
UNIVERSITÉ DJILALI BOUNAÂMA-KHEMIS MILIANA
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER EN MATHÉMATIQUES

SPÉCIALITÉ : ANALYSE MATHÉMATIQUE ET APPLICATIONS

Présenté par

AMMARI Soumeya

Interprétation géométrique et physique de la dérivation et de l'intégration fractionnaires

Soutenu le 12 Juin 2017 devant le jury composé de

Président du jury : **Mme Leila DJOUAMAI**
Université de Khemis Miliana.
Encadrant : **Mr Maamar BENBACHIR**
Université de Khemis Miliana.
Examineurs : **Mr Mohamed HOUAS**
Université de Khemis Miliana.
Mme Fouzia CHITA
Université de Khemis Miliana.



Dédicace

Je dédie ce travail à :

*La plus chère personne que jamais les mots
peuvent décrire, elle qui a fourni sa vie pour
nous joindre, à ma mère bien aimée.*

*Mon père qu'**ALLAH** lui récompense sa
souffrance et efforts.*

*Mes sœurs et frères ainsi tous mes neveux.
Ma tendre et chère enseignante au primaire
Malika DAOUDI .*

Remerciement

*Tout d'abord, je tiens à remercier **ALLAH** le Tout Puissant et Miséricordieux, de m'avoir inspiré le savoir et surtout de m'avoir muni la santé et la force à élaborer ce modeste mémoire.*

J'exprime toutes mes gratitudes à mon encadrant «Mr Maamar Benbachir» pour les précieux conseils, l'orientation permanente et la patience qu'il m'a sacré durant toute la durée du travail.

Je remercie également les membres de jury Mme Leila DJOUAMAI, Mme Fouzia CHITA et Mr Mohamed HOUAS pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'évaluer mon mémoire.

Toutes mes reconnaissances doivent à tous mes enseignants du cycle primaire à l'université qui ont constitué un apport considérable pour que j'atteigne ce jour et ce lieu.

Mes vifs remerciements vont également à mon support affectif : mes parents, sœurs et frères en particulier «Ahmed», qui ne m'ont pas privé leurs prières et encouragements.

Sans oublier bien sur mes amies qui m'ont soutenu moralement et physiquement tout au long le travail.

Je profite l'occasion ainsi à adresser mes remerciements à mes collègues de Master 2 et aussi de Master 1 .

Resumé

L'interprétation géométrique et physique des opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaires est un sujet de recherche depuis trois siècles. Dans ce travail, on essaye de présenter tôt possible des suggestions qui répondent à ce problème. En effet, les dérivées fractionnaires des fonctions polynomiales seront physiquement interprétées aussi on introduit une interprétation géométrique et physique de l'intégration et de la dérivation fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et de Caputo, on donne par l'occasion une interprétation géométrique des potentiels de Riesz et de Feller. On termine comme illustration, par la considération d'une récente approche de dérivation fractionnaire.

Mots-clés : Intégration fractionnaire, dérivation fractionnaire, interprétation géométrique et physique.

Abstract

The geometrical and physical interpretation of fractional integration and fractional derivation had been a search subject for more than 300 years. In this paper, we try such as possible to present suggestions that answer to this problem. Indeed, a fractional order derivative of polynomial functions will be interpreted physically, we also introduce a geometrical interpretation of fractional integration and derivation for the Riemann-Liouville and Caputo approaches, and by the way we give a geometric interpretation of the Riesz and Feller potentials. To finish the work, we illustrate the result of physical meaning by treating a new approach of fractional derivation.

Key-words : Fractional integration, fractional derivation, geometrical and physical interpretation.

Table des matières

Introduction	4
1 Outils de base	5
1.1 Fonctions spéciales	5
1.2 Opérateur d'intégration de Riemann-Liouville	6
1.3 Opérateur de dérivation de Riemann-Liouville	7
1.4 Opérateur de dérivation de Caputo	8
1.5 Intégrale de Riemann-Stieltjes	9
2 Préliminaire	12
2.1 Interprétation physique de la dérivation fractionnaire des fonctions polynomiales	12
2.1.1 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville :	12
2.1.2 La dérivée fractionnaire au sens de Caputo	13
2.1.3 Représentation graphique et interprétation physique	14
2.2 Les points critiques de la dérivée fractionnaire des fonctions polynomiales	16
3 Interprétation géométrique et physique de l'intégration fractionnaire	19
3.1 Interprétation géométrique de l'intégration fractionnaire : Ombres sur les plans	19
3.1.1 Intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville	19
3.1.2 Intégrale fractionnaire à droite de Riemann-Liouville	22
3.1.3 Potentiel de Riesz	24
3.1.4 Potentiel de Feller	26
3.2 Deux types de temps	27
3.2.1 L'utilisation de deux types de temps	27
3.2.2 Etude de la fonction $g_t(\tau)$ comme une transformée de l'échelle de temps :	30
3.3 Interprétation physique de l'intégration fractionnaire	31
3.3.1 Interprétation physique de l'intégrale de Stieltjes	31
3.3.2 Interprétation physique de l'intégrale fractionnaire	32
3.3.3 Interprétation géométrique et physique de l'intégrale de type convolution de Volterra	33
4 Interprétation physique de la dérivation fractionnaire	35
1 Interprétation physique de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	35
2 Interprétation physique de la dérivation fractionnaire au sens de Caputo	36

3	Une nouvelle approche de dérivation fractionnaire	37
3.1	Définition de la nouvelle approche de dérivation fractionnaire	41
3.2	Interprétation physique de la nouvelle dérivation fractionnaire	46
	Conclusion	51
	Bibliographie	52

Introduction

Le formalisme de la dérivation et de l'intégration fractionnaires consiste à généraliser la notion de ces opérations à l'ordre non-entier. Le calcul fractionnaire peut modéliser des phénomènes physiques mieux que le calcul différentiel classique, c'est pourquoi, il est devenu d'une grande importance durant les années récentes. Il existe en général, des interprétations géométriques et physiques de la dérivation et de l'intégration d'ordre entier or, existe-il une telle signification de ces opérateurs d'ordre fractionnaire? La question qui a été posée dans plusieurs conférences de mathématiques n'a pas eu une réponse car il n'y avait aucune idée acceptable pour le sujet pour plus de 300 ans.

En raison de la nécessité d'une interprétation géométrique et physique de l'intégration et de la différentiation fractionnaires, beaucoup d'efforts ont été fournis par les mathématiciens pour les établir.

Ce mémoire se compose de quatre chapitres, organisés de telle sorte que chacun s'adresse à une partie de l'interprétation d'une interprétation géométrique et physique des opérateurs fractionnaires pour simplifier le traitement du thème.

Dans le premier chapitre intitulé « Outils de base », on introduit quelques notions de base essentielles qui seront utilisées pour l'établissement des théorèmes et des définitions. La dérivée fractionnaire de la fonction puissance t^α se manie aisément à cause de l'expression explicite de $D^\alpha(t^\beta)$, ainsi son interprétation physique. Cette étude est faite comme un préliminaire nommé en deuxième chapitre de notre sujet fondamental.

Le troisième chapitre comporte deux parties : la première aborde la signification géométrique de l'intégration fractionnaire, dans laquelle on commence par les intégrales à gauche et à droite de Riemann-Liouville puis on donne un résultat déductif des potentiels de Riesz et de Feller comme étant des intégrales fractionnaires. Quant à la deuxième partie, on se place dans un cadre physique, c'est-à-dire : l'interprétation physique de l'intégrale de Stieltjes et des intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville et par suite l'intégrale de type convolution de Volterra sachant qu'elle est une généralisation de celle de Riemann-Liouville.

Le comportement asymptotique des fonctions peut être analysé par la vitesse ou le taux de variations des fonctions lorsque la variable indépendante change d'une petite valeur, ce résultat est présenté dans le quatrième chapitre comme une interprétation physique de la dérivation fractionnaire au sens de Caputo et au sens de Riemann-Liouville. Dans ce dernier chapitre, on définit également une nouvelle approche de dérivation fractionnaire qui nous permet d'étudier une telle opération sur la fonction constante et la fonction identique.

Chapitre 1

Outils de base

1.1 Fonctions spéciales

La fonction Gamma d'Euler :

La fonction factorielle joue un rôle important dans le calcul intégral d'ordre entier comme étant un des outils combinatoires fondamentaux. La fonction Gamma a le même rôle dans le calcul fractionnaire et elle est basiquement donnée par l'intégrale :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.1)$$

L'exponentielle entraîne la convergence de cette intégrale à ∞ , la convergence au point zero s'assure pour tout nombre complexe du demi-plan droit du plan complexe ($\Re(z) > 0$). Si on substitue dans l'équation (1.1) e^{-t} par la limite

$$e^{-t} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \quad (1.2)$$

Et en intégrant n fois par parties, on obtient la définition suivante de la limite de la fonction Gamma :

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} \quad (1.3)$$

Même si on a dérivé cette expression pour ($\Re(z) > 0$), il est possible de l'utiliser également comme la définition de la fonction Gamma aux points dont la partie réelle est négative sauf les nombres entiers négatifs. Donc la fonction Gamma est définie pour tout $z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$ [8].

Propriétés de la fonction Gamma :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

La fonction Béta d'Euler

La fonction Béta est très importante pour le calcul de la dérivée fractionnaire de la fonction de puissance. Elle est définie par l'intégrale à deux paramètres suivante :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (1.4)$$

Pour tout x, y satisfaisant $\Re(x) > 0, \Re(y) > 0$.

Propriétés de la fonction Béta

1. $B(x, y) = B(y, x)$ pour tout x, y tels que $\Re(x) > 0, \Re(y) > 0$.
2. $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

A l'aide de la fonction Béta, on peut obtenir des formules utiles de la fonction Gamma

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \\ \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) &= \sqrt{2\pi} 2^{1-2z} \Gamma(2z) \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{\sqrt{\pi} (2n)!}{2^{2n} n!} \end{aligned}$$

La fonction digamma d'Euler

La fonction $\psi(z)$ d'Euler est aussi appelée fonction digamma, elle est définie comme la dérivée logarithmique de la fonction Gamma d'Euler, c'est-à-dire :

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} [\ln(\Gamma(z))] = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \quad (1.5)$$

1.2 Opérateur d'intégration de Riemann-Liouville

Définition 1. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, et soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $t \in [a, b]$, on définit l'intégrale à gauche (respectivement à droite) d'ordre α de Riemann-Liouville de la fonction f au point t par :

$$\begin{aligned} I_{a,+}^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau; \\ I_{b,-}^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau; \end{aligned}$$

respectivement.

Proposition 1. Soit $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, pour α et β tels que $\Re(\alpha) > 0, \Re(\beta) > 0$, on a :

1. $I_a^\alpha(I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f$
2. $\frac{d}{dt}(I_a^\alpha f)(t) = (I_a^{\alpha-1} f)(t)$ avec $\Re(\alpha - 1) > 0$,
3. $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f) = f$

Démonstration. Pour la démonstration, voir [3]. □

Fonctions causales et intégrale fractionnaire

Définition 2. On a :

1. Une fonction causale est une fonction définie sur l'ensemble des réels dont le support est borné à gauche.
2. Une fonction anti-causale est une fonction définie sur l'ensemble des réels dont le support est borné à droite.

Considérons maintenant les intégrales

$$I_{a,+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau;$$

$$I_{b,-}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau;$$

Les constantes a, b déterminent les bornes supérieures et inférieures du domaine de l'intégrale.

l'intégrale à gauche $I_{a,+}^\alpha f(t)$ collectionne les valeurs pesées de la fonction pour $\tau < t$ c'est-à-dire à gauche de t .

l'intégrale à droite $I_{b,-}^\alpha f(t)$ collectionne les valeurs pesées de la fonction pour $t < \tau$ c'est-à-dire à droite de t .

Si t est une coordonnée de temps alors l'intégrale $I_{a,+}^\alpha f(t)$ est causale et l'intégrale $I_{b,-}^\alpha f(t)$ est anti-causale [6].

1.3 Opérateur de dérivation de Riemann-Liouville

Définition 3. Soit f une fonction continue et soit $\alpha \in]m - 1, m[$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de la fonction f est définie comme suit :

$${}^{RL}(D_a^\alpha f)(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^m (I_a^{m-\alpha} f)(t)$$

Théorème 1. L'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville possède les propriétés suivantes :

1. C'est un opérateur linéaire.
2. $\lim_{\alpha \rightarrow m} ({}^{RL}D_a^\alpha f)(t) = f^{(m)}(t)$.
3. $({}^{RL}D_a^\alpha \circ I_a^\alpha)(f) = f$.

$$4. (I_a^\alpha \circ D_a^\alpha)(f) = f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{j-m+\alpha}}{\Gamma(j+\alpha-m+1)} \cdot \left\{ \lim_{t \rightarrow a} \left(\frac{d}{dt} \right)^j [I_a^{m-\alpha} f](t) \right\}$$

Démonstration. Pour la démonstration voir [3]. □

Lemme 1. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et soit $\alpha > 0$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow a} (I_a^\alpha f)(t) = 0$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} |I_a^\alpha f(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau)| d\tau; \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau; \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} (t-a)^\alpha \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer. □

Corollaire 1. Si $0 < \alpha < 1$, et $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, alors :

$$(I_a^\alpha \circ D_a^\alpha)(f) = f$$

Démonstration. On a : pour $0 < \alpha < 1$:

$$(I_a^\alpha \circ D_a^\alpha)(f) = f(t) - \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \left\{ \lim_{t \rightarrow a} [I_a^{1-\alpha} f](t) \right\}$$

comme f est une fonction continue et d'après le lemme précédent, la limite dans le terme à droite tend vers 0, il vient donc que :

$$(I_a^\alpha \circ D_a^\alpha)(f) = f(t)$$

D'où le résultat. □

1.4 Opérateur de dérivation de Caputo

Définition 4. Soit f une fonction de classe $C^m([a, b])$ et soit $\alpha \in]m-1, m[$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la fonction f est définie comme suit :

$$\begin{aligned} ({}^C D_a^\alpha f)(t) &= (I^{m-\alpha} f^m)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Proposition 2. On a : $m - 1 < \alpha < m$:

1. $({}^C D_a^\alpha \circ I_a^\alpha) f = f$
2. Si ${}^C D_a^\alpha f = 0$, alors $f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1)} (t-a)^j$
3. $(I_a^\alpha \circ {}^C D_a^\alpha) f = f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1)} (t-a)^j$
4. Si $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ avec $\alpha + \beta \leq 1$ et $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ alors :

$$({}^C D_a^\alpha \circ {}^C D_a^\beta)(f) = {}^C D_a^{\alpha+\beta} f$$

Démonstration. Pour la démonstration, voir [3]. □

Relation entre dérivée de Riemann-Liouville et de Caputo

Proposition 3. Soit $0 < \alpha < 1$

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha f(t) &= {}^{RL} \left(D_a^\alpha f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1)} (t-a)^j \right) \\ &= {}^{RL} D_a^\alpha f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1-\alpha)} (t-a)^{j-\alpha} \end{aligned}$$

Comme conséquence, de cette proposition, on déduit que si $f^{(j)}(a) = 0$,

pour tout $j \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ alors

$${}^C D_a^\alpha f(t) = {}^{RL} D_a^\alpha f(t)$$

1.5 Intégrale de Riemann-Stieltjes

Définition de l'intégrale de Riemann-Stieltjes

Définition 5. Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé. Une partition de I est une suite quelconque strictement croissante de points $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ tels que $a = t_0$ et $b = t_n$. Le maillage de la partition P noté h est défini par :

$$h = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}),$$

Pour une fonction f on pose :

$$V(f) = \sum_{i=1}^n f(t_i) - f(t_{i-1});$$

pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Définition 6. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite à variation bornée si il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que :

$$|V(f)| \leq M;$$

pour toute partition de $[a, b]$.

