X$ par :*

$$(S(t)f) = f(t+s),$$

pour tout $f \in X$, pour tout $s, t \in \mathbb{R}_+$. Le générateur infinitésimale du C_0 semi–groupe $S(t) : X \longrightarrow X$ est défini par :

$$\begin{aligned} Af &= \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)f - f}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t+s) - f(s)}{t} \\ &= f'(s). \end{aligned}$$

Théorème 2.2.1 *Soit l'opérateur linéaire $A : D(A) \subseteq X \to X$.*
A est le générateur d'un semi groupe uniformément continue si et seulement si l'adhérence de $D(A)$ est égale à X et $A \in \mathcal{L}(X)$.

Preuve 2.2.1 *Pour la preuve on référé à [1, page 38, page 39]).*

2.3 Propriétés des C_0 semi-groupes

Dans ce paragraphe on va établir quelques propriétés importantes des C_0 semi–groupes.

Théorème 2.3.1 *Soit $S(t) : X \longrightarrow X$, $t \geq 0$ un C_0 semi-groupe. Alors il existe $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$, tel que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \quad \textit{pour tout } t \geq 0. \tag{2.2}$$

Preuve 2.3.1 *On va montrer qu'il existe un $\eta > 0$ tel que*

$$\|S(t)\| \leq M \textit{ pour tout } t \in [0, \eta].$$

Par l'absurde, supposons que pour tout $\eta > 0$ et pour tout $M \geq 1$, il existe un $t_{\eta,M} \in [0, \eta]$ tel que
$$\|S(t_{\eta,M})\| > M.$$

On prend $\eta = \frac{1}{n}$ et $M = n$ et on note :

$$t_{\eta,M} = t_n, \;\; \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}^\star.$$

Ainsi,

$$\|S(t_n)\|_{\mathcal{L}(X)} > n, \tag{2.3}$$

où $t_n \in [0, \frac{1}{n}]$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$*. D'autre part on a pour tout* $x \in X$*,*

$$\lim_{n \to +\infty} S(t_n)x = x,$$

Il en résulte que la suite $(S(t_n)x)_n$ *est bornée pour tout* $x \in X$*. En vertu du théorème de Banach steinhaus 1.2.3 on en déduit que la famille d'opérateurs* $(S(t_n)_n)$ *est bornée. Ce qui contredit* (2.3)*. Soit maintenait,* $t > 0$*, tel qu'il existe* $n \in \mathbb{N}^\star$ *et* $\delta \in [0, \eta]$ *tel que* $t = n\eta + \delta$*. On a donc*

$$\begin{aligned}
\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|S(n\eta + \delta)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&= \|S(n\eta)S(\delta)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&= \|S^n(\eta)S(\delta)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq \|S(\eta)\|^n_{\mathcal{L}(X)} \|S(\delta)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq M^n M.
\end{aligned}$$

Mais, on a

$$n = \frac{t - \delta}{\eta} \leq \frac{t}{\eta},$$

donc

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M^{\frac{t}{\eta}} M = e^{\frac{t}{\eta} lnM} M,$$

si on prend $\omega = \frac{1}{\eta} lnM$*, on obtient*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t},$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque 2.3.1
- *Tout* C_0 *semi-groupe vérifiant* (2.2) *est dit de type* (M, ω)*.*
- *Dans le cas où* $(M, \omega) = (1, 0)$ *i.e.*

  $$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1,$$

  pour tout $t \in [0, +\infty)$*, on dit que le* C_0 *semi-groupe est de contraction.*
- *Si* A *le générateur d'un semi groupe uniformément continue, alors* $M = 1$ *et* $\omega = \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$*.*

Exemple 2.3.1 *Soient* $p \geq 1$*,* $n \in \mathbb{N}^\star$*, et*

$$X = l^p = \left\{ (x_n)_n \subset \mathbb{R} \ ; \ \sum_{n=1} |x_n|^p < +\infty \right\},$$

muni de la norme [1]

$$\| (x_n)_n \|_p = \left[\sum_{n=1} |x_n|^p \right]^{\frac{1}{p}},$$

pour tout $(x_n)_n \in l^p$. *Soit* $(a_n)_n$ *une suite des réelle positifs. On vérifie aisément que la famille* $S(t) : X \longrightarrow X,\ t \geq 0$ *où :*

$$(S(t)(x_n)_n)_n = \left(e^{-a_n t} x_n\right)_n,$$

pour tout $(x_n)_n \in l^p$ *est un* C_0 *semi-groupe. On va montrer qu'il est de contraction, i.e.,*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1,$$

pour tout $t \geq 0$. *Autrement dit,*

$$\|S(t)x\|_p \leq \|x\|_p.$$

pour tout $x \in X$. *Soit* $x = (x_n)_n \in X$. *On a alors*

$$\begin{aligned} \|S(t)x\|_p^p &= \|e^{-a_n t} x_n\|_p^p \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} |e^{-a_n t} x_n|^p \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-a_n t} |x_n|^p \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|S(t)x\|_p &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left[|x_n|^p\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \|x\|_p. \end{aligned}$$

