

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Djilali Bounaama Khemis Miliana



Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Technologie

Mémoire du Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du diplôme de

Master

En

« **Génie Electrique** »

Option :

« **Automatique des systèmes de production** »

Titre :

**Commande optimale appliqué à un
robot mobile**

Réalisé par :

- * Hadj-djilani Fethi Rabah.
- * Bennabi Nadjib.

Encadré par :

Mr. Ikni Samir

Année Universitaire : 2016/2017

Dédicace

Je dédie ce modeste travail A :

- *Mes chers parents pour leurs soutiens et leurs bénédictions.*
- *Mon frère et mes sœurs pour leurs prières et soutiens.*
- *Et bien sûr à mon collègue Bennabi Nadjib qui m'a accompagné pendant le long de cette période pour réaliser ce modeste travail.*
- *Mr. Ikni Samir pour sa disponibilité et son soutien.*
- *A Tout mes amis (Wahab, Nadjib, Selami Med, Jamal, Ahmed, Hamza)*
- *Tous ceux qui ont été à mes côtés jusqu'à aujourd'hui.*
- *Tous les enseignants d'Université Djilali Bounaama qui ont contribué à ma formation.*
- *A tous mes collègues sans exception & à toutes les promos 2017 surtout D'ASP.*

Hadj-djilani Fethi Rabah

Dédicace

Je dédie ce modeste travail A :

- Mes chers parents pour leurs soutiens et leurs bénédictions.*
- Mes frères et ma sœur pour leurs prières et soutiens.*
- Et bien sûr à mon collègue et mon cher ami Hadj-djilani Fethi Rabah qui m'a accompagné pendant le long de cette période pour réaliser ce modeste travail.*
- Mr. Ikni Samir pour sa disponibilité et son soutien durant notre étude et notre recherche*
- A Tous Mes amis (Fethi, waheb, islam housseem et imene)*
- Tous ceux qui ont été à mes côtés jusqu'à aujourd'hui.*
- Tous les enseignants d'Université Djilali Bounaama qui ont contribué à ma formation.*
- A tous mes collègues sans exception & à toutes les promos 2017 surtout D'ASP.*

Bennabi Nadjib

Remerciements

Nous remercions tout d'abord le grand Dieu pour l'achèvement de ce mémoire.

Nous exprimons nos gratitude à Monsieur le président de jury d'avoir accepté examiné ce mémoire.

Nous remercions Messieurs les membres de jury, d'avoir accepté de prendre part à ce jury ainsi que pour l'intérêt qu'ils l'ont portés à ce travail.

Nous remercions Monsieur Ikni Samir, notre encadreur, pour ses conseils et suggestions avisés qui nous aidés à mener à bien ce travail, et d'avoir rapporté à ce mémoire ces remarques et conseils.

Résumé :

L'objectif de ce projet est l'application d'un type de commande optimale qui est le régulateur linéaire quadratique (LQR), sur un robot mobile de type unicycle en temps discret pour les deux cas, l'horizon fini et l'horizon infini.

Au cours de notre recherche, nous avons conclu que ce type de commande s'applique au modèle dynamique du robot qui est un système linéaire et que le commande est quadratique. La résolution de l'équation de Riccati nous a permis de contrôler le signal de commande en fonction du temps en modifiant les matrices de pondération. Tous les résultats de simulation obtenus sont donnés sous le logiciel "Matlab".

Mots clés : Commande optimale, régulateur linéaire quadratique, équation de Riccati.

Abstract :

The objective of this project is the application of a type of optimal control which is the quadratic linear regulator (LQR), on a mobile robot of unicycle type in discrete time for both cases, finite horizon and infinite horizon.

During our research, we have concluded that this type of command applies to the dynamic model of the robot which is a linear system and that the control is quadratic. The resolution of the Riccati equation allowed us to control the control signal as a function of time by making changes to the weighting matrices. All simulation results obtained are given under the "Matlab" software.

Key Word : optimal control, quadratic linear regulator, Riccati equation.

ملخص:

الهدف من هذا المشروع هو تطبيق نوع من التحكم الأمثل الذي هو منظم الخطية التربيعية (LQR)، على الروبوت المتحرك من نوع الدراجة الأحادية في وقت منفصل لكلا الحالتين، أفق محدود وأفق لانهائي. خلال بحثنا، استنتجنا أن هذا النوع من القيادة ينطبق على النموذج الديناميكي للروبوت الذي هو نظام خطي وأن السيطرة هي من الدرجة الثانية. وقد مكنا حل معادلة ريكاتي من التحكم في إشارة التحكم كدالة للوقت من خلال إجراء تغييرات على مصفوفات الترجيح. وتعطى جميع نتائج المحاكاة التي تم الحصول عليها تحت برنامج "ماتلاب".

كلمات مفتاحية: التحكم الأمثل، منظم الخطية التربيعية، معادلة ريكاتي.

Liste des Abréviations

US : Ultrason.

IR : Infra-Rouge.

GPS : Global Positionning System.

CCD : Charge Coupled Device.

CC : Courant Continu.

LQ : Linear Quadratic.

LQR : Linear Quadratic Regulator.

LTV : Linéaire Time Variant.

LTI : linéaire Time Invariant.

DRE : Differential Riccati Equation.

ARE : Algebric Riccati Equation.

RSF : Real Schur Form.

Liste des figures

Chapitre 1

Figure I.1 : Architecture d'un robot mobile.....	4
Figure I.2 : synoptique de la sécurité.....	6
Figure I.3 : Navigation de robot mobile en environnement encombré.....	7
Figure I.4 : Robot mobile de type unicycle.....	9
Figure I.5 : Robot mobile de type tricycle.....	10
Figure I.6 : Robot mobile de type voiture.....	10
Figure I.7 : Robot mobile de type omnidirectionnel.....	11
Figure I.8 : Représentation cinématique d'un robot mobile de type unicycle.....	16

Chapitre 3

Figure III.1 : Commande optimale en boucle fermée pour régulation linéaire à temps discret à horizon fini.....	42
Figure III.2 : Commande optimale en boucle fermée pour le système de régulation de l'état stable en temps discret à horizon infini.....	46
Figure III.3 : Coefficients de la matrice de Riccati $p_{11}(k)$, $p_{12}(k)$, $p_{21}(k)$ et $p_{22}(k)$	47
Figure III.4 : Etats optimaux ($x_1(k)$ = vitesse linéaire et $x_2(k)$ = vitesse angulaire)	48
Figure III.5 : Commandes optimaux $u_1(k)$ = (tension du moteur M1 de la roue droite) et $u_2(k)$ = (tension du moteur M2 de la roue gauche)	49
Figure III.6 : Coefficients de la matrice de Riccati $p_{11}(k)$, $p_{12}(k)$, $p_{21}(k)$ et $p_{22}(k)$, après la variation de Q et R	50
Figure III.7 : Etats optimaux ($x_1(k)$ = vitesse linéaire et $x_2(k)$ = vitesse angulaire), après la variation de Q et R	51
Figure III.8 : Commandes optimaux $u_1(k)$ = (tension du moteur M1 de la roue droite) et $u_2(k)$ = (tension du moteur M2 de la roue gauche), après la variation de Q et R	52
Figure III.9 : Coefficients de la matrice de Riccati $p_{11}(k)$, $p_{12}(k)$, $p_{21}(k)$ et $p_{22}(k)$, après la variation de Q et R	53
Figure III.10 : Etats optimaux ($x_1(k)$ = vitesse linéaire et $x_2(k)$ = vitesse angulaire), après la variation de Q et R	54

Figure III.11 : Commandes optimaux $u_1(k)$ = (tension du moteur M1 de la roue droite) et $u_2(k)$ = (tension du moteur M2 de la roue gauche), après la variation de Q et R	55
Figure III.12 : Etats optimaux ($x_1(k)$ = vitesse linéaire et $x_2(k)$ = vitesse angulaire)	56
Figure III.13 : Commandes optimaux $u_1(k)$ = (tension du moteur M1 de la roue droite) et $u_2(k)$ = (tension du moteur M2 de la roue gauche)	57
Figure III.14 : Etats optimaux ($x_1(k)$ = vitesse linéaire et $x_2(k)$ = vitesse angulaire), après la variation de Q et R	58
Figure III.15 : Commandes optimaux $u_1(k)$ = (tension du moteur M1 de la roue droite) et $u_2(k)$ = (tension du moteur M2 de la roue gauche), après la variation de Q et R	59
Figure III.16 : Etats optimaux ($x_1(k)$ = vitesse linéaire et $x_2(k)$ = vitesse angulaire), après la variation de Q et R	60
Figure III.17: Commandes optimaux $u_1(k)$ = (tension du moteur M1 de la roue droite) et $u_2(k)$ = (tension du moteur M2 de la roue gauche), après la variation de Q et R	61

Liste des tableaux

Tableau I.1 : Applications des robots mobiles.....	5
Tableau I.2 : Comparaison des différents types de robots mobiles à roues.....	13

Table de Matière

Dédicace

Remerciement

Résumé

Liste des abréviations

Liste des figures

Listes des tableaux

Introduction générale..... 1

Chapitre I :

I.1. Introduction	3
I.2. Définition du robot mobile	3
I.3. Classification	3
I.4. Applications	5
I.5. Architecture des robots mobiles	5
I.6. Classes de robots mobiles à roues	10
I.7. Capteurs en robotique mobile	13
I.8. Modèle cinématique d'un robot mobile type unicycle	17
I.9. Modèle linéaire d'un moteur à courant continu (CC).....	18
I.10. Modèle dynamique du robot mobile de type unicycle	19
I.11. Conclusion	20

Chapitre II :

II.1. Introduction	21
II.2. Déclaration du problème	21
II.3. Classement des problèmes de la commande optimale	23
II.4. Rappel de principes fondamentaux	24
II.5. Commande Linéaire Quadratique	28
II.6. Commande LQ à temps discret	31
II.7. Conclusion	37

Chapitre III :

III.1. Introduction	39
III.2. Solution de l'équation de Riccati	39
III.3. Procédures pour l'obtention des états optimaux et la commande optimale	41

III.4. Détermination de A et B.....	43
III.5. Choix des matrices de pondération Q et R	43
III.6. Deuxième procédure	45
III.7. Résultat de la simulation	47
III.8. Conclusion	62
Conclusion générale	63
Bibliographie	
Annexe	

Introduction générale

Introduction générale

L'objectif principal d'une commande optimale est de déterminer les signaux de contrôle qui permettront à un processus de satisfaire certaines contraintes physiques et en même temps, d'éliminer (maximiser ou minimiser) un critère de performance choisi (indice de performance ou fonction de coût). Le but alors est d'amener un tel système d'un état initial à un état final suivant une commande en respectant des critères choisis. Les systèmes tenus en études sont nombreux : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard... Dans différents domaines : mécanique, électricité, électronique, biologie, chimie, économie, etc...