Remarque 1. On a :

1. Si f est monotone sur $[a, b]$ alors f est à variation bornée.
2. Si f est continue et f' existe et elle est bornée sur l'intérieur c'est-à-dire :
 $|f'(t)| \leq M$, pour tout $t \in (a, b)$ alors f est à variation bornée.

Définition 7. Soient f une fonction bornée sur l'intervalle $[a, b]$ et g une fonction à variation bornée sur le même intervalle. Soit $P = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ une partition de l'intervalle $[a, b]$ avec $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

La somme

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\tau_i) [g(t_i) - g(t_{i-1})]$$

représente la somme de Riemann-Stieltjes de la fonction f par rapport à la fonction g .

Critères d'existence et d'intégrabilité

On dit que f est intégrable au sens de Riemann par rapport à g sur $[a, b]$, et on écrit $f \in \mathfrak{R}(g)$ s'il existe un nombre A ayant la propriété suivante : pour tout $\epsilon > 0$ il existe une partition P_ϵ de $[a, b]$ tels que pour toute partition P plus fine que P_ϵ et pour tout choix de $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, on a : $|S_n - A| \leq \epsilon$.

Quand un tel nombre A existe, il est déterminé d'une manière unique et on le note :

$$A = \int_a^b f(t) dg(t)$$

On dit aussi que l'intégrale de Riemann-Stieltjes de la fonction f par rapport à la fonction déterminante g existe [9].

Théorème 2. Si f est continue sur un intervalle $I = [a, b]$, alors f est intégrable au sens de Riemann-Stieltjes sur $[a, b]$.

Corollaire 2. Si f est continue sur un intervalle $I = [a, b]$, et g est monotone et continue sur I , alors $f \in \mathfrak{R}(g)$.

Propriétés linéaires

1. Si $f_1 \in \mathfrak{R}(g)$ et $f_2 \in \mathfrak{R}(g)$ sur $[a, b]$ alors $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in \mathfrak{R}(g)$ sur $[a, b]$, avec c_1, c_2 sont des constantes quelconques

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) dg(t) = c_1 \int_a^b f_1 dg(t) + c_2 \int_a^b f_2 dg(t).$$

2. Si $f \in \mathfrak{R}(g)$ et $f \in \mathfrak{R}(h)$ sur $[a, b]$ alors $f \in \mathfrak{R}(c_1 g + c_2 h)$ sur $[a, b]$, avec c_1, c_2 des constantes quelconques

$$\int_a^b f d(c_1 g + c_2 h)(t) = c_1 \int_a^b f(t) dg(t) + c_2 \int_a^b f(t) dh(t)$$

Signification géométrique de l'intégrale de Riemann-Stieltjes

Dans le cas de cette intégrale, nous avons trois variables t , $s = f(t)$, $d = g(t)$. Supposons que ces variables sont les coordonnées rectangulaires d'un point M qui décrit une courbe L , lorsque t varie de a à b . Nous aurons alors les trois projections (L_1, L_2, L_3) de cette courbe sur les plans OTS, OTD, OSD et les deux surfaces cylindriques $\{F_1; s = f(t)\}$ et $\{F_2; d = g(t)\}$.

Alors l'intégrale de Riemann-Stieltjes $\int_a^b f(t)dg(t)$ est la projection de la surface F_2 définie par la fonction g sur le plan OSD [10].

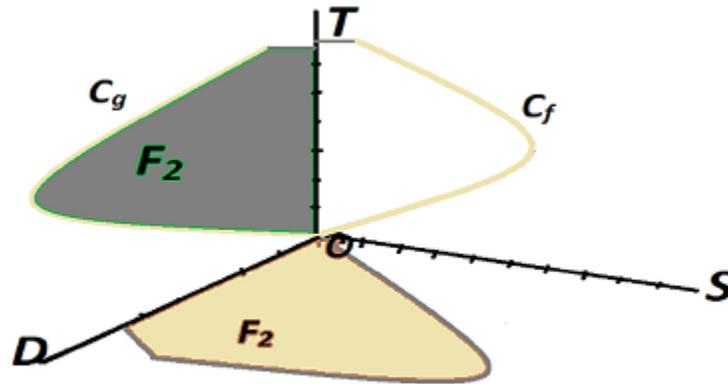


FIGURE 1.1 – L'intégrale de Riemann-Stieltjes

Chapitre 2

Préliminaire

2.1 Interprétation physique de la dérivation fractionnaire des fonctions polynomiales

Dans cette partie, on introduit un exemple de fonction polynomiale t^β , pour lequel on va établir une interprétation physique des dérivées fractionnaires, en analysant les résultats obtenus à partir des calculs des valeurs de la dérivée fractionnaire d'une fonction f à un point précis et à l'aide des représentations graphiques des fonctions dérivées d'ordre fractionnaire $0 < \alpha < 1$.

Considérons d'abord la fonction $f(t) = t^5$, c'est-à-dire $\beta = 5$ et présentons ses dérivées fractionnaires d'ordre α au sens de Riemann-Liouville puis au sens de Caputo.

2.1.1 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville :

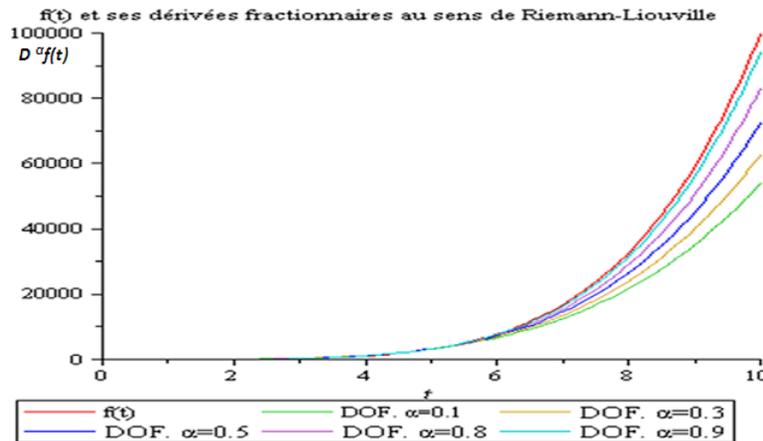
La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de la fonction f avec $\alpha \in]m - 1, m[$ et $m \in \mathbb{N}^*$ est :

$$\begin{aligned} {}^{RL}(D_0^\alpha f)(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^m (I^{m-\alpha} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} \tau^5 d\tau \end{aligned}$$

Soit le changement de variable suivant $\tau = st$, il s'en suit que :

$$\begin{aligned}
{}^{RL}(D_0^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_0^1 t^{m-\alpha-1} (1-s)^{m-\alpha-1} s^5 t^5 ds; \\
&= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_0^1 (1-s)^{m-\alpha-1} s^5 t^{m-\alpha+5} ds; \\
&= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^m [t^{m-\alpha+5}] \int_0^1 (1-s)^{m-\alpha-1} s^5 ds; \\
&= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^m [t^{m-\alpha+5}] (B(m-\alpha, 6)); \\
&= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^m [t^{m-\alpha+5}] \frac{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(6)}{\Gamma(m-\alpha+6)}; \\
&= \frac{\Gamma(6)\Gamma(m-\alpha+6)}{\Gamma(m-\alpha+6)\Gamma(6-\alpha)} t^{5-\alpha}; \\
&= \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(6-\alpha)} t^{5-\alpha}
\end{aligned}$$

Avec $B(x, y)$ désigne la fonction Béta d'Euler définie par l'équation (1.4)



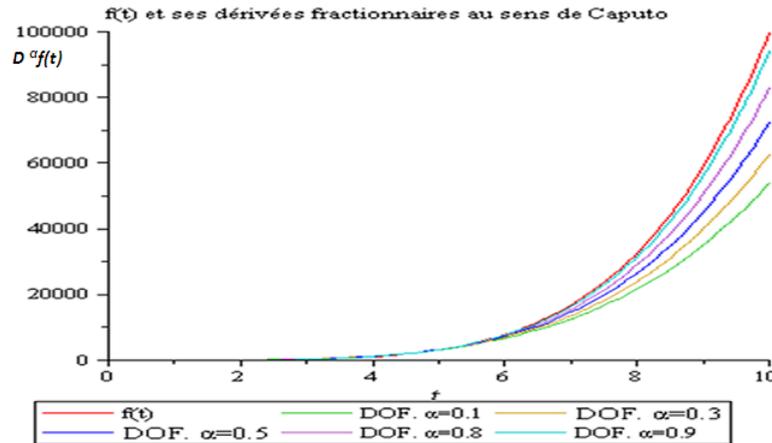
2.1.2 La dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Considérons la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la fonction f et soit $m-1 < \alpha < m$:

$$\begin{aligned}
{}^C(D_0^\alpha f)(t) &= (I^{m-\alpha} f^{(m)})(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} (\tau^5)^{(m)} d\tau \\
&= \begin{cases} \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(6-m)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} \tau^{5-m} d\tau, & m-1 < 5; \\ 0 & , m-1 \geq 5; \end{cases}
\end{aligned}$$

Soit le changement de variable $\tau = st$

$$\begin{aligned}
 {}^C(D_0^\alpha f)(t) &= \begin{cases} \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(6-m)} \int_0^1 (1-s)^{m-\alpha-1} t^{m-\alpha-1} s^{5-m} t^{5-m} t ds, & m-1 < 5, \\ 0 & , m-1 \geq 5, \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(6-m)} t^{5-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{m-\alpha-1} s^{5-m} ds, & m-1 < 5, \\ 0 & , m-1 \geq 5, \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(6-m)} t^{5-\alpha} B(m-\alpha, 6-m), & m-1 < 5, \\ 0 & , m-1 \geq 5, \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(6-m)} \frac{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(6-m)}{\Gamma(6-\alpha)} t^{5-\alpha}, & m-1 < 5, \\ 0 & , m-1 \geq 5, \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(6-\alpha)} t^{5-\alpha}, & m-1 < 5. \\ 0 & , m-1 \geq 5. \end{cases}
 \end{aligned}$$



2.1.3 Représentation graphique et interprétation physique

Soient la fonction f et les droites tangentes d'ordre fractionnaire α au point $t = 4$ avec

$$T^\alpha(t) = ({}^C D_0^\alpha f)(4)(t - 4) + f(4)$$

Ordre fractionnaire de dérivation	Valeur de $m_\alpha = D^\alpha f$ au point $t=4$	Equation de la tangente	Les points A_α	L'air du triangle Δ_α
${}^C D^{0.1}[f(t)]$	$m_{0.1}=1056.3$	$T^{0.1}(t)=1056.3(t-4) + 1024$	$A_{0.1}= (3.0574,0)$	$\Delta_{0.1}=487.68$
${}^C D^{0.5}[f(t)]$	$m_{0.5}=1173.8$	$T^{0.5}(t)=1173.8(t-4) + 1024$	$A_{0.5}= (3.1276,0)$	$\Delta_{0.5}=446.67$
${}^C D^{0.8}[f(t)]$	$m_{0.8}=1244.2$	$T^{0.8}(t)=1244.2(t-4) + 1024$	$A_{0.8}= (3.1770,0)$	$\Delta_{0.8}=421.38$
${}^C D^{1.0}[f(t)]$	$m_{1.0}=1280$	$T^{1.0}(t)=1280(t-4) + 1024$	$A_{01.0}=(3.2,0)$	$\Delta_{1.0}=409.6$

Considérons la fonction $f(t) = t^5$ au point $P(4; 1024)$, on a : $D^{1.0} f(t) = 1280$. La ligne tangente $T^{1.0}$ au point $P(4, 1024)$ qui coupe l'axe OX en $A_{1.0}$ et la ligne passant par $P(4; 1024)$ perpendiculaire à l'axe OX au point $B(4; 0)$ nous construisent une surface

$\Delta_{1,0}$ comprise par le triangle $PA_{1,0}B$. Similairement, tous les triangles sont obtenus en utilisant les valeurs des dérivées fractionnaires $m_{0,1}$, $m_{0,5}$, $m_{0,8}$, et les lignes tangentes $T^{0,1}$, $T^{0,5}$, $T^{0,8}$ passant par le point $P(4; 1024)$. Les calculs des surfaces sont montrés dans le tableau 1.

La figure 2-1 illustre le graphe de la fonction $f(t) = t^5$ avec les triangles formés par les tangentes fractionnaires T^α d'ordre : 0.1, 0.5, 0.8.

A partir du tableau et de la figure (2-1), on peut observer que lorsque l'ordre de dérivation croît, l'aire du triangle décroît et si l'ordre de dérivation décroît alors l'aire du triangle croît. Donc les ordres de dérivation et les aires des triangles sont inversement proportionnés.

$$D^\alpha [f(t)] \propto \frac{1}{\Delta}$$

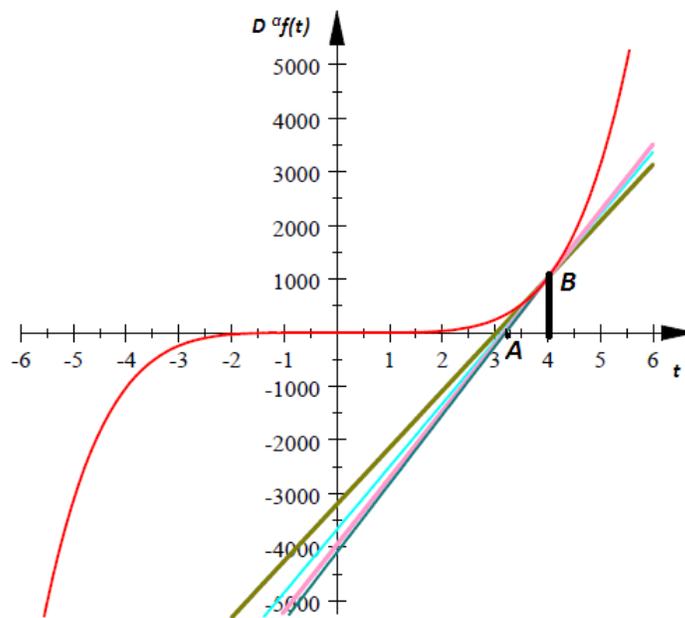


FIGURE 2.1 – La fonction $f(t)$ et les lignes tangentes $T^\alpha f$

On conclut que le produit de la dérivation d'ordre fractionnaire avec l'aire du triangle correspondant est constant, donc la dérivation fractionnaire provoque une variation de la surface du triangle compris entre la ligne tangente à un point particulier et la ligne verticale passant par ce point et au dessus de l'axe des X suivant la ligne de gradient fractionnaire.

La variation de l'air est une propriété physique, et par suite la dérivation fractionnaire peut être utilisée pour mesurer la variation de la température, la pression, le gradient, la divergence et la rotation, etc [5].

2.2 Les points critiques de la dérivée fractionnaire des fonctions polynomiales

Dans la section précédente, on a vu que l'aire du triangle Δ_α décroît lorsque la valeur m_α de la dérivée fractionnaire de la fonction polynomiale t^β à un point particulier croît (suivant l'ordre de dérivation α).

