

République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة الجبلاي بونعامة خميس مليانة
Université Djilali Bounaâma de Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Sciences de la Matière



Mémoire de fin d'étude
*En vue de l'obtention d'un diplôme de **Master** en Physique*
Spécialité: Physique Théorique

Thème :

Contribution à l'étude du rayon du proton au moyen
de l'appariement nucléaire pour des noyaux
pair-pairs

Devant le jury composé de :

- | | |
|---------------|------------|
| - F. Boudjema | Présidente |
| - M. Douici | Encadreur |
| - T. Bitam | Examineur |

Présenté par :

Nedjar Saida
Rahmani Nawel

Année universitaire : 2016 / 2017

Dédicace De Nawel

*à la bougie de ma vie ma Mère
à mon père qui a toujours avec moi
à mes chers frères Abd el rahim, mouloud et fériale
Et surtout a mon marié
à ma belle mère et mon deuxième père
à toute la famille Rahmani et la famille Bendjaoui
à tout mes professeurs
à tout mes amis, spécialement mon binôme Saida
Je dédié ce travail.*

Merci



Dédicace De Saida

*Je dédie ce travail
à mes très chers parents*

*J'y puise une ouverture desprit, un soutien, une confiance et un
Amour indéfectible que j'espère rendre pareillement et transmettre à
Mon tour.*

*à mes très chers frères et mes sœurs
Mihoub, Hamza, Amine, Youssef, Abdelrahemen, Mohamed
Zobida, sihem, fadila*

Merci de m'avoir encouragés et soutenu pour réalisée ce mémoire

*à tout ma famille Nedjar , à mes amis et surtout mon binôme Nawel et
à ceux qui m'aiment et qui attendent avec impatience ma réussite.*

*En espèrent être toujours à la hauteur de leurs attentes et leurs
Espérances.*



Remerciement

*On tient tout d'abord à remercier vivement le bon dieu, de nous
Avoir donné la force pour suivre ainsi que l'audace pour dépasser
Toutes les difficultés, grâce à son aide que nous avons réalisées ce
Modeste travail.*

*On présente nos premiers remerciements à notre promoteur Monsieur
Douici Mohamed, pour nous avoir permis de réaliser ce travail de
Rechercher, pour tout le temps qu'il intérêt la direction et le suivi de ce
travail.*

*On tient aussi à remercier Madame Boudjemaa Fatiha pour
l'honneur qu'elle nous fait en présidant le jury de ce mémoire.*

*On exprime nous vifs remerciements à Monsieur Bitam Farek d'avoir
accepté d'être membre du jury de ce mémoire.*

*On remercie encore nos enseignant de master de la faculté des sciences et
Technologies.*

*Merci également à toutes personnes partageant ses connaissances du
Loin ou du proche, tous ceux qui ont publié leur résultats de recherche
Pour que tout le monde puisse les exploiter et les achever et que l'on.
Puisse rendre leurs travaux plus utiles pour le développement de
L'humanité*

ملخص

تم دراسة تأثيرا لتطابق النووي على نصف القطر الشحني للأنوية زوجية-زوجية بطريقة BCS. بدأنا بدراسة الهاملتوني باستخدام طريقة Wick لإيجاد الدالة الموجية للنكليونات. بعد هذا تم إيجاد العلاقة التي يتم بها حساب القطر الشحني . على المستوى الرقمي قمنا بحساب القطر الشحني للأنوية ذات Z محصور بين 16 و 56 باستخدام طاقات Woods-Saxon. **كلمات رئيسية:** التطابق النووي, نصف القطر الشحني, طاقات Woods-Saxon

Résumé

Nous avons étudié l'effet d'appariement nucléaire sur le rayon de charge pour de noyaux pair-pairs dans l'approche BCS. Dans une première étape, l'Hamiltonien a été diagonalisé par la méthode de Wick en permettant de trouver des équations du gap et une fonction d'onde BCS. Par la suite, une nouvelle expression du rayon quadratique de charge a été établie dans les particules identiques. Dans une seconde étape, le rayon de charge a été traité numériquement dans la base des énergies et états propres d'un champ moyen déformé de Woods-Saxon pour des noyaux pair-pairs tels que $16 \leq Z \leq 56$. Il est alors montré que la prise en compte de l'appariement entre nucléaire traduit par des corrections non négligeables dans les valeurs du rayon de charge de ces noyaux.

Mots clés: *rayon de charge; Appariement nucléaire; Energies de Woods-Saxon.*

Abstract

The effect of the nuclear pairing on the charge radii of even-even proton-rich nuclei is studied using the BCS method. As a first step, an expression of the quadratic charge radius is established in the pairing between like-particles case. As a second step, this observable is calculated for some even-even nuclei such as $16 \leq Z \leq 56$ using the single-particle energies of a Woods-Saxon mean-field. However, nuclear pairing is more important in $N=Z$ nuclei.

Keywords: *charge radius; nuclear pairing; Woods-Saxon energies.*

Table des matières

Introduction	5
1 Les corrélations d'appariement nucléaire	7
1.1 Introduction	7
1.1.1 Potentiel de Woods-Saxon	8
1.1.2 Hamiltonien de Wood-Saxon	10
1.1.3 Hamiltonien du modèle à particules indépendantes	10
1.2 Les corrélations d'appariement	12
1.2.1 Hamiltonien en seconde quantification	13
1.2.2 Force d'appariement	14
1.2.3 Hamiltonien du système	15
1.2.4 Théorie BCS	15
1.3 Transformation de Bogoliubov-Valatin	16
1.3.1 Transformation inverse de Bogoliubov-Valatin	18
1.3.2 Equation de gap	19
2 L'appariement nucléaire au moyen du rayon de proton	24
2.1 Introduction	24
2.2 Fonction d'onde BCS	25
2.2.1 L'état BCS	25
2.2.2 Valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules	26
2.2.3 Les états excités	28

<i>Table des matières</i>	2
2.2.4 Les énergies des états excités	29
2.3 Rayon quadratique du système proton	30
3 Résultats numériques et discussion	32
3.1 Probabilités d'occupation et d'inoccupation de particules	32
3.2 Modèle à particules indépendantes	34
3.3 Choix de la constante d'appariement G_{pp}	34
3.3.1 Rayon de charge nucléaire	35
4 Conclusion	44
Annexes	46
A Equation de gap	47
B Les probabilités d'occupation et d'inoccupation	48
C L'état excité à deux quasi-particules indépendantes	51
Bibliographie	52

Table des figures

3-1	Evolution des probabilités d'occupation (v_{ν}^2 symbole cerclé) et d'inoccupation (u_{ν}^2 symbole carré) de la théorie BCS habituelle en fonction des niveaux, pour $\Omega = 16$ et $G = 0.475$, Le niveau de Fermi est représenté pointillés.	33
3-2	Evolution de la demi largeur du gap du système protons en fonction du nombre de particules du système protons pour N-Z=0.	39
3-3	Evolution de la constante d'appariement du système protons en fonction du nombre de particules du système protons pour N-Z=0.	39
3-4	Evolution du rayon de charge nucléaire en fonction du nombre de particules du système protons pour N-Z=0.	40
3-5	Evolution de la demi largeur du gap du système protons en fonction du nombre de particules du système protons pour N-Z=2.	40
3-6	Evolution de la constante d'appariement du système protons en fonction du nombre de particules du système protons pour N-Z=2.	41
3-7	Evolution du rayon de charge nucléaire en fonction du nombre de particules du système protons pour N-Z=2.	41
3-8	Evolution de la demi largeur du gap du système protons en fonction du nombre de particules du système protons pour N-Z=4.	42
3-9	Evolution de la constante d'appariement du système protons en fonction du nombre de particules du système protons pour N-Z=4.	42
3-10	Evolution du rayon de charge nucléaire en fonction du nombre de particules du système protons pour N-Z=4.	43

Liste des tableaux

3.1	Comparaison entre les valeurs de rayon de charge (fm) de quelques noyaux pairs-pairs, le gap d'appariement Δ_{app} (MeV) (colonne 2), le constant appariement G_{pp} (MeV) (colonne 3), le rayon de charge (fm) (colonne 4) et le rayon charge par la méthode d'Hartree-Fock (HF) (colonne 5)(Ref[10]), par la méthode du champ moyen relativiste (RMF) (colonnes 6)(Ref. [11], et les valeurs expérimentales (colonne 7)(Ref.[12])	35
-----	--	----

Introduction

L'étude du rayon de charge peut fournir des informations sur la taille et la forme des noyaux. On s'attend à ce que l'appariement isovectoriel joue un rôle significatif dans le rayon de charge nucléaire. Cependant, il est maintenant bien établi que dans les noyaux riches en protons, l'appariement nucléaire est très important et fait actuellement l'objet de nombreuses études, aussi bien expérimentales que théoriques en utilisant plusieurs approches et techniques, en physique de la structure nucléaire [1-10].

Sur le plan théorique, citons par exemple Nerlo-Pomorska et Mach [11] qui ont étudié le rayon de charge nucléaire en se basant sur le potentiel de Nilsson, en incluant les corrélations d'appariement au moyen du formalisme BCS. Une autre étude est celle de Lalazissis et Raman [12] qui ont évalué les valeurs des rayons quadratiques des systèmes neutrons et protons pour 1315 noyaux pair-pairs dans le cadre de la théorie du champ moyen relativiste (RMF). Geng et al. [13] ont appliqué également la théorie RMF au calcul des rayons des systèmes protons pour les isotopes *Ne*, *Na*, *Cl* et *Ar*. Pour leur part, Goriely et al. [14] ont étudié systématiquement le rayon de charge de 9200 noyaux en utilisant un modèle non relativiste d'Hartree-Fock (HF). Benhamouda et al. [15,16] ont calculé les moments multipolaires nucléaires des noyaux pair-pairs riches en neutrons de la région des terres rares dans le cadre d'un potentiel Woods-Saxon déformé en incluant les corrélations d'appariement du système de particules identiques au moyen d'une méthode de projection exacte.

Sur le plan expérimental, de nombreuses mesures ont été effectuées en utilisant diverses techniques depuis les débuts de la physique de la structure nucléaire. Citons entre autres, le travail de Yeandle et al. [17] qui ont mesuré le rayon de charge des états fondamental et

isomérique du noyau ^{171}Hf et de Gangrsky et al. [18] qui ont mesuré le rayon de charge de certains isotopes de titane riches en protons. Angeli et al [19, 20] compilent pour sa part des données expérimentales pour le rayon de charge nucléaire mesuré à partir de la diffusion élastique des électrons.

Dans le formalisme du spin isotopique, l'effet d'appariement existe pour $T = 0$ (cas isoscalaire) et $T = 1$ (cas isovectoriel). Le cas $T = 0$ contient uniquement l'appariement Neutron-Proton et le cas $T = 1$ contient en plus l'appariement entre particules identiques, (neutron-neutron et proton-proton). Toutefois, dans les études concernant les noyaux stables de masses intermédiaires et lourds, seul l'appariement entre particules identiques est considéré. Ce type d'appariement est généralement traité par la méthode BCS. En effet, il est bien établi dans ces noyaux que l'appariement Neutron-Proton est tout à fait négligeable en raison de l'excès de neutrons. Ce dernier fait que les neutrons et les protons occupent des couches différentes et donc leurs niveaux de Fermi respectifs sont fort distants. Il en est tout autrement dans les noyaux légers où N est voisin de Z et où l'appariement Neutron-Proton devient aussi important que l'appariement entre particules identiques.

Le but du présent travail est d'étudier le rayon de charge nucléaire au moyen de l'appariement nucléaire pour des noyau pair-pairs.

Le premier chapitre est un rappel du traitement des corrélations d'appariement par la méthode BCS dans le cas de l'appariement entre particules identiques.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéresserons à la fonction d'onde du système pair de nucléons gouvernés par un hamiltonien nucléaire en seconde quantification. Par la suite l'expression de rayon de charge sera établie en prenant en compte l'appariement entre particules identiques par la méthodes BCS.

Nous présenterons et discuterons ensuite dans le chapitre trois les résultats numériques obtenus en utilisant comme modèle à particules indépendantes le modèle de Woods-Saxon [21].

Chapitre 1

Les corrélations d'appariement nucléaire

1.1 Introduction

Le modèle à particules indépendantes est l'une des approches adoptées pour décrire approximativement les nucléons dans le noyau. Partant de l'hypothèse d'une faible corrélation entre les nucléons, on considère le noyau comme un ensemble de particules se mouvant indépendamment les unes des autres et ressentant l'effet d'un champ moyen créé par le reste des particules. Ce champ moyen peut être déterminé soit d'une manière self-consistante, comme dans la méthode BCS ou bien à l'aide d'un potentiel phénoménologique du type de Nilsson ou de Woods-Saxon.

Partant de cette approximation, l'hamiltonien nucléaire peut s'écrire sous forme d'une somme de deux termes : le premier contient l'énergie cinétique des nucléons augmentée d'une énergie potentielle décrivant l'interaction moyenne qu'un nucléon éprouve de la part des autres nucléons du noyau, et le deuxième terme correspond aux interactions résiduelles entre les nucléons. Parmi ces dernières, les plus importantes sont les corrélations d'appariement. Ces corrélations jouent un rôle capital dans la description de la spectroscopie nucléaire, les transitions électromagnétiques, le moment d'inertie, etc...