Le travail amené dans ce mémoire est dédié à l'application d'un type de commande optimale sur un robot non holonome, dans ce cas, un robot mobile de type unicycle. Le but est de permettre au véhicule de suivre un trajectoire connus, en basant sur son modèle dynamique.

Parmi les divers types de commande optimale qui peuvent être appliqué pour commander ce type de robots, nous avons proposé la commande à régulateur linéaire quadratique (LQR), qui représentent un moyen efficace pour la commande des systèmes, la rapidité du traitement, les capacités d'apprentissage et d'adaptation, mais aussi la robustesse de ces approches motive leur utilisation.

Le travail dans ce mémoire est planifié comme suit :

Le premier chapitre est consacré à la citation des différents types de robots mobiles non holonomes, et les différents capteurs utilisés en robotique mobile et leur importance. Ainsi nous avons fini le chapitre par donner le modélisation cinématique et dynamique du robot lequel nous avons abordé notre étude.

Le deuxième chapitre, est destiné intégralement à l'étude de la commande optimale à régulateur linéaire quadratique LQR, dans les deux cas temporels : temps continu et temps discret.

Dans le dernier chapitre, nous avons présenté deux méthodes pour résoudre l'équation de Riccati à temps discret, ainsi les résultats de simulation dans deux cas d'horizon infini et l'horizon fini.

Enfin, nous achevons ce mémoire par une conclusion générale.

Chapitre I
Généralité sur les robots
mobiles

I.1. Introduction :

Les robots mobiles ont une place importante en robotique. Leur intérêt consiste dans leur mobilité qui ouvre des applications dans de nombreux domaines. Ils assistent généralement l'homme dans les tâches pénibles (transport de charges lourdes), monotones ou en ambiance hostile (nucléaire, marine, spatiale, lutte contre l'incendie, surveillance...). [11]

Le robot mobile, pour accomplir sa tâche correctement, doit avoir la capacité de perception, ce concept en robotique mobile est relatif à la capacité du système à recueillir, traitement et mise en forme des informations efficaces au robot pour agir et réagir dans un environnement précis. Alors que pour des tâches de manipulation on peut considérer que l'environnement du robot est relativement structuré, le cas est différent lorsqu'il s'agit de naviguer de manière autonome dans des lieux pas totalement connus. Aussi, pour extraire des informations utiles à la réalisation de sa tâche, il est nécessaire que le robot dispose de nombreux capteurs mesurant aussi bien son état interne que l'environnement dans lequel il évolue. [6]

I.2. Définition du robot mobile :

Un robot mobile est un véhicule équipé de moyens de locomotion qui lui permettent de se déplacer. Suivant son degré d'autonomie il peut être doté de moyens de perception et de raisonnement. [12]

I.3. Classification :

Selon leur degré d'autonomie les robots sont classés comme suit [12] :

- Véhicule télécommandé par un opérateur qui lui impose une tâche prédéfinie
- Véhicule télécommandé au sens de la tâche à réaliser.
- Véhicule semi-autonome l'opérateur aide le robot pour ses tâches prédéfinies.
- Véhicule autonome qui réalise des tâches semi-définies. Ce type de véhicule pose des problèmes d'un niveau de complexité élevé de représentation des connaissances, de capacité décisionnelle et de génération de plans qui sont résolus à bord dans la mesure du possible.

L'ensemble des problèmes particuliers liés à la conception de tels robots sont :

- La conception mécanique liée à la mobilité
- La détermination de la position et de la latitude (orientation)
- La détermination du chemin optimal pour atteindre le lieu de la tâche.

I.4. Applications :

Le tableau I.1 résume des différents domaines d'applications des robots mobiles. [12]

Industrie nucléaire	surveillance de sites, manipulation de matériaux radio-actifs, démantèlement de centrales
Sécurité civile	neutralisation d'activité terroriste, déminage, pose d'explosif, surveillance de munitions
Militaire	surveillance, patrouille, pose d'explosifs, manipulation de munitions
Chimique	surveillance de site, manipulation de matériaux toxiques
Médecine	assistance d'urgence, aide aux handicapés physiques, aux aveugles
Lutte contre l'incendie	localisation d'une source d'incendie, détection de fumée, suppression de flammes
Sous-marine	pose de câbles, recherche de nodules, recherche de navires immergés, inspection des fonds marins
Agricole	cueillette de fruits, traite, moisson, traitement des vignes...
Construction BTP	projection mortier, lissage du béton
Nettoyage	coque de navire, nettoyage industriel
Espace	Exploration
Industriel	convoyage, surveillance

Tableau I.1 : Applications des robots mobiles.

I.5. Architecture des robots mobiles :

L'architecture des robots mobiles se structure en quatre éléments [5] :

- La structure mécanique et la motricité.
- Les organes de sécurité.
- Le système de traitement des informations et gestion des tâches.
- Le système de localisation.

L'architecture des robots mobiles est représentée sur la figure I.1.

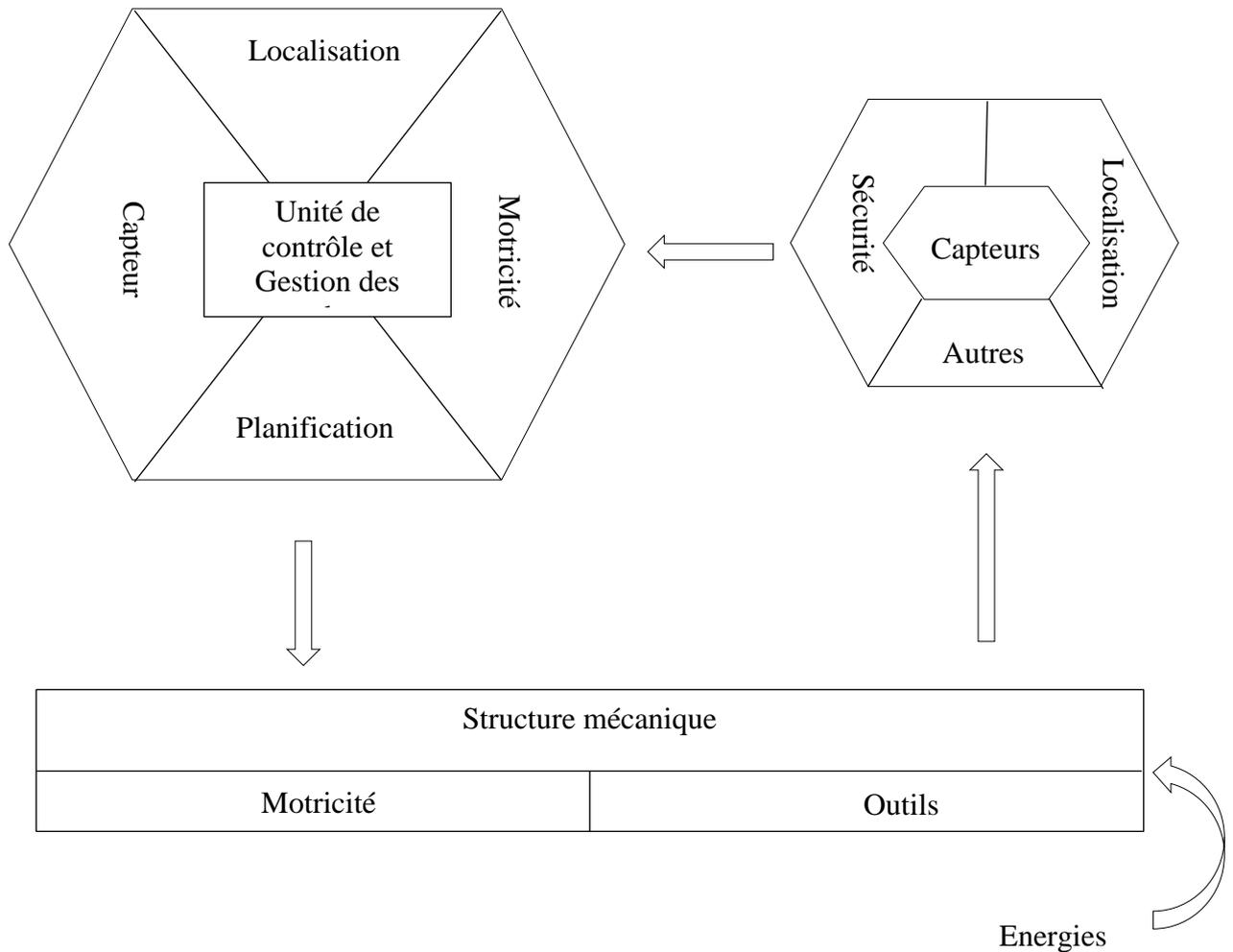


Figure I.1 : Architecture d'un robot mobile.

I.5.1. La structure mécanique et la motricité :

On compte quatre types de structures mécaniques assurant la motricité [5].

I.5.1.1. Les mobiles à roues :

La mobilité par roues est la structure mécanique la plus souvent appliquée. Cette technique assure selon l'agencement et les dimensions des roues un déplacement dans toutes les directions avec une accélération et une vitesse importante. Le franchissement d'obstacles ou l'escalade de marches d'escalier est possible dans une certaine mesure.

Toutes les configurations (nombre, agencement, fonction) des roues sont appliquées.

I.5.1.2. Les mobiles à chenilles :

L'utilisation des chenilles présente l'avantage d'une bonne adhérence au sol et d'une faculté de franchissement d'obstacles. L'utilisation est orientée vers l'emploi sur sol accidenté ou de mauvaise qualité au niveau de l'adhérence (présence de boue, herbe...).