D'où

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1.$$

Propriété 2.3.1 *Si* $S(t) : X \longrightarrow X,\ t \geq 0$ *est un* C_0 *semi-groupe, alors la fonction définie par :*

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}_+ \times X &\longrightarrow X \\ (t, x) &\longmapsto S(t)x, \end{aligned}$$

est continue sur $[0, +\infty) \times X$.

1. On pose $\| \cdot \|_{l^p} = \| \cdot \|_p$.

Preuve 2.3.2 *Soient $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times X$ quelconque. On démontre que S est continue au point (t_0, x_0). Ce qui reviens a démontré que*

$$\lim_{(t,x)\to(t_0,x_0)} S(t)x = S(t_0)x_0,$$

ou d'une manière équivalente

$$\lim_{h\to 0^+} S(t_0+h)x = S(t_0)x_0$$

et

$$\lim_{h\to 0^-} S(t_0+h)x = S(t_0)x_0$$

1. *Soit $h > 0$*

$$\begin{array}{rcl} \left\|S(t_0+h)x - S(t_0)x_0\right\|_X & = & \left\|S(t_0)S(h)x - S(t_0)x_0\right\|_X \\ & = & \left\|S(t_0)\left[S(h)x - x_0\right]\right\|_X \\ & \leq & \left\|S(t_0)\right\|_{\mathcal{L}(X)}\left\|S(h)x - x_0\right\|_X \\ & \leq & Me^{\omega t_0}\left\|S(h)x - x + x - x_0\right\|_X \\ & \leq & Me^{\omega t_0}\left\|S(h)x - x\right\|_X\left\|x - x_0\right\|_X. \end{array}$$

En faisant tendre h vers 0 et x vers x_0, on obtient

$$\lim_{h\to 0^+} \|S(h)x - x\|_X = 0,$$

et

$$\lim_{x\to x_0} \|x - x_0\| = 0.$$

Donc,

$$\lim_{h\to o^+} \|S(t_0+h)x - S(t_0)x_0\|_X = 0.$$

2. *Si $h < 0$*

$$\begin{array}{rcl} \left\|S(t_0-h)x - S(t_0)x_0\right\|_X & = & \left\|S(t_0)S(-h)x - S(t_0)x_0\right\|_X \\ & = & \left\|S(t_0)\left[S(-h)x - x_0\right]\right\|_X \\ & \leq & \left\|S(t_0)\right\|_{\mathcal{L}(X)}\left\|S(-h)x - x_0\right\|_X \\ & \leq & Me^{\omega t_0}\left\|S(-h)x - x + x - x_0\right\|_X \\ & \leq & Me^{\omega t_0}\left[\left\|S(-h)x - x\right\|_X\left\|x - x_0\right\|_X\right]. \end{array}$$

En faisant tendre h vers 0 *et x vers* x_0*, on obtient*

$$\lim_{h\to o^+} \|S(t_0-h)x - S(t_0)x_0\|_X = 0.$$

Puisque (t_0, x_0) *est quelconque on déduit que la fonction S est continue sur* $[0,+\infty) \times X$*.*

Propriété 2.3.2 *Soit* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe* $S(t) : X \longrightarrow X$*,* $t \geq 0$*. Pour tout* $x \in X$ *et pour tout* $t \geq 0$ *on a*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)xds = S(t)x.$$

Preuve 2.3.3 *Soit* $t \in \mathbb{R}_+$ *et soit* $x \in X$*. Il s'agit de démontrer que*

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} \left\| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)xds - S(t)x \right\|_X = 0.$$