Dans cette partie, on va discuter les cas où $t = \beta$ et $t \neq \beta$, en déduisant les points critiques de la fonction $D^\alpha f(t)$ de variable α .

Considérons la fonction $D(t, \beta, \alpha) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} t^{\beta-\alpha}$.

On a alors au point $t = \beta$:

$$D(\beta, \beta, \alpha) = D(\beta, \alpha) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} \beta^{\beta-\alpha}$$

Soit

$$h(\alpha) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} \beta^{\beta-\alpha}$$

Rappelons que a est un point critique pour la fonction h si $h'(a) = 0$ ou h est discontinue en ce point.

$$\begin{aligned} \frac{dh}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha}(D(\beta, \alpha)) \\ &= \frac{[-\ln \beta \cdot \Gamma(\beta + 1) \beta^{\beta-\alpha}] \Gamma(\beta + 1 - \alpha) - \frac{d\Gamma(\beta+1-\alpha)}{d\alpha} \Gamma(\beta + 1) \beta^{\beta-\alpha}}{[\Gamma(\beta + 1 - \alpha)]^2} \\ &= \frac{[-\ln \beta \cdot \Gamma(\beta + 1) \beta^{\beta-\alpha}] \Gamma(\beta + 1 - \alpha) + \Gamma(\beta - \alpha + 1) \psi(\beta - \alpha + 1) \Gamma(\beta + 1) \beta^{\beta-\alpha}}{[\Gamma(\beta + 1 - \alpha)]^2} \end{aligned}$$

avec $\psi(t)$ est la fonction donnée par l'équation (1.5).

On trouve donc :

$$h'(\alpha) = \frac{\Gamma(\beta + 1) \beta^{\beta-\alpha} [\psi(\beta + 1 - \alpha) - \ln \beta]}{[\Gamma(\beta + 1 - \alpha)]} \quad (2.1)$$

Réolvons l'équation $h'(\alpha) = 0$ pour déterminer le point critique a .

$\beta=2$	$\beta=2.4$	$\beta=3$	$\beta=4$	$\beta=5$	$\beta=8$
$\alpha=0.52031$	$\alpha=0.5170$	$\alpha=0.51372$	$\alpha=0.51035$	$\alpha=0.50830$	$\alpha=0.50520$

FIGURE 2.2 – Les solutions de l'équation $h'(\alpha) = 0$.

En observant les données du tableau (figure 2-2), on déduit que les solutions numériques de l'équation (2.1) convergent vers le point $a = 0.5$.

<i>La dérivée fractionnaire de t^β au point $t = 1$</i>			
L'ordre de dérivation α	$\beta = 2$	$\beta = 2.4$	$\beta = 3$
$\alpha = 0.1$	$m_{0.1} = 1.09$	$m_{0.1} = 1.11$	$m_{0.1} = 1.13$
$\alpha = 0.3$	$m_{0.3} = 1.29$	$m_{0.3} = 1.36$	$m_{0.3} = 1.44$
$\alpha = 0.5$	$m_{0.5} = 1.5$	$m_{0.5} = 1.63$	$m_{0.5} = 1.81$
$\alpha = 0.8$	$m_{0.8} = 1.82$	$m_{0.8} = 2.09$	$m_{0.8} = 2.48$
$\alpha = 1.0$	$m_{1.0} = 2$	$m_{1.0} = 2.4$	$m_{1.0} = 3$
<i>La dérivée fractionnaire de t^β au point $t = 2$</i>			
L'ordre de dérivation α	$\beta = 2$	$\beta = 2.4$	$\beta = 3$
$\alpha = 0.1$	$m_{0.1} = 4.08$	$m_{0.1} = 5.47$	$m_{0.1} = 8.45$
$\alpha = 0.3$	$m_{0.3} = 4.21$	$m_{0.3} = 5.82$	$m_{0.3} = 9.35$
$\alpha = 0.5$	$m_{0.5} = 4.26$	$m_{0.5} = 6.09$	$m_{0.5} = 10.21$
$\alpha = 0.8$	$m_{0.8} = 4.17$	$m_{0.8} = 6.32$	$m_{0.8} = 11.37$
$\alpha = 1.0$	$m_{1.0} = 4$	$m_{1.0} = 6.33$	$m_{1.0} = 12$
<i>La dérivée fractionnaire de t^β au point $t = 2.4$</i>			
L'ordre de dérivation α	$\beta = 2$	$\beta = 2.4$	$\beta = 3$
$\alpha = 0.1$	$m_{0.1} = 5.78$	$m_{0.1} = 8.32$	$m_{0.1} = 14.34$
$\alpha = 0.3$	$m_{0.3} = 5.74$	$m_{0.3} = 8.53$	$m_{0.3} = 15.29$
$\alpha = 0.5$	$m_{0.5} = 5.59$	$m_{0.5} = 8.61$	$m_{0.5} = 16.11$
$\alpha = 0.8$	$m_{0.8} = 5.19$	$m_{0.8} = 8.46$	$m_{0.8} = 16.99$
$\alpha = 1.0$	$m_{1.0} = 4.8$	$m_{1.0} = 8.18$	$m_{1.0} = 17.28$
<i>La dérivée fractionnaire de t^β au point $t = 3$</i>			
L'ordre de dérivation α	$\beta = 2$	$\beta = 2.4$	$\beta = 3$
$\alpha = 0.1$	$m_{0.1} = 8.83$	$m_{0.1} = 13.9$	$m_{0.1} = 27.39$
$\alpha = 0.3$	$m_{0.3} = 8.38$	$m_{0.3} = 13.63$	$m_{0.3} = 27.94$
$\alpha = 0.5$	$m_{0.5} = 7.82$	$m_{0.5} = 13.16$	$m_{0.5} = 28.14$
$\alpha = 0.8$	$m_{0.8} = 6.78$	$m_{0.8} = 12.09$	$m_{0.8} = 27.75$
$\alpha = 1.0$	$m_{1.0} = 6$	$m_{1.0} = 11.17$	$m_{1.0} = 27$

D'après les valeurs des dérivées fractionnaires $D^\alpha(t^\beta)$ montrées dans le tableau ci-dessus, et à partir des triangles Δ_α , on aboutit aux résultats suivants :

1. Si $t < \beta$, alors les valeurs des dérivées m_α augmentent et par suite les aires des triangles Δ_α se réduisent .
2. Si $t > \beta$, alors les valeurs des dérivées m_α diminuent et donc les aires des triangles Δ_α augmentent.
3. Si $t = \beta$, on distingue deux cas :
 - (a) Pour $0.1 < \alpha < 0.5$, alors les valeurs des dérivées m_α s'augmentent et si bien que les aires des triangles Δ_α diminuent.
 - (b) Pour $0.5 < \alpha < 1$, alors les valeurs des dérivées m_α diminuent et par conséquent les triangles Δ_α s'agrandissent.

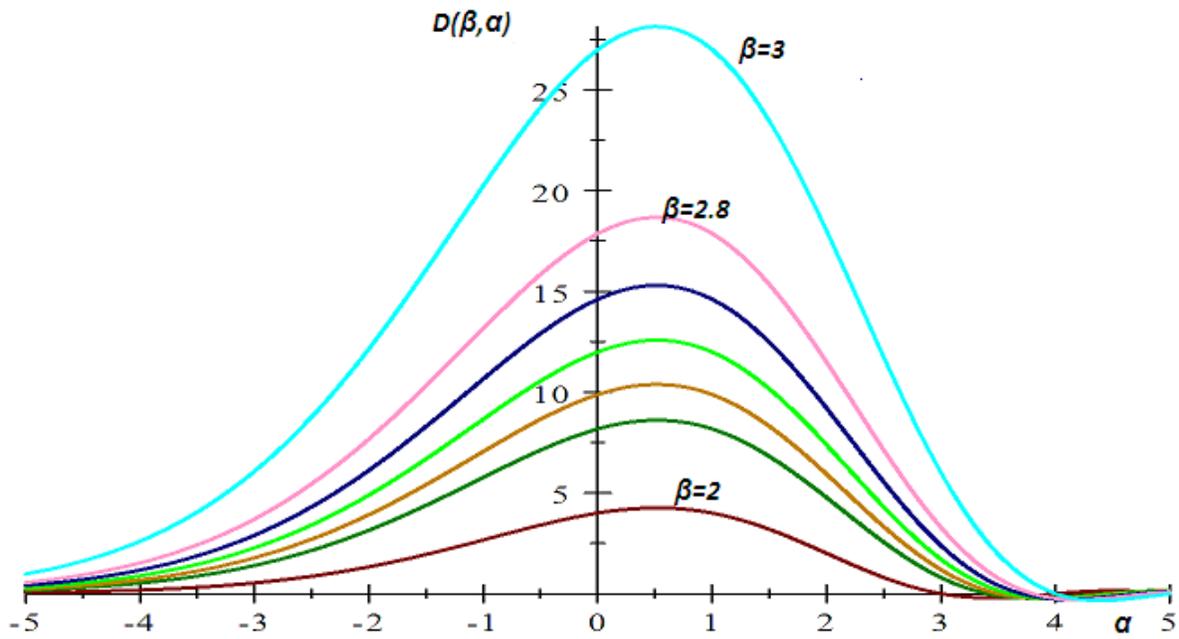


FIGURE 2.3 – Les fonctions $\frac{\Gamma(\beta+1)\beta^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}$

Chapitre 3

Interprétation géométrique et physique de l'intégration fractionnaire

3.1 Interprétation géométrique de l'intégration fractionnaire : Ombres sur les plans

3.1.1 Intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville

Considérons l'intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f :

$$I_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau)(t - \tau)^{\alpha-1} d\tau, \quad t \geq 0 \quad (3.1)$$

Posons

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \{t^\alpha - (t - \tau)^\alpha\} \quad (3.2)$$

Alors l'intégrale (3.1) peut s'écrire sous la forme

$$I_0^\alpha f(t) = \int_0^t f(\tau) dg_t(\tau), \quad t \geq 0 \quad (3.3)$$

La fonction $g_t(\tau)$ possède une propriété scalaire intéressante. En effet, prenons $t_1 = kt$

et $\tau_1 = k\tau$ ($k > 0$), alors

$$\begin{aligned}
 g_{t_1}(\tau_1) &= g_{kt}(k\tau) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \{(kt)^\alpha - (kt - k\tau)^\alpha\} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \{k^\alpha t^\alpha - k^\alpha (t - \tau)^\alpha\} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \{k^\alpha (t^\alpha - (t - \tau)^\alpha)\} \\
 &= \frac{k^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \{t^\alpha - (t - \tau)^\alpha\} \\
 &= k^\alpha g_t(\tau)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_t(0) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \{t^\alpha - (t - 0)^\alpha\} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \{t^\alpha - t^\alpha\} = 0
 \end{aligned}$$

et ceci pour tout $t \in [a, b]$.

Maintenant considérons l'intégrale (3.3) pour un t fixé. Alors on obtient une intégrale de Stieltjes.

Et par suite, l'interprétation géométrique de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville revient à la signification géométrique de l'intégrale de Stieltjes abordée dans la section 5 du premier chapitre.

Ou plus précisément, pour une limite supérieure t de l'intégrale (3.1), on trace le graphe de la fonction $g_t(\tau)$ dans la région $0 \leq \tau \leq t$, puis tout au long de ce chemin on dessine la courbe représentative de la fonction f . De cette manière on construit "un grillage" de la hauteur variable $f(\tau)$, donc le bord supérieur de ce grillage est une ligne à trois dimensions $(\tau, f(\tau), g_t(\tau))$ comme il est illustré dans la figure (3-1).

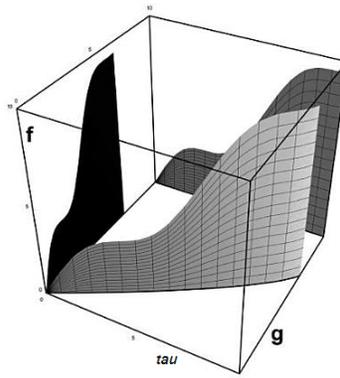


FIGURE 3.1 – Le grillage construit par les fonctions $g_t(\tau)$ et $f(t) = t + 0.5 \sin(t)$

Ce grillage peut être projeté en deux surfaces (Voir la figure 3-2). Sur le plan (τ, f) , le bord supérieur du grillage C construit par les fonctions $f(\tau)$ et $g_t(\tau)$ est la courbe d'une

fonction f à variable τ donc l'aire de la projection du grillage A sur le plan (τ, f) est l'aire sous la courbe de f qui correspond à la valeur de l'intégrale classique

$$I^1 f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (3.4)$$

Sur le plan (g, f) , le bord supérieur grillage B construit par les fonctions $f(\tau)$ et $g_t(\tau)$ est la courbe d'une fonction f à variable g alors l'aire de la projection du grillage A sur le plan (g, f) correspond à la valeur de l'intégrale de Stieltjes de la fonction f par rapport à la fonction g :

$$I_0^\alpha f(t) = \int_0^t f(\tau) dg_t(\tau)$$

En d'autres termes, le grillage projette deux ombres sur deux murs : le premier est celui sur le plan (τ, f) représentant l'air sous la courbe $f(\tau)$ qui est l'interprétation géométrique standard de l'intégrale (3.4). La deuxième ombre sur le plan (g, f) est une interprétation géométrique de l'intégrale fractionnaire (3.1) pour un t fixé.

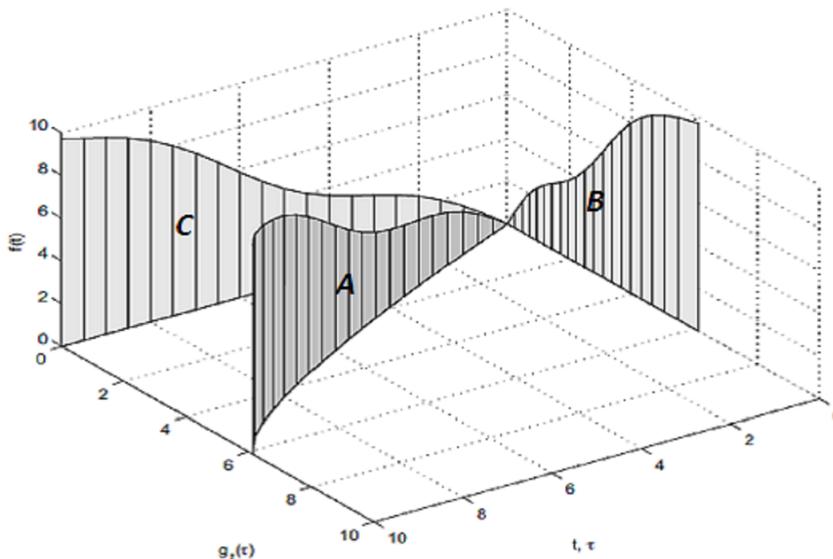


FIGURE 3.2 – Le grillage et ses ombres : $I_0^1 f(t)$ et $I^\alpha f(t)$ pour $\alpha = 0.75$, $f(t) = t + 0.5 \sin(t)$, $0 \leq t \leq 10$

Lorsque $\alpha = 1$ on a : $g_t(\tau) = \tau$. Et les deux ombres sont égales, on en déduit que l'intégration fractionnaire généralise l'intégration classique même d'un point de vue géométrique.