La notion d'énergie d'appariement est apparue des les premiers calculs de l'énergie de liaison des noyaux. En effet, il y a une différence caractéristique entre les spectres des noyaux pair-pairs et pair-impairs. On observe expérimentalement un gap important dans les noyaux pair-pairs entre l'état fondamental et les premiers états excités ce qui n'est pas le cas pour les noyaux impairs. Ce gap a été attribue à l'effet d'appariement de l'interaction nucléaire résiduelle.

Nous nous proposons dans le présent chapitre de faire un rappel du traitement des corrélations d'appariement dans le cadre du formalisme BCS. La première partie du chapitre est consacrée à étudier le potentiel de Woods-Saxon en écrivant son hamiltonien. La seconde partie est consacrée à un système nucléaire de nombre de masse A pouvant être ou bien pair-pair (nombre pair de protons et nombre pair de neutrons) ou bien impair (nombre pair de protons et impair de neutrons ou l'inverse). On étudiera sur ce système l'interaction d'appariement entre particules identiques. La méthode qui sera utilisée sera celle de la linéarisation par le théorème de Wick. On commencera par définir l'hamiltonien du système, auquel on applique le théorème de Wick. On linéarise ensuite l'expression résultante, on en déduit les équations du gap ainsi que la transformation de Bogoliubov-Valatin.

1.1.1 Potentiel de Woods-Saxon

L'approximation faite par le modèle à particules indépendantes consiste à admettre que l'interaction s'exerçant entre un nucléon et les $(A - 1)$ autres nucléons, peut être simulée par un puit de potentiel V . L'idée la plus simple consiste à prendre le même potentiel nucléaire pour les A nucléons d'un noyau donné.

Etant donné que ce potentiel représente la moyenne des interactions à deux corps sur toute la distribution de la matière nucléaire, on lui attribue alors une intensité proportionnelle à la densité de nucléons, en lui associant une profondeur V_0 et une allure caractérisée par une surface diffuse.

Dans le cas des noyaux sphériques ou faiblement déformés, la densité des nucléons a

la forme d'une fonction de Fermi, soit : [22]

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a_0}}} \quad (1.1)$$

où :

ρ_0 : représente la densité centrale.

a_0 : est l'épaisseur de la surface.

$(r - R_0)$: représente la distance d'un nucléon à la surface effectif .

R_0 : est le rayon de surface.

Le potentiel moyen appelé potentiel de woods-saxon suit la même distribution que la densité soit :

$$V(r) = \frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a_0}}} \quad (1.2)$$

Pour étudier les noyaux déformés, l'expression (1.2) généralisée en remplaçant l'expression de la distance $(r - R_0)$ par $R_v(\ell(r))$ ou $\ell(r)$ le quasi-rayon qui exprime la distance entre un point de la surface et le point de coordonnée r à partir du centre du noyau. R_v est le rayon de la surface et a_0 est remplacé par a_v qui reste constant pendant de la déformation, l'expression (1.2) devient :

$$V(r) = \frac{V_0}{1 + e^{\left(\frac{R_v \ell(r)}{a_v}\right)}} \quad (1.3)$$

et on définit le quasi-rayon par l'expression : $\ell(r) = \frac{\pi(r)}{|\nabla\pi(r)|}$.

et $\pi(r)$ est l'équation de la surface nucléaire.

Cependant cette déformation remonte une singularité pour $|\nabla\pi(r)| = 0$, difficulté qui peut être contournée en remplaçant la fonction $\pi(r)$ par $S(r)$:

$$S(r) = \sqrt{\pi - \pi_{\min}} - \sqrt{-\pi_{\min}} \quad (1.4)$$

Où π_{\min} est la valeur minimale de $\pi(r)$.

Ainsi le quasi-rayon s'écrit :

$$\ell(r) = \frac{S(r)}{|\nabla S(r)|} \quad (1.5)$$

Cette dernière expression peut définir un potentiel de woods-saxon qui décrit convenablement aussi bien les noyaux sphérique que les noyaux déformés.

1.1.2 Hamiltonien de Wood-Saxon

Potentiel de l'oscillateur harmonique

Pour les états liés, on utilise également le potentiel d'oscillateur harmonique.

$$\begin{aligned} V(r) &= V_0 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \\ &= V_0 + \frac{1}{2} \frac{mc^2}{(\hbar c)^2} (\hbar\omega)^2 r^2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Avec :

$$V_0 \simeq -55 \text{ Mev}, \hbar\omega \simeq 41 A^{\frac{1}{2}}, mc^2 \simeq 939 \text{ Mev}, \hbar c \simeq 197 \text{ Mev}.$$

Le potentiel harmonique possède des solutions analytiques, de plus de nombreux éléments de matrice de la forme :

$$I_{nlj,n'l'j'} [f] = \int R_{nlj}(r) f(r) R_{n'l'j'}(r) r^2 dr \quad (1.7)$$

Peuvent être calculés analytiquement. [23]

1.1.3 Hamiltonien du modèle à particules indépendantes

L'hamiltonien total du noyau se scinde en hamiltonien individuels identiques correspondant chacun à un certain nucléon, soit l'équation de Schrödinger :

$$H\Psi_i = \varepsilon_i\Psi_i \quad (1.8)$$

où :

Ψ_i et ε_i représentent respectivement la fonction d'onde et l'énergie individuelle du $i^{\text{ème}}$ nucléon.

H étant l'hamiltonien du nucléon considéré, qui s'écrit :

$$H = T + V + V_{s.o} + V_c \quad (1.9)$$

où T représente l'opérateur énergie cinétique donné par :

$$T = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \quad (1.10)$$

V est l'opérateur potentiel central de woods-saxon.

V_c est l'opérateur potentiel colombien.

$V_{s.o}$ est l'opérateur de l'interaction spin-orbite donné par :

$$\begin{aligned} V_{s.o} &= \frac{-k}{\hbar^2} \left[\vec{\delta} V (\vec{\nabla} \wedge \vec{p}) \right] \\ &= \frac{-k}{\hbar^2} \left[\vec{\delta} (\vec{p} \wedge \vec{\nabla} V) \right] \\ &= \frac{-k}{\hbar^2} \left(\frac{\hbar}{i} \right) \left[\vec{\delta} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} V) \right] \\ &= \frac{-k}{i\hbar} \left[\vec{\delta} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} V) \right] \\ &= \frac{ik}{\hbar} \vec{\delta} \cdot (\vec{\nabla} V \wedge \vec{\nabla}) \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\vec{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \quad \text{et} \quad \vec{\delta} = 2\vec{s} \quad (1.12)$$

$\vec{\delta}$ et \vec{p} représentent respectivement des vecteurs spin de Pauli et d'impulsion, k étant une constante de couplage.

En tenant compte de la symétrie coaxial :

$$V_{s.o} = V_{s.o}^+ + V_{s.o}^- + V_{s.o}^z \quad (1.13)$$

où

$$V_{s.o}^- = \frac{k}{2\hbar} \delta^- e^{i\varphi} \left[\frac{-\partial v}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{L_z}{r} \right) \right] \quad (1.14)$$

$$V_{s.o}^+ = \frac{k}{2\hbar} \delta^+ e^{-i\varphi} \left[\frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{L_z}{r} \right) \right] \quad (1.15)$$

$$V_{s.o}^z = \frac{k}{\hbar} \frac{\partial v}{\partial r} \frac{L_z}{r} \quad (1.16)$$

Avec $\delta^\pm = \delta_x \pm i\delta_y$ et $L_z = i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$.

V_c et l'opérateur potentiel coulombien pour les protons s'écrit :

$$V_c = \frac{-\rho_{ch}}{2} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{s}' \quad (1.17)$$

ρ_{ch} étant la distribution de charge dans le noyau.

1.2 Les corrélations d'appariement

L'appariement se trouve au cœur du noyau atomique, et en général dans les problèmes quantiques à N corps. L'importance des corrélations d'appariement en théorie de la structure nucléaire sont responsables d'un certain nombre des phénomènes comme la stabilité du noyau pair-pair par rapport aux noyaux impairs. L'existence d'un gap entre l'état fondamental et les états excités dans les noyaux.

La notion de l'énergie d'appariement est apparue des les premiers calculs de l'énergie de liaison du noyau.

En effet dans l'étude systématique des masses A, on observe les effets appelés pair-pair. En comparant les noyaux impair-impair, Z (impair) et N (impair) avec leurs voisins pair-pair, on aboutit (en moyenne) avec les relations suivantes :

$$E(N_{impair}) - E(pair - pair) = \Delta_n$$

$$E(Z_{impair}) - E(pair - pair) = \Delta_p$$

$$E(impair-impair) - E(pair-pair) = \Delta_n + \Delta_p - E_{np}$$

où :

$$\Delta_n \simeq \Delta_p = \frac{12}{\sqrt{A}} \text{Mev.}$$

$$E_{np} \simeq \frac{20}{A} \text{Mev.}$$

Sont déterminées de manière empirique.

D'autre part, la formule semi-empirique de masse pour l'énergie de liaison de noyau s'écrit :

$$E(A, Z) = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{2}{3}}} - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} + P(N, Z) \quad (1.18)$$

Le terme P (N, Z) est un terme quantique d'énergie d'appariement entre les nucléons, soit :

$-\Delta$: pour les noyaux impair-impair.

0 : pour les noyaux impair (A impair).

Δ : pour les noyaux pair-pair.

Avec : $\Delta = \frac{12}{\sqrt{A}}$, et le terme E_{np} étant négligé.

1.2.1 Hamiltonien en seconde quantification

Soit un système constitué de n nucléons, N neutrons et Z protons, et on considère les deux types de nucléons comme deux systèmes indépendants, c'est-à-dire que l'on néglige les interactions neutron-proton. L'hamiltonien en seconde quantification de ce système est donné par [24], [25] :

$$H = H_0 + V \quad (1.19)$$

où H_0 , est le champ moyen du modèle à particule indépendantes, il définit une base de représentation pour les états sur lesquels il est diagonale et s'écrit dans le formalisme de la seconde quantification :

$$H_0 = \sum_v \varepsilon_v a_v^+ a_v \quad (1.20)$$

où a_v^+ et a_v représentent les opérateurs de création et d'annihilation des particules à l'état $|v\rangle$.

Il satisfont aux règles d'anti commutation des fermions :

$$\{a_v^+, a_\ell^+\} = \{a_v, a_\ell\} = 0 \quad (1.21)$$

et :

$$\{a_v^+, a_\ell\} = a_v^+ a_\ell + a_\ell a_v^+ = \delta_{v\ell} \quad (1.22)$$

L'hamiltonien réel H diffère de H_0 , par le terme V représentant l'interaction résiduelle sur le même bas et dans l'hypothèse d'une interaction à deux corps on peut écrire :

$$V = \frac{1}{4} \sum_{klmn} \langle k\ell | V | mn \rangle a_k^+ a_\ell^+ a_n a_m \quad (1.23)$$

où les quantités $\langle k\ell | V | mn \rangle$, sont des éléments de matrice antisymétriques de l'interaction résiduelle V que l'on suppose invariant par rotation et par renversement du sens du temps, ce qui entraîne :

$$\langle k\ell | V | mn \rangle = s_k s_\ell s_m s_n \langle -m - n | V | -k - \ell \rangle = \langle \tilde{m}\tilde{n} | V | \tilde{k}\tilde{\ell} \rangle \quad (1.24)$$

où l'on not par : $|\tilde{k}\rangle = s_k |k\rangle$

avec $|\tilde{k}\rangle$ désigne l'état reversé par rapport au sens du temps de $|k\rangle$, s_k étant le facteur de phase et $\varepsilon_k = \varepsilon_{\tilde{k}}$.

1.2.2 Force d'appariement

Pour rendre compte de l'effet d'appariement, Belyaev a introduit la notion d'interaction résiduelle entre deux états renversés l'un de l'autre par rapport au sens du temps.

Cette force est définie par ses éléments de matrice [26] :

$$\langle k\ell | V | mn \rangle = -4G \delta_{k\tilde{\ell}} \delta_{m\tilde{n}} \quad (1.25)$$

où G est une constante positive appelée la constante d'appariement.

1.2.3 Hamiltonien du système

Pour étudier l'effet d'une telle interaction, on considère pour chaque type de nucléons (neutrons ou protons), l'hamiltonien de l'expression (1.19) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{\nu} \varepsilon_{\nu} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} + \frac{1}{4} (-4G \delta_{k\tilde{l}} \delta_{m\tilde{n}}) a_k^{\dagger} a_{\tilde{l}}^{\dagger} a_n a_m \\
&= \sum_{\nu \rangle 0} \varepsilon_{\nu} (a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} + a_{\tilde{\nu}}^{\dagger} a_{\tilde{\nu}}) - G \sum_{km \rangle 0} a_k^{\dagger} a_{\tilde{k}}^{\dagger} a_m a_{\tilde{m}} \\
&= \sum_{\nu \rangle 0} \varepsilon_{\nu} (a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} + a_{\tilde{\nu}}^{\dagger} a_{\tilde{\nu}}) - G \sum_{\nu\mu \rangle 0} a_{\nu}^{\dagger} a_{\tilde{\nu}}^{\dagger} a_{\tilde{\mu}} a_{\mu}
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Cette hamiltonien doit décrire un système de n particules et doit donc commuter avec l'opérateur nombre de particules N :

$$N = \sum_{\nu \rangle 0} (a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} + a_{\tilde{\nu}}^{\dagger} a_{\tilde{\nu}}) \tag{1.27}$$

Il s'agit donc de déterminer les états $|\varphi\rangle$, qui sont à la fois fonction propres de H et N .