On a pour tout $h > 0$*,*

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)xds - S(t)x \right\|_X &= \left\| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)xds - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t)xds \right\|_X \\
&= \left\| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} [S(s)x - S(t)x]\, ds \right\|_X \\
&\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \sup_{t\leq s\leq t+h} \|S(s)x - S(t)x\|_X ds \\
&\leq \sup_{t\leq s\leq t+h} \|S(s)x - S(t)x\|_X \cdot \frac{1}{h}\int_t^{t+h} ds \\
&\leq \|S(t+h)x - S(t)x\|_X.
\end{aligned}$$

En passant à la limite quand h tend vers 0*, on obtient*

$$\lim_{h\to 0^+} \left\| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)x\mathrm{ds} - S(t)x \right\|_X = 0,$$

car la fonction $(t,x) \longmapsto S(t)x$ *est continue. D'où le résultat.*

Propriété 2.3.3 *Pour tout $x \in X$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a*

$$\int_0^t S(s)xds \in D(A),$$

et

$$A\left(\int_0^t S(s)xds\right) = S(t)x - x.$$

Preuve 2.3.4 *Soient $x \in X$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Il s'agit de montrer que*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)\left[\int_0^t S(s)xds\right] - \int_0^t S(s)xds}{h} \text{ existe et elle vaut } S(t)x - x.$$

On a

$$\frac{S(h)\left[\int_0^t S(s)xds\right] - \int_0^t S(s)xds}{h} = \frac{\int_0^t S(s+h)xds - \int_0^t S(s)xds}{h}.$$

En faisant le changement de variable $\tau = s + h$, on obtient donc

$$\begin{aligned}\frac{\int_h^{t+h} S(\tau)xd\tau - \int_0^t S(s)xds}{h} &= \frac{\int_h^t S(\tau)xd\tau + \int_t^{t+h} S(\tau)xds - \int_0^t S(s)xd\tau}{h} \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)xd\tau - \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)xd\tau.\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand h tend vers 0, on trouve

$$A\left(\int_0^t S(s)xds\right) = S(t)x - x,$$

et comme

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)\left[\int_0^t S(s)xds\right] - \int_0^t S(s)xds}{h} \text{ existe },$$

donc

$$\int_0^t S(s)xds \in D(A).$$

Propriété 2.3.4 *Pour tout $x \in D(A)$ et $t \geq 0$, on a*

$$S(t)x \in D(A),$$

et la fonction $t \longmapsto S(t)x$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et elle vérifie la relation suivante :

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

Preuve 2.3.5 *Soient $x \in D(A)$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $h > 0$ on a*

$$\begin{aligned} \frac{S(h)\,[S(t)x] - S(t)x}{h} - S(t)Ax &= \frac{S(t)\,[S(h)x - x]}{h} - S(t)Ax \\ &= S(t)\left[\frac{S(h)x - x}{h}\right] - S(t)Ax. \end{aligned}$$

En faisant tendre h vers 0, on obtient

$$\lim_{h \longrightarrow 0^+} \left\| S(t)\left[\frac{S(h)x - x}{h}\right] - S(t)Ax \right\|_X = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{d^+}{dt} S(t)x - S(t)Ax = 0$$

De la même manière, on montre que :

$$\frac{d^-}{dt} S(t)x - S(t)Ax = 0.$$

Donc, on conclut que

$$\frac{d}{dt} S(t)x - S(t)Ax = 0.$$

Propriété 2.3.5 *Pour tout $x \in D(A)$ et pour tout $0 \leq s \leq t < +\infty$, on a :*

$$\int_s^t AS(\tau)x d\tau = \int_s^t S(\tau)Ax d\tau = S(t)x - S(s)x.$$

Preuve 2.3.6 *Soit $x \in D(A)$ et soit $0 \leq s \leq t < +\infty$. D'après la propriété 2.3.4 on a*

$$AS(\tau)x = \frac{d}{dt} S(\tau)x.$$

En intégrant les deux membre de l'égalité ci–dessus entre s et t, on obtient

$$\begin{aligned} \int_s^t AS(\tau)x d\tau &= \int_s^t \left[\frac{d}{d\tau} S(\tau)x\right] d\tau \\ &= \Big[S(\tau)x\Big]_s^t \\ &= S(t)x - S(s). \end{aligned}$$

Théorème 2.3.2 *Si $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ st le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $S(t) : X \longrightarrow X$, $t \geq 0$, alors $D(A)$ est dense dans X et A est fermé.*

Preuve 2.3.7 1. *Pour démontrer que $D(A)$ est dense dans X on démontre que pour tout $x \in X$, il existe une suite $(x_n)_n \subset D(A)$ tel que*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x.$$