I.5.1.3. Les mobiles marcheurs :

Les robots mobiles marcheurs sont destinés à réaliser des tâches variées dont l'accès au site est difficile, dangereux ou impossible à l'homme. Leur anatomie à de nombreux degrés de liberté permet un rapprochement avec les robots manipulateurs. La locomotion est commandée en termes de coordonnées articulaires. Les méthodes de commande des articulations définissent le concept d'allure qui assure le déplacement stable de l'ensemble.

Les différentes techniques étudiées se rapprochent de la marche des animaux et notamment de celle des insectes.

I.5.1.4. Les robots rampants :

La reptation est une solution de locomotion pour un environnement de type tunnel qui conduit à réaliser des structures filiformes.

- Le système est composé d'un ensemble de modules ayant chacun plusieurs mobilités
- Les techniques utilisées découlent des méthodes de locomotion des animaux.

I.5.2. La motricité et l'énergie :

Les déplacements des robots sont réalisés par des moteurs de types électrique, thermique ou hydraulique.

L'énergie électrique la plus fréquemment employée offre l'avantage d'une commande aisée. Par contre le transport et la génération présentent des difficultés. Plusieurs méthodes sont employées :

- Par batteries qui sont soit rechargées périodiquement de manière automatique ou manuelle, soit par un échange avec d'autres lorsqu'elles sont déchargées.
- Par groupe électrogène embarqué dont l'inconvénient constitue la masse élevée.
- Par cordon ombilical qui réduit l'autonomie du robot.

L'énergie thermique est essentiellement employée par des véhicules de forte puissance comme énergie de base pour la traction ou pour activer un compresseur hydraulique.

I.5.3. Les organes de sécurité :

Un robot, selon la tâche qui lui est confiée, peut être amené à travailler au voisinage du personnel. A ce titre, il est obligatoire qu'il soit doté d'organes garantissant la sécurité. Des capteurs sont disponibles tout autour du mobile afin de détecter un obstacle sur un domaine le plus étendu possible. Deux types de capteurs sont employés : les capteurs proximétriques assurant la détection avant collision (ultra-son, hyper fréquence, infrarouge...) et les capteurs de contact détectant une collision ou un choc avec l'environnement (contact électrique sur pare-chocs, résistance variable, fibre optique...).

Ce sont des dispositifs redondants par rapport aux capteurs précédents. L'organisation de la sécurité est représentée sur le schéma de la figure I.2.

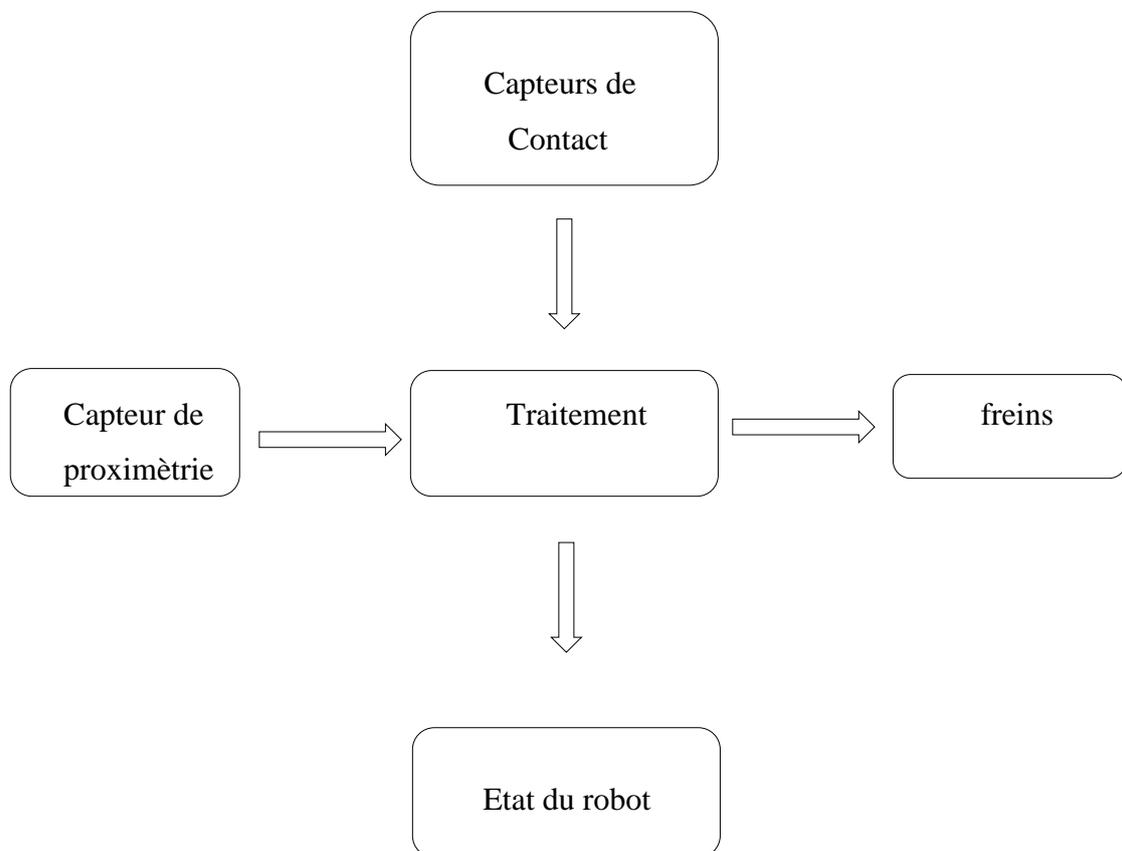


Figure I.2 : synoptique de la sécurité.

Il comporte également un système de vérification permanent de l'état de fonctionnement des autres organes.

I.5.4. Traitement des informations et gestion des tâches :

L'ensemble de traitement des informations et gestion des tâches constitue le module information centrale qui établit les commandes permettant au mobile de réaliser un déplacement et d'activer les divers organes en accord avec l'objectif [5].

I.5.5. La navigation :

La navigation est une étape très importante en robotique mobile. Bien entreprise, elle permet une large autonomie à un robot mobile. Le système de navigation comporte plusieurs modules qui peuvent être traités différemment et parmi lesquels on distingue celui de la localisation et celui de l'évitement d'obstacles.

Un exemple d'évitement d'obstacles est présenté sur la figure I -3.

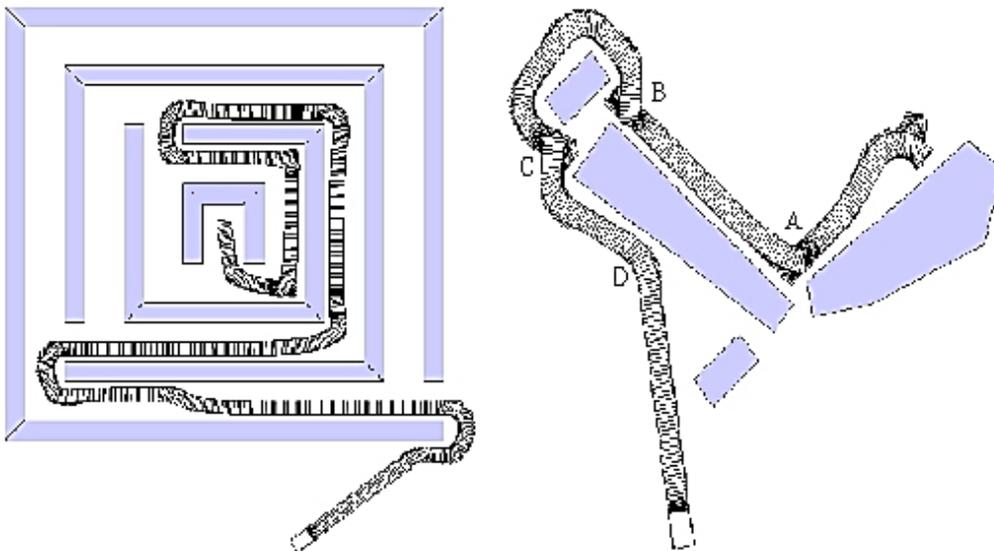


Figure I.3 : Navigation de robot mobile en environnement encombré.

I.5.6. La modélisation de l'environnement :

La connaissance du milieu dans lequel évolue le robot mobile n'est établie en général qu'après avoir effectué une campagne de mesure de l'ensemble des éléments constituant l'environnement. Cette procédure fastidieuse peut être évitée si le robot construit lui-même son modèle d'environnement de manière dynamique. Par contre, la planification de trajectoire n'est pas utilisable tant que le robot ne dispose pas d'un modèle de l'espace d'évolution ce qui handicape très fortement l'utilisation du robot.

I.5.7. La planification de trajectoire :

On voit ainsi au travers de cette première approche assez théorique apparaître un problème essentiel : la planification de la trajectoire. Différentes approches sont envisageables selon que le robot évolue en milieu connu ou inconnu :

- L'évolution en territoire cartographié simplifie évidemment la tâche des concepteurs : une fois la carte de la zone d'évolution rentrée dans la mémoire d'un ordinateur communiquant avec le robot ou bien dans une mémoire intégrée au robot lui-même, des algorithmes de routage permettent de diriger le robot.

- Il en va tout autrement dans le cas de l'évolution en territoire inconnu. Le robot doit alors analyser son environnement au moyen de différents capteurs, détecter sa position par rapport à son but, et décider de sa trajectoire. Cette localisation peut s'effectuer par différentes méthodes : triangulation de signaux émis par des balises déposées au cours du déplacement ou/et repérage d'obstacles à distance et construction d'une carte du site, mesures odométriques et estimation de la position.

On applique ensuite des algorithmes complexes pour diriger le robot. Ceux-ci peuvent amener des résultats plus ou moins heureux, le principal problème étant la non-convergence de certaines boucles de déplacement. Si aucun algorithme de secours n'a été prévu, l'intervention humaine est alors nécessaire.

I.6. Classes de robots mobiles à roues :

Il existe nombreuse classe de robots mobiles à roues déterminées, essentiellement, par la position et le nombre de roues utilisées.