Ce problème n'admet pas la solution exacte simple dans le cas général. Il a cependant été résolu approximativement par Bardeen- Cooper et Schiffer (BCS) dans la théorie de la supraconductivité [27].

1.2.4 Théorie BCS

La théorie BCS est introduite par Bardeen-Cooper et Schrieffer, pour décrire la supraconductivité dans les matériaux. En physique nucléaire, cette théorie est utilisée pour étudier les phénomènes d'appariement, dans lesquels les recouvrements des fonctions d'onde des deux nucléons appariés sont pris en considération.

Dans la théorie BCS, les fonctions BCS sont fonctions propres de H , mais le nombre

de particules n'est conservé qu'en moyenne.

$$\langle BCS | N | BCS \rangle = n_0 \quad (1.28)$$

où n_0 est le nombre réel de particules de système.

On tient compte de cette contrainte en introduisant un paramètre de Lagrange λ , et en minimisant la valeur moyenne de l'hamiltonien auxiliaire :

$$\dot{H} = H - \lambda N \quad (1.29)$$

En fait le λ représente le potentiel chimique

Un état $|BCS\rangle$ est défini à partir du vide $|0\rangle$ par :

$$|BCS\rangle = \prod_{i>0} (u_i + v_i \alpha_i^+ \alpha_{\tilde{i}}^+) \quad (1.30)$$

où les orbitales i et \tilde{i} sont reliées par une opération de renversement du sens du temps, et α_i^+ est l'opérateur de création d'un nucléon dans l'orbitale i . La notation $|i\rangle$ indique que le produit court seulement sur un membre pour chaque paire BCS.

1.3 Transformation de Bogoliubov-Valatin

Pour tenir compte des effets d'appariement dans le noyau, on doit considérer un état à N corps plus général qu'un déterminant de Slater. Pour cela, on utilise la transformation généralisé de Bogoliubov-Valatin.

Dans le but de minimiser \dot{H} , Bogliubov [28] et Valatin [29] ont défini les opérateurs α_v^+ et α_v qui sont combinaisons linéaires des opérateurs de création et d'annihilation de vrai particules :

$$\begin{cases} \alpha_v = u_v a_v - v_v a_{\tilde{v}}^+ \\ \alpha_v^+ = u_v a_{\tilde{v}}^+ - v_v a_v \end{cases} \quad (1.31)$$

La quasi-particule créée par a_v^+ est une vraie particule avec une amplitude de probabilité u_v et un vrai trou avec une amplitude de probabilité v_v . Les paramètres v_v et u_v sont des nombres positifs et satisfont aux conditions :

$$u_v = u_{\tilde{v}} \text{ et } v_v = v_{\tilde{v}} \quad \forall v \quad (1.32)$$

Ce qui signifie que l'état $|\tilde{v}\rangle$, est occupé ou inoccupé avec la même probabilité que l'état $|v\rangle$. D'autre part, les états symétriques $|v\dots\dots\omega\rangle$, peuvent être construits à partir d'un état $|0\rangle$ qu'on appelle le vide des opérateurs de création α_v^+ . On fabrique des états à une, deux,, N particules, en appliquant au vide un, deux,, N opérateurs de création $|0\rangle$ vide.

$a_v^+ |0\rangle$ état à une particule.

$a_v^+ a_\mu^+ |0\rangle$ état à deux particules.

$a_v^+ a_\mu^+ \dots a_\omega^+ |0\rangle$ état à N particules.

L'espace qui contient le vide et l'ensemble de ces derniers d'états s'appelle l'espace de Fock. On peut écrire :

$$|v\mu\dots\dots\omega\rangle = a_v^+ a_\mu^+ \dots a_\omega^+ |0\rangle \quad (1.33)$$

Pour cela, le vide satisfait à l'équation :

$$a_v |0\rangle = 0, \quad \langle 0 | a_v^+ = 0 \quad (1.34)$$

Par ailleurs, les opérateurs α_v^+ et α_v étant encore des opérateurs de création et d'annihilation de fermions, on a :

$$\{\alpha_k, \alpha_l\} = \{\alpha_k^+, \alpha_l^+\} = 0 \quad (1.35)$$

et

$$\begin{aligned}
\{\alpha_k^+, \alpha_l\} &= \delta_{kl} \\
&= \left\{ u_k \alpha_k^+ - v_k \alpha_{\tilde{k}}, u_l \alpha_l - v_l \alpha_{\tilde{l}} \right\} \\
&= (u_k^2 + v_k^2) \delta_{kl}
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Ce qui entraine à la condition de normalisation :

$$u_k^2 + v_k^2 = 1 \tag{1.37}$$

Ce qui signifie que la transformation est unitaire, ou encore que la somme de probabilité d'occupation et d'inoccupation d'un état $|v\rangle$ ou $|\tilde{v}\rangle$ est égale à l'unité.

1.3.1 Transformation inverse de Bogoliubov-Valatin

Dans le cadre de minimisé H b-v ne trouve pas une solution dans le cas des quasi particule (langage mathématique) alors ils ont fait une petite transformation pour trouve la solution de H simplifier ils sont ajouté un paramètre dans les dernières équations après faire ses calcule

Sachant que :

$$\begin{aligned}
\alpha_v &= u_v a_v - v_v a_{\tilde{v}}^+ \\
\alpha_v^+ &= u_v a_v^+ - v_v a_{\tilde{v}}
\end{aligned}$$

Il vient :

$$\alpha_{\tilde{v}}^+ = u_v a_{\tilde{v}}^+ + v_v a_v$$

d'ou :

$$v_v \alpha_{\tilde{v}}^+ = v_v (u_v a_{\tilde{v}}^+ + v_v a_v) = v_v u_v a_{\tilde{v}}^+ + v_v^2 a_v \tag{1.38}$$

$$u_v \alpha_v = u_v (u_v a_v - v_v a_{\tilde{v}}^+) = u_v^2 a_v - u_v v_v a_{\tilde{v}}^+ \tag{1.39}$$

Et sommant les deux équations (1.38) et (1.39) terme à terme, il vient :

$$u_\nu \alpha_\nu + v_\nu \alpha_\nu^+ = u_\nu^2 a_\nu - u_\nu v_\nu a_\nu^+ + v_\nu u_\nu a_\nu^+ + v_\nu^2 a_\nu = (u_\nu^2 + v_\nu^2) a_\nu \quad (1.40)$$

La transformation inverse s'écrit donc :

$$\begin{aligned} a_\nu &= u_\nu \alpha_\nu + v_\nu \alpha_\nu^+ \\ a_\nu^+ &= u_\nu \alpha_\nu^+ + v_\nu \alpha_\nu \end{aligned} \quad (1.41)$$

On peut donc définir une nouvelle représentation appelée "représentation quasi particule" dont le vide est noté $|BCS\rangle$ ou $|0\rangle$, sera définie par l'équation :

$$\langle BCS | \alpha_\nu^+ = 0, \quad \alpha_\nu | BCS \rangle = 0 \quad , \forall \nu$$

1.3.2 Equation de gap

On diagonalise approximativement l'hamiltonien (1.26), en le linearisant par l'utilisation du théorème de Wick. Les paramètres u_ν et v_ν sont choisis de manière à minimiser la valeur moyenne de l'hamiltonien \hat{H} calculée sur état $|BCS\rangle$ et on exprime \hat{H} en représentation quasi particule.

$$\begin{aligned} \hat{H} &= H - \lambda N \\ &= \sum_{\nu \geq 0} \varepsilon_\nu (a_\nu^+ a_\nu + a_\nu^+ a_\nu) - G \sum_{\nu, \mu \geq 0} a_\nu^+ a_\nu^+ a_{\tilde{\mu}} a_\mu - \lambda \sum_{\nu \geq 0} (a_\nu^+ a_\nu + a_\nu^+ a_\nu) \\ &= \sum_{\nu \geq 0} (\varepsilon_\nu - \lambda) (a_\nu^+ a_\nu + a_\nu^+ a_\nu) - G \sum_{\nu, \mu \geq 0} a_\nu^+ a_\nu^+ a_{\tilde{\mu}} a_\mu \end{aligned} \quad (1.42)$$

En utilisant le théorème de Wick il vient :

$$a_v^+ a_v = a_v^+ a_v + : a_v^+ a_v : \quad (1.43)$$

$$a_{\tilde{v}}^+ a_{\tilde{v}} = a_{\tilde{v}}^+ a_{\tilde{v}} + : a_{\tilde{v}}^+ a_{\tilde{v}} :$$

$$\begin{aligned} a_\nu^+ a_{\tilde{\nu}}^+ a_\mu^+ a_{\tilde{\mu}}^+ &= a_\nu^+ a_{\tilde{\nu}}^+ a_\mu^+ a_{\tilde{\mu}}^+ - a_\nu^+ a_{\tilde{\nu}}^+ a_\mu^+ a_{\tilde{\mu}}^+ + a_\nu^+ a_\mu^+ a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\mu}}^+ \\ &+ a_\nu^+ a_{\tilde{\nu}}^+ : a_\mu^+ a_{\tilde{\mu}}^+ : - a_\nu^+ a_{\tilde{\nu}}^+ : a_\mu^+ a_{\tilde{\mu}}^+ : + a_\nu^+ a_\mu^+ : a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\mu}}^+ : \\ &+ : a_\nu^+ a_{\tilde{\nu}}^+ : a_\mu^+ a_{\tilde{\mu}}^+ - : a_\nu^+ a_{\tilde{\nu}}^+ : a_\mu^+ a_{\tilde{\mu}}^+ + : a_\nu^+ a_\mu^+ : a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\mu}}^+ \\ &+ : a_\nu^+ a_{\tilde{\nu}}^+ a_\mu^+ a_{\tilde{\mu}}^+ : \end{aligned} \quad (1.44)$$

La théorie de Wick permet décrire l'hamiltonien \hat{H} sous la forme :

$$\hat{H} = E_0 + H_{11} + H_{22} + H_{resid} \quad \text{avec} \quad H_{resid} = H_{22} + H_{33} + H_{44} \quad (1.45)$$

où :

E_0 est une constante qui contient les termes entièrement contractés.

H_{11} contient les produits normaux de deux opérateurs α^+ et α

H_{22} contient les termes en $\alpha^+ \alpha^+$ et $\alpha \alpha$

H_{resid} (terme résiduel) représente le produit normal : $: a_v^+ a_{\tilde{v}}^+ a_{\tilde{\mu}} a_\mu :$

$$\begin{aligned} E_0 &= \sum_{v>0} (\varepsilon_v - \lambda) (v_v^2 + v_{\tilde{v}}^2) - G \sum_{v,\mu>0} (u_v v_v u_\mu v_\mu + v_v^2 \delta_{v\mu} v_v^2 \delta_{v\mu}) \\ &= 2 \sum_{v>0} (\varepsilon_v - \lambda) v_v^2 - G \sum_{v,\mu>0} u_v v_v u_\mu v_\mu - G \sum_{v>0} v_v^4 \\ &= 2 \sum_{v>0} \left(\varepsilon_v - \lambda - \frac{1}{2} G v_v^2 \right) v_v^2 - G \sum_{v>0} u_v^2 v_v^2 \\ E_0 &= 2 \sum_{v>0} \left(\varepsilon_v - \lambda - \frac{G}{2} v_v^2 \right) v_v^2 - \frac{\Delta^2}{G} \end{aligned} \quad (1.46)$$

où l'on a posé :

$$\Delta = G \sum_{v>0} u_v v_v \quad (1.47)$$

qui mesure la demi-largeur du gap.

Les détails des calculs de H_{11} et H_{22} se trouvant à l'annex.