Soit $(x_n)_n$ une suite, tel que

$$x_n = n \int_0^{\frac{1}{n}} S(s)xds,$$

cette suite converge vers x quand n tend vers l'infini (d'apés la propriété 2.3.2*). En utilisant la propriété* 2.3.3*, on obtient donc*

$$\int_0^{\frac{1}{n}} S(s)xds \in D(A),$$

ce qui donne

$$n \int_0^{\frac{1}{n}} S(s)xds \in D(A),$$

i.e

$$x_n \in D(A),$$

car $D(A)$ est un sous espace vectoriel de X. Il en résulte que $D(A)$ est dense dans X, i.e $\overline{D(A)} = X$.

2. *Pour montrer que l'opérateur A est fermé on démontre que son graphe est fermé, i.e, si $x_n \in D(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ telle que*

$$\begin{cases} x_n \longrightarrow x, \\ \\ Ax_n \longrightarrow y. \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{cases} x \in D(A), \\ et \\ Ax = y. \end{cases}$$

Soit $(x_n) \subset D(A)$. D'après la propriété 2.3.5 *on a*

$$\int_s^t S(\tau)Ax_n d\tau = S(t)x_n - S(s)x_n,$$

pour $s = 0$

$$\int_0^t S(\tau)Ax_n d\tau = S(t)x_n - S(0)x_n.$$

Passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient

$$\int_0^t S(\tau)y d\tau = S(t)x - x.$$

Devisant les deux membres de l'égalité ci–dessus par t, on aboutit à

$$\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)y d\tau = \frac{1}{t}\left(S(t)x - x\right).$$

Finalement par passage à la limite on obtient

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)d\tau = lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}S(t)x - x.$$

Donc

$$\begin{aligned} S(0)y &= Ax \\ y &= Ax, \end{aligned}$$

et comme

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} = y,$$

on déduit que

$$x \in D(A).$$

Chapitre 3

Notions de solutions pour EDO semi-linéaire

Dans le dernier chapitre on s'intéresse à la notion de solution d'une EDO semi-linéaire, ayant la forme $y'(t) = Ay(t) + f(t)$, $y(a) = x$ où $A : D(A) \subset X \to X$ est un opérateur linéaire générant un C_0 semi-groupe, X est un espace de Banach, $f \in L^1(a, b; X)$ et $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et $x \in X$. On commence tout d'abord par donner les différentes types de solutions. En particulier, on étudiera la solution classique, la solution absolument continue et enfin la solution douce [1]. La relation entre les trois types de solutions sera aussi établie. Finalement, on démontrera un résultat d'existence et unicité des solutions du problème de Cauchy $y'(t) = Ay(t) + f(t)$, $y(a) = x$.

3.1 Notions de solution d'un problème semi-linéaire

Soit le problème de Cauchy

$$y'(t) = Ay(t) + f(t),\ y(a) = x \tag{3.1}$$

où $A : D(A) \subset X \to X$ est un opérateur linéaire générant un C_0 semi-groupe, X est un espace de Banach, $f \in L^1(a, b; X)$ et $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et $x \in X$. On commence par étudier les différentes types de solutions du problème de Cauchy (3.1).

1. En Anglais, on l'appelle *mild solution*

3.1.1 Solution classique et solution absolument continue

Définition 3.1.1 *On dit que* $y : [a, b] \longrightarrow X$ *est une solution classique*[2] *du problème de Cauchy* (3.1)*, si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *La fonction* y *est continue sur* $[a, b]$ *et elle est de classe* C^1 *sur* $(a, b]$ *.*
2. $y(t) \in D(A), \ \text{pour tout } t \in (a, b]$.
3. y *est différentiable sur* $[a, b]$ *et on a*

$$y'(t) = Ay(t) + f(t) \text{ et } y(a) = x,$$

pour tout $t \in [a, b]$.

Définition 3.1.2 *On dit que* $y : [a, b] \longrightarrow X$ *est une solution absolument continue du problème* (3.1) *si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *La fonction* y *est absolument continue sur* $[a, b]$ *et* $y' \in L^1(a, b; X)$.
2. $y(t) \in D(A)$ *p.p pour* $t \in (a, b)$.
3. y *est différentiable sur* $[a, b]$ *p.p et on a*

$$y'(t) = Ay(t) + f(t) \text{ et } y(a) = x.$$

Remarque 3.1.1 *Il est claire que si la fonction* y *est une solution classique du problème de Cauchy* (3.1) *alors elle est aussi une solution absolument continue du problème de Cauchy* (3.1).