Nous citerons ici les quatre classes principales de robots à roues. [24]

I.6.1. Robot mobile de type unicycle :

Un robot mobile de type unicycle est mouvementé par deux roues indépendantes, il possède incidemment des roues folles pour assurer sa stabilité. Son centre de rotation est situé sur l'axe reliant les deux roues motrices.

C'est un robot non-holonome, en effet il n'est pas possible de le déplacer dans une direction perpendiculaire aux roues de locomotion.

Sa commande est très simple, il est en effet assez facile de le déplacer d'un point à un autre par une suite de rotations simples et de lignes droites. [24,4]

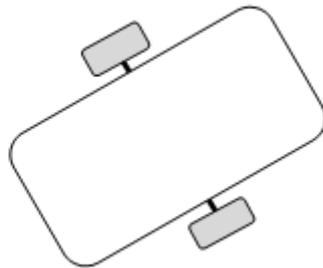


Figure I.4 : Robot mobile de type unicycle.

I.6.2. Robot mobile de type tricycle :

Il est composé de deux roues fixes placées sur un même axe et d'une roue centrée orientable placée sur l'axe longitudinal. Le mouvement du robot est donné par la vitesse des deux roues fixes et par l'orientation de la roue orientable. Son centre de rotation est situé au croisement de l'axe contenant les roues fixes et de l'axe de la roue orientable. C'est un robot non holonome. En effet, il n'est possible de le déplacer dans une direction perpendiculaire aux roues fixes. Sa commande est plus compliquée. En général c'est impossible d'accomplir des rotations simples à cause d'un rayon de braquage limité de la roue orientable. [24,4]

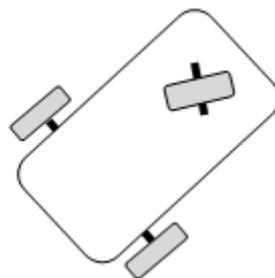


Figure I.5 : Robot mobile de type tricycle.

I.6.3. Robot mobile de type voiture :

Un robot mobile de type voiture est similaire au tricycle, il est constitué de deux roues fixes placées sur un même axe et de deux roues centrées orientables placées elles aussi sur le même axe.

Le robot mobile de type voiture est plus stable puisqu'il possède un point d'appui supplémentaire.

Toutes les autres propriétés du robot voiture sont identiques au robot tricycle, le deuxième pouvant être ramené au premier en remplaçant les deux roues avant par une seule placée au centre de l'axe, et ceci de manière à laisser le centre de rotation inchangé. [24,4]

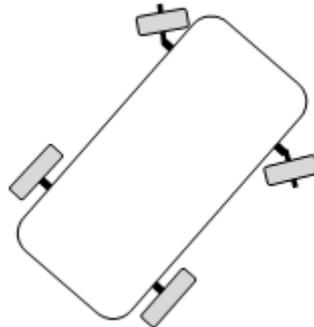


Figure I.6 : Robot mobile de type voiture.

I.6.4. Robot mobile de type omnidirectionnel :

Un robot mobile omnidirectionnel est un robot qui peut se déplacer librement dans toutes les directions. Il est en général constitué de trois roues décentrées orientables placées en triangle équilatéral.

L'énorme avantage du robot omnidirectionnel est qu'il est holonome puisqu'il peut se déplacer dans toutes les directions. Mais ceci se fait au dépend d'une complexité mécanique bien plus grande. [24,4]

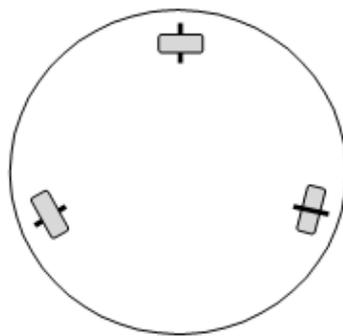


Figure I.7 : Robot mobile de type omnidirectionnel.

I.6.5. Comparaison des différents types :

Nous pouvons observer dans le tableau ci-dessous un récapitulatif des avantages et des inconvénients des différents types de robots à roues. [24,4]

Type du robot	Avantage	Inconvénient
Unicycle	Stable Rotation sur soi-même Complexité mécanique faible	Non-holonome
Tricycle	Complexité mécanique modérée	Non-holonome Peu stable Pas de rotation sur soi-même
Voiture	Stable Complexité mécanique modérée	Non-holonome Pas de rotation sur soi-même
Omnidirectionnel	Holonome Stable Rotation sur soi-même	Complexité mécanique importante

Tableau I.2 : Comparaison des différents types de robots mobiles à roues.

I.7. Capteurs en robotique mobile :

En robotique mobile, on classe habituellement les capteurs en deux catégories selon qu'ils mesurent l'état du robot lui-même ou l'état de son environnement. Dans le premier cas, à l'image de la perception chez les êtres vivants, on parle de proprioception et donc de capteurs proprioceptifs. On trouve par exemple dans cette catégorie les capteurs de position ou de vitesse des roues et les capteurs de charge de la batterie. [6]. Les capteurs informant sur l'état de l'environnement, donc de ce qui est extérieur au robot lui-même, sont eux appelés capteurs extéroceptifs. Il s'agit de capteurs donnant la distance du robot par rapport aux amers de l'environnement, la température, signalant la mise en contact du robot avec l'environnement, etc...

I.7.1. Les capteurs proprioceptifs :

Les capteurs proprioceptifs livrent, par intégration, des informations élémentaires sur les paramètres cinématiques du robot. Les informations sensorielles gouvernées dans ce cadre sont généralement des vitesses, des accélérations, des angles de rotation, des angles d'attitude. [7]

On peut classer les capteurs proprioceptifs en deux familles :

- Les capteurs de déplacement qui incluent les odomètres, les accéléromètres, les radars Doppler, les mesureurs optiques. Cette catégorie fournit des informations sur des déplacements élémentaires, des variations de vitesse ou d'accélération sur des trajectoires rectilignes ou curvilignes.

- Les capteurs d'attitude, qui mesurent deux types de données : les angles de cap et les angles de roulis et de tangage. Ils sont principalement composés par les gyroscopes et les gyromètres, les capteurs inertiels composites, les inclinomètres, les magnétomètres. Ces capteurs sont en majorité de type inertiel.

I.7.1.1 Les capteurs de déplacement :

a) Les odomètres :

Les odomètres fournissent une quantification des déplacements curvilignes du robot en mesurant la rotation de ses roues.

b) Les accéléromètres :

Les accéléromètres, sont des capteurs qui permettent de mesurer les accélérations linéaires. Ils peuvent donc mesurer les déplacements d'un robot mais la double intégration de la mesure pour obtenir une information de position les rendent sensibles aux erreurs de mesure. De plus ils sont sensibles à l'accélération de la pesanteur ce qui les rend sensibles aux variations de l'inclinaison du robot. [22]

c) Le radar Doppler :

Le radar Doppler donne une estimation instantanée de la vitesse linéaire d'une plateforme mobile par rapport à un objet de la scène en se basant sur l'effet Doppler-Fizeau. Ce capteur est le plus fréquemment utilisé en milieu extérieur.

I.7.1.2. Les capteurs d'attitude :

Ces capteurs ont pour point commun d'être généralement coûteux et sensibles au bruit, d'où une intégration moins fréquente dans les systèmes embarqués que les odomètres.

a) Le gyroscope et le gyromètre :

- **Les gyroscopes** : permettent de mesurer une variation angulaire. Ils sont intéressants en robotique mobile parce qu'ils peuvent compenser les défauts des odomètres.

- **Le gyromètre** : est un capteur qui permet de mesurer une vitesse angulaire. Il existe plusieurs types de gyromètres : les premiers à avoir fait leur apparition furent mécaniques, aujourd'hui, on utilise surtout des gyromètres laser ou des gyromètres optiques.

b) Compas magnétique :

Le compas magnétique, appelé aussi magnétomètre, indique la direction du nord magnétique. Généralement, la déclinaison magnétique est compensée pour que le capteur délivre en permanence une mesure absolue du cap par rapport à la direction du nord géographique. [17]

c) Les inclinomètres :

La mesure des angles d'attitude d'un véhicule peut être réalisée avec des inclinomètres.

Conçus généralement sur le principe des accéléromètres pendulaires, ces capteurs sont sensibles à la gravité terrestre mais aussi à toute accélération extérieure qui leur est appliquée (mouvements de l'engin, vibrations, chocs). [17]

I.7.2. Les capteurs extéroceptifs :

Les capteurs extéroceptifs permettent de percevoir le milieu d'évolution du robot. Ils sont généralement le complément indispensable aux capteurs présentés précédemment. Deux familles de capteurs extéroceptifs embarqués peuvent être identifiées : les capteurs télémétriques et les systèmes de vision.

I.7.2.1. Les capteurs télémétriques :

Il existe différents types de capteurs télémétriques qui permettent de mesurer la distance aux éléments de l'environnement, utilisant divers principes physiques.

a) Les capteurs à ultrasons :

Le capteur US, aussi appelé télémètre US ou sonar, est le type de capteur le plus couramment utilisé pour mesurer la distance aux obstacles. Son fonctionnement est simple, il est facile à mettre en œuvre et est peu coûteux d'où son utilisation sur un grand nombre de robots mobiles. [22]

b) Les capteurs à infrarouges :

Un autre type de capteur couramment utilisé est le capteur IR (Infra-Rouge). Ils ont une vitesse de mesure plus élevée que les capteurs US.

c) Les capteurs laser :

Des capteurs lasers sont également utilisés pour mesurer les distances. Ces capteurs fonctionnent soit sur le même principe que les capteurs IR (mesure de l'angle de réflexion) soit sur une mesure indirecte de temps de vol. [5]

I.7.2.2. Les systèmes de vision :

Les systèmes de vision en robotique sont basés sur l'utilisation d'une caméra CCD. L'arrivée des capteurs CCD (Charge Coupled Device), ont été décisive dans l'évolution de la vision : la rapidité d'acquisition, la robustesse et la miniaturisation sont autant d'avantages qui ont facilité leur intégration. [7]. Dans ce cadre nous pouvons identifier les techniques suivantes :

- la stéréovision.
- Les systèmes de vision omnidirectionnelle.

a) La stéréovision :

La stéréovision consiste à observer une même scène avec deux caméras qui sont éloignées l'une de l'autre en connaissant la distance entre elles.