L'expression de H_{11} s'écrit alors :

$$H_{11} = \sum_{v>0} \left\{ (\varepsilon_v - \lambda) - G v_v^2 (u_v^2 - v_v^2) + 2G u_v v_v \sum_{\mu>0} u_\mu v_\mu \right\} (\alpha_v^+ \alpha_{\bar{v}} + \alpha_{\bar{v}}^+ \alpha_v) \quad (1.48)$$

L'expression de H_{22} s'écrit :

$$H_{22} = \sum_{v>0} \left[2 (\varepsilon_v - \lambda - G v_v^2) u_v v_v - G (u_v^2 - v_v^2) \sum_{\mu>0} u_\mu v_\mu \right] (\alpha_v^+ \alpha_{\bar{v}}^+ + \alpha_{\bar{v}} \alpha_v) \quad (1.49)$$

L'expression de H_{resid} s'écrit ;

$$H_{resid} = -G \sum_{v\mu>0} : a_v^+ a_{\bar{v}}^+ a_{\bar{\mu}} a_\mu : \quad (1.50)$$

On a alors :

$$\langle \hat{H} \rangle = E_0 = 2 \sum_{v>0} \left(\varepsilon_v - \lambda - \frac{G}{2} v_v^2 \right) v_v^2 - G \left(\sum_{v>0} u_v v_v \right)^2 \quad (1.51)$$

En néglige le terme v_v^4 dans l'expression (1.46) on peut supposer que v_v^4 est suffisamment petite, il vient :

$$E_0 = 2 \sum_{v>0} (\varepsilon_v - \lambda) v_v^2 - G \left(\sum_{v>0} u_v v_v \right)^2 \quad (1.52)$$

L'approximation des quasi particules indépendantes consiste a annuler le terme H_{22} et à négliger les termes résiduel.

L'hamiltonien auxilaree \hat{H} s'écrit alors :

$$\hat{H} = E_0 + \sum_{\nu>0} E_\nu (\alpha_\nu^+ \alpha_\nu + \alpha_{\tilde{\nu}}^+ \alpha_{\tilde{\nu}}) \quad (1.53)$$

où :

$$E_\nu = \sqrt{(\varepsilon_\nu - \lambda - Gv_\nu^2)^2 + \Delta^2} \quad (1.54)$$

est l'énergie d'une quasi particule.

Ainsi, la condition de normalisation du nombre de particules s'écrit :

$$\begin{aligned} n &= \langle BCS | N | BCS \rangle \\ n &= \langle BCS | \sum_\nu a_\nu^+ a_\nu | BCS \rangle = \langle BCS | \sum_{\nu>0} (\alpha_\nu^+ \alpha_\nu + \alpha_{\tilde{\nu}}^+ \alpha_{\tilde{\nu}}) | BCS \rangle \\ &= \langle BCS | \sum_{\nu>0} [(u_\nu \alpha_\nu^+ + v_\nu a_{\tilde{\nu}}) (u_\nu \alpha_\nu + v_\nu a_{\tilde{\nu}}^+) + (u_\nu \alpha_{\tilde{\nu}}^+ - v_\nu a_\nu) (u_\nu \alpha_{\tilde{\nu}} - v_\nu a_\nu^+)] | BCS \rangle \\ &= \langle BCS | \sum_{\nu>0} v_\nu^2 (\delta_{\tilde{\nu}\nu} - a_{\tilde{\nu}}^+ \alpha_{\tilde{\nu}}) + v_\nu^2 (\delta_{\nu\nu} - a_\nu^+ a_\nu) | BCS \rangle \\ n &= \sum_{\nu>0} 2v_\nu^2 \end{aligned} \quad (1.55)$$

Les probabilités d'occupation et d'inoccupation, après les détails des calculs (voir l'annexe), s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} v_\nu^2 &= \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{\sqrt{(\varepsilon_\nu - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right\} \\ u_\nu^2 & \end{aligned} \quad (1.56)$$

De même la condition de conservation du nombres de particules, s'écrit :

$$n = \sum_{\nu>0} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_\nu - \lambda - Gv_\nu^2}{\sqrt{(\varepsilon_\nu - \lambda - Gv_\nu^2)^2 + \Delta^2}} \right\} \quad (1.57)$$

Les équations de gap sont alors :

$$\Delta = G \sum u_\nu v_\nu \quad (1.58)$$

L'énergie du système est définie par :

$$\begin{aligned}
 E_{BCS} &= \langle BCS | H | BCS \rangle \\
 &= \langle BCS | (\hat{H} + \lambda N) | BCS \rangle \\
 &= \langle BCS | \hat{H} | BCS \rangle + \lambda \langle BCS | N | BCS \rangle \\
 &= E_0 + 2\lambda \sum_{\nu > 0} v_\nu^2
 \end{aligned} \tag{1.59}$$

En remplaçant l'expression E_0 dans cette dernière, on trouve :

$$E_{BCS} = 2 \sum_{\nu > 0} \varepsilon_\nu v_\nu^2 - G \left(\sum_{\nu > 0} u_\nu v_\nu \right)^2 \tag{1.60}$$

On remplace l'expression (1.58) dans cette dernière expression, l'énergie du système devient :

$$E_{BCS} = 2 \sum_{\nu > 0} \varepsilon_\nu v_\nu^2 - \frac{\Delta^2}{G} \tag{1.61}$$

Chapitre 2

L'appariement nucléaire au moyen du rayon de proton

2.1 Introduction

L'hypothèse de base de l'approximation des particules indépendantes consiste dans le fait que le mouvement de chaque nucléon ne dépend pas explicitement du mouvement des autres nucléons. Chaque nucléon se meut dans un potentiel créé par les autres nucléons. Toutefois, si les modèles à particules indépendantes ont permis d'expliquer un certain nombre de phénomènes comme, entre autres, les états excités, l'existence des couches et des nombres magiques etc..., ils sont incapables d'en expliquer d'autres comme la déformation du noyau, les réactions nucléaires, la fission nucléaire, etc.

L'objet du présent chapitre est d'inclure l'appariement nucléaire entre particules identiques dans l'expression de rayons quadratiques du système protons.

On commencera dans ce chapitre à trouver la fonction d'onde ou état BCS d'un système pair de particule puis on établie les états excités des particules dans le noyau et leurs énergies et en fin l'expression de rayon quadratique du système protons sera établie.

2.2 Fonction d'onde BCS

2.2.1 L'état BCS

Dans l'approximation des quasi particules indépendantes l'état fondamental $|\psi\rangle = |BCS\rangle$ du système de particules est le vide de quasi particules. Il peut être obtenu à partir du vrai vide de particules $|0\rangle$ par élimination dans ce dernier de toutes les quasi particules.

On peut donc écrire :

$$|\psi\rangle = |BCS\rangle = \prod_{v>0} \alpha_v \alpha_{\bar{v}} |0\rangle \quad (2.1)$$

En utilisant la transformation de Bogoliubov-Valatin inverse, l'expression (2.1) devient :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \prod_{v>0} (u_v a_v - v_v a_{\bar{v}}^+) (u_v a_{\bar{v}} + v_v a_v^+) |0\rangle \\ &= \prod_{v>0} (u_v^2 a_v a_{\bar{v}} + u_v v_v a_v a_v^+ - v_v u_v a_{\bar{v}}^+ a_{\bar{v}} - v_v^2 a_{\bar{v}}^+ a_v^+) |0\rangle \\ &= \prod_{v>0} [u_v v_v (\delta_{v\bar{v}} - a_v^+ a_v) - v_v^2 a_{\bar{v}}^+ a_v^+] |0\rangle \\ |\psi\rangle &= \prod_{v>0} (u_v v_v - v_v^2 a_{\bar{v}}^+ a_v^+) |0\rangle = \prod_{v>0} v_v (u_v + v_v a_v^+ a_{\bar{v}}^+) |0\rangle \end{aligned} \quad (2.2)$$

En tenant compte du fait que l'état $|\psi\rangle$ ou $|BCS\rangle$ doit être orthonormalisé soit :

$$\begin{aligned} \langle\psi|\psi\rangle &= \prod_{v>0} v_v^2 \langle 0| (u_v + v_v a_{\bar{v}} a_v) (u_v + v_v a_v^+ a_{\bar{v}}^+) |0\rangle \\ &= \prod_{v>0} v_v^2 \langle 0| (u_v^2 + u_v a_v^+ a_{\bar{v}}^+ + v_v u_v a_{\bar{v}} a_v + v_v^2 a_{\bar{v}} a_v a_v^+ a_{\bar{v}}^+) |0\rangle \\ \langle\psi|\psi\rangle &= \prod_{v>0} v_v^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Après l'orthonormalisation, la fonction d'onde s'écrit comme :

$$|\psi\rangle = \prod_{v>0} (u_v + v_v a_v^+ a_{\bar{v}}^+) |0\rangle \quad (2.4)$$

On voit bien dans cette dernière expression que les particules sont regroupées par paires. D'autre part, on constate que l'état $|BCS\rangle$ n'est pas état propre de l'opérateur nombre de particules N , car cet état ne conduit pas à un nombre défini de particules.

Ceci signifie que l'état $|BCS\rangle$ peut s'écrire comme suit :

$$|\psi\rangle = a_0 |N = 0\rangle + a_2 |N = 2\rangle + a_4 |N = 4\rangle + \dots \quad (2.5)$$

L'état $|BCS\rangle$ est donc une superposition d'états correspondant à différents nombre de paires. Remarquons d'autre part que l'état $|BCS\rangle$ tel que nous l'avons écrit ne peut s'appliquer qu'à des noyaux pair-pairs puisqu'il ne peut contenir que de paires de particules.

2.2.2 Valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules

Dans le but de mesurer les fluctuations du nombre de particules, calculons la valeur moyenne en commençant par calculer l'action de N sur l'état $|BCS\rangle$. Compte tenu (1.27) et (2.4), soit :

$$\begin{aligned} N |\psi\rangle &= \sum_{v>0} (\alpha_v^+ \alpha_v + \alpha_{\bar{v}}^+ \alpha_{\bar{v}}) \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^+ a_{\bar{j}}^+) |0\rangle \\ &= \sum_{v>0} \alpha_v^+ \alpha_v \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^+ a_{\bar{j}}^+) |0\rangle + \sum_{v>0} \alpha_{\bar{v}}^+ \alpha_{\bar{v}} \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^+ a_{\bar{j}}^+) |0\rangle \end{aligned} \quad (2.6)$$

Calculons le premier terme :

$$\begin{aligned}
\sum_{v>0} \alpha_v^+ \alpha_v \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle &= \sum_{v>0} \alpha_v^+ \alpha_v (u_v + v_v a_v^+ a_v^+) |0\rangle \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle \\
&= \sum_{v>0} (u_v \alpha_v^+ \alpha_v + v_v a_v^+ a_v \alpha_v^+ \alpha_v^+) |0\rangle \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle \\
&= \sum_{v>0} v_v a_v^+ (\delta_{vv} - a_v^+ a_v) \alpha_v^+ |0\rangle \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle \\
&= \sum_{v>0} v_v (a_v^+ \alpha_v^+ + a_v^+ a_v^+ a_v \alpha_v^+) |0\rangle \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle \\
&= \sum_{v>0} v_v (a_v^+ \alpha_v^+ + a_v^+ a_v^+ (\delta_{v\bar{v}} - \alpha_{\bar{v}}^+ a_v)) |0\rangle \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle \\
&= \sum_{v>0} v_v a_v^+ \alpha_{\bar{v}}^+ \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle \tag{2.7}
\end{aligned}$$

Calculon le deuxième terme :

$$\begin{aligned}
\sum_{v>0} \alpha_{\bar{v}}^+ \alpha_{\bar{v}} \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle &= \sum_{v>0} \alpha_{\bar{v}}^+ \alpha_{\bar{v}} (u_v + v_v a_v^+ a_v^+) |0\rangle \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle \\
&= \sum_{v>0} (u_v \alpha_{\bar{v}}^+ \alpha_{\bar{v}} + v_v a_v^+ a_{\bar{v}} a_v^+ a_{\bar{v}}^+) |0\rangle \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle \\
&= \sum_{v>0} v_v a_v^+ (\delta_{v\bar{v}} - a_v^+ a_{\bar{v}}) a_{\bar{v}}^+ |0\rangle \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle \\
&= - \sum_{v>0} v_v (a_v^+ a_v^+ a_{\bar{v}} a_{\bar{v}}^+) |0\rangle \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle \\
&= - \sum_{v>0} v_v a_v^+ a_v^+ (\delta_{\bar{v}\bar{v}} - a_{\bar{v}}^+ a_{\bar{v}}) |0\rangle \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle \\
&= \sum_{v>0} v_v a_v^+ \alpha_{\bar{v}}^+ \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle \tag{2.8}
\end{aligned}$$

Alors :

$$N |\psi\rangle = 2 \sum_{v>0} v_v a_v^+ \alpha_{\bar{v}}^+ \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle \tag{2.9}$$

On a :

$$\begin{aligned} \langle \psi | &= \langle 0 | \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^\dagger a_j) \\ \langle \psi | N | \psi \rangle &= \langle 0 | \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^\dagger a_j) 2 \sum_{\nu>0} v_\nu a_\nu^\dagger \alpha_\nu^\dagger \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^\dagger a_j^\dagger) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.10)$$

La valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules s'écrit :

$$\langle \psi | N | \psi \rangle = 2 \sum_{\nu>0} v_\nu^2 \quad (2.11)$$

2.2.3 Les états excités

Un noyau atomique peut être excité dans un état vibrationnel qui est indépendant de l'appariement des nucléons, comme il peut être excité dans un état rotationnel dans le cas non sphérique. En dehors de ces deux cas, on peut également avoir des états excités par brisure des paires.