Le théorème ci-dessous nous donne la forme générale d'une solution absolument continue du problème de Cauchy (3.1).

Théorème 3.1.1 *Si* $y : [a, b] \longrightarrow X$ *est une solution absolument continue du problème de Cauchy* (3.1) *alors :*

$$y(t) = S(t-a)x + \int_a^t S(t-s)f(s)ds,$$

pour tout $t \in [a, b]$ *;*

Preuve 3.1.1 *Soit* $y : [a, b] \longrightarrow X$ *une solution absolument continue du problème de Cauchy* (3.1). *On fixe un réel* $t \in (a, b]$ *et on définit la fonction* $g : [a, t] \to X$ *par :*

$$g(s) = S(t-s)y(s),$$

2. Dés fois on l'appelle solution de classe C^1

pour tout $s \in [a,t)$ et pour tout $h > 0$ satisfaisant $s+h \in [a,t]$ on aura

$$
\begin{aligned}
\frac{g(s+h)-g(s)}{h} &= \frac{S(t-s-h)y(s+h)-S(t-s)y(s)}{h} \\
&= S(t-s-h)\left[\frac{y(s+h)-S(h)y(s)}{h}\right] \\
&= S(t-s-h)\left[\frac{y(s+h)+y(s)-y(s)-S(h)y(s)}{h}\right] \\
&= S(t-s-h)\left[\frac{y(s+h)-y(s)}{h}-\frac{S(h)y(s)-y(s)}{h}\right] \\
&= S(t-s-h)\left[\frac{y(s+h)-y(s)}{h}\right]-S(t-s-h)\left[\frac{S(h)y(s)-y(s)}{h}\right].
\end{aligned}
$$

On fait tendre h vers 0 et tenant en compte que la fonction y et différentiable p.p sur $[a,t]$, on déduit que :

$$
\begin{aligned}
g'(s) &= S(t-s)y'(s)-S(t-s)Ay(s) \\
&= S(t-s)[Ay(s)+f(s)]-AS(t-s)y(s) \\
&= AS(t-s)y(s)+S(t-s)f(s)-AS(t-s)y(s),
\end{aligned}
$$

d'où

$$
g'(s) = S(t-s)f(s), \tag{3.2}
$$

pour $s \in (a,t)$ p.p. Sachant que $f \in L^1(a,b;X)$, alors la fonction

$$
s \mapsto S(t-s)f(s) \in L^1(a,t;X).
$$

On intégrant les deux membre de l'égalité (3.2) *entre a et t on obtient*

$$
\int_a^t g'(s)ds = \int_a^t S(t-s)f(s)ds
$$

Par conséquent

$$
g(t)-g(s) = \int_a^t S(t-s)f(s)ds.
$$

Autrement dit on aura

$$
S(t-t)y(t)-S(t-a)y(a) = \int_a^t S(t-s)f(s)ds.
$$

Ce qui donne

$$
y(t) = S(t-a)y(a)+\int_a^t S(t-s)f(s)ds.
$$

Il est important à noter que si X est de dimension infini, alors le problème de Cauchy (3.1) n'admet pas en générale une solution absolument continue et donc une solution classique. En fait, comme on a déjà expliquer en Chapitre 1, si l'espace X n'est pas réflexif, alors une fonction absolument continue n'est pas forcément presque partout différentiable. En outre, si dans le problème de Cauchy (3.1) la condition initiale x n'appartient pas à $D(A)$ alors (3.1) peut ne pas admettre aucune solution absolument continu. L'exemple suivant illustre une telle situation.

Exemple 3.1.1 *Soit $S(t) : X \longrightarrow X$, $t \geq 0$ un C_0 semi-groupe définit par*

$$[S(t)f](s) = f(t+s), \text{ pour tout } t, s \in \mathbb{R}_+.$$

On considère le problème de Cauchy suivant

$$y'(t) = Ay(t), \, y(0) = x, \tag{3.3}$$

tel que $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ est le générateur infinitésimal du C_0 semi-groupe $S(t) : X \longrightarrow X$, $t \geq 0$. Soit $x \in X$ tel que $x \notin D(A)$. Si y est une solution absolument continue du problème de Cauchy (3.3) *alors elle s'écrit sous la forme suivante :*

$$y(t) = S(t)x,$$

pour tout $t \geq 0$. Mais la fonction y n'est pas différentiable sur $[0, +\infty)$. Par l'absurde, supposons que y est différentiable au point t. Alors