Soit maintenant l'intégrale (3.1) pour t variable. Que se passe-t-il quand t est en train de changer (c'est-à-dire en croissance)? Comme t change le grillage change simultanément. Dans un autre sens, sa longueur et son allure changent (Voir la figure 3-3). En suivant

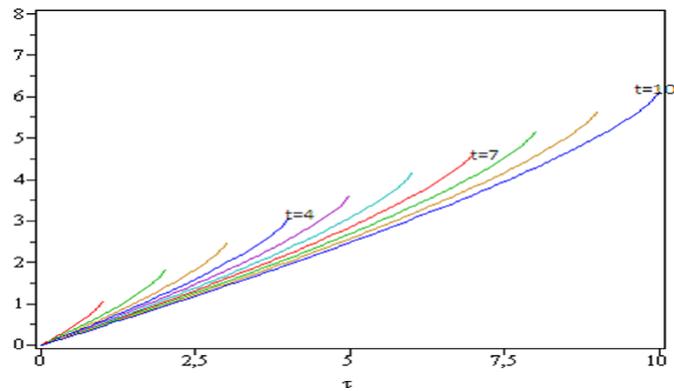


FIGURE 3.3 – Le processus de changement de la forme de grillage pour $I_0^\alpha f(t)$, $\alpha = 0.75$, $0 \leq t \leq 10$,

le changement de l'ombre sur le plan (g, f) qui se change simultanément avec le grillage (Voir la figure 3-4), on obtient alors une interprétation dynamique de l'intégrale fractionnaire (3.1) comme étant une fonction à variable t .

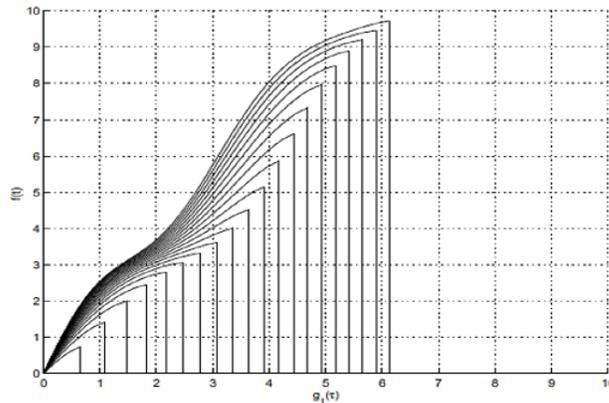


FIGURE 3.4 – Le profil de changement d'ombre suivant le changement de grillage $I_0^\alpha f(t)$, $f(t) = t + 0.5 \sin(t)$; $\alpha = 0.75$, $0 \leq t \leq 10$; avec $\Delta t = 0.5$ entre les profils.

3.1.2 Intégrale fractionnaire à droite de Riemann-Liouville

Considérons l'intégrale fractionnaire à droite de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f [4]

$$I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b f(\tau)(\tau - t)^{\alpha-1} d\tau, \quad t \leq b \tag{3.5}$$

Posons

$$h_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \{t^\alpha + (\tau - t)^\alpha\} \tag{3.6}$$

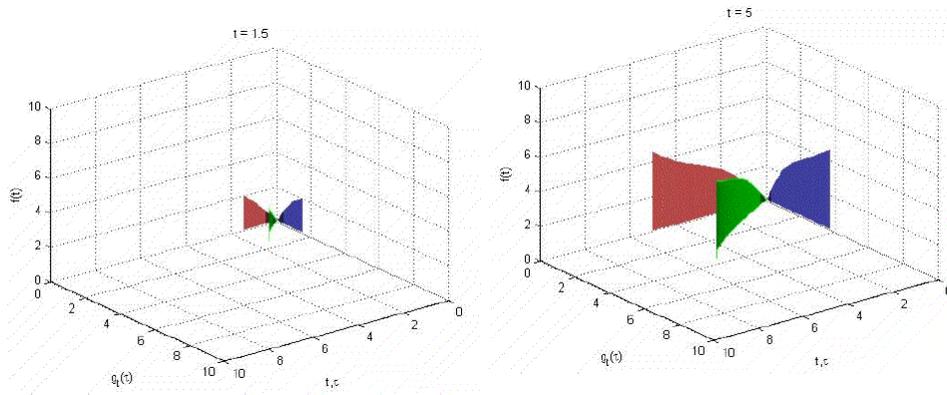


FIGURE 3.5 – Interprétation dynamique de l'intégration fractionnaire.

Alors l'intégrale (3.5) peut s'écrire sous la forme :

$$I_t^\alpha f(t) = \int_t^b f(\tau) dh_t(\tau), \quad t \geq 0 \tag{3.7}$$

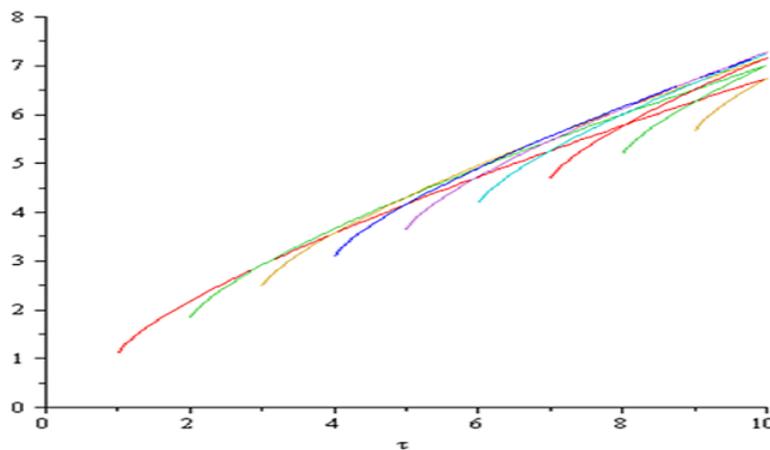


FIGURE 3.6 – Le processus de changement de la base de grillage $I_t^\alpha f(t)$, $\alpha = 0.75$, $0 \leq t \leq 10$

Donc, on peut fournir une interprétation géométrique similaire à l'interprétation géométrique de l'intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville, cependant dans ce cas il n'y a aucun point fixe correspondant à $\tau = b$ qui se déplace suivant la ligne $\tau = b$ dans le plan (τ, g) lorsque le grillage change de forme. Ce mouvement peut être observé dans la figure (3-6). (Dans le cas de l'intégrale à gauche, le bout gauche correspondant à $\tau = 0$, est fixé et ne se déplace pas.)

Toutes les autres parties de l'interprétation géométrique réfèrent à la même chose : le grillage change sa forme lorsque t varie entre 0 et b , et les ombres variantes de ce grillage

sur les plans (g, f) et (τ, f) représentent en correspondance l'intégrale à droite de Riemann-Liouville (3.5) et l'intégrale classique avec la limite inférieure :

$$I_t^1 f(t) = \int_t^b f(\tau) d\tau \quad (3.8)$$

Clairement, si $\alpha = 1$, alors $h_t(\tau) = \tau$, et les deux ombres sont égales. Donc on voit que l'intégration classique définie représente un cas particulier de l'intégration à gauche et à droite de Riemann-Liouville même d'un point de vue géométrique.

3.1.3 Potentiel de Riesz

Définition 8. Soit f une fonction localement intégrable sur \mathbb{R} . L'intégrale fractionnaire de Riesz ou le potentiel de Riesz d'ordre $\alpha > 0$ est défini par la combinaison linéaire des intégrales à gauche et à droite de Riemann-Liouville :

$$R_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau) (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b f(\tau) (\tau - t)^{\alpha-1} d\tau \quad (3.9)$$

Ou plus précisément, le potentiel de Riesz est donné par :

$$R_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b f(\tau) |t - \tau|^{\alpha-1} d\tau, \quad 0 \leq t \leq b \quad (3.10)$$

Le potentiel de Riesz (3.10) peut être écrit sous la forme :

$$R_0^\alpha f(t) = \int_0^b f(\tau) dr_t(\tau) \quad (3.11)$$

avec

$$r_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \{t^\alpha + \text{sign}(\tau - t) |\tau - t|^\alpha\} \quad (3.12)$$

et

$$\begin{aligned} dr_t(\tau) &= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot [\alpha(\tau - t)^{\alpha-1}] & \text{si } \tau > t \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot (-1) \cdot [-\alpha(t - \tau)^{\alpha-1}] & \text{si } \tau < t \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\tau - t)^{\alpha-1} & \text{si } \tau > t \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t - \tau)^{\alpha-1} & \text{si } \tau < t \end{cases} \end{aligned}$$

La forme du grillage correspondant au potentiel de Riesz est décrite par la fonction $r_t(\tau)$. Dans ce cas le grillage se consiste en deux parties : l'une (pour $0 < \tau < t$) est la même qu'en cas de l'intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville et l'autre (pour $t < \tau < b$) est la même que l'intégrale fractionnaire à droite de Riemann-Liouville (Voir la figure (3-7)). Les deux parties sont gentilletement jointes au point $\tau = t$.

La forme du grillage correspondant au potentiel de Riesz est représentée dans une partie de sa position intermédiaire par la ligne en gras dans la figure (3-7).

Il est évident que la figure (3-7) peut être obtenue en plaçant la figure (3-6) sur la figure (3-3) qui représente une interprétation géométrique de la relation (3.9). L'ombre de ce

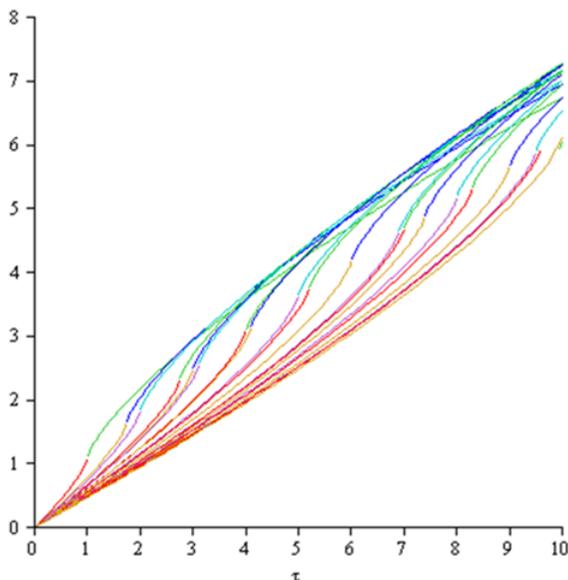


FIGURE 3.7 – Les fonctions $g_t(\tau)$ et $h_t(\tau)$

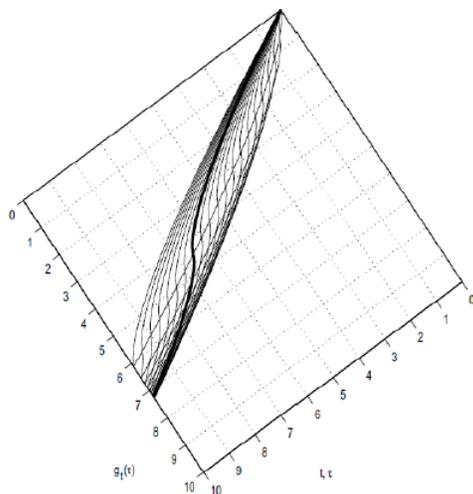


FIGURE 3.8 – Le processus de changement de la forme de grillage pour le potentiel de Riesz $R^\alpha f(t)$, $\alpha = 0.75$, $0 \leq t \leq 10$.

grillage sur le mur (g, f) représente le potentiel de Riesz (3.10), tandis que l'ombre sur le mur (τ, f) correspond à l'intégrale

$$I(t) = \int_0^b f(\tau) d\tau \tag{3.13}$$

Pour $\alpha = 1$, $r_t(\tau) = \tau$ et les deux ombres sont égales. Cela montre que l'intégrale classique définie est un cas particulier du potentiel de Riesz même d'un point de vue géométrique. On a déjà vu cette inclusion dans le cas de l'intégration fractionnaire à gauche et à droite de Riemann-Liouville. Ceci démontre la force de l'interprétation géométrique suggérée de ces trois types de généralisation de la notion d'intégration [4].

3.1.4 Potentiel de Feller

L'opérateur potentiel de Feller $\phi^\alpha f(t)$ est semblable au potentiel de Riesz, aussi il est une combinaison linéaire des intégrales à gauche et à droite de Riemann-Liouville, mais avec des coefficients généraux constants c, d :

$$\phi^\alpha f(t) = c.I_a^\alpha f(t) + d.I_t^\alpha f(t) \quad (3.14)$$

L'interprétation géométrique du potentiel de Feller peut être facilement obtenue par la mise à l'échelle correcte puis par superposition de Fig (3-6) et Fig (3-3). Le grillage obtenu de cette manière est en général discontinu au point $\tau = t$.

Son ombre sur le plan (τ, f) est égale à l'intégrale classique (3.13). L'ombre sur le plan (g, f) se compose en général de deux zones qui peuvent se chevaucher en fonction des valeurs des coefficients c et d .

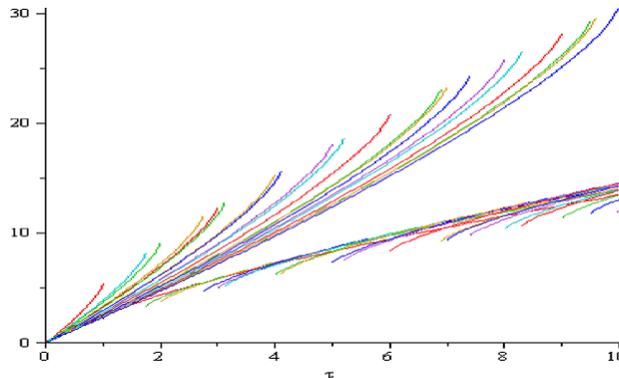


FIGURE 3.9 – Les fonctions $g_t(\tau)$ et $h(\tau)$ multipliées respectivement par $c = 5$ et $d = 2$.

3.2 Deux types de temps

3.2.1 L'utilisation de deux types de temps

L'interprétation géométrique de l'intégration fractionnaire donnée dans la section précédente repose essentiellement sur l'addition d'une troisième dimension ($g_t(\tau)$) à la paire classique $(\tau, f(\tau))$, si on considère τ comme temps alors $g_t(\tau)$ peut être interprétée comme une échelle transformée de temps. Que pourrait être le sens d'avoir -et d'utiliser- deux axes de temps? Pour répondre à cette question, rappelons quelques faits d'histoire de développement de la notion de temps.

Newton lui-même a postulé :

" Le temps absolu, vrai et mathématique, de lui-même et de sa propre nature coule équitablement sans rapport à rien d'externe".

Un tel postulat était absolument nécessaire pour le développement des calculs différentiels de Newton et l'appliquer dans des problèmes de mécanique :

« Mathématiquement, Newton avait presque trouvé un support pour ses croyances en temps absolu, en principe, pour une mesure de taux idéale».

L'invention des calculs différentiels et intégraux et leur usage sont la plus forte raison pour continuer l'utilisation du temps homogène.

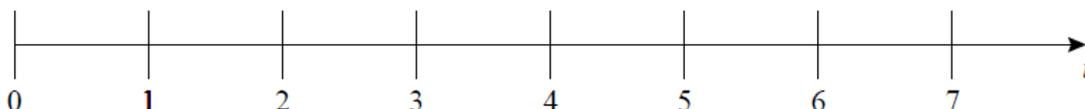


FIGURE 3.10 – Le temps homogène



FIGURE 3.11 – Temps ralentissant

Deux longueurs d'intervalles peuvent être mesurées et comparées tant qu'elles sont variables à mesurer simultanément en même temps précisément, en même temps et en même lieu.