Considérons dans un premier temps, l'état excité à une quasi particule, il est donné par :

$$|v\rangle = |\nu_\nu\rangle = \alpha_\nu^\dagger |\psi\rangle \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} |v\rangle &= (u_\nu a_\nu^\dagger - v_\nu a_{\bar{\nu}}) |0\rangle \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^\dagger a_j^\dagger) |0\rangle \\ &= (u_\nu a_\nu^\dagger - v_\nu a_{\bar{\nu}}) (u_\nu + v_\nu a_\nu^\dagger a_{\bar{\nu}}^\dagger) \prod_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} (u_j + v_j a_j^\dagger a_j^\dagger) |0\rangle \\ &= (u_\nu^2 a_\nu^\dagger - u_\nu v_\nu a_\nu^\dagger a_{\bar{\nu}}^\dagger a_\nu^\dagger - u_\nu v_\nu a_{\bar{\nu}} - v_\nu a_{\bar{\nu}} a_\nu^\dagger a_{\bar{\nu}}^\dagger) |0\rangle \prod_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} (u_j + v_j a_j^\dagger a_j^\dagger) |0\rangle \\ &= a_\nu^\dagger \prod_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} (u_j + v_j a_j^\dagger a_j^\dagger) |0\rangle \end{aligned} \quad (2.13)$$

On remarque que l'état du système a un nombre impaire de particules dans l'équation une particule célibataire (in apparié) occupe l'état $|v\rangle$ du modèle à particule indépendante.

Le reste des particules constituent un cœur à un nombre pair de particules, ces dernières étant rangées sous formes de paires sur les états du modèle à particules indépendantes.

L'état excité à deux quasi particules appariées est donné par :

$$\begin{aligned}
|v\tilde{v}\rangle &= |\psi_{v\tilde{v}}\rangle \\
&= \alpha_v^+ \alpha_{\tilde{v}}^+ |\psi\rangle \\
&= (u_v a_v^+ - v_v a_{\tilde{v}}) (u_v a_{\tilde{v}}^+ + v_v a_v) \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle \\
&= (u_v a_v^+ - v_v a_{\tilde{v}}) (u_v a_{\tilde{v}}^+ + v_v a_v) (u_v + v_v a_v^+ a_{\tilde{v}}^+) \prod_{\substack{j>0 \\ v \neq j}} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle \\
&= (-v_v + u_v a_v^+ a_{\tilde{v}}^+) \prod_{\substack{j>0 \\ v \neq j}} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle
\end{aligned} \tag{2.14}$$

2.2.4 Les énergies des états excités

L'énergie correspondante à l'état excité à une quasi particule est obtenue en calculant sur cet état, la valeur moyenne de H' qui se réduit en fait à celle de $E_0 + H_{11}$ soit :

$$\begin{aligned}
\langle \nu | H' | \nu \rangle &= \langle \nu | E_0 - H_{11} | \nu \rangle \\
&= \langle \nu | \left[E_0 + \sum_{k>0} a_k^+ a_k + a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{k}} \right] a_k^+ | \nu \rangle \\
&= \langle \nu | \left[E_0 + \sum_{k>0} E_k \delta_{k\nu} \right] a_k^+ | \nu \rangle \\
&= E_0 + E_\nu \geq E_0 + \Delta
\end{aligned} \tag{2.15}$$

L'énergie correspondante à l'état excité à deux quasi particules indépendantes appariées s'écrit :

$$\begin{aligned}
\langle v\tilde{v} | \hat{H} | v\tilde{v} \rangle &= \langle v\tilde{v} | (E_0 + H_{11}) | v\tilde{v} \rangle \\
&= \langle v\tilde{v} | \left[E_0 + \sum_{k>0} E_k \left(\alpha_k^+ \alpha_k + \alpha_{\bar{k}}^+ \alpha_{\bar{k}} \right) \right] \alpha_v^+ \alpha_{\tilde{v}}^+ | \psi \rangle \\
&= \langle v\tilde{v} | \left[E_0 + 2 \sum_{k>0} \delta_{kv} E_k \right] \alpha_v^+ \alpha_{\tilde{v}}^+ | \psi \rangle \\
&= E_0 + 2E_v \geq E_0 + 2\Delta
\end{aligned} \tag{2.16}$$

On remarque que pour avoir un état excité à une (respectivement deux) quasiparticule indépendantes, il faut fournir un minimum d'énergie égale à Δ (respectivement 2Δ).

2.3 Rayon quadratique du système proton

Dans l'approche microscopique, l'opérateur rayon quadratique r^2 ne concerne que les protons, il es donné dans le formalisme de la seconde quantification par :

$$r_p^2 = \sum_{i,j} \langle r_p^2 \rangle_{i,j} a_i^+ a_j \tag{2.17}$$

où :

$$\langle r_p^2 \rangle_{i,j} = \langle i | r_p^2 | j \rangle \tag{2.18}$$

Sont des éléments de la matrice de r_p sur la base des particules indépendante.

La valeur moyenne de l'opérateur rayon quadratique r_p^2 relativement à l'état BCS(ou

$|\psi\rangle\rangle$ correspondant à un nombre pair de particules est donnée par :

$$\begin{aligned}
\langle r_p^2 \rangle &= \sum_{ij} \langle i | r_p^2 | j \rangle \langle \psi | a_i^+ a_j | \psi \rangle \\
&= \sum_{ij} \langle i | r_p^2 | j \rangle \langle \psi | (u_i \alpha_i^+ + v_i \alpha_{\bar{i}}) (u_j \alpha_j + v_j \alpha_{\bar{j}}^+) | \psi \rangle \\
&= \sum_{ij} \langle i | r_p^2 | j \rangle v_i^2 \delta_{i\bar{j}} \\
&= \sum_i \langle \tilde{i} | r_p^2 | \tilde{i} \rangle v_i^2 = \sum_i \langle i | r_p^2 | i \rangle v_i^2 \\
&= 2 \sum_{i>0} \langle i | r_p^2 | i \rangle v_i^2
\end{aligned} \tag{2.19}$$

On peut écrire pour le système protons comme suit :

$$\langle r_p^2 \rangle = 2 \sum_{i>0} \langle i | r_p^2 | i \rangle v_p^2 \tag{2.20}$$

Chapitre 3

Résultats numériques et discussion

Dans le présent travail, nous avons élaboré un code de calcul, nous avons utilisée comme programmation le fortran de version 5.5 utilisant la méthode de Newton qui nous permet de résoudre les équations du gap définies par les expressions (1.58) et (2.11) en utilisant un modèle schématisé de Richardson [30]. Nous avons ensuite calculé numériquement le rayon de charge nucléaire pour des noyaux pair-pairs riches en protons dans le cas réaliste en utilisant le modèle de Woods-Saxon [21].

3.1 Probabilités d'occupation et d'inoccupation de particules

Nous avons dans une première étape testé la validité des équations établies dans les chapitres précédents en calculant numériquement les probabilités d'occupation v_ν^2 et d'inoccupation u_ν^2 de particules dans le cas de l'appariement entre particules identiques définies par les expressions (1.56). Nous avons pour cela utilisé le modèle de Richardson. Il consiste en un spectre discret de niveaux d'énergie équidistants doublement dégénérés tels que $\varepsilon_\nu = \nu$. Il simule ainsi le cas des noyaux déformés. On considère dans ce modèle $N = 2P$ particules réparties sur Ω niveaux doublement dégénérés et équidistants, la distance entre 2 niveaux consécutifs étant de $1MeV$.

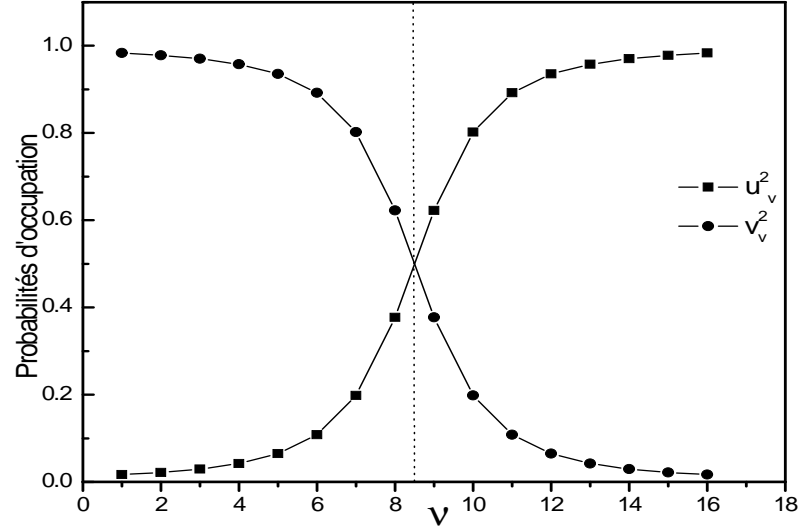


FIG. 3-1: Evolution des probabilités d'occupation (v_v^2 symbole cerclé) et d'inoccupation (u_v^2 symbole carré) de la théorie BCS habituelle en fonction des niveaux, pour $\Omega = 16$ et $G = 0.475$, Le niveau de Fermi est représenté pointillés.

Les probabilités d'occupation sont des quantités très importantes dans la mesure où les quantités calculées sont exprimées en fonction de ces paramètres. Nous avons reporté dans la figure 3-1 les probabilités d'occupation de l'état $|\nu\rangle$ par une paire de particules (v_v^2), et d'inoccupation (u_v^2), dans le cas d'un système possédant $N = 16$ particules, avec $G = 0.475$, et $\Omega = 16$ en fonction des niveaux individuels v . Nous avons représenté en pointillés la position du niveau de Fermi qui est dans ce cas $\lambda = 8.5 MeV$. On constate que quand v_v^2 déminue de 1 à 0, u_v^2 augmente de 0 à 1, donc elles vérifient normalisation ($u_v^2 + v_v^2$) = 1.

3.2 Modèle à particules indépendantes

Dans tout ce qui suit, les calculs numériques sont basés sur les énergies et les états propres d'un champ moyen déformé de Woods-Saxon. Nous avons utilisé pour ce dernier la paramétrisation décrite par N.H.Allal et M.Fellah. [31] avec un nombre de couches maximal $N_{\max} = 12$, ce qui correspond à une dégénérescence totale de niveaux $\Omega = 455$.

Nous avons utilisé les déformations de l'état fondamental évaluées par Goriely et al. [14]. Ces dernières étant déterminées en fonction de β_2 et β_4 (sont des Paramater), nous avons été amenés à les convertir suivant la paramétrisation (c, h) de Pauli [22] utilisée dans le code de calcul dont nous disposons.

3.3 Choix de la constante d'appariement G_{pp}

Le choix de la constante G_{pp} est fondamental pour la détermination de la demi-largeur du gap. Dans le présent travail, nous avons choisi de déduire les valeurs de G_{pp} directement à partir des valeurs "expérimentales" des paramètres du gap Δ_{pp} . Ces dernières sont déterminées à partir des différences de masse pair-impair définies par [32] :

$$\Delta_{pp}^{\text{exp}} = -\frac{1}{8} [M(Z+2, N) - 4M(Z+1, N) + 6M(Z, N) - 4M(Z-1, N) + M(Z-2, N)]$$

où M est la masse expérimentale déduite de la table de Wapstra et al. [32].

Les valeurs des observables constante d'appariement G_{pp} et la demi largeur du gap ont été reportées dans les tableaux (3-1)

Le fait que l'appariement nucléaire n'existe que dans les noyaux tels que $N \simeq Z$ nous a amenés à ne considérer que des noyaux tels que $0 \leq (N - Z) \leq 4$.

Par ailleurs, le nombre limité des valeurs expérimentales des masses disponibles pour le calcul des Δ_{pp}^{exp} a fait que nous nous sommes restreints à la région $16 \leq Z \leq 56$.

3.3.1 Rayon de charge nucléaire

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'observable rayon de charge nucléaire (r_c^2). Afin de pouvoir effectuer des comparaisons avec des données existantes, nous avons évalué la quantité [12] :

$$r_c = \sqrt{r_p^2 + 0.64} \quad (3.1)$$

où

$$r_p = \sqrt{\frac{\langle r_p^2 \rangle}{Z}} \quad (3.2)$$

et Z représente le nombre de particules du système protons.

Nous avons calculé cette quantité dans le cas de l'appariement entre particules identiques notée dans ce qui suit r_p . Les résultats correspondants sont regroupés dans le tableau (3-1) pour le système protons. On constate alors que la prise en compte de l'appariement nucléaire se traduit par des variations dans les valeurs du rayon de charge nucléaire pour les noyaux étudiés.

Nos résultats sont comparés aux données théoriques et expérimentales existantes : nous avons joint les résultats de Goriely et al. [14] calculés par la méthode non relativiste d'Hartree-Fock (HF), les résultats de Lalazissis et al. [12] calculé par la méthode du champ moyen relativiste (RMF) et les valeurs expérimentales [19].

TAB. 3.1: Comparaison entre les valeurs de rayon de charge (fm) de quelques noyaux pairs-pairs, le gap d'appariement δ_{app} (MeV) (colonne 2), le constant appariement G_{pp} (MeV) (colonne 3), le rayon de charge (fm) (colonne 4) et le rayon charge par la méthode d'Hartree-Fock (HF) (colonne 5)(Ref[10]), par la méthode du champ moyen relativiste (RMF) (colonnes 6)(Ref. [11], et les valeurs expérimentales (colonne 7)(Ref.[12]) .