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} \\ &= S(t) \Big[\lim_{h \to 0} \frac{S(h)x - x}{h} \Big]. \end{aligned}$$

Le fait que $x \notin D(A)$, entraine que

$$\lim_{h \to 0} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ n'existe pas,}$$

i.e., y n'est pas différentiable au point t. En conséquence y n'est pas une solution absolument continue du problème de Cauchy (3.3)*.*

3.1.2 Solution douce

Dans ce paragraphe on va introduire la notion de solution douce du problème de Cauchy (3.1), qui en fait généralise la notion de solution absolument continue et donc la notion de solution classique.

Définition 3.1.3 *On appelle solution douce du problème de Cauchy* (3.1)*, la fonction* $y : [a, b] \longrightarrow X$ *définit par :*

$$y(t) = S(t-a)x + \int_a^t S(t-s)f(s)ds,$$

pour tout $t \in [a, b]$.

Remarque 3.1.2 *y est dite aussi C^0-solution du problème de Cauchy* (3.1)*.*

Dans l'exemple suivant, on considère un problème de Cauchy où la solution douce n'est pas absolument continue.

Exemple 3.1.2 *Soit le problème de Cauchy*

$$y'(t) = Ay(t) + f(t), \, y(0) = 0, \tag{3.4}$$

où A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $S(t) : X \longrightarrow X$, $t \geq 0$ tel qu'il existe $\eta \in X$, pour tout $t \in [0, T]$;

$$S(t)\eta \notin D(A),$$

et la fonction f est définie par $f(s) = S(s)\eta$, pour tout $t \in [0, T]$. Al ors la solution douce du problème de Cauchy (3.4) *est donnée par :*

$$\begin{aligned} y(t) &= S(t)0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds \\ &= \int_0^t S(t-s)S(s)\eta ds \\ &= tS(t)\eta. \end{aligned}$$

On va maintenant montrer que la solution douce n'est pas absolument continue. En effet, on a

$$S(t)\eta \notin D(A),$$

pour tout $t \in [0, T]$. Par suite

$$tS(t)\eta \notin D(A),$$

pour tout $t \in [0, T]$ et comme

$$y(t) = tS(t)\eta,$$

pour tout $t \in [0, T]$, on en déduit que

$$y(t) \notin D(A),$$

pour tout $t \in [0, T]$. D'où y n'est pas une solution absolument continue du problème de Cauchy (3.4)*.*

3.2 Existence et unicité de la solution

On s'intéresse maintenait à l'existence et l'unicité de la solution douce du problème de Cauchy semi-linéaire :

$$y'(t) = Ay(t) + f(t, y(t)),\ y(a) = x, \tag{3.5}$$

où $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ est le générateur infinitésimale d'un C_0 semi–groupe $S(t) : X \longrightarrow X$, $t \geq 0$, $f : U \longrightarrow X$ une fonction continue, U un ouvert non vide de $\mathbb{R} \times X$ et $(a, x) \in U$.
On note ici, qu'avec analogie avec le problème de Cauchy

$$y'(t) = Ay(t) + g(t),$$

où g est une fonction intégrable sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$, la solution douce $y : [a, b] \to X$ du problème de Cauchy (3.5), est donnée par

$$y(t) = S(t-a)x + \int_a^t S(t-s)f(s, y(s))ds$$

pour tout $t \in [a, b]$. Le théorème suivant donne des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité d'une solution douce du problème de Cauchy (3.5).

Théorème 3.2.1 *Si $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ génère un C_0 semi–groupe $S(t) : X \longrightarrow X$, $t \geq 0$, $f : [a, b] \times X \longrightarrow X$ est continue et Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, i.e., il existe une constante $k > 0$ telle que :*

$$\|f(t, y) - f(t, \bar{y})\| \leq k\|y - \bar{y}\|,$$

pour tout (t, y), $(t, \bar{y}) \in [a, b] \times B(x, r)$. Alors, le problème de Cauchy (3.5) *admet une unique solution douce définie sur $[a, b]$.*

Pour montrer le théorème ci–dessus, on est besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2.1 *Si $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ génère un C_0 semi-groupe de contraction $S(t) : X \longrightarrow X$, $t \geq 0$ et $f : [a, b] \times X \longrightarrow X$ est continue, bornée et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable alors, pour tout $x \in X$ le problème* (3.4) *admet une unique solution douce définit sur $[a, b]$.*