En effet, comment mesurer les intervalles de temps? Juste en constatant quelques processus qu'on considère régulièrement répétés.

La mesure de temps est essentiellement un processus de comptage. Tout phénomène récurrent dont l'occurrence peut être comptée, est en réalité une mesure de temps.

Les horloges, y compris l'horloge atomique répètent leurs tiques et on peut simplement compter ces tiques, en les appelant heures, minutes, secondes, millisecondes, etc. Mais on ne pourrait pas vérifier si le temps absolu qui passe entre le cinquième et le sixième tique (la sixième seconde) est exactement le même temps qui découle entre le sixième et le septième tique (la septième seconde).

La non-homogénéité possible de l'échelle de temps est illustrée dans la figure (3-10).

Les figures (3-10) et (3-11) décrivent ces tiques d'horloge qu'on peut enregistrer seulement symboliquement. Quelqu'un peut les interpréter : s'il existe un axe de temps non-homogène absolu et cosmique, auquel on peut comparer le temps homogène individuel représenté par certains tiques d'horloge. Le temps homogène individuel a la forme représentée sur la figure (3-10). Le temps cosmique¹ peut ne pas nécessairement découler équitablement comme c'est montré dans la figure (3-11).

Pour illustrer l'idée, prenons la situation suivante : Supposons que la personne N possède deux appareils, l'un est un indicateur de vitesse et l'autre un horloge qui ralentit de sorte que l'écartement entre deux tiques consécutifs est le **double** de celui entre les tiques antérieurs (Voir la figure 3-11). La personne N lit la valeur de la vitesse indiquée par le compteur à chaque seconde, sans savoir que l'horloge est en fait ralentir.

Soient S_i les secondes absolues chez l'observateur montrées dans le tableau (Figure 3-12), et soient Δ_i les intervalles de temps entre deux secondes consécutives. Or, comme chaque

<i>Les secondes individuelles de la personne N</i>	<i>Les valeurs de la vitesse [m/s]</i>	<i>Les secondes absolues (cosmiques) de l'observateur O</i>
0	10	0
1	11	1
2	12	3
3	13	7
4	12	15
5	11	31
6	10	63
7	9	127

FIGURE 3.12 – La vitesse enregistrée d'après l'horloge rallentissant

intervalle est de longueur double de celle-ci du précédent, il vient que :

$$\begin{aligned}\Delta_i &= 2 * \Delta_{i-1} \\ &= 2 * 2 * \Delta_{i-2} \\ &\vdots\end{aligned}$$

1. Le temps cosmique est le temps propre d'un observateur.

par récurrence sur n , on trouve :

$$\Delta_n = 2^{n-1} \Delta_1 = 2^{n-1} * 1 = 2^{n-1}$$

et on a :

$$S_i = S_{i-1} + \Delta_i;$$

$$\begin{aligned} S_0 &= 0, S_1 = 1, S_2 = S_1 + 2 * \Delta_1 = 1 + 2 = 3, \\ S_3 &= S_2 + 2 * \Delta_2 = 3 + 4 = 7, \\ S_4 &= S_3 + 2 * \Delta_3 = 7 + 8 = 15, \\ S_5 &= S_4 + 2 * \Delta_4 = 15 + 16 = 31, \\ S_6 &= S_5 + 2 * \Delta_5 = 31 + 32 = 63, \\ S_7 &= S_6 + 2 * \Delta_6 = 63 + 64 = 127; \end{aligned}$$

La relation de récurrence reliant les termes S_n est :

$$\begin{aligned} S_n &= S_{n-1} + 2 * \Delta_{n-1} \\ &= S_{n-1} + 2 * 2^{n-2} \\ &= S_{n-1} + 2^{n-1} \\ \Rightarrow S_n - S_{n-1} &= 2^{n-1}; \end{aligned}$$

A partir des deux séries de données, c'est-à-dire la suite enregistrée des valeurs de vitesse et la suite des secondes comptées, la personne N peut estimer la distance parcourue.

Pour simplifier, supposons que la première seconde du temps décrite par l'horloge est égale à la seconde du temps absolu. Les résultats de l'observateur de cette expérience hypothétique sont données dans la tableau 2.

La personne N calculera la distance qu'il a passée comme suit :

$$M_N = 10 * 1 + 11 * 1 + 12 * 1 + 13 * 1 + 12 * 1 + 11 * 1 + 10 * 1 = 79$$

Cependant, s'il y'aurait un observateur indépendant O en connaissance de l'horloge ralentissant, donc un tel observateur obtiendrait un résultat différent de la distance parcourue établie par la personne N.

$$M_O. = 10 * 1 + 11 * 2 + 12 * 4 + 13 * 8 + 12 * 16 + 11 * 32 + 10 * 64 = 1368$$

Les M_O et M_N sont calculés à partir des produits de l'intervalle de temps avec la vitesse de l'engin de la personne N représentés dans le tableau (Figure3-12).

On va utiliser cette idée pour donner une interprétation mécanique de l'intégrale de Stieltjes.

3.2.2 Etude de la fonction $g_t(\tau)$ comme une transformée de l'échelle de temps :

La fonction $g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \{t^\alpha - (t - \tau)^\alpha\}$ est croissante pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ donc $dg_t(\tau) \geq 0$. Or $dg_t(\tau)$ est croissante pour $0 < \alpha < 1$ c-à-d : $\frac{d^2g_t}{d\tau^2}(\tau) \geq 0$ et $dg_t(\tau)$ est décroissante pour $\alpha > 1$ c-à-d : $\frac{d^2g_t}{d\tau^2}(\tau) \leq 0$

Notons l'accélération $a_g(\tau) = \frac{d^2g_t}{d\tau^2}(\tau)$:

1. Pour $0 < \alpha < 1$ on a : $a_g(\tau) \geq 0$ et donc $g_t(\tau)$ accélère.
2. Pour $\alpha > 1$ on a : $a_g(\tau) \leq 0$ alors $g_t(\tau)$ ralentit.

On a : soit $h(\tau) = \tau$ une fonction décrivant le temps homogène et soit $g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \{t^\alpha - (t - \tau)^\alpha\}$ la fonction transformée d'échelle de temps qui décrit le temps cosmique T , voici quelques valeurs des deux fonctions pour $t = 4$ et $\alpha = 2$:

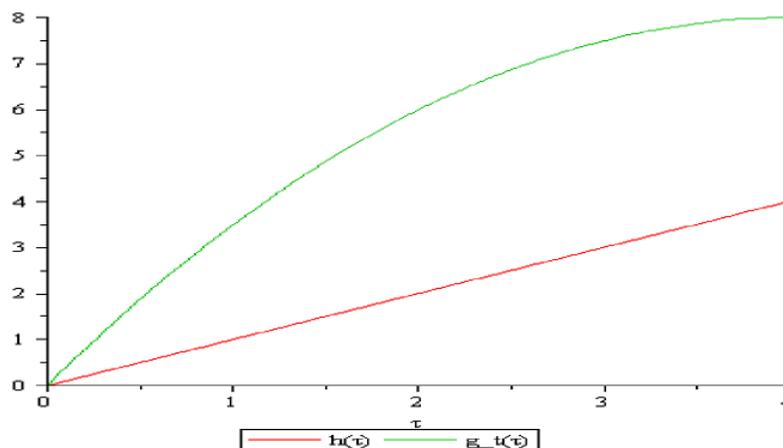
$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(2+1)} \{4^2 - (4 - \tau)^2\}$$

τ	1	2	3	4
$h(\tau)$	1	2	3	4
$g_t(\tau)$	3.5	6	7.5	8

A l'instant $\tau^* = 3$, la fonction $h(\tau) = 3$ et la fonction $g_t(\tau) = 7.5$

Cela signifie que $h(\tau)$ dure 3 secondes pour atteindre τ^* et que $g_t(\tau)$ dure 7.5 secondes pour atteindre τ^* .

Autrement dit, $h(\tau)$ atteint la valeur 3 avant $g_t(\tau)$ en fait de ralentissement.



Soient maintenant les valeurs des fonctions $h(\tau)$ et $g_t(\tau)$ avec $\alpha = 0.75$:

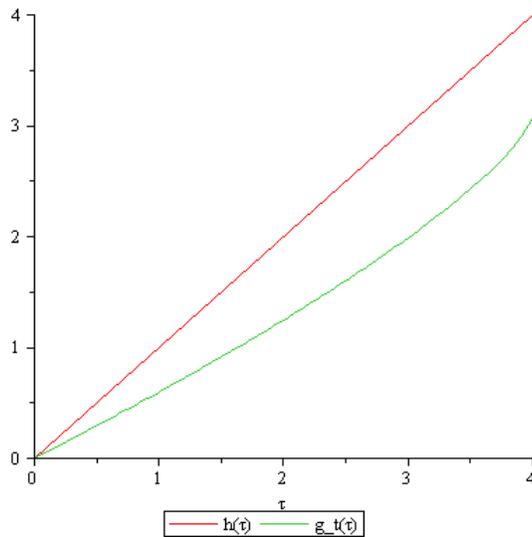
$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(0.75+1)} \{4^{0.75} - (4 - \tau)^{0.75}\}$$

τ	1	2	3	4
$h(\tau)$	1	2	3	4
$g_t(\tau)$	0.59726	1.2476	1.9894	3.0775

A l'instant $\tau^* = 3$, la fonction $h(\tau) = 3$ et la fonction $g_t(\tau) = 1.9894$.

Cela veut dire que $h(\tau)$ dure 3 secondes pour atteindre τ^* et que $g_t(\tau)$ dure 1.9894 secondes pour atteindre τ^* .

Autrement dit, $g_t(\tau)$ atteint la valeur 3 avant $h(\tau)$ en fait d'accélération.



3.3 Interprétation physique de l'intégration fractionnaire

3.3.1 Interprétation physique de l'intégrale de Stieltjes

Imaginer une voiture équipée de deux dispositifs de mesure : le compteur indiquant la vitesse $v(\tau)$ et l'horloge qui devrait afficher le temps τ bien que l'horloge affiche incorrectement le temps.

Supposons que la relation entre le temps erroné τ indiqué par l'horloge et que le conducteur considère vrai d'une part et le temps correct T d'autre part, est décrite par la fonction $T = g(\tau)$. Cela signifie que lorsque le conducteur mesure l'intervalle de temps $d\tau$, l'intervalle correct est donné par $dT = dg(\tau)$.

Le conducteur A , qui ne sait pas de la mauvaise opération de l'horloge, calculera la distance parcourue par l'intégrale classique

$$M_A(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau \quad (3.15)$$

Alors que, l'observateur O qui est en connaissance de l'horloge erroné et ayant la fonction $g(\tau)$ qui établit les valeurs correctes du temps à partir du temps incorrect, va calculer la distance vraie à partir de l'intégrale suivante :

$$M_O(t) = \int_0^t v(\tau) dg(\tau) \quad (3.16)$$

Cet exemple montre que l'intégrale de Stieltjes peut être interprétée comme une véritable distance parcourue par un objet mobile pour lequel, on a enregistré les valeurs correctes de la vitesse et les valeurs incorrectes de temps.

La relation entre le temps incorrectement enregistré et le temps correct, est donnée par une fonction $T = g(\tau)$.

3.3.2 Interprétation physique de l'intégrale fractionnaire

Ombres du passé

Considérons l'intégrale à gauche de Riemann Liouville

$$M_O(t) = \int_0^t v(\tau) dg_t(\tau) = I_0^\alpha v(t) \quad (3.17)$$

avec $g_t(\tau)$ est la fonction définie par (3.2) dans la première section. L'intégrale fractionnaire $M_O(t)$ de la fonction $v(\tau)$, peut être interprétée par la véritable distance parcourue par un objet mobile, pour lequel on a saisi les valeurs locales de sa vitesse $v(\tau)$ (vitesse individuelle) et les valeurs locales de son temps τ (temps individuel), la relation entre le temps enregistré τ (qui découle équitablement) et le temps cosmique (qui se passe non-équitablement) est donnée par une fonction connue $g_t(\tau)$.

La fonction $g_t(\tau)$ décrit l'échelle non-homogène de temps, qui dépend non seulement au τ mais aussi du paramètre t représentant la dernière valeur mesurée du temps individuel de l'objet mobile.

Lorsque t varie l'intervalle du temps entier cosmique précédent aussi change, c'est un accord avec les courantes vues en physique. En effet, B.N. Evanov a cité que les intervalles de temps dépendent du champ gravitationnel. Similairement S. Hawking [7] écrivait :

"...le temps devrait sembler courir plus lentement près d'un corps massif comme la terre".

"...il n'y a pas un temps absolu unique, mais tout individu mesure proprement le temps en dépit du lieu et de la manière de son mouvement."

Quand un corps mobile change de position dans l'espace-temps², le champ de gravité³ dans l'espace-temps entier se change en fait de ce mouvement. Par conséquent, l'intervalle du temps cosmique, qui correspond au passé du mouvement de l'objet mobile, change. Cela influe sur les calculs (en utilisant la formule (3.17)) de la véritable distance parcourue par

2. L'espace-temps est composé de quatre dimensions : trois d'espace et une de temps.

3. Le champ de gravité est un champ réparti dans l'espace et dû à la présence d'une masse susceptible d'exercer une influence gravitationnelle sur tout autre corps présent à proximité (immédiat ou pas).

un tel objet mobile.

En d'autres termes, l'intégrale à gauche de Riemann-Liouville de la vitesse individuelle $v(\tau)$ d'un objet mobile, pour lequel la relation entre le temps individuel τ et le temps cosmique $T = g_t(\tau)$ est décrite par l'équation (3.2), représente la véritable distance $M_O(t)$ passée par cet objet.

3.3.3 Interprétation géométrique et physique de l'intégrale de type convolution de Volterra

Dans le même contexte, on peut fournir une interprétation géométrique des intégrales plus générales.

Définition 9. On définit le produit de convolution de deux fonction f et g par :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

Opérateur intégral de Volterra :

Définition 10. Soit l'intervalle $I = [0, T]$. L'opérateur intégral de type Volterra $A : L(I) \rightarrow L(I)$ est défini comme suit :

$$(Af)(t) = \int_0^t K(t, \tau)f(\tau)d\tau \quad t \in I$$

La fonction mesurable $K(t, \tau)$ est appelée le noyau de l'opérateur intégral. Il existe de divers types de noyaux d'opérateurs intégraux tels que le noyau de convolution, c'est-à-dire lorsque la fonction K est donnée par $K(t, \tau) = k(t - \tau)$ où k est aussi une fonction mesurable.

Si on pose $K(t, \tau) = k(t - \tau)$, alors la définition de l'opérateur devient :

$$\begin{aligned} (Af)(t) &= \int_0^t k(t - \tau)f(\tau)d\tau \\ &= k * f = K * f \end{aligned}$$

L'intégrale de Riemann-Liouville est un cas particulier de l'intégrale de convolution de Volterra. En effet :

$$\begin{aligned} I_0^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau)(t - \tau)^{\alpha-1}d\tau \\ &= k * f \end{aligned}$$

avec $k(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}$.

Supposons que $k(t) = K'(t)$, on peut écrire cette intégrale sous la forme :

$$(K * f)(t) = \int_0^t f(\tau) K'(\tau) d\tau$$

ou autrement :

$$(K * f)(t) = \int_0^t f(\tau) dq_t(\tau)$$

avec

$$q_t(\tau) = K(t) - K(t - \tau)$$

L'interprétation géométrique et physique de l'intégrale de convolution de Volterra est similaire aux interprétations fractionnaires ainsi proposées.