Noyau	δ_{pp}	G_{pp}	r_c	r_{c-HF}	r_{c-RMF}	r_{c-exp}
^{32}S	2.141	0.17859	3.388	3.25	3.282	3.2611
^{34}S	1.562	0.17195	3.314	3.28	3.290	3.2847

suite page suivante

Tab. 3.1 –(suite)

Noyau	δ_{pp}	G_{pp}	r_c	r_{c-HF}	r_{c-RMF}	r_{c-exp}
^{36}S	1.522	0.17136	3.306	3.30	3.309	3.2985
^{36}Ar	2.265	0.17143	3.482	3.38	3.413	3.3905
^{38}Ar	1.440	0.16197	3.388	3.40	3.410	3.4028
^{40}Ar	1.776	0.16744	3.422	3.41	3.413	3.4274
^{40}Ca	2.389	0.16624	3.576	3.48	3.469	3.4776
^{42}Ca	2.110	0.16500	3.537	3.49	3.470	3.5081
^{44}Ca	2.089	0.16178	3.567	3.52	3.470	3.5179
^{44}Ti	2.632	0.16009	3.704	3.57	3.587	3.6115
^{46}Ti	2.092	0.15490	3.673	3.60	3.571	3.6070
^{48}Ti	1.895	0.15378	3.632	3.60	3.690	3.5921
^{48}Cr	2.128	0.15075	3.764	3.68	3.584	
^{50}Cr	1.696	0.14756	3.716	3.68	3.672	3.6588
^{52}Cr	1.578	0.14560	3.697	3.67	3.630	3.6452
^{52}Fe	1.991	0.14446	3.834	3.74	3.721	
^{54}Fe	1.496	0.13742	3.765	3.74	3.677	3.6933
^{56}Fe	1.571	0.14121	3.783	3.75	3.715	3.7377
^{56}Ni	2.077	0.13985	3.885	3.79	3.709	
^{58}Ni	1.669	0.13766	3.856	3.81	3.738	3.7757
^{60}Ni	1.664	0.13764	3.873	3.83	3.772	3.8118
^{60}Zn	1.595	0.12890	3.936	3.87	3.883	
^{62}Zn	1.402	0.12527	3.941	3.90	3.906	
^{64}Zn	1.430	0.12707	3.929	3.92	3.927	3.9283
^{64}Ge	1.807	0.12483	4.027	3.79	3.985	
^{66}Ge	1.586	0.12295	4.016	4.00	4.011	
^{68}Ge	1.608	0.12264	4.057	4.02	4.024	
suite page suivante						

Tab. 3.1 –(suite)

Noyau	δ_{pp}	G_{pp}	r_c	r_{c-HF}	r_{c-RMF}	r_{c-exp}
^{70}Ge	1.551	0.12304	4.021	4.03	4.028	4.0414
^{68}Se	1.909	0.12224	4.110	4.07	4.089	
^{70}Se	1.754	0.12096	4.099	4.08	4.101	
^{72}Se	1.799	0.12078	4.133	4.10	4.107	
^{74}Se	1.807	0.12242	4.110	4.11	4.109	4.0968
^{72}Kr	2.001	0.12242	4.110	4.16	4.180	4.1635
^{74}Kr	1.535	0.11727	4.391	4.25	4.213	4.1870
^{76}Kr	1.675	0.11901	4.530	4.24	4.218	4.2020
^{78}Kr	1.799	0.11907	4.188	4.24	4.176	4.2038
^{78}Sr	1.333	0.11380	4.370	4.29	4.288	4.2561
^{80}Sr	1.616	0.11705	4.364	4.30	4.225	4.2562
^{82}Sr	1.074	0.10579	4.169	4.21	4.218	4.2478
^{82}Zr	1.420	0.11085	4.394	4.32	4.280	
^{84}Zr	1.448	0.10894	4.245	4.26	4.282	
^{86}Zr	1.506	0.10982	4.254	4.27	4.268	
^{86}Mo	1.153	0.10111	4.289	4.30	4.316	
^{88}Mo	1.589	0.10751	4.317	4.31	4.316	
^{90}Mo	1.598	0.10790	4.323	4.32	4.315	4.3265
^{90}Ru	1.783	0.10726	4.388	4.36	4.368	
^{92}Ru	1.542	0.10458	4.378	4.36	4.360	
^{94}Ru	1.327	0.10164	4.374	4.37	4.354	
^{94}Pd	1.44	0.10215	4.431	4.41	4.401	
^{96}Pd	1.318	0.10069	4.430	4.41	3.393	
^{98}Pd	1.348	0.10147	4.438	4.43	4.415	
^{98}Cd	1.373	0.10232	4.489	4.45	4.430	
suite page suivante						

Tab. 3.1 –(suite)

Noyau	δ_{pp}	G_{pp}	r_c	r_{c-HF}	r_{c-RMF}	r_{c-exp}
^{100}Cd	1.401	0.10332	4.496	4.47	4.452	
^{102}Cd	1.223	0.10151	4.495	4.48	4.482	4.4810
^{104}Sn	1.650	0.10595	4.569	4.52	4.504	
^{106}Sn	1.708	0.10659	4.579	4.54	4.527	
^{108}Te	1.291	0.95920	4.635	4.60	4.605	
^{110}Te	1.348	0.96464	4.653	4.63	4.623	
^{112}Xe	1.386	0.9278	4.730	4.70	4.686	
^{114}Xe	1.248	0.9188	4.720	4.70	4.705	
^{118}Ba	1.106	0.86892	4.833	4.80	4.789	

Les résultats obtenus dans le tableau ont été reportés dans les figures (3-2 à 3-10) pour les cas $(N - Z) = 0, 2$ et 4 , Ces derniers sont trace par originepro8. On constate à travers ces figures que l'effet d'appariement nucléaire est plus important, en moyenne, quand $(N - Z) = 0$ que lorsque $(N - Z) = 2$ ou lorsque $(N - Z) = 4$.

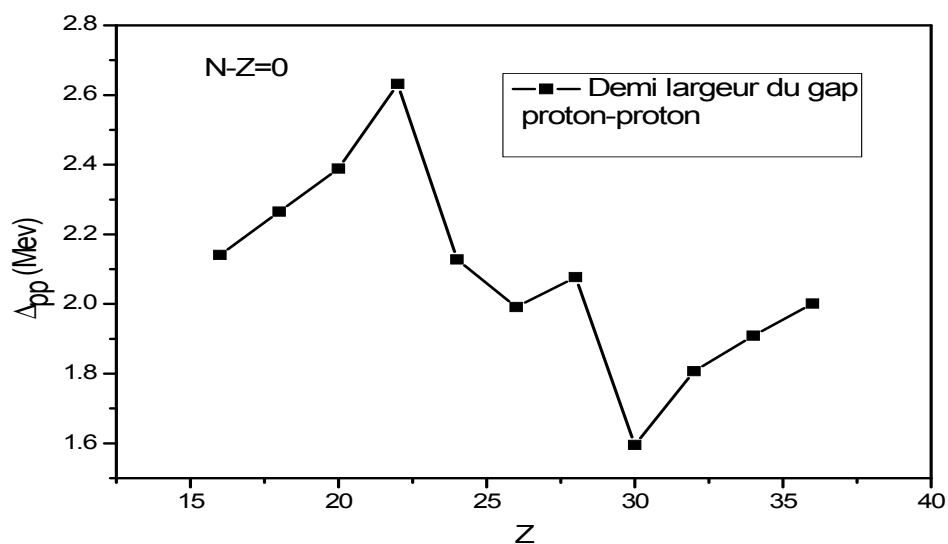


FIG. 3-2: Evolution de la demi largeur du gap du système protons en fonction du nombre de particules du système protons pour $N-Z=0$.

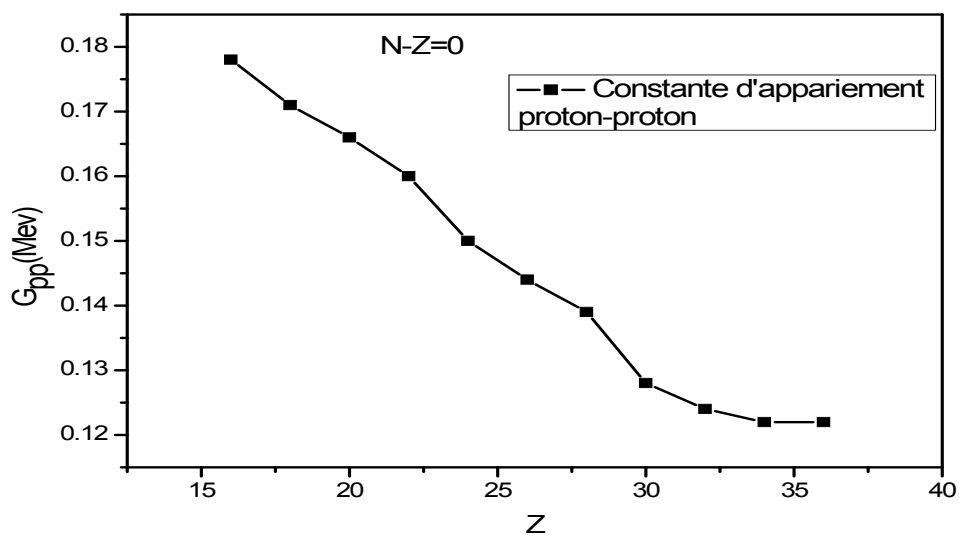


FIG. 3-3: Evolution de la constante d'appariement du système protons en fonction du nombre de particules du système protons pour $N-Z=0$.

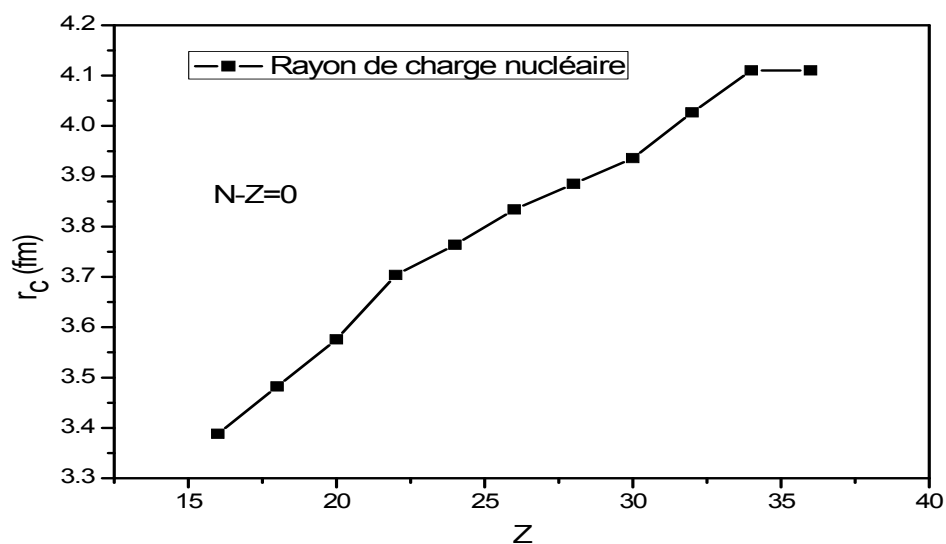


FIG. 3-4: Evolution du rayon de charge nucléaire en fonction du nombre de particules du système protons pour $N-Z=0$.

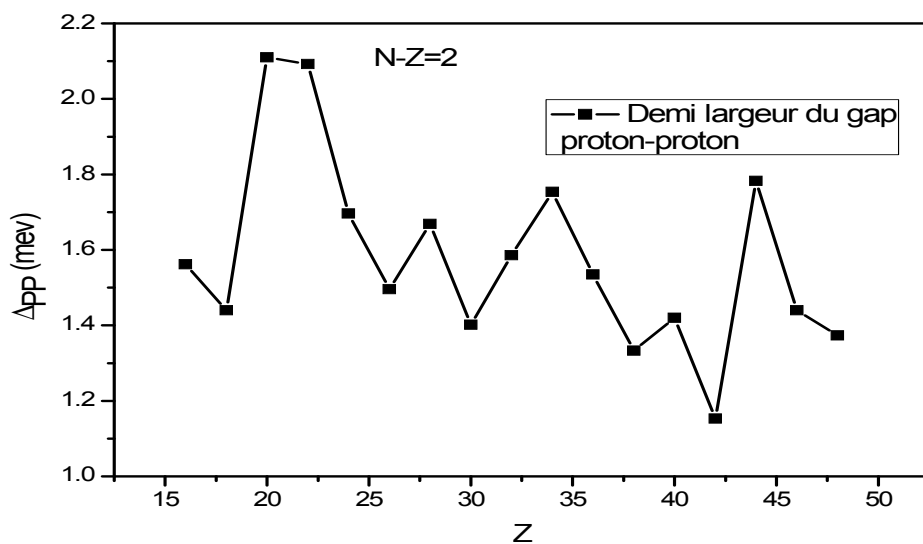


FIG. 3-5: Evolution de la demi largeur du gap du système protons en fonction du nombre de particules du système protons pour $N-Z=2$.