La stéréovision est basée sur le même principe de reconstitution de la profondeur que la vision chez l'être humain. [5]

b) Les systèmes de vision omnidirectionnelle :

Ces systèmes de perception associent une caméra CCD et un élément qui permet d'obtenir une vue sur 360 degrés de l'environnement. A ce titre ils sont de plus en plus utilisés en robotique mobile au détriment de la vision monoculaire. [5]

I.7.3. Autres capteurs :

a) Les capteurs tactiles :

Les robots peuvent être équipés de capteurs tactiles, qui sont le plus souvent utilisés pour des arrêts d'urgence lorsqu'il rencontre un obstacle qui n'avait pas été détecté par le reste du système de perception. [8]

b) Les balises :

Dans certaines applications, il est également possible d'utiliser des balises dont on connaît la position, et qui pourront être facilement détectées par le robot, afin de faciliter sa localisation.

c) GPS :

Les besoins de localisation étant omniprésents dans de très nombreux secteurs de la vie actuelle, l'idée d'avoir un système de localisation le plus universel possible à donner lieu à l'apparition du Global Positionning System (GPS).

I.8. Modèle cinématique d'un robot mobile type unicycle :

Considérons un robot mobile de type unicycle constitué de trois degrés de liberté, qui sont x , y et θ , comme l'illustre la figure si suit qui est consacré à une représentation cinématique du robot mobile de type unicycle, cette représentation a été faite par la projection a un plan parallèle au sol.

Ce robot est équipé de deux roues actionnées indépendamment [17,23]. Pour faire cette modélisation on considère o' situé au milieu de l'essieu des roues.

Un repère $R' = (o', \vec{x}', \vec{y}', \vec{z}')$ est associé à ce point, comme illustré sur la figure (I-8), Un repère inertiel $R = (o, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est fixé au sol, dont l'axe est vertical \vec{z} . Un vecteur de configuration de l'unicycle incluant le train moteur est donné par :

$$q = (x, y, \theta, \varphi_d, \varphi_g) \in Q = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1.$$

(x, y) : représente les coordonnées du point situé au milieu de l'axe des roues arrière.

θ : L'angle (\vec{x}, \vec{x}') représente l'angle d'orientation du robot.

(φ_d, φ_g) : les angles de rotation de chaque roue (droite et gauche) .

r le rayon des roues, L est la distance entre le point o' et le point milieu de chaque roue.

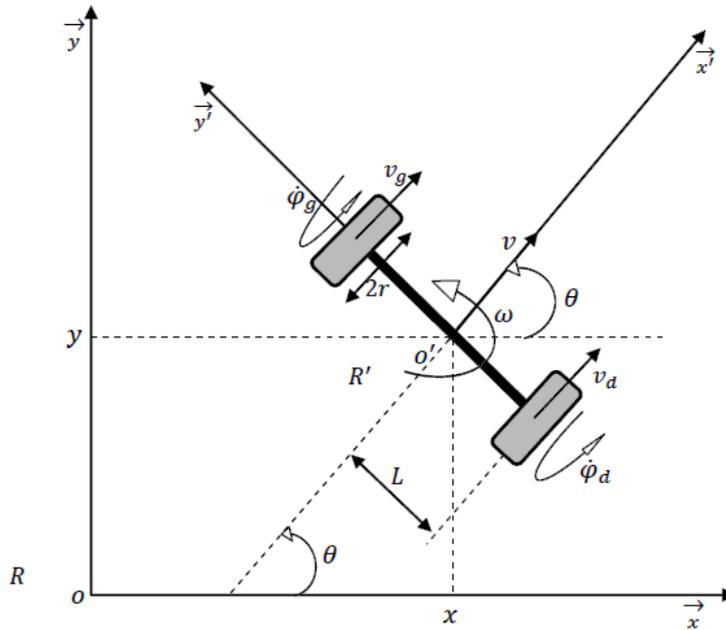


Figure I.8 : Représentation cinématique d'un robot mobile de type unicycle.

Pour caractériser la configuration de ce robot on retient le vecteur :

$$q = (x, y, \theta)^T \in Q = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \quad (\text{I.1})$$

Donc le modèle cinématique est donné par :

$$\dot{q} = \bar{X}(q) v \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = \cos \theta \\ \dot{y} = \sin \theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}, \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \bar{X}(q) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.2})$$

Avec $v = [v_1 \ v_2]^T$, $v_1 = \frac{r}{2} (\dot{\phi}_g + \dot{\phi}_d)$, la vitesse longitudinale ou d'avancement du robot, et $v_2 = \dot{\theta} = \omega = \frac{r}{2L} (\dot{\phi}_g + \dot{\phi}_d)$, sa vitesse de rotation autour de l'axe perpendiculaire au plan de roulement.

I.9. Modèle linéaire d'un moteur à courant continu (CC)

Le robot que nous étudions (robot de type unicycle) est propulsé par deux moteurs à courant continu (CC). Dans cette section, nous découvrons le modèle d'espace d'état du moteur à courant continu. Ce modèle est ensuite utilisé dans le modèle dynamique de l'équilibrage de robot pour fournir une relation entre la tension d'entrée aux moteurs et le couple de commande nécessaire pour équilibrer le robot. [23]

La dynamique du moteur peut être représentée par un modèle d'espace d'état, c'est un système du premier ordre, d'équations différentielles avec les paramètres de position φ , et de la vitesse ω_m . Les entrées du moteur sont alors le couple appliqué et la tension appliquée.

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_m k_e}{R I_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k_m}{R I_m} & -\frac{1}{I_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ \tau_a \end{bmatrix} \quad (I.3)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \varphi \\ \omega_m \end{bmatrix} + [0 \quad 0] \begin{bmatrix} V_a \\ \tau_a \end{bmatrix} \quad (I.4)$$

I.10. Modèle dynamique du robot mobile de type unicycle :

Le modèle dynamique du robot est [5] :

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \frac{k_m k_e}{m r^2 R} & 0 \\ 0 & -2 \frac{L k_m k_e}{I r^2 R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_m}{m R r} & \frac{k_m}{m R r} \\ \frac{L k_m}{I R r} & -\frac{L k_m}{I R r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{ad} \\ V_{ag} \end{bmatrix} \quad (I.5)$$

Ce modèle présente l'équation des états du système (robot unicycle) en temps continu.

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$$

Pour le modèle en temps discret l'équation est représentée comme suit :

$$X(k+1) = AX(k) + BU(k)$$

Tel que :

$$X(k) = \begin{bmatrix} v(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix}; \dot{X}(k+1) = \begin{bmatrix} v(k+1) \\ \omega(k+1) \end{bmatrix}; U(k) = \begin{bmatrix} V_{ad}(k) \\ V_{ag}(k) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 \frac{k_m k_e}{m r^2 R} & 0 \\ 0 & -2 \frac{L k_m k_e}{I r^2 R} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} \frac{k_m}{m R r} & \frac{k_m}{m R r} \\ \frac{L k_m}{I R r} & -\frac{L k_m}{I R r} \end{bmatrix}$$

v : La vitesse longitudinale ou d'avancement du robot

ω : La vitesse de rotation autour de l'axe perpendiculaire au plan de roulement

k_m : Constante du moteur

k_e : constant EMF Retour

m : La masse du robot unicycle

r : Rayon de roue

R : Résistance Terminal nominale

I : le moment d'inertie autour de l'axe vertical

L : Longueur au centre de la masse de corps du robot

V_{ad} : La tension appliquée au moteur M1 pour commander la roue droite

V_{ag} : La tension appliquée au moteur M2 pour commander la roue gauche

τ_a : Le couple appliqué

I.11. Conclusion :

Ce chapitre présente également des généralités importantes sur la robotique mobile. L'architecture, les applications et les types des robots mobiles à roues ainsi les multiples capteurs utilisés en robotique mobile.

La fin de ce chapitre, est consacré à la modélisation cinématique et dynamique du robot mobile de type unicycle.

Chapitre II
Etude de la commande
optimale

II.1. Introduction :

La commande optimale est appliquée dans la vie quotidienne : comment arriver à certaine destination le plus rapidement possible, comment minimiser sa consommation... soit un système dynamique donné et dont les équations sont connues, le problème de commande optimale consiste alors à trouver la commande minimisant un critère donné. C'est à cet aspect que la commande optimale a été étudiée dès le 19^{ème} siècle avec le calcul des variations. Notons néanmoins que les difficultés soulevées par ce genre de problème sont loin d'être complètement résolues comme en témoignent les sessions dédiées à la commande optimale dans les conférences d'automatique. La commande optimale reste donc un sujet de recherche d'actualité. [10]

II.2. Déclaration du problème :

Le système à temps continu de représentation d'état est donné par l'équation suivante :

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (\text{II.1})$$

La condition initiale $x(t_0) = x_0$, où $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Les signaux x et t sont des fonctions de \mathbb{R} vers respectivement \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n . Pour la condition initiale x_0 et la commande u , l'équation d'état Eq.2.1 définit une trajectoire unique x pour l'état sur $[t_0, t_f]$.

Soit le critère suivant:

$$J(x_0, t_0, u) = \theta(t_0, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x, u, t) dx \quad (\text{II.2})$$

avec $x_f = x(t_f)$. Les fonctions θ et ϕ ainsi que les instants t_0 et t_f étant donnés, ce critère ne dépend que de x_0 et de u sur $[t_0, t_f]$. L'application qui au signal de commande u associe le critère scalaire $J(x_0, t_0, u)$ est une fonctionnelle. de différentes présentations existent, citant quelques unes :

II.2.1. Présentation de Mayer et de Lagrange : [2]

La présentation de Mayer et de Lagrange est donnée sous la forme d'un système $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$, $x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f, u \in U, t \in [t_0, t_f]$, l'objectif étant de minimiser le coût.

$$J(t_f, u) = \int_{t_0}^{t_f} \phi(x(t), u(t), t) dt + \theta(x_f, t_f) \quad (\text{II.3})$$

Lorsque $\theta(x_f, t_f) = 0$ dans l'expression de la fonctionnelle $J(t_f, u)$, donc :

$$J(t_f, u) = \int_{t_0}^{t_f} \phi(x(t), u(t), t) dt \quad (\text{II.4})$$

L'équation (II.4) nous donne une présentation de **Lagrange**.