La fonction $q_t(\tau)$ détermine la forme variée du grillage dynamique dans le cas d'une interprétation géométrique (Voir les figures 3-1 et 3-3) et elle établit la relation entre le temps individuel et le temps cosmique d'un objet mobile (dans le cas d'une interprétation physique).

Chapitre 4

Interprétation physique de la dérivation fractionnaire

1 Interprétation physique de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

D'autre part, nous pouvons utiliser les propriétés de la différentiation fractionnaire et l'intégration et exprimer $v(t)$ de l'équation (3.17) comme une dérivé fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville de $M_O(t)$.

Pour $0 < \alpha < 1$:

$$v(t) = {}^{RL}D_0^\alpha M_O(t) \quad (4.1)$$

En effet, d'après la définition de Riemann-Liouville de la dérivée fractionnaire :

$$\begin{aligned} ({}^{RL}D_0^\alpha \circ I_0^\alpha)v(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right) (I^{1-\alpha} \circ I^\alpha)v(t) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right) (I^1v(t)) = v(t) \end{aligned}$$

Ceci montre que le dérivée fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville de la distance réelle $M_O(t)$ passée par un objet mobile, pour lequel la relation entre son temps individuel et le temps cosmique T à chaque temps individuel t est donnée par la fonction connue $T = g_t(\tau)$ décrite par l'équation (3.2), est égale à la vitesse individuelle $v(\tau)$ de cet objet.

D'autre part, on peut différentier la relation (3.17) par rapport à la variable de temps cosmique t :

$$\frac{dM_O(t)}{dt} = M'_O(t) = v_O(t)$$

qui donne la relation entre la vitesse $v_O(t) = M'_O(t)$ du mouvement du point de vue de

l'observateur indépendant O et la vitesse individuelle $v(t)$:

$$\begin{aligned} v_O(t) &= \frac{dM_O(t)}{dt} = \frac{d}{dt} I_t^\alpha v(t) \\ &= \frac{d}{dt} I_t^{1-(1-\alpha)} v(t) \end{aligned}$$

Posons $\eta = 1 - \alpha$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} v_O(t) &= \frac{d}{dt} I_t^{1-(1-\alpha)} v(t) \\ &= \frac{d}{dt} I_t^{1-\eta} v(t) \\ &= {}^{RL}D^\eta v(t) = {}^{RL}D^{1-\alpha} v(t) \end{aligned}$$

Donc

$$v_O(t) = {}^{RL}D^{1-\alpha} v(t) \quad (4.2)$$

Par conséquent, la dérivé d'ordre $(1 - \alpha)$ au sens de Riemann-Liouville de la vitesse individuelle $v(t)$ est égale à la vitesse $v_O(t)$ du point de vue de l'observateur indépendant, si le temps individuel et le temps cosmique T sont liés par la fonction $T = g_t(\tau)$ décrite par l'équation (3.2).

Pour $\alpha = 1$, quand il n'y a pas de déformation dynamique de l'échelle de temps, c'est-à-dire $g_t(\tau) = \tau$, alors les deux vitesses coïncident :

$$\begin{aligned} v_O(t) &= {}^{RL}D_0^0 v(t) = v(t) \\ v_O(t) &= v(t) \end{aligned}$$

2 Interprétation physique de la dérivation fractionnaire au sens de Caputo

En appliquant l'intégration fractionnaire d'ordre $\beta = 1 - \alpha$ aux deux parties de la relation (4.2), on obtient à gauche :

$$I_0^{1-\alpha} v_O(t) = I_0^{1-\alpha} [M'_O(t)] = {}^C D_0^\alpha M_O(t)$$

et comme $0 < \alpha < 1$, d'après le corollaire (1)

$$I_0^{1-\alpha} v_O(t) = (I_0^{1-\alpha} \circ D_0^{1-\alpha}) v(t) = v(t)$$

et on obtient donc :

$$v(t) = {}^C D_0^\alpha M_O(t) \quad (4.3)$$

La relation (4.3) est similaire à la relation (4.1). Par conséquent la dérivée fractionnaire au sens de Caputo a la même interprétation physique que celle au sens de Riemann-Liouville. La coïncidence des deux dérivées devient plus claire (la proposition 1.4.2 i.e si $f(0) = 0$, alors les dérivées fractionnaires d'ordre $0 < \alpha < 1$ coïncident, c'est-à-dire

$${}^C D^\alpha f(t) = {}^{RL} D^\alpha f(t).$$

L'interprétation physique suggérée de l'intégration et la dérivation fractionnaire est basée sur l'emploi de deux types de temps : le temps individuel et le temps cosmique.

Evidemment, l'extension de l'univers implique que ni l'échelle spatiale ni l'échelle de temps sont homogènes, les deux sont dynamiques. L'échelle homogène idéale de temps est utilisée pour décrire le temps inhomogène, ceci a été utilisé dans la théorie de la relativité. La variation de l'échelle de temps cosmique est décrite à partir de l'échelle homogène comme une référence. En d'autres termes, le temps homogène est une notion idéale mais nécessaire dans le développement des modèles mathématiques décrivant le temps cosmique non-homogène et ses variations

Donc le modèle idéal de temps homogène découlant équitablement peut être considéré comme une approximation rigoureuse du temps cosmique.

3 Une nouvelle approche de dérivation fractionnaire

Dans la section précédente, une interprétation physique de la dérivation au sens de Riemann-Liouville et au sens de Caputo a été présentée. L'application de ces deux méthodes démontrent leurs lacunes ou erreurs lors de l'étude de la fonction constante et de la fonction identique. En raison de ce cas, il est nécessaire de redéfinir un nouveau concept de dérivation fractionnaire.

Dans cette partie, on introduit une nouvelle dérivée fractionnaire en utilisant la dérivation classique et la méthode de L'Hôpital. La définition obtenue est similaire à la dérivée classique lorsque l'ordre fractionnaire de dérivation est égal à 1.

Afin de donner ou préciser une interprétation physique et géométrique de cette nouvelle dérivation, on emploie des notions simples et compréhensibles tels que la distance, la vitesse et l'accélération.

Le sens de la dérivée est le taux de variation de la variable dépendante par rapport aux variations des variables indépendantes, cela peut être illustré par la dérivée classique de quelques fonctions : [1]

1. $f(t) = c$

$$\begin{aligned} f^{(1)}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{(t+h) - t} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0 \end{aligned}$$

La dérivée d'une constante est nulle au sens de Caputo mais ne l'est pas pour Riemann-Liouville, en effet, soit : $f(t) = c$.

- (a) La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha = \frac{3}{5}$ au sens de Riemann-Liouville de la fonction f est :

$$\begin{aligned}
 {}^{RL}(D^{\frac{3}{5}}f)(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^1 (I^{\frac{2}{5}}f)(t) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{5})} \left(\frac{d}{dt}\right) \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{5}} c d\tau \\
 &= \frac{c}{\Gamma(\frac{2}{5})} \left(\frac{d}{dt}\right) \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{5}} d\tau \\
 &= \frac{c}{\Gamma(\frac{2}{5})} \left(\frac{d}{dt}\right) \left[-\frac{5(t-\tau)^{\frac{2}{5}}}{2} \right]_0^t \\
 &= \frac{c}{\Gamma(\frac{2}{5})} \left(\frac{d}{dt}\right) \left[\frac{5}{2} t^{\frac{2}{5}} \right] \\
 &= \frac{c \cdot t^{-\frac{3}{5}}}{\Gamma(\frac{2}{5})}
 \end{aligned}$$

alors ${}^{RL}(D^\alpha f)(t) = {}^{RL}D^\alpha(c) \neq 0$

${}^{RL}D^\alpha(c)$ est une fonction de t alors que le taux de changement dans une fonction constante est nul en tous les cas. Donc, on peut dire que la méthode de Riemann-Liouville n'est pas consistante en cas d'une fonction $f(t) = c$

- (b) la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction f est :

$$\begin{aligned}
 {}^C(D^{\frac{3}{5}}f)(t) &= (I^{\frac{2}{5}}f^{(1)})(t) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{5}} f^{(1)}(\tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{5}} (c)^{(1)} d\tau \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

La méthode de Caputo est consistante pour $f(t) = c$

2. $g(t) = t$

$$\begin{aligned}
 g^{(1)}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{(t+h) - t} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t+h) - t}{(t+h) - t} = 1
 \end{aligned}$$

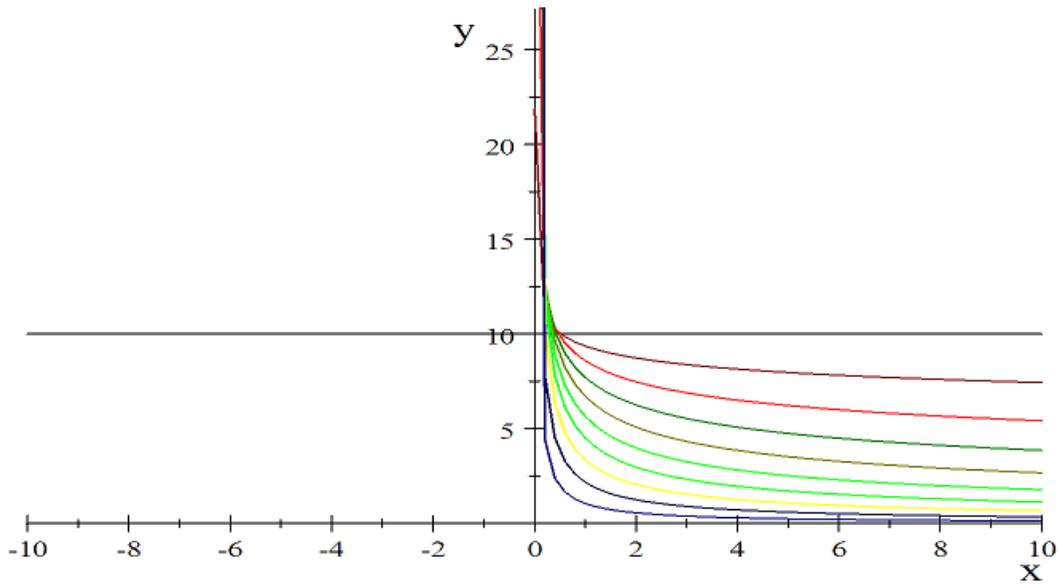


FIGURE 4.1 – La fonction $f(t) = 10$ et ses dérivées fractionnaires

- (a) La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha = \frac{3}{5}$ au sens de Riemann-Liouville de la fonction g est :

$$\begin{aligned}
 {}^{RL}(D^{\frac{3}{5}}g)(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^1 (I^{\frac{2}{5}}g)(t) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{5})} \left(\frac{d}{dt}\right) \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{5}} g(\tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{5})} \left(\frac{d}{dt}\right) \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{5}} \tau d\tau
 \end{aligned}$$

Soit le changement de variable suivant $\tau = st$

$$\begin{aligned}
 {}^{RL}(D^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{5})} \left(\frac{d}{dt} \right) \int_0^1 t^{-\frac{3}{5}} (1-s)^{-\frac{3}{5}} (st) t ds; \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{5})} \left(\frac{d}{dt} \right) \int_0^1 (1-s)^{-\frac{3}{5}} s t^{\frac{7}{5}} ds; \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{5})} \left(\frac{d}{dt} \right) \left[t^{\frac{7}{5}} \right] \int_0^1 (1-s)^{-\frac{3}{5}} s ds; \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{5})} \left(\frac{d}{dt} \right) \left[t^{\frac{7}{5}} \right] (B(\frac{2}{5}, 2)); \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{5})} \left(\frac{d}{dt} \right) \left[t^{\frac{7}{5}} \right] \frac{\Gamma(\frac{2}{5})\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{12}{5})}; \\
 &= \frac{\Gamma(2)\Gamma(\frac{12}{5})}{\Gamma(\frac{12}{5})\Gamma(\frac{7}{5})} t^{\frac{2}{5}}; \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{7}{5})} t^{\frac{2}{5}}
 \end{aligned}$$

donc ${}^{RL}(D^\alpha f)(t) \neq 1$

On peut dire donc que la méthode de Riemann-Liouville n'est pas consistante en cas d'une fonction $g(t) = t$.

(b) La dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction g est :

$$\begin{aligned}
 {}^C(D^{\frac{3}{5}} f)(t) &= (I^{\frac{2}{5}} f^{(1)})(t) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{5})} \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{5}} f^{(1)}(\tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{5})} \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{5}} \cdot 1 d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{5})} \left[-\frac{(t-\tau)^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} \right]_0^t \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{5} + 1)} t^{\frac{2}{5}} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{7}{5})} t^{\frac{2}{5}}
 \end{aligned}$$

La méthode de Caputo n'est pas consistante pour $g(t) = t$.

Les lacunes de ces deux méthodes conduisent Alexopoulos et Weinberg pour établir une re-définition de la dérivée fractionnaire en utilisant la règle de puissance [1].

3.1 Définition de la nouvelle approche de dérivation fractionnaire

Soit f une fonction telle que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, l'équation de la dérivée peut être considérée comme suit :

$$f^{(1)}(t) = f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{(t+h) - t}$$

L'ordre de la dérivation peut être réel, donc l'équation de la dérivée pour $\alpha \in \mathbb{R}$ devient :

$$f^{(\alpha)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^\alpha(t+h) - f^\alpha(t)}{(t+h)^\alpha - t^\alpha}$$

Pour une très petite valeur de h , on aboutit à une limite indéterminée dans la définition de la dérivée :

$$f^{(\alpha)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^\alpha(t+h) - f^\alpha(t)}{(t+h)^\alpha - t^\alpha} = \frac{0}{0}$$

Dans ce cas, on peut utiliser une des méthodes de limite indéterminée telle que le processus de l'Hôpital :

En effet, considérons la dérivée d'ordre α :

$$f^{(\alpha)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^\alpha(t+h) - f^\alpha(t)}{(t+h)^\alpha - t^\alpha}$$

Posons $A(h) = f^\alpha(t+h) - f^\alpha(t)$ et $B(h) = (t+h)^\alpha - t^\alpha$, il vient que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} L \left(\frac{f^\alpha(t+h) - f^\alpha(t)}{(t+h)^\alpha - t^\alpha} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{d(f^\alpha(t+h) - f^\alpha(t))}{dh}}{\frac{d((t+h)^\alpha - t^\alpha)}{dh}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A'(h)}{B'(h)}$$

Les deux fonctions $A(h)$ et $B(h)$ sont continues comme somme de deux fonctions continues.

Et on a : $\lim_{h \rightarrow 0} A(h) = \lim_{h \rightarrow 0} B(h) = 0$.

La fonction $B(h)$ est dérivable et l'on a : $B'(h) = \alpha(t+h)^{\alpha-1}$ et $B'(h) \neq 0$ lorsque $h = 0$.

D'après la règle de l'hôpital :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(h)}{B(h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A'(h)}{B'(h)} \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^\alpha(t+h) - f^\alpha(t)}{(t+h)^\alpha - t^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} L \left(\frac{f^\alpha(t+h) - f^\alpha(t)}{(t+h)^\alpha - t^\alpha} \right)$$

donc

$$f^{(\alpha)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} L \left(\frac{f^\alpha(t+h) - f^\alpha(t)}{(t+h)^\alpha - t^\alpha} \right)$$

Définition 11. Soit f une fonction telle que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et soit L le processus de L'Hôpital.