Preuve 3.2.1 *On va transformer le problème de Cauchy* (3.4) *à un problème de point fixe et ce pour appliquer le théorème de point fixe de Banach. Notons $C([a, b]; X)$ l'espace des fonctions continues définies sur $[a, b]$ et à valeur dans X. Soit l'opérateur $A : C([a, b]; X) \longrightarrow C([a, b]; X)$ définit par*

$$Ay(t) = S(t-a)x + \int_a^t S(t-s)f(s, y(s))ds,$$

pour tout $t \in [a,b]$. Ainsi tout point fixe de l'opérateur A est une solutions du problème (3.4). En outre l'opérateur A est bien défini. En effet, si $y \in C([a,b];X)$, alors $(Ay) \in C([a,b];X)$. On va montrer que A est une contraction. Soit $y,z \in C([a,b];X)$ et $t \in [a,b]$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\|A(y)(t) - A(z)(t)\| &\leq \int_a^t \|S(t-s)\| \big\|f(s,y(s)) - f(s,z(s))\big\| ds \\
&\leq \int_a^t k\|y(s) - z(s)\| ds \\
&\leq k\int_a^t \|y - z\| ds \\
&\leq k(t-a)\|y - z\| ds.
\end{aligned}$$

tenant en compte que $(Ay) \in C([a,b];X)$, on aura donc :

$$\begin{aligned}
\|(A(Ay)(t)) - (A(Az)(t))\| &\leq \int_a^t \|S(t-s)\| \big\|f(s,(Ay)(s)) - f(s,(Az)(s))\big\| ds \\
&\leq k\int_a^t k\big\|(Ay)(s) - (Az)(s)\big\| ds \\
&\leq k\int_a^t k(s-a)\|y - z\| ds \\
&\leq k^2 \frac{(t-a)^2}{2}\|y - z\|.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|(A^2y)(t) - (A^2z)(t)\| \leq k^2 \frac{(t-a)^2}{2}\|y - z\|.$$

Par récurrence, on aboutit à :

$$\|(A^ny)(t) - (A^nz)(t)\| \leq k^n \frac{(t-a)^n}{n!}\|y - z\|, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^\star.$$

Ce qui donne :

$$\|A^ny - A^nz\| \leq k^n \frac{(t-a)^n}{n!}\|y - z\|, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^\star.$$

Donc A^n est lipschitzienne de rapport $k^n \frac{(t-a)^n}{n!}$. Sachant que

$$\lim_{n \to +\infty} k^n \frac{(t-a)^n}{n!} = 0,$$

on déduit qu'il existe n assez grand tel que :

$$k^n \frac{(t-a)^n}{n!} < 1.$$

Par conséquent, A^n est une application contractante de $C([a,b];X)$ dans $C([a,b];X)$, mais

$$\|Ay - y\| = \|A^n Ay - A^n y\| \leq k\|Ay - y\|,$$

tel que $k \in (0,1)$. Donc $Ay = y$. On peut déduire que tout point fixe de A est un point fixe de A^n. Par ailleurs, comme X est un espace de Banach, le théorème de point fixe de Banach 1.2.2 entraine que A admet un point fixe unique $y \in C([a,b];X)$, qui est en fait la solution douce du problème de Cauchy (3.5).

On va maintenant passer à la démonstration du théorème principale d'existence et unicité des solutions du problème de Cauchy (3.5).

Preuve 3.2.2 *Sachant que f est continue, alors on peut supposer qu'il existe $M > 0$, tel que :*

$$\|f(t,y)\| \leq M,$$

pour tout $(t,y) \in [a,b] \times B(x,r)$. On a aussi

$$\|f(t,y) - f(t,\bar{y})\| \leq k\|y - \bar{y}\|,$$

pour tout $(t,y),(t,\bar{y}) \in [a,b] \times B(x,r)$. Soit $h : X \longrightarrow X$ définie par :

$$h(u) = \begin{cases} u & \text{pour } u \in B(x,r) \\ \frac{r}{\|u-x\|}(u-x) + x & \text{pour } u \in X \setminus B(x,r). \end{cases}$$

On a :

- *Si $u \in B(x,r)$ alors $h(u) = u \in B(x,r)$.*
- *Si $u \in X \setminus B(x,r)$, alors*

$$\begin{aligned} \|h(u) - x\| &= \left\| \frac{r}{\|u-x\|}(u-x) + x - x \right\| \\ &\leq r\frac{\|u-x\|}{\|u-x\|} \\ &\leq r, \end{aligned}$$

  donc $h(u) \in B(x,r)$.