Et lorsque $\phi(x(t), u(t), t) = 0$

$$J(t_f, u) = \theta(x_f, t_f) \quad (\text{II.5})$$

L'équation (II.5) nous donne une présentation de **Mayer**.

II.2.2. Présentation de Bolza:

La présentation de Bolza regroupe les deux précédentes formulations à savoir les formulations de Lagrange et de Mayer. [14]

$$J(t_f, u) = \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x, u, t) dt \quad (\text{II.6})$$

Les formulations (II.4), (II.5) et (II.6) ont une équivalence dans le sens, donc on peut se ramener de l'une à l'autre.

En plus de l'équation d'état qui lie les trajectoires de u et de x , d'autres contraintes peuvent intervenir (sans remettre en cause le critère choisi). Typiquement :

- La possibilité que l'instant final soit défini ou libre .
- La possibilité que la commande appartienne à un ensemble $u \in U \neq \mathbb{R}^m$.
- Existence des contraintes sur l'état final : $x_f \in X$.

Le problème de la commande optimale consiste à trouver la commande \tilde{u} minimisant le critère $J(x_0, t_0, u)$:

$$\tilde{u} = \min_{u \in U} J(x_0, t_0, u) \quad (\text{II.7})$$

On obtient alors \tilde{x} la trajectoire correspondante de l'état et la valeur de critère est :

$$\tilde{J}(x_0) = J(x_0, t_0, \tilde{u}) \quad (\text{II.8})$$

II.3. Classement des problèmes de la commande optimale :

Le classement des fonctions objectives se fait en basant sur deux critères physiques de performance. [15]

II.3.1. Temps optimal :

Lorsque $\phi(x, u, t) = 1$, $\theta(x_f, t_f) = 0$ et le temps final t_f est libre dans l'expression, on a un problème en temps optimal :

$$\min_u \int_{t_0}^{t_f} 1 dt \quad (\text{II.9})$$

II.3.2. Coût optimal :

Lorsque le temps final t_f est fixé dans l'expression, on a un problème en coût optimal

$$\min_u \int_{t_0}^{t_f} \phi(x, u, t) dt + \theta(x_f, t_f) \quad (\text{II.10})$$

Evidemment, il existe des problèmes qui combinent les deux critères physiques de performance, et on parlera dans ce cas d'un problème de contrôle en temps et en coût optimal. Dans certains problèmes de contrôle optimal, il peut s'avérer utile et efficace de s'intéresser tout d'abord au problème de minimisation du temps de transfert afin de pouvoir traiter correctement le problème de minimisation du coût. On comprend bien qu'une minimisation de la consommation d'énergie se doit de ne pas engendrer de temps de transfert prohibitif à l'égard du temps de transfert minimum.

Si dans l'expression de J , ϕ est proportionnelle à u^2 on parle alors d'un coût quadratique.

Si u est un contrôle scalaire et ϕ proportionnelle à u , on parle de problème de contrôle à coût d'approvisionnement (Fuel cost).

Lorsque les équations d'état $\dot{x} = f(x, u, t)$ ne dépendent pas explicitement du temps, c'est-à-dire $\dot{x} = f(x, u)$, on parle dans ce cas de problème autonome.

Si t est présent dans les équations d'état on parle de problème non-autonome.

II.4. Rappel de principes fondamentaux :

II.4.1. Le principe d'optimalité de Bellman : [19] [21]

Soit un système d'équation d'état défini par la relation :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

L'indice de performance equivalent au système (II.11) :

$$J(x_0, t_0, u) = \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x, u, t) dt \quad (\text{II.12})$$

Sur un intervalle de temps $[t_0, t_f]$, la commande optimale \tilde{u} , nous donne un critère optimisé :

$$\tilde{J}(x_0, t_0) = \min_u [t_0, t_f] J(x_0, t_0, u) = \tilde{J}(x_0, t_0, \tilde{u}) \quad (\text{II.13})$$

Soit $t_l \in [t_0, t_f]$. Le principe d'optimalité de Bellman énonce que la trajectoire optimale sur l'intervalle $[t_0, t_f]$ possède logiquement la trajectoire optimale sur $[t_l, t_f]$, partant cette fois de la condition initiale $x_l = x(t_l)$.

Le critère peut dès lors s'écrire sous la forme :

$$\tilde{J}(x_0) = \min_u [t_0, t_f], x_l + \int_{t_0}^{t_l} \phi(x, u, t) dt + \tilde{J}(x_l) \quad (\text{II.14})$$

Ce résultat permet d'obtenir une solution optimale en découplant l'intervalle d'optimisation et en résolvant récursivement le problème.

II.4.2. Le principe d'optimalité de Pontriaguine :

On considère à nouveau le système (II.11) et le critère de performance (II.12) l'Hamiltonien correspondant est donné par :

$$H = (x, u, \lambda, t) = \phi(x, u, t) + \lambda^t f(x, u, t) \quad (\text{II.15})$$

où λ est appelé vecteur d'état adjoint.

Le principe du minimum de Pontriaguine stipule que la trajectoire optimale minimise l'Hamiltonien du système :

$$H(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{\lambda}, t) \leq H(x, u, \lambda, t) \forall u \in U \quad (\text{II.16})$$

En faisant appel au calcul des variations, on définit un certain nombre d'équations permettant de résoudre le problème de commande optimale.

Ces équations correspondent aux équations canoniques de Hamilton qui commandent les dynamiques de l'état et de l'état adjoint, et sont présentés par :

Pour l'état :

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{x} \quad (\text{II.17})$$

Pour l'état adjoint :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\lambda} \quad (\text{II.18})$$

En ajoutant les conditions aux limites (en t_0 et en t_f), dénommés équations de transversalité :

À l'origine :

$$\left(H(t_0) + \frac{\partial \theta}{\partial (t_0)} \right) \delta t_0 + \left(-\lambda(t_0) + \frac{\partial \theta}{\partial x_0} \right) \delta x_0 = 0 \quad (\text{II.19})$$

À l'arrivée :

$$\left(H(t_f) + \frac{\partial \theta}{\partial (t_f)} \right) \delta t_f + \left(-\lambda(t_f) + \frac{\partial \theta}{\partial x_f} \right) \delta x_f = 0 \quad (\text{II.20})$$

En fonction de la nature du problème considéré, on peut aussi préciser d'autres relations additionnelles :

Si aucune contrainte (de type saturation) n'est imposée sur $u(t)$ à l'instant t , on a :

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t) = 0 \quad (\text{II.21})$$

Si H n'est pas une fonction explicite du temps, on a :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} = 0 \quad (\text{II.22})$$

- **Lien avec le calcul des variations**

Il s'agit d'un problème d'optimisation sous contrainte égalité $f(x, u, t) - \dot{x} = 0$. En s'appuyant sur le calcul des variations [10], on est amené à introduire un multiplicateur de Lagrange λ , qui est une fonction du temps, et l'Hermitien :

$$H(x, u, \lambda, t) = \phi(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t) \quad (\text{II.23})$$

Le critère s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (\phi(x, u, t) + \lambda^T (f(x, u, t) - \dot{x})) dt \\ &= \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (H(x, u, \lambda, t) + \lambda^T \dot{x}) dt \\ &= \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} H(x, u, \lambda, t) dt + \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T \dot{x} dt \\ &= \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} H(x, u, \lambda, t) dt + \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}^T \dot{x} dt - \lambda^T(t_f)x(t_f) + \lambda^T(t_0)x(t_0) \\ &= \tilde{\theta}(x_0, t_0, x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (H(x, u, \lambda, t) dt + \dot{\lambda}^T \dot{x}) dt \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

Où $\tilde{\theta}(x_0, t_0, x_f, t_f) = \theta(x_f, t_f) - \lambda^T(t_f)x(t_f) + \lambda^T(t_0)x(t_0)$

Le calcul des variations permet de donner des conditions nécessaires pour résoudre ce problème.

Prenons la première variation de \tilde{J}

$$\delta \tilde{J} = \delta_x^T \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \lambda \right) + \int_{t_0}^{t_f} (\delta_x^T \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \lambda \right) + \delta_x^T \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)) \quad (\text{II.25})$$

Où δ_x et δ_u sont des variations de \tilde{x} et de \tilde{u} , l'état et la commande optimaux.

L'optimum est atteint quand la première variation est nulle, ceci implique que :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\lambda} \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \end{cases} \quad (\text{Équation Hamilton-Jacobi})$$

$\delta_x^T \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \lambda \right) = 0$ à $t = t_0$ et $t = t_f$, qui sont des conditions de transversalité

II.4.3 Equation d'Euler-Lagrange :

L'équation d'Euler-Lagrange, bien connue en mécanique, peut être retrouvée à partir du principe du minimum. En notant T , l'énergie cinétique et U l'énergie potentielle d'un système mécanique [10], le principe de moindre action énoncée par Maupertuis postule que le système évolue en minimisant l'intégrale :

$$\int_{t_0}^{t_f} (T - U) dt \quad (\text{II.26})$$

Notons q les coordonnées généralisées du système. Soit $L(q, \dot{q}) - U(q)$ le lagrangien, avec le critère :

$$J(q_0, t_0, \dot{q}) = \int_{t_0}^{t_f} L(q, \dot{q}) dt \quad (\text{II.27})$$

On considère un système dont on commande la vitesse, l'équation d'état du système s'écrivant alors simplement :

$$\dot{q} = u \quad (\text{II.28})$$

L'hamiltonien s'écrit alors :

$$H(q, \dot{q}) = L(q, \dot{q}) + \lambda^T \dot{q} \quad (\text{II.29})$$

et le principe du minimum donne les deux équations suivantes :

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} = -\dot{\lambda} \quad (\text{II.30})$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \lambda \quad (\text{II.31})$$

En dérivant la seconde équation par rapport au temps puis en substituant $\dot{\lambda}$ grâce à la première, on obtient l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (\text{II.32})$$

II.5 Commande Linéaire Quadratique :

On parle de commande linéaire quadratique : LQ ou LQR pour linear quadratic regulator. Le système est linéaire et la commande est quadratique [10 , 16]. La commande optimale est un retour d'état.