La dérivée fractionnaire de la fonction f est exprimée comme suit :

$$\begin{aligned}
 f^{(\alpha)}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} L \left(\frac{f^\alpha(t+h) - f^\alpha(t)}{(t+h)^\alpha - t^\alpha} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{d(f^\alpha(t+h) - f^\alpha(t))}{dh}}{\frac{d((t+h)^\alpha - t^\alpha)}{dh}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha f^{\alpha-1}(t+h) \cdot f'(t+h)}{\alpha(t+h)^{\alpha-1} \cdot 1} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{\alpha-1}(t+h)}{(t+h)^{\alpha-1}} \cdot f'(t+h) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(t+h)}{(t+h)} \right)^{\alpha-1} \cdot f'(t+h) \\
 &= \left(\frac{f(t)}{t} \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{df(t)}{dt}
 \end{aligned}$$

Exemple 1. $f(t) = c$

$$\begin{aligned}
 f^{(\alpha)}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^\alpha(t+h) - f^\alpha(t)}{(t+h)^\alpha - t^\alpha} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c^\alpha - c^\alpha}{(t+h)^\alpha - t^\alpha} = 0
 \end{aligned}$$

Exemple 2. $f(t) = t$

$$\begin{aligned}
 f^{(\alpha)}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^\alpha(t+h) - f^\alpha(t)}{(t+h)^\alpha - t^\alpha} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t+h)^\alpha - t^\alpha}{(t+h)^\alpha - t^\alpha} = 1
 \end{aligned}$$

Exemple 3. $f(t) = t^n$, et $\alpha = 1$

$$\begin{aligned}
 f^{(\alpha)}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^\alpha(t+h) - f^\alpha(t)}{(t+h)^\alpha - t^\alpha} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} L \left(\frac{(t+h)^n - t^n}{(t+h) - t} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{d((t+h)^n - t^n)}{dh}}{\frac{d((t+h) - t)}{dh}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{d(t^n + \binom{n}{1}t^{n-1} \cdot h + \binom{n}{2}t^{n-2} \cdot h^2 + \dots + \binom{n}{n-1}t \cdot h^{n-1} + h^n)}{dh}}{\frac{dh}{dh}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nt^{n-1} + n(n-1)t^{n-2} \cdot h + \dots + n(n-1)t \cdot h^{n-2} + nh^{n-1}}{1} \\
 &= nt^{n-1}
 \end{aligned}$$

Exemple 4. $f(t) = \sin t$ et $\alpha = 1$

$$\begin{aligned}
 f^{(\alpha)}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^\alpha(t+h) - f^\alpha(t)}{(t+h)^\alpha - t^\alpha} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} L \left(\frac{\sin(t+h) - \sin(t)}{(t+h) - t} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} L \left(\frac{(\sin(t) \cos(h) + \sin(h) \cos(t) - \sin(t))}{h} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin(t) \sin(h) + \cos(h) \cos(t)}{1} \\
 &= \cos(t)
 \end{aligned}$$

et la dérivée fractionnaire de $f(t) = \sin t$ est $f^{(\alpha)}(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\alpha-1} \cdot \cos t$

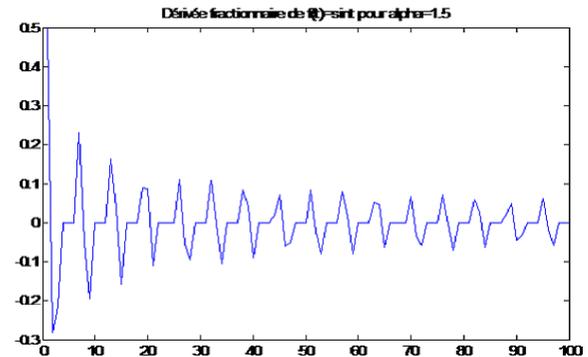
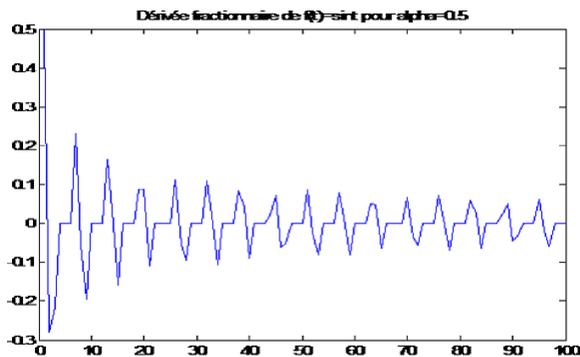


FIGURE 4.2 –

Théorème 3. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ alors

$$(f^{(\alpha)}(t))^{(\beta)} \neq f^{(\alpha+\beta)}(t)$$

Démonstration. Selon les termes de dérivation, on a :

$$f^{(\alpha)}(t) = \left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{df(t)}{dt}$$

$$\begin{aligned}
 (f^{(\alpha)}(t))^\beta &= \left(\frac{f^{(\alpha)}(t)}{t}\right)^{\beta-1} \cdot \frac{d(f^{(\alpha)}(t))}{dt} \\
 &= \left(\frac{\left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{df(t)}{dt}}{t}\right)^{\beta-1} \cdot \frac{d\left(\left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{df(t)}{dt}\right)}{dt}
 \end{aligned}$$

Or

$$f^{(\alpha+\beta)}(t) = \left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\alpha+\beta-1} \cdot \frac{df(t)}{dt}$$

bien que

$$\frac{\left(\frac{\left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{df(t)}{dt}}{t}\right)^{\beta-1} \cdot \frac{d\left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{df(t)}{dt}}{dt}}{\left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\alpha+\beta-1} \cdot \frac{df(t)}{dt}} \neq 1$$

donc $(f^{(\alpha)}(t))^{(\beta)} \neq f^{(\alpha+\beta)}(t)$ □

Théorème 4. [2] Soit f une fonction positive croissante et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, si $\alpha \leq \beta$

alors $f^{(\alpha)}(t) \leq f^{(\beta)}(t)$.

Démonstration. On a : f est une fonction croissante monotone alors pour tout $t_i \leq t_j$,

$f(t_i) \leq f(t_j)$, ensuite $f^\alpha(t_i) \leq f^\beta(t_j)$ et $f^\alpha(t_i + h) \leq f^\beta(t_j + h)$. Ceci implique que $(t+h)^\alpha - t^\alpha \leq (t+h)^\beta - t^\beta$ et encore $f^\alpha(t_i + h) - f^\alpha(t_i) \leq f^\beta(t_j + h) - f^\beta(t_j)$. D'après la définition de la dérivée fractionnaire et comme f est croissante alors $f'(t) \geq 0$

$$f^{(\alpha)}(t) = \left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{df(t)}{dt} \text{ et } f^{(\beta)}(t) = \left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\beta-1} \cdot \frac{df(t)}{dt}$$

il vient que :

$$\left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{df(t)}{dt} \leq \left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\beta-1} \cdot \frac{df(t)}{dt}$$

alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} L \left(\frac{f^\alpha(t+h) - f^\alpha(t)}{(t+h)^\alpha - t^\alpha} \right) \leq \lim_{h \rightarrow 0} L \left(\frac{f^\beta(t+h) - f^\beta(t)}{(t+h)^\beta - t^\beta} \right)$$

donc $f^{(\alpha)}(t) \leq f^{(\beta)}(t)$ □

Théorème 5. Soit f une fonction positive décroissante et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, si $\alpha \leq \beta$ alors $f^{(\alpha)}(t) \geq f^{(\beta)}(t)$

Démonstration. On a : f est une fonction croissante monotone alors pour tout $t_i \leq t_j$,

$f(t_i) \geq f(t_j)$, ensuite $f^\alpha(t_i) \geq f^\beta(t_j)$ et $f^\alpha(t_i + h) \geq f^\beta(t_j + h)$. Ceci implique que $(t+h)^\alpha - t^\alpha \leq (t+h)^\beta - t^\beta$ et encore $f^\alpha(t_i + h) - f^\alpha(t_i) \geq f^\beta(t_j + h) - f^\beta(t_j)$. D'après la définition de la dérivée fractionnaire et comme f est décroissante alors $f'(t) \leq 0$

$$f^{(\alpha)}(t) = \left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{df(t)}{dt} \text{ et } f^{(\beta)}(t) = \left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\beta-1} \cdot \frac{df(t)}{dt}$$

on trouve :

$$\left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{df(t)}{dt} \geq \left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\beta-1} \cdot \frac{df(t)}{dt}$$

on déduit que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} L \left(\frac{f^\alpha(t+h) - f^\alpha(t)}{(t+h)^\alpha - t^\alpha} \right) \geq \lim_{h \rightarrow 0} L \left(\frac{f^\beta(t+h) - f^\beta(t)}{(t+h)^\beta - t^\beta} \right)$$

donc $f^{(\alpha)}(t) \geq f^{(\beta)}(t)$. □

Théorème 6. Supposons que f est une fonction telle que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors la dérivée fractionnaire d'ordre α de f est une fonction à valeurs (variables) complexes.

Démonstration. Posons $\alpha = \frac{\beta}{\delta}$ avec $\delta \neq 0$.

1. Si $f(t) \geq 0$, la dérivée fractionnaire de f est :

$$\begin{aligned} f^{(\alpha)}(t) &= \left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{df(t)}{dt} \\ &= \left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\frac{\beta}{\delta}-1} \cdot \frac{df(t)}{dt} \\ &= \left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\frac{\beta-\delta}{\delta}} \cdot \frac{df(t)}{dt} \\ &= \sqrt[\delta]{\left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\beta-\delta}} \cdot \frac{df(t)}{dt} \end{aligned}$$

La fonction $f^{(\alpha)}(t)$ est à valeurs complexes c'est-à-dire : $f^{(\alpha)}(t) = g(t) + ih(t)$ avec $i = \sqrt{-1}$

2. Si $f(t) \leq 0$, on distingue deux cas :

(a) Supposons que δ est impair alors :

Si $\left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\beta-\delta} \geq 0 \implies f^{(\alpha)}(t) \in \mathbb{R}$ et si $\left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\beta-\delta} \leq 0$; on peut écrire $\left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\beta-\delta} = -s(t)$ où l'on a pris : $s(t) \geq 0$ pour tout t .

$$\sqrt[\delta]{\left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\beta-\delta}} = \sqrt[\delta]{-s(t)} = -\sqrt[\delta]{s(t)}.$$

Dans ce cas on déduit que $h(t) = 0$ et $f^{(\alpha)}(t) \in \mathbb{R}$

(b) Supposons que δ est pair alors :

Si $\left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\beta-\delta} \geq 0 \implies f^{(\alpha)}(t) \in \mathbb{R}$

et si $\left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\beta-\delta} \leq 0$; $\sqrt[\delta]{\left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\beta-\delta}} = \sqrt[\delta]{-s(t)} = (e^{\frac{(2k+1)\pi i}{\delta}}) \sqrt[\delta]{s(t)}$

Dans ce cas on déduit que $h(t) \neq 0$ et $f^{(\alpha)}(t) = g(t) + ih(t)$

□

En réalité, la fonction $f^{(\alpha)}(t)$ est à valeurs complexes en tous cas mais $h(t) \neq 0$ en quelques situations.

3.2 Interprétation physique de la nouvelle dérivation fractionnaire

Théorème 7. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta = 1$. Et soient $M(t)$ la distance, $v(t)$ la vitesse et $a(t)$ l'accélération. Les assertions suivantes existent :

1. $(M(t))^{(\alpha+\beta)} = v(t)$
2. $(M^{(\alpha)}(t))^{(\beta)} \neq M^{(\alpha+\beta)}(t)$
3. $(v^{(\alpha)}(t))^\beta \neq v^{(\alpha+\beta)}(t)$
4. $M^{(2)}(t) \neq a(t)$
5. $v^{(\alpha+\beta)}(t) = a(t)$

Résultats expérimentaux

Alexopoulos et Weinberg essayaient d'expliquer l'interprétation physique de la dérivation fractionnaire en utilisant la distance, la vitesse et l'accélération d'un objet mobile.

1. Vitesse et distance avec accélération constante :

Supposons que l'accélération est constante c'est-à-dire $a(t) = 7$, l'équation de la vitesse dans ce cas est alors :

$$V(t) = 7t + v_0$$

avec v_0 est la vitesse initiale de l'objet mobile.

Si $v_0 = 10$, l'équation de la distance sera :

$$M(t) = \frac{7}{2}t^2 + 10t$$

où l'on a :

$$\frac{dM(t)}{dt} = v(t)$$

autrement dit, la vitesse est la première dérivée de la distance.

Maintenant, calculons la dérivée fractionnaire de la distance, en appliquant la définition ci-dessus. On a :

$$\begin{aligned} v_\alpha(t) &= M^{(\alpha)}(t) = \left(\frac{M(t)}{t}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{dM(t)}{dt} \\ &= \left(\frac{\frac{7}{2}t^2 + 10t}{t}\right)^{\alpha-1} \cdot v(t) \\ &= \left(\frac{7}{2}t + 10\right)^{\alpha-1} \cdot (7t + 10) \end{aligned}$$

tel que $\alpha \in \mathbb{R}$ est l'ordre de dérivation. Présentons les dérivées fractionnaires de la distance $M(t)$ pour $t \in [0, 10]$, la vitesse $v(t) = 7t + 10$ est décrite par la ligne bleue et α varie entre 0 et 1 et entre 1 et 2 dans la figure (4-3). L'abréviation DOF. $\alpha = 0.1$ s'agit de la dérivée d'ordre fractionnaire $\alpha = 0.1$.

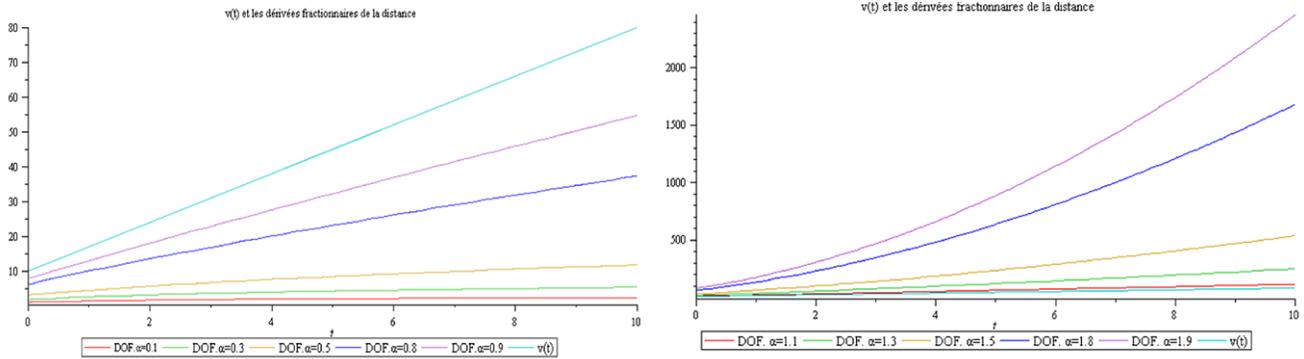


FIGURE 4.3 –

A partir de la figure, on peut constater la coïncidence des dérivées fractionnaires d'ordre $0 < \alpha < 1$ avec la dérivée classique $v(t)$. Lorsque α s'éloigne de 1, les dérivées fractionnaires s'éloignent de $v(t)$, par suite on ne peut pas déterminer l'interprétation physique de la dérivation fractionnaire dans ce cas.