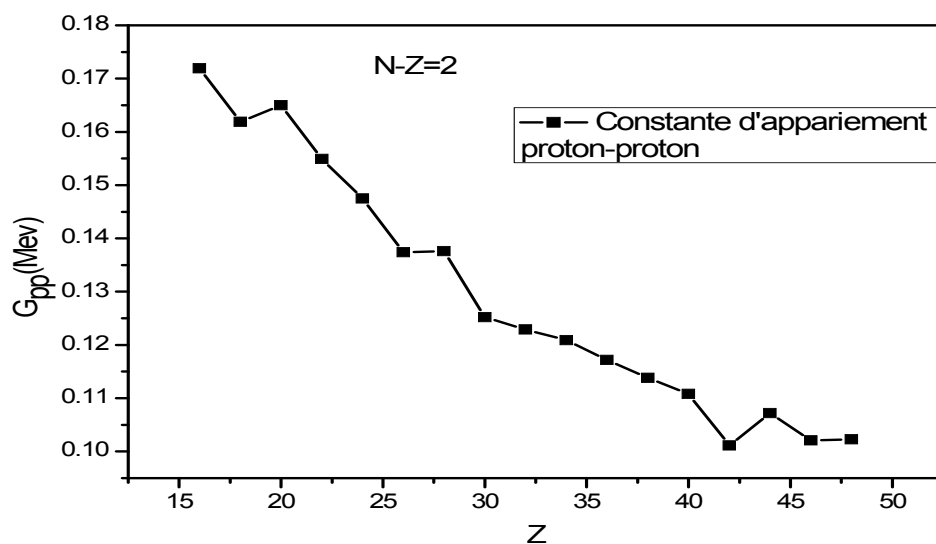


FIG. 3-6: Evolution de la constante d'appariement du système protons en fonction du nombre de particules du système protons pour $N-Z=2$.

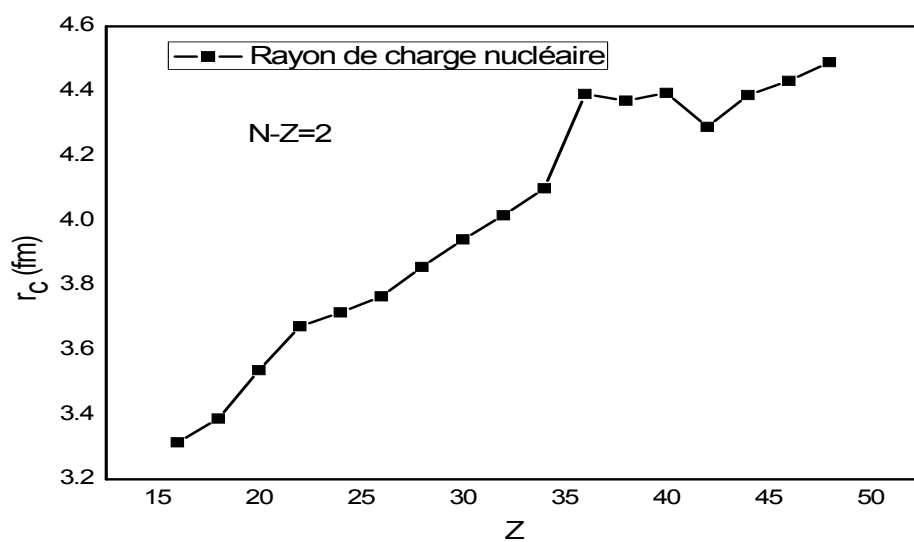


FIG. 3-7: Evolution du rayon de charge nucléaire en fonction du nombre de particules du système protons pour $N-Z=2$.

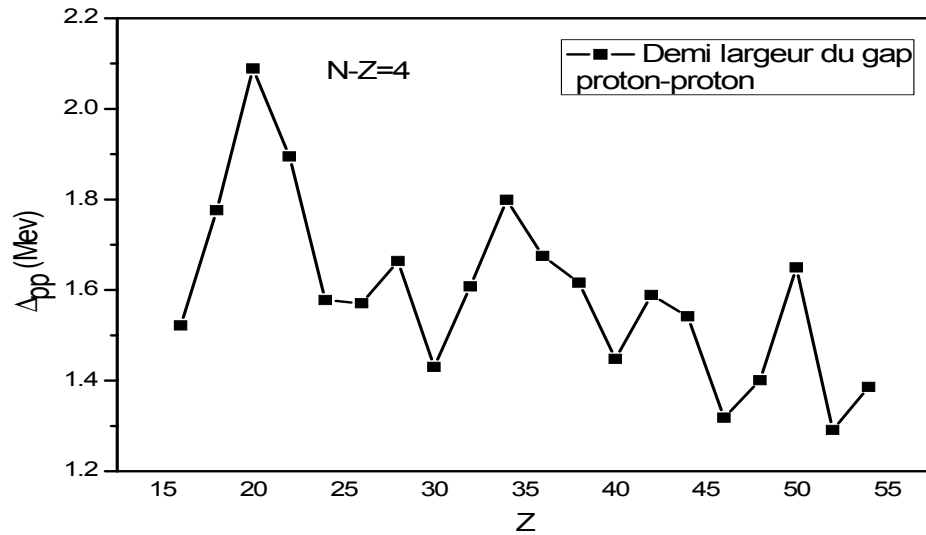


FIG. 3-8: Evolution de la demi largeur du gap du système protons en fonction du nombre de particules du système protons pour $N-Z=4$.

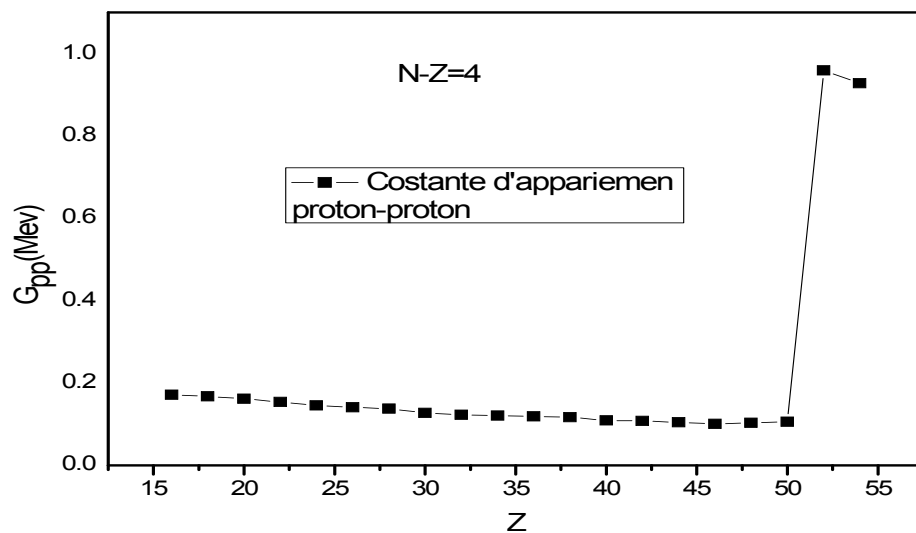


FIG. 3-9: Evolution de la constante d'appariement du système protons en fonction du nombre de particules du système protons pour $N-Z=4$.

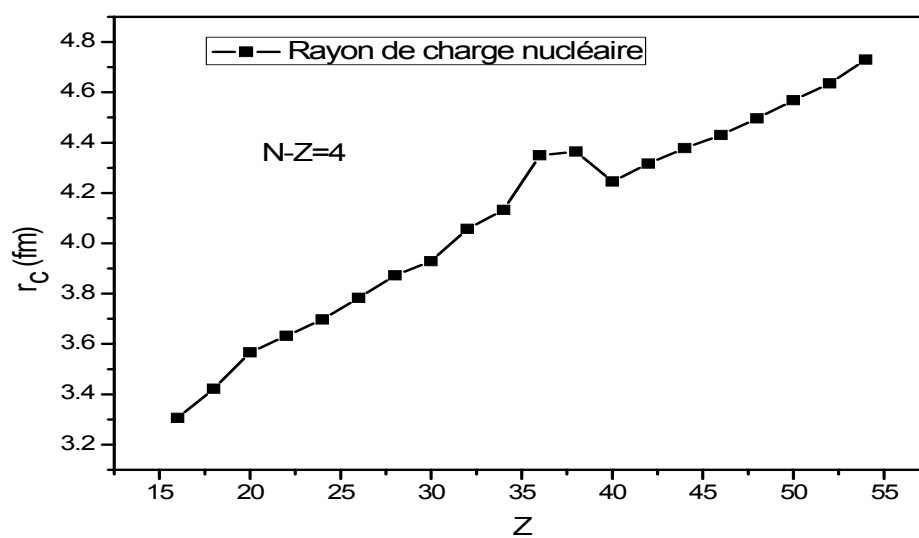


FIG. 3-10: Evolution du rayon de charge nucléaire en fonction du nombre de particules du système protons pour $N-Z=4$.

Chapitre 4

Conclusion

Le présent travail est une contribution à l'étude du rayon de charge nucléaire au moyen de l'appariement nucléaire, pour des noyaux pair-pairs riches en protons. Pour cela, nous avons utilisé la méthode BCS

Dans une première étape, nous avons fait une rappèle sur le modèle de Woods-Saxon qui représente les énergies et états propres d'un champ moyen déformé du système nucléaire. L'hamiltonien du système nucléaire à particules indépendantes à été considéré dans sa forme la plus générale. Cet hamiltonien a été écrit en représentation des opérateurs de création et d'annihilation de particules puis à été diagonalisé approximativement par la méthode Wick. La transformation de Bogoliubov-Valatin qui relie les opérateurs de création et d'annihilation de particules en fonction des opérateurs de création et d'annihilation de quasiparticules à été utilisé pour résoudre l'hamiltonien en représentation de quasi particules et d'établir les équations du gap généralisées dont la demi largeur du gap, l'énergie BCS et les probabilités d'occupation et d'innocuation de particules.

Une expression de l'état BCS a ensuite été déduite qui représente la fonction d'onde de paire particules dans l'états fondamental du noyau. De cette état fondamental, nous avons calculé les états excités et leurs énergies à une et deux quasi particules. Par la suite, une nouvelle expression de rayon de charge nucléaire à été établie.

Dans une seconde étape, nous avons élaboré notre propre code de calcul qui nous a permis d'utiliser aussi bien des modèles schématiques qu'un modèle réaliste. La validité

de la méthode BCS a été étudié dans le cadre du modèle schématique de Richardson. Nous avons pour cela évalué les probabilités d'occupation des niveaux. Il s'avère alors que l'allure de ces dernières donne des résultats acceptables physiquement. Par la suite étape, des cas réalistes ont été considérés en utilisant les énergies à particules indépendantes d'un champ moyen de Woods-Saxon. L'appariement nucléaire ne concernant que les noyaux pour lesquels N est voisin de Z , nous n'avons considéré que des noyaux pair-pairs tels que $0 \leq (N - Z) \leq 4$.

Par ailleurs, nous nous sommes restreints aux noyaux pour lesquels les constante d'appariement $G_{pp'}$ peut être déduite des valeurs "expérimentales" des paramètres du gap, soit dans la région $16 \leq Z \leq 56$.

Les rayon de charge nucléaire (r_c) a été calculé, dans le cas de l'appariement entre particules identiques. Les résultats obtenus ont été comparés aux résultats expérimentaux existants d'une part, et à ceux obtenus en d'autre méthodes d'autre part. Il a été montré que les résultats du présent travail reproduisent convenablement les valeurs expérimentales de r_c .

Nous avons ensuite considéré séparément l'effet de l'appariement nucléaire. Il a été constaté qu'il est varié toutefois en fonction de $(N - Z)$. Il est nettement plus important lorsque $N = Z$ et diminue lorsque les valeurs de $(N - Z)$ augmentent. Ce résultat était prévisible, car il est bien établi que $\Delta_{pp'}$ diminue rapidement en fonction de $(N - Z)$.

En conclusion, l'appariement nucléaire apporte des changements non-négligeables dans les valeurs de r_c , sa prise en compte est donc nécessaire.