II.5.1 Commande LQ à horizon fini :

Soit le problème de commande optimale du système :

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (\text{II.33})$$

avec le critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2}x_f^T S x_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}(x^T Q(t)x + u^T R(t)u) dt \quad (\text{II.34})$$

Les matrices Q , R et S étant symétriques avec Q et $S \geq 0$ et $R > 0^2$ [12] [26]. L'hamiltonien s'écrit alors :

$$H(x, u, \lambda, t) = \lambda^T A(t)x + \lambda^T B(t)u + \frac{1}{2}(x^T Q(t)x + u^T R(t)u) \quad (\text{II.35})$$

L'hamiltonien vérifie les conditions suivantes :

- équation de l'état adjoint :

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -A^T(t)\lambda - Q(t)x \quad (\text{II.36})$$

- condition de transversalité

$$\lambda(t_f) = Sx_f \quad (\text{II.37})$$

- absence de contrainte sur la commande

$$\frac{\partial H}{\partial u} = B^T(t)\lambda + R(t)u = 0 \quad (\text{II.38})$$

De l'équation Eq.2.38, on déduit :

$$u = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda \quad (\text{II.39})$$

Alors l'équation dynamique du système s'écrit :

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\lambda \quad (\text{II.40})$$

Les équations (II.36) et (II.40) peuvent se mettre sous la forme d'un système matriciel appelé système hamiltonien :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (\text{II.41})$$

Posons $\lambda = p(t)x$ avec, d'après (II.37), la condition finale $p(t_f) = S$ L'équation Eq.2.36 s'écrit alors :

$$\dot{\lambda} = -A^T(t)p(t)x - Q(t)x = -(A^T(t)p(t) + Q(t))x \quad (\text{II.42})$$

Avec $\dot{\lambda} = \dot{p}x + p\dot{x}$ et l'équation d'état (II.33) du système, l'équation (II.42) s'écrit alors (en omettant la référence au temps afin d'alléger les notations) :

$$(\dot{p} + pA + A^T p - pBR^{-1}B^T p + Q)x = 0 \quad (\text{II.43})$$

La solution est alors obtenue en résolvant l'équation (différentielle) de Riccati suivante :

$$\dot{p} + pA + A^T p - pBR^{-1}B^T p + Q = 0 \quad (\text{II.44})$$

avec la condition finale $p(t_f) = S$.

On montre que la condition :

$$x^T(\dot{p} + pA + A^T p - pBR^{-1}B^T p + Q)x = 0 \quad (\text{II.45})$$

S'écrit aussi :

$$\frac{d}{dt}(x^T p x) + x^T Q x + u^T R u = 0 \quad (\text{II.46})$$

Le critère

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2}x_f^T S x_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}(x^T Q(t)x + u^T R(t)u) dt \quad (\text{II.47})$$

S'écrit alors :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2}(x_f^T S x_f - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}(x^T p x) dt) \quad (\text{II.48})$$

Soit, avec la condition de transversalité $p(t_f)=S$:

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2} (x_0^T p(t_0) x_0) \quad (\text{II.49})$$

Le minimum du critère est donc :

$$\tilde{j}(t_0) = J(x_0, t_0, \tilde{u}) = \frac{1}{2} (x_0^T p(t_0) x_0) \quad (\text{II.50})$$

Il est intéressant de noter que la commande optimale obtenue s'écrit comme un retour d'état $u=-L(t)x$ avec :

$$L = -R^{-1}B^T p \quad (\text{II.51})$$

Néanmoins, n'oublions pas que, dans le cas présent, L varie en fonction du temps, même dans le cas d'un système et d'un critère à temps invariant (c'est-à-dire si les matrices A, B, Q et R ne dépendent pas du temps). En effet, la matrice $p(t)$ reste dépendant du temps dans le cas d'un critère à temps fini.

II.5.2 Commande LQ à horizon infini :

Intéressons nous ici au cas du système LTV (linéaire à temps variant) précédent où :

$$J(x_0, t_0, u) = \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{2} (x^T Q(t) x + u^T R(t) u) dt \quad (\text{II.52})$$

On montre que ce critère est fini si le système est stabilisable à tout instant t , (c'est-à-dire qu'à chaque instant, il existe un $L(t)$ tel que les valeurs propres de $A-BL$ soient à partie réelle négative). Remarquons par ailleurs que la partie du critère concernant l'état final n'est plus pertinente car, sur un horizon infini, l'état tend vers zéro si le système bouclé est stable.

Dans le cas d'un problème LTI (linéaire à temps invariant), la commande optimale est un retour d'état statique $u=-Lx$ où L est exprimé par l'équation (II.51) et où p vérifie l'équation algébrique de Riccati :

$$p + pA + A^T p - pBR^{-1}B^T p + Q = 0 \quad (\text{II.53})$$

II.6. Commande LQ à temps discret :

L'utilisation d'un correcteur se fait dans la majorité du temps de manière numérique. En passant dans le domaine discret [9,26], l'équation dynamique(II.33) devient :

$$x(k + 1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \quad (\text{II.54})$$

avec la condition initiale :

$$x(k = k_0) = x(k_0) = x_0 \quad (\text{II.55})$$

et cherchons la commande minimisant le critère :

$$J = \frac{1}{2}x^T(k_f)F(k_f)x(k_f) + \frac{1}{2}\sum_{k=k_0}^{k_f-1}(x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)) \quad (\text{II.56})$$

Où

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=n}^n(x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)) \quad (\text{II.57})$$

Où $F(k_f)$ et $Q(k)$ sont des matrices d'ordre $n \times n$ symétriques, semi-définie positive, et $R(k)$ est matrice d'ordre $r \times r$ symétrique, définie positive. Le problème à résoudre n'est plus un problème en temps continu. Si on étudie le problème à horizon fini, il suffit de trouver les $n+1$ ou $k_f + 1$ valeurs de la commande pour chaque pas de temps.

II.6.1.Commande LQ à temps discret à horizon fini :

On doit alors résoudre un problème de minimisation classique sous contraintes et on utilisera la formulation conventionnelle basée sur l'écriture du Lagrangien. [10,26,9]

$$L = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{2} x^T(k) Q(k) x(k) + \frac{1}{2} u^T(k) R(k) u(k) + \lambda^T(k+1) (-x(k+1) + A(k)x(k) + B(k)u(k)) \right) \quad (\text{II.58})$$

et la solution optimale vérifie les équations suivantes :

$$\frac{\partial L}{\partial u(k)} = R(k)u(k) + B^T(k)\lambda(k+1) = 0 \quad (\text{II.59})$$

$$\frac{\partial L}{\partial x(k)} = Q(k)x(k) - \lambda(k) + A^T(k)\lambda(k+1) = 0 \quad (\text{II.60})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda(k+1)} = -x(k+1) + A(k)x(k) + B(k)u(k) = 0 \quad (\text{II.61})$$

L'équation de la commande (II.59) donne :

$$u(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)\lambda(k+1) \quad (\text{II.62})$$

Alors l'équation (II.61) s'écrit :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) - B(k)R^{-1}(k)B^T(k)\lambda(k+1) \\ &= A(k)x(k) - B(k)R^{-1}(k)B^T(k)(-A^{-T}(k)Q(k)x(k) + A^{-T}(k)\lambda(k)) \\ &= (A(k) + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)A^{-T}(k)Q(k))x(k) - B(k)R^{-1}(k)B^T(k)A^{-T}(k)\lambda(k) \end{aligned} \quad (\text{II.63})$$

Par l'utilisation de l'équation (II.60), nous trouvons :

$$\lambda(k+1) = -A^{-T}(k)Q(k)x(k) + A^{-T}(k)\lambda(k) \quad (\text{II.64})$$

Les équations (II.63) et (II.64) peuvent se mettre sous la forme d'un système matriciel :

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}B^T A^{-T} Q & -BR^{-1}B^T A^{-T} \\ -A^{-T} Q & A^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(k) \end{bmatrix} \quad (\text{II.65})$$

Où :

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-T} & A^{-1}BR^{-1}B^T \\ QA^{-1} & A^T + QA^{-1}BR^{-1}B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix} \quad (\text{II.66})$$

La dernière commande $u(n)$ n'a aucun effet sur l'évolution du système sur l'horizon considéré, sa valeur optimale est donc nulle :

$$u(n) = 0 \quad (\text{II.67})$$

On a ainsi d'après l'équation (II.59) :

$$\lambda(k+1) = 0 \quad (\text{II.68})$$

et d'après l'équation adjointe (II.60) :

$$\lambda(n) = Q(n)x(n), \text{ ou } n = k_f \Rightarrow \lambda(k_f) = Q(k_f)x(k_f) \quad (\text{II.69})$$

aussi d'après les équations (II.56), (II.57) et (II.67) :

$$Q(n) = Q(k_f) = F(k_f) \quad (\text{II.70})$$

Il s'agit d'un problème aux deux bouts : une condition initiale est disponible pour l'état alors que c'est une condition finale qui est disponible pour l'état adjoint. Ainsi, la résolution du problème doit se faire pour l'ensemble de la trajectoire, ce qui peut représenter une charge de calcul élevée dans le cas d'un horizon n élevé.

Les équations précédentes peuvent être résolues directement en x et λ . On peut aussi adopter la démarche suivante, basée sur un changement de variable suivant pour la variable adjointe :

$$\lambda(k) = p(k)x(k) \quad (\text{II.71})$$

Où $p(k)$ est une matrice qu'il faudra déterminer, partant de II.60, on obtient :

$$p(k)x(k) = Q(k)x(k) + A^T(k)p(k+1)x(k+1) \quad (\text{II.72})$$

Et on a :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) - B(k)R^{-1}(k)B^T(k)x(k+1)p(k+1) \\ &= [I + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)p(k+1)]^{-1}A(k)x(k) \end{aligned} \quad (\text{II.73})$$

En substituant (II.73) dans (II.72), on obtient:

$$p(k)x(k) = Q(k)x(k) + A^T(k)p(k+1)[I + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)p(k+1)]^{-1}A(k)x(k) \quad (\text{II.74})$$

Depuis, cette relation (II.74) doit valoir pour toutes les valeurs de $x(k)$, nous avons

$$p(k) = Q(k) + A^T(k)p(k+1)[I + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)p(k+1)]^{-1}A(k) \quad (\text{II.75})$$

Cette relation (II.75) est appelée Equation différentielle de Riccati (DRE).