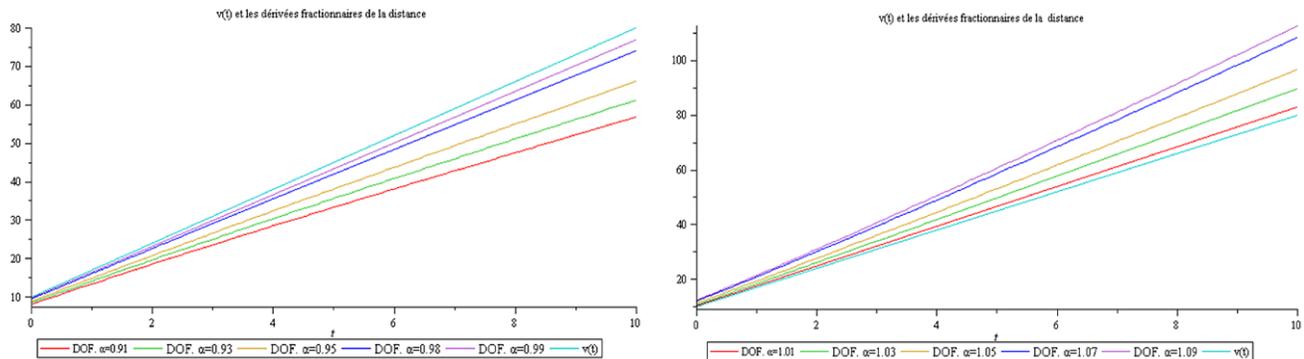


FIGURE 4.4 –

L'effet de l'ordre sur la dérivation peut être illustré sur un petit écart dans les ordres de dérivation. La figure (4-4) montre que les dérivées fractionnaires se rapprochent de la première dérivée de distance avec une accélération constante.

2. Vitesse et distance avec une accélération variable :

Considérons maintenant, un objet mobile à une accélération variable, i.e $a(t) = 4t$, l'équation de la vitesse devient donc :

$$v(t) = \int 4t dt = 2t^2 + v_0$$

où $v_0 = 12$ exprime la vitesse initiale.

La distance a pour equation

$$M(t) = \frac{2t^3}{3} + 12t$$

En acceptons toujours que :

$$\frac{dM(t)}{dt} = v(t)$$

D'autre part, la dérivée fractionnaire d'ordre α de la distance $M(t)$ est :

$$\begin{aligned} v_\alpha(t) &= M^{(\alpha)}(t) = \left(\frac{M(t)}{t}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{dM(t)}{dt} \\ &= \left(\frac{\frac{2t^3}{3} + 12t}{t}\right)^{\alpha-1} \cdot v(t) \\ &= \left(\frac{2t^2}{3} + 12\right)^{\alpha-1} \cdot (2t^2 + 12) \end{aligned}$$

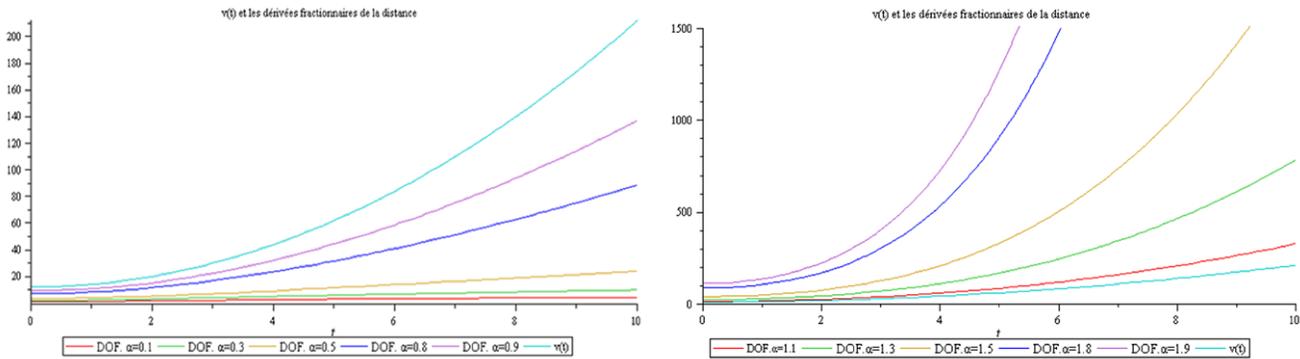


FIGURE 4.5 –

La figure (4-5) décrit la première dérivée de la distance i.e : $v(t)$ et ses dérivées fractionnaires d'ordre $0 < \alpha < 1$ et d'ordre $1 < \alpha < 2$. L'abréviation DOF. $\alpha = 0.1$ s'agit de la dérivée d'ordre fractionnaire $\alpha = 0.1$. Il est facile de constater que lorsque l'ordre de dérivation converge vers 1, les DOFs accostent de $v(t)$ et quand il diverge de 1 les dérivées d'ordre fractionnaire s'échappent de $v(t)$.

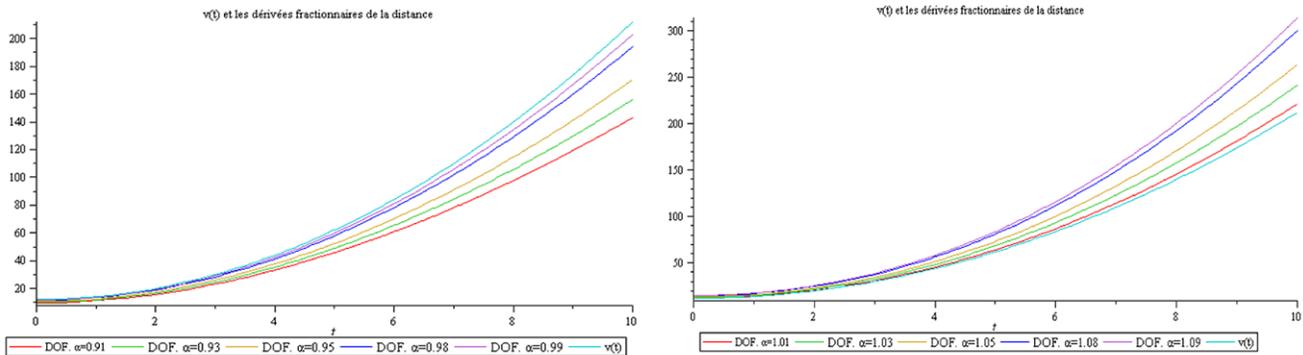


FIGURE 4.6 –

L'effet de l'ordre sur la dérivation peut être illustré sur un petit écart dans les ordres de dérivation. La figure (4-6) montre que les dérivées fractionnaires se rapprochent de la première dérivation de distance avec une accélération constante. Lorsque l'ordre de dérivation s'éloigne de 1, les résultats obtenus seront différents de la première dérivée de la distance (vitesse); d'autre part, lorsque l'ordre de dérivation converge vers 1, les résultats obtenus deviennent plus proches de la première dérivée de la distance (vitesse).

Maintenant, on illustre les résultats en comparant l'accélération qui est la première dérivée classique de la vitesse avec les dérivées fractionnaires de la vitesse calculées à partir de la nouvelle définition, pour se faire on propose deux cas d'accélération : constante et variable.

3. Vitesse et accélération constante :

Gardons la même valeur constante de l'accélération $a(t) = 7$.

on a :

$$V(t) = 7t + 10$$

$$M(t) = \frac{7}{2}t^2 + 10t$$

tel que 10 est la vitesse initiale de l'objet mobile.

On a déjà établi que

$$V_\alpha(t) = M^{(\alpha)}(t) = \left(\frac{7}{2}t + 10\right)^{\alpha-1}(7t + 10)$$

De même on déduit que

$$a_\alpha(t) = V_\alpha^{(\alpha)}(t) = \left(\frac{V_\alpha(t)}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{dV_\alpha(t)}{dt}$$

$$= \left[\frac{\left(\frac{7}{2}t + 10\right)^{\alpha-1} \cdot (7t + 10)}{t}\right]^{\alpha-1} \left[\frac{7}{2}(\alpha - 1)\left(\frac{7}{2}t + 10\right)^{\alpha-2}(7t + 10) + 7\left(\frac{7}{2}t + 10\right)^{\alpha-1}\right]$$

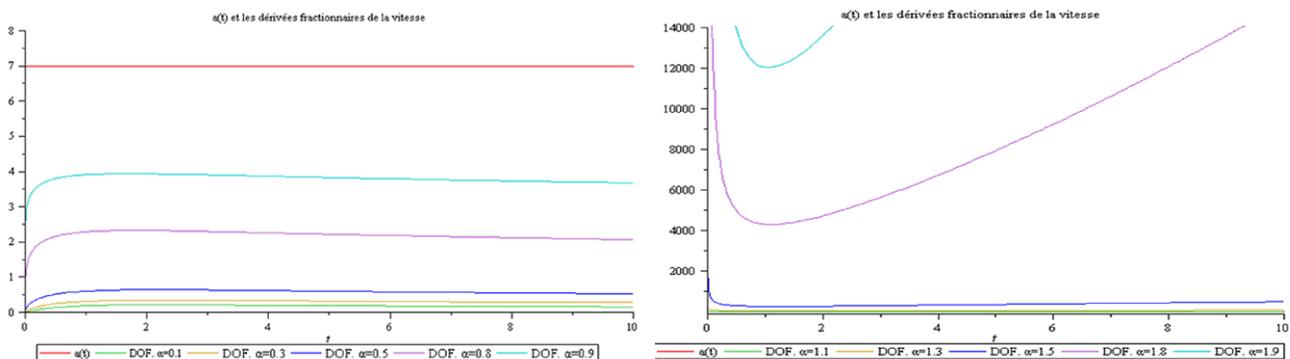


FIGURE 4.7 –

L'accélération $a(t)$ est montrée en rouge dans la figure (4-7), aussi les dérivées fractionnaires de la distance y sont représentées. Déduisons encore en vertu des représentations graphiques la coïncidence de DOF. $\alpha = 1$ avec la dérivée classique $a(t)$. Les DOFs d'ordre $0 < \alpha < 1$ se rapprochent de $a(t)$ et celles d'ordre $1 < \alpha < 2$ s'en éloignent.

4. Vitesse et accélération variable :

Considérons maintenant l'accélération variable $a(t) = 4t$. Les équations de la vitesse et de la distance se déduisent par suit :

$$V(t) = 2t^2 + 12 \text{ et } M(t) = \frac{2}{3}t^3 + 12t$$

$$V_\alpha(t) = M^{(\alpha)}(t) = \left(\frac{2t^2}{3} + 12\right)^{\alpha-1} \cdot (2t^2 + 12)$$

$$\begin{aligned} a_\alpha(t) &= V_\alpha^{(\alpha)}(t) = \left(\frac{V_\alpha(t)}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{dV_\alpha(t)}{dt} \\ &= \left[\frac{\left(\frac{2t^2}{3} + 12\right)^{\alpha-1} \cdot (2t^2 + 12)}{t}\right]^{\alpha-1} \\ &\quad \left[\frac{4}{3}t(\alpha - 1)\left(\frac{2t^2}{3} + 12\right)^{\alpha-2} \cdot (2t^2 + 12) + 4t \cdot \left(\frac{2t^2}{3} + 12\right)^{\alpha-1}\right] \end{aligned}$$

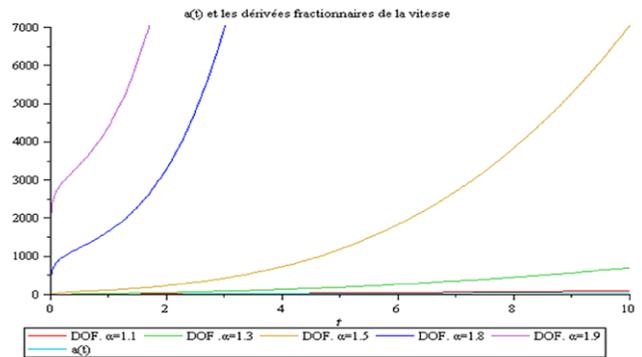
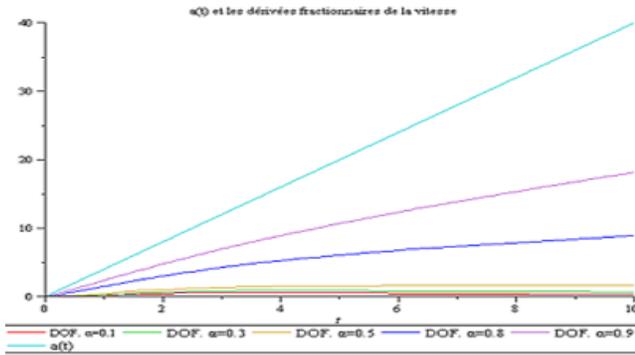


FIGURE 4.8 –

Dans la figure (4-8), l'accélération $a(t)$ est aperçue en bleu ainsi les dérivées fractionnaires de la distance y sont représentées. Évidemment, DOF. $\alpha = 1$ est égale à la dérivée classique $a(t)$. Les DOFs d'ordre $0 < \alpha < 1$ se rapprochent de $a(t)$ et celles d'ordre $1 < \alpha < 2$ s'en éloignent.

Conclusion

La dérivation fractionnaire peut modéliser les phénomènes physiques, en effet, elle représente un rapport proportionnel avec la variation des aires qui est une propriété physique.

L'interprétation géométrique de l'intégration fractionnaire vue dans le troisième chapitre revient essentiellement à l'interprétation géométrique de l'intégrale de Stieltjes pour un t fixé et on peut étendre cette étude en cas de t est variable pour donner une interprétation dynamique de l'intégration fractionnaire.

La relation entre le temps individuel enregistré par une horloge et le temps cosmique c'est-à-dire le temps enregistré par un observateur qui est décrite par une fonction $g(\tau)$, nous a permis de donner une interprétation physique pour l'intégration et pour la dérivation fractionnaires.

La nouvelle approche de dérivation fractionnaire basée sur la règle de puissance enlève les lacunes rencontrées lors de l'étude de la fonction constante et identique par les méthodes de Riemann-Liouville et de Caputo, comme elle est consistante pour les deux fonctions, elle coïncide également avec la dérivée classique d'ordre 1.

Il existe d'autres approches de dérivation fractionnaire qui naissent en cours, par suite de nouvelles interprétations géométriques et physiques s'en résulteront.

Bibliographie

- [1] A. Karçi. The physical and geometrical interpretation of fractional derivatives. Universal Journal of Engineering and Science. 3(4) :53-63, 2015.
- [2] A. Karçi. Generalised Fractional Order Derivatives, Its properties and Applications.
- [3] H. Dib. Equations Différentielles Fractionnaires.
- [4] I. Podlubny. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. An international journal of Theory and Applications. Volume 5, Number 4 (2002).
- [5] M.H. Tavassoli, A. Tavassoli, M.R. Ostad Rahimi. The geometric and physical interpretation of fractional derivatives of polynomial functions. DGDS 15 (2013), 93-104.
- [6] R. Hermann, Fractional calculus : An introduction for physics, World scientific, 2011
- [7] S. W. Hawking, A Brief History of Time. Bantam Press, London(1988).
- [8] T. Kisela, Fractional Differential Equations And Their Applications. Faculty Of Mechanical Engineering. Institute Of Mathematics.
- [9] T.M. Apostol, Mathematical analysis. California Institute of Technology.
- [10] W. Jardezký. Sur la généralisation de l'intégrale de Stieltjes donnée par Liapounoff.