Annexes

Annexe A

Equation de gap

L'équation H_{11} s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 H_{11} &= \sum_{v \rangle 0} (u_v^2 \alpha_v^+ \alpha_v - v_v^2 \alpha_{\bar{v}}^+ \alpha_{\bar{v}} + u_v^2 \alpha_{\bar{v}}^+ \alpha_{\bar{v}} - v_v^2 \alpha_v^+ \alpha_v) - \\
 &G \sum_{v \mu \rangle 0} \left[\begin{aligned} &-u_v v_v u_\mu v_\mu (\alpha_{\bar{\mu}}^+ \alpha_{\bar{\mu}} + \alpha_\mu^+ \alpha_\mu + v_v^2 \delta_{v\mu} (u_v^2 \alpha_{\bar{v}}^+ \alpha_{\bar{v}} - v_v^2 \alpha_v^+ \alpha_v)) \\ &-u_v v_v u_\mu v_\mu (\alpha_v^+ \alpha_v + \alpha_{\bar{v}}^+ \alpha_{\bar{v}}) + v_v^2 \delta_{v\mu} (u_v^2 \alpha_v^+ \alpha_v - v_v^2 \alpha_{\bar{v}}^+ \alpha_{\bar{v}}) \end{aligned} \right] \\
 &= \sum_{v \rangle 0} (\varepsilon_v - \lambda) (u_v^2 - v_v^2) (\alpha_v^+ \alpha_v + \alpha_{\bar{v}}^+ \alpha_{\bar{v}}) - G \sum_{v \mu \rangle 0} \left[\begin{aligned} &v_v^2 \delta_{v\mu} (u_v^2 - v_v^2) (\alpha_v^+ \alpha_v + \alpha_{\bar{v}}^+ \alpha_{\bar{v}}) \\ &-2u_v v_v u_\mu v_\mu (\alpha_v^+ \alpha_v + \alpha_{\bar{v}}^+ \alpha_{\bar{v}}) \end{aligned} \right] \\
 H_{11} &= \sum_{v \rangle 0} \left\{ (\varepsilon_v - \lambda) - G v_v^2 (u_v^2 - v_v^2) + 2G u_v v_v \sum_{\mu \rangle 0} u_\mu v_\mu \right\} (\alpha_v \alpha_{\bar{v}}^+ + \alpha_{\bar{v}}^+ \alpha_v) \quad (\text{A.1})
 \end{aligned}$$

L'équation H_2 s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 H_2 &= \sum_{v \rangle 0} 2(\varepsilon_v - \lambda) u_v v_v (\alpha_v^+ \alpha_{\bar{v}}^+ + \alpha_v \alpha_{\bar{v}}) - G \sum_{v \mu \rangle 0} 2v_v^2 \delta_{v\mu} u_v v_v (\alpha_v^+ \alpha_{\bar{v}}^+ + \alpha_v \alpha_{\bar{v}}) \\
 &+ u_v v_v (u_\mu^2 \alpha_{\bar{\mu}} \alpha_\mu - v_\mu^2 \alpha_\mu^+ \alpha_\mu^+) + u_\mu v_\mu (u_\mu^2 \alpha_v^+ \alpha_{\bar{v}}^+ - v_\mu^2 \alpha_{\bar{v}} \alpha_v) \\
 H_2 &= \sum_{v \rangle 0} \left[2(\varepsilon_v - \lambda - G v_v^2) u_v v_v - G (u_v^2 - v_v^2) \sum_{\mu \rangle 0} u_\mu v_\mu \right] (\alpha_v^+ \alpha_{\bar{v}}^+ + \alpha_{\bar{v}} \alpha_v) \quad (\text{A.2})
 \end{aligned}$$

Annexe B

Les probabilités d'occupation et d'inoccupation

La valeur moyenne de \hat{H} s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned}\langle \hat{H} \rangle &= E_0 \\ &= 2 \sum_{v>0} \left(\varepsilon_v - \lambda - \frac{G}{2} v_v^2 \right) v_v^2 - G \left(\sum_{v>0} u_v v_v \right)^2\end{aligned}\quad (\text{B.1})$$

On choisit maintenant u_v et v_v de manière à minimiser E_0 d'une part, et de façon à ce que la valeur moyenne de N soit égale à n_0 d'autre part, on a donc :

$$\frac{\partial E_0}{\partial u_v} = \frac{\partial E_0}{\partial v_v} = 0$$

Si l'on dérive l'expression de E_0 (B.1) par rapport à v_v et en tenant compte de la définition de Δ , on obtient :

$$4 \left(\varepsilon_v - \lambda - G v_v^2 \right) v_v - 2\Delta \left(\frac{\partial u_v}{\partial v_v} v_v + u_v \right) = 0 \quad (\text{B.2})$$

on a :

$$v_v^2 + u_v^2 = 1 \Rightarrow 2u_v \partial u_v = -2v_v \partial v_v = \frac{\partial u_v}{\partial v_v} = \frac{-v_v}{u_v} \quad (\text{B.3})$$

On remplace l'expression (B.3) dans l'expression (B.2) on trouve :

$$4(\varepsilon_v - \lambda - Gv_v^2)v_v - 2\Delta\left(\frac{-v_v^2}{u_v} + u_v\right) = 0 \quad (\text{B.4})$$

On multiple l'équation (B.4) en u_v , cette dernière expression devient alors :

$$4u_v v_v (\varepsilon_v - \lambda - Gv_v^2) - 2\Delta (u_v^2 - v_v^2) = 0 \quad (\text{B.5})$$

Pour résoudre l'équation(B.5), posons le changement de variables suivant :

$$u_v = \cos \theta_v$$

$$v_v = \sin \theta_v$$

puisque $v_v^2 + u_v^2 = 1$

L'expression(B.5) devient alors :

$$(\varepsilon_v - \lambda - Gv_v^2) \sin 2\theta_v = \Delta \cos 2\theta_v \quad (\text{B.6})$$

ou bien

$$\tan 2\theta_v = \frac{\Delta}{\varepsilon_v - \lambda - Gv_v^2}$$

On carré expression (B.6) trouve alors :

$$\begin{aligned} (\varepsilon_v - \lambda - Gv_v^2)^2 \sin^2 2\theta_v &= \Delta^2 \cos^2 2\theta_v \\ \Leftrightarrow (\varepsilon_v - \lambda - Gv_v^2)^2 \sin^2 2\theta_v &= \Delta^2 (1 - \sin^2 2\theta_v) \\ &= [(\varepsilon_v - \lambda - Gv_v^2) + \Delta^2]^2 \sin^2 2\theta_v = \Delta^2 \end{aligned}$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} \sin 2\theta_v &= 2u_v v_v \\ &= \frac{\Delta}{\sqrt{(\varepsilon_v - \lambda - Gv_v^2)^2 + \Delta^2}} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

et

$$\begin{aligned} u_v^2 - v_v^2 &= \cos^2 \theta_v - \sin^2 \theta_v \\ &= \cos 2\theta_v = \sqrt{1 - \sin^2 2\theta_v} \\ &= \sqrt{1 - \frac{\Delta^2}{(\varepsilon_v - \lambda - Gv_v^2)^2 + \Delta^2}} \\ &= \frac{\varepsilon_v - \lambda - Gv_v^2}{\sqrt{(\varepsilon_v - \lambda - Gv_v^2)^2 + \Delta^2}} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

On obtient les expressions des probabilités d'innoculation u_v et d'occupation v_v suivantes :

$$\begin{aligned} u_v^2 \\ v_v^2 \end{aligned} = \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \frac{\varepsilon_v - \lambda - Gv_v^2}{\sqrt{(\varepsilon_v - \lambda - Gv_v^2)^2 + \Delta^2}} \right\} \quad (\text{B.9})$$

Annexe C

L'état excité à deux quasi-particules indépendantes

Soit :

$$\begin{aligned} |v\tilde{\mu}\rangle &= |\Psi_{v\tilde{\mu}}\rangle = \alpha_v^+ \alpha_{\tilde{\mu}}^+ |\Psi\rangle \\ &= (u_v \alpha_v^+ - v_v \alpha_{\tilde{v}}^+) (u_{\mu} \alpha_{\tilde{\mu}}^+ + v_{\mu} \alpha_{\mu}^+) \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle \\ &= (u_v \alpha_v^+ - v_v \alpha_{\tilde{v}}^+) (u_{\mu} \alpha_{\tilde{\mu}}^+ + v_{\mu} \alpha_{\mu}^+) (u_v + v_v a_v^+ a_v^+) (u_{\mu} + v_{\mu} a_{\mu}^+ a_{\mu}^+) \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle \\ &= (u_v^2 a_{\tilde{v}}^+ - v_v^2 a_{\tilde{v}} a_v^+ a_v^+) |0\rangle (u_{\mu}^2 a_{\tilde{\mu}}^+ - v_{\mu}^2 a_{\mu} a_{\mu}^+ a_{\mu}^+) |0\rangle \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle \\ |v\tilde{\mu}\rangle &= ((u_v^2 + v_v^2) a_v^+) ((u_{\mu}^2 + v_{\mu}^2) a_{\tilde{\mu}}^+) |0\rangle \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle \\ &= a_v^+ a_{\tilde{\mu}}^+ \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle \end{aligned} \tag{C.1}$$

Bibliographie

- [1] M. Douici, N.H. Allal, M. Fellah, N. Benhamouda and M.R. Oudih, *Int. J. Mod. Phys.* **E21**, 1250046 (2012).
- [2] M. Douici, Thèse de Doctorat, USTHB (2014).
- [3] N. H. Allal, M. Fellah, M. Douici and M.R. Oudih, *Int. J. Mod. Phys.* **E24**, 1550042(2016).
- [4] M. Fellah, N. H. Allal and M. R. Oudih, *Int. J. Mod. Phys.* **E24**, 1550042(2015).
- [5] M. Douici, N.H. Allal, M. Fellah, N. Benhamouda and M.R. Oudih, *Int. J. Mod. Phys.* **E22**, 1350029 (2013).
- [6] N. H. Allal, M. Fellah, N. Benhamouda and M.R. Oudih, *Phys. Rev.* **C77**, 054310(2008).
- [7] M. Fellah, N. H. Allal, M. Belabbas, M. R. Oudih and N. Benhamouda *Phys. Rev.* **C76**, 047306 (2007).
- [8] N. H. Allal, M. Fellah, M. R. Oudih and N. Benhamouda. *Eur. Phys. J.* **A27**, s01, 301 (2006).
- [9] S. Kerrouchi, N.H. Allal, M. Fellah and M. Douici, *Int. J. Mod. Phys.* **E19**, 1383(2010).
- [10] M. Douici, Thèse de Magister, USTHB (2008).
- [11] B. Nerlo-Pomorska and B. Mach, *Atom. Data Nucl. Data Tables* **60**, 287 (1995).
- [12] G. A. Lalazissis and S. Raman, *Atom. Data Nucl. Data Tables* **71**, 1 (1999)
- [13] L. S. Geng, H. Toki, A. Ozawa and J. Meng, *Nucl. Phys.* **A730**, 80 (2004).

- [14] S. Goriely, F. Tondeur and J.M. Pearson, *Atom. Data Nucl. Data Tables* **77**, 311 (2001).
- [15] N. Benhamouda, N.H. Allal, M. Fellah, and M.R.Oudih, *Int. J. Mod. Phys.* **E14**, 197(2005).
- [16] N. Benhamouda, M. R. Oudih, N. H. Allal and M. Fellah, *Acta Phys. Hung. A : Heavy Ion Phys.* **19**, 191 (2004).
- [17] G. Yeandle, J. Billowes, P. Campbell, E. C. A. Cochrane, P. Deendooven, D. E. Evans, J. A. R. Griffith, J. Huikari, A. Jokinen, I. D. Moore, A. Nieminen, K. Perajarvi, G. Tungate and J. Aysto, *J. Phys. G. : Nucl. Part. Phys.* **26**, 839 (2000).
- [18] Yu. P. Gangrsky, K. P. Marinova, S. G. Zemlyanoi, I. D. Moore, J. Billowes, P. Campbell, K. T. Flanagan, D. H. Forest, J. A. R. Griffith, J. Huikari, R. Moore, A. Nieminen, H. Thayer, G. Tungate and J. Aysto, *J. Phys. G. : Nucl. Part. Phys.* **30**, 1089 (2004).
- [19] I. Angeli, K.P. Marinova, *Atom. Data Nucl. Data Tables* **99**, 69 (2013).
- [20] I. Angeli, *Atom. Data Nucl. Data Tables* **87**, 185 (2004).
- [21] R.D Woods and D.S. Saxon, *Phys. Rev.* **95**, 577(1954).
- [22] H. C. Pauli, *Phys. Rep.* **7C**, 35 (1973).
- [23] Roger D. Woods et David S. Saxon, « Diffuse Surface Optical Model for Nucleon-Nuclei Scattering », *Physical Review*, vol. 95, juillet 1954, p. 577-578 (DOI 10.1103/PhysRev.95.577).
- [24] P. Ring and P. Schuck, *The NuclearMany-Body Problem*, Springer, New York (1980).
- [25] S. G. Nilsson and I. Ragnarsson, *Shapes and Shells in Nuclear Structure*, Cambridge University Press (1995).
- [26] S. T. Belyaev, K. Dan and V. Selsk, *Mat. Fys. Medd.* **11**, 31 (1959).
- [27] J. Bardeen, L.N. Cooper and J.R. Schreifer, *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957).
- [28] N.N. Bogoliubov, *Nuovo Cimento* **7**, 794 (1958).
- [29] J.G. Valatin, *Nuovo Cimento* **7**, 843 (1958).

- [30] R. W. Richardson and N. Sherman, Nucl. Phys. **52**, 221 (1964).
- [31] N. H. Allal and M. Fellah, Phys. Rev. **C50**, 1404 (1994)
- [32] F. Simkovic, Ch. C. Moustakidis, L. Paceaescu, and A. Faessler, Phys. Rev. **C68**, 054319 (2003).