Par conséquent, les valeurs de h sont dans $B(x,r)$, i.e,

$$h : X \longrightarrow B(x,r).$$

En plus, l'application h est lipschitzienne. En effet :

— *Si $u, v \in B(x,r)$, on a*

$$\|h(u) - h(v)\| = \|u - v\|$$

— *Si $u, v \in X \setminus B(x,r)$, on a*

$$\|u - x\| > r \text{ et } \|v - x\| > r,$$

donc

$$\begin{aligned} \|h(u) - h(v)\| &= \left\| \frac{r}{\|u - x\|}(u - x) - \frac{r}{\|v - x\|}(v - x) \right\| \\ &\leq \left\| \frac{\|u - x\|}{\|u - x\|}(u - x) - \frac{\|v - x\|}{\|v - x\|}(v - x) \right\| \\ &\leq \|u - x - (v - x)\| \\ &\leq \|u - v\|. \end{aligned}$$

h est continue sur X. On définit $g : [a,b] \times X \longrightarrow X$ par :

$$g(t,u) = f(t, h(u)),$$

pour tout $(t,u) \in [a,b] \times X$. Comme f est continue et lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur $[a,b] \times B(x,r)$, il en résulte que g est aussi continue et lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur $[a,b] \times X$. D'après le lemme précédent, le problème de Cauchy

$$y' = Ay(t) + g(t,y),\ y(a) = x,$$

admet une unique solution douce $y : [a,b] \longrightarrow X$. Comme $y(a) = x$, et y est continue en $t = a$, on obtient alors

$$y(t) \in B(x,r),$$

pour tout $t \in [a,b]$. Par conséquent,

$$g(t, y(t)) = f(t, y(t)),$$

par suite $y : [a,b] \longrightarrow X$ est l'unique solution douce du problème de Cauchy (3.5).

Conclusion

Dans ce mémoire on a étudié la notion de solution d'une équation différentielle semi-linéaire ayant la forme

$$y'(t) = Ay(t) + f,$$

où A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi–groupe et f est une fonction localement intégrable. On a distingué entre trois types de solutions à savoir : La solution classique, la solution absolument continue et la solution douce. On a aussi établi la relation entres ces trois types de solutions. Ce qu'il faut noter ici est que la solution douce existe sous des conditions faibles. Pour les équations différentielles semi–linéaires dans les espaces de Banach la solution douce est très fréquentée surtout où le problème de la non–différentiabilité des fonctions à valeurs dans les espaces de Banach est un problème majeur.

Le cas des équations différentielles nonlinéaires est délicat. Il s'agit donc de définir une solution à une équation différentielle sous la forme :

$$y'(t) = Ay(t) + f,$$

où A est un opérateur nonlinéaire et f une fonction localement intégrable. Dans le cas où A génère un C_0 semi–groupe non linéaire $S(t)$, $t \geq 0$ on peut définir la solution douce. On peut aussi définir une solution plus général à savoir la solution intégrale. Pour mieux comprendre la notion de solution dans le cas nonlinéaire on réfère aux [8], [9] et [10].

Bibliographie

[1] I.I. Vrabie. *C_0-Semigroups and Applications*. Saul LUBKIN, university of Rochester New York, U.S.A, 2003.

[2] I.I. Vrabie. *Differential equations. An introduction to basic concepts, results ans applications*. World Scientific Publishing, 2004.

[3] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences 44, Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1983.

[4] G. Peano. Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires, Math. Ann., 37 :182–228, 1890.

[5] Y. Benyamini et J. Lindenstrauss. *Geometric nonlinear functional analysis*. American Mathematical Society, 1991.

[6] H. Brezis. Functional Analysis. Sobolev spaces and partial differential equations. Springer, 2011.

[7] J. Dieudonné. Deux exemples singuliers d'équations différentielles, Acta Sci. Math. Szeged, 12 :38–40, 1950.

[8] V. Lakshmikantham, S. Leela. *Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces*, Pergamon Press, Oxford, 1981.

[9] V. Barbu. *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach spaces*, New York, Springer, 2010.

[10] P. Bénilan. Solutions integrales d'équations d'évolution dans un espace de Banach, C. R. Acd. Sci. Paris, A-B 274 :A47–A50, 1972.