Alternativement, nous pouvons exprimer (II.75) par :

$$p(k) = Q(k) + A^T(k)[p^{-1}(k+1) + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)]^{-1}A(k) \quad (\text{II.76})$$

Où, nous supposons que l'inversion de $p(k)$ existe pour tout $k \neq k_f$. La dernière condition pour résoudre la matrice DRE, (II.75) ou (II.76) est obtenue à partir de (II.69), (II.70) et (II.71).

$$\lambda(k_f) = Q(k_f)x(k_f) = p(k_f)x(k_f) \Rightarrow Q(k_f) = p(k_f) = F(k_f) \quad (\text{II.77})$$

Dans l'équation (II.75), le terme $p(k)$ est sur le côté gauche et $p(k+1)$ est sur le côté droit et par conséquent, il doit être résolu récursivement à partir de l'état final (II.77). Du fait que $Q(k_f)$ et $F(k_f)$ sont supposées semi-définies positives, nous pouvons montrer que la matrice de Riccati $p(k)$ est définie positive.

Pour obtenir la commande optimale en boucle fermée, nous éliminons $\lambda(k+1)$ à partir de la relation de la commande (II.62) et la relation d'état (II.63) et en utilisant la transformation (II.69).

$$u(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)A^{-T}(k)[p(k) + Q(k)]x(k) \quad (\text{II.78})$$

Ici, A^{-T} est l'inverse transposé de A et nous supposons que l'inverse de $A(k)$ existe. Cette dernière relation est la version souhaitée pour la commande optimale en boucle fermée en fonction de l'état. Nous pouvons écrire la relation de la commande optimale en boucle fermée (II.78) sous une forme simplifiée

$$u(k) = -L(k)x(k) \quad (\text{II.79})$$

Où :

$$L(k) = R^{-1}(k)B^T(k)A^{-T}(k)[p(k) - Q(k)] \quad (\text{II.80})$$

Il s'agit de la relation requise pour la loi de commande de rétroaction optimale et le gain de rétroaction $L(k)$ est appelé le "gain de Kalman". L'état optimal $x^*(k)$ est obtenue en substituant la commande optimale $u^*(k)$ donné par (II.79) dans l'équation d'état initial (II.54) en tant que :

$$x(k+1) = (A(k) + B(k)L(k))x(k) \quad (\text{II.81})$$

- **Les autres formes de la (DRE) :**

D'autres formes qui ne nécessitent pas l'inversion de la matrice $A(k)$ pour l'équation (II.75) et la commande optimale (II.79) sont obtenues comme suit :

On a la relation suivante : [25,20,9]

$$[A_1^{-1} + A_2A_4A_3]^{-1} = A_1 - A_1A_2[A_3A_1A_2 + A_4^{-1}]^{-1}A_3A_1 \quad (\text{II.82})$$

En utilisant la relation (II.82) dans (II.76), on obtient pour l'équation (DRE) :

$$\begin{aligned} p(k) &= Q(k) + A^T(k)[p(k+1) \\ &- p(k+1)B(k)[B^T(k)p(k+1)B(k) + R(k)]^{-1}B^T(k)p(k+1)]A(k) \end{aligned} \quad (\text{II.83})$$

Ensuite, on utilise la commande optimale (II.62) et la transformation (II.69), pour Obtenir :

$$u(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)p(k+1)x(k+1) \quad (\text{II.84})$$

qui, lors de l'utilisation de l'équation d'état II.54 devient :

$$u(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)p(k+1)[A(k)x(k) + B(k)u(k)] \quad (\text{II.85})$$

Après une réorganisation, on obtient :

$$[I + R^{-1}(k)B^T(k)p(k+1)B(k)]u(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)p(k+1)A(k)x(k) \quad (\text{II.86})$$

Multipliant à gauche par $R(k)$ et en résolvant pour $u(k)$:

$$u(k) = -L_a(k)x(k) \quad (\text{II.87})$$

Où $L_a(k)$, appelé matrice de gain de Kalman est :

$$L_a(k) = R(k) + B^T(k)p(k+1)B(k)]^{-1}B^T(k)p(k+1)A(k) \quad (\text{II.88})$$

Notons à partir de la loi de commande de rétroaction optimale (II.87) que les gains de Kalman sont tributaires de la solution de la matrice (DRE) (II.83) impliquant les matrices du système et des matrices de l'indice de performance. Enfin., la commande optimale en boucle fermée (II.87) avec l'état (II.54) nous donne le système optimal

$$x(k+1) = (A(k) - B(k)L_a(k))x(k) \quad (\text{II.89})$$

En utilisant la relation du gain (II.88), on obtient une nouvelle forme de la fonction (II.83) qui est :

$$p(k) = Q(k) + A^T(k)p(k+1)[A(k) - B(k)L_a(k)] \quad (\text{II.90})$$

Nous constatons alors :

- Il existe plusieurs formes de la matrice (DRE) données par (II.74) ou (II.76), (II.83) et (II.90).
- La matrice de gain de Kalman n'a elle que deux formes données, la première forme (II.80), qui va de paire avec la (DRE) (II.75) ou (II.76) et la seconde forme (II.88) qui correspond à l'équation différentielle de Riccati (II.83) ou (II.90).

II.6.2. Commande LQ à temps discret à horizon infini :

Cherchons la commande minimisant le critère :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k_0}^{k_f} (x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)) \quad (\text{II.91})$$

Comme k_f tend vers l'infini, nous avons la matrice de Riccati $p(k)$ qui atteint une valeur de régime permanent \bar{p} . Autrement dit,

$$p(k) = p(k+1) = \bar{p} \quad (\text{II.92})$$

Donnant l'équation algébrique de Riccati (ARE) qui s'écrit :

$$\bar{p} = Q + A^T \bar{p} [I + BR^{-1}B^T]^{-1} A \quad (\text{II.93})$$

ou en utilisant l'équation (II.76), on aura :

$$\bar{p} = Q + A^T [\bar{p}^{-1} + BR^{-1}B^T]^{-1} A \quad (\text{II.94})$$

La commande optimale de retour d'état (II.78) devient :

$$u(k) = -R^{-1}B^T A^{-T} [\bar{p} - Q]x(k) = -\bar{L}x(k) \quad (\text{II.95})$$

où, le gain de Kalman (II.80) devient :

$$\bar{L} = -R^{-1}B^T A^{-T} [\bar{p} - Q] \quad (\text{II.96})$$

- **Autre forme de la (ARE) :**

Une autre forme de l'équation algébrique de Riccati (ARE) (II.93) est obtenue en considérant l'état stable de la forme différentielle (DRE) (II.83) qui est :

$$\bar{p} = Q + A^T [\bar{p} - \bar{p}B[B^T \bar{p} B + R]^{-1} B^T \bar{p}] A \quad (\text{II.97})$$

La commande optimale (II.87) devient :

$$u(k) = -\bar{L}_a x(k) \quad (\text{II.98})$$

Où, la matrice de gain optimal (II.88) devient :

$$\bar{L}_a = [R + B^T \bar{p} B]^{-1} B^T \bar{p} A \quad (\text{II.99})$$

La commande optimale (II.98) avec l'état (II.54) nous donne le système optimal :

$$x(k+1) = [A - B\bar{L}_a(k)]x(k) \quad (\text{II.100})$$

II.7. Conclusion :

Nous avons discuté dans ce chapitre de la commande optimale d'une manière générale et plus particulièrement de la commande quadratique linéaire. Les principaux critères utilisés dans l'application de la commande optimale se résument au temps et à un indice de performance ou à un cout. Quelques principes fondamentaux d'optimalité tels que le Principe de Bellman, le principe de Pontriaguine et le principe de moindre action de Maupertuis sont aussi présentés.

Enfin, nous avons détaillés un type de commande optimale qui est appliquée à des Systèmes linéaires, qu'est la commande LQR. Comme nous l'avons mentionné deux types de commande LQR, à temps continu et à temps discret sont présentés. Les deux cas horizon fini et horizon infini sont aussi discutés pour les deux types d'équations de Riccati.

Chapitre III
Solution de l'équation de
riccati et resultats de
simulation

III.1. Introduction :

Dans le cas discret on a un modèle dynamique du véhicule (robot unicycle) qui est représenté par l'équation :

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \quad (\text{III.1})$$

$x \in R^n$ est le vecteur d'état du véhicule et $u \in R^m$ est la commande (vecteur d'entrée). Le but est de résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=n} (x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)) \quad (\text{III.2})$$

Où, $R \in R^{m \times m}$ est la matrice de pondération d'entrée de commande et $Q \in R^{n \times n}$ est la matrice de pondération d'état. Afin de minimiser la fonction de coût quadratique, commençant par calculer $p(k) \in R^{n \times n}$ qui est la solution de l'équation de Riccati.

III.2. Solution de l'équation de Riccati :

Pour résoudre l'équation de Riccati, nous mettons en étude ces deux méthodes :

- Méthode de Schur.
- Méthode itérative.

III.2.1. Méthode de Schur :

Cette méthode utilise certains vecteurs de Schur pour résoudre l'équation algébrique de Riccati (ARE) à temps discret [3,15].

• **Théorème (III-1) :** (la forme canonique de Schur) : Soit $\Gamma \in R^n$ ont dont les valeurs propres sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Alors il existe une similitude de transformation unitaire N telle que $N^H \Gamma N$ est triangulaire supérieure avec les éléments diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans cet ordre.

En fait, il est possible de ne travailler que sur par la réduction à la forme triangulaire avec quasi-supérieur avec 2×2 blocs de diagonale correspondant à des valeurs propres complexes conjuguées et des blocs 1×1 correspondant aux valeurs propres réelles. Nous nous référons à cette forme canonique comme la forme de Schur réelle (RSF).

• **Théorème (III-2) (RSF)** : Soit $\Gamma \in R^n$. Alors il existe une similitude N de transformation orthogonale telle que $N^T \Gamma N$ est quasi-triangulaire supérieure. En outre, N peut être choisi de telle sorte que les blocs diagonaux 2×2 et 1×1 apparaissent dans un ordre quelconque.

Si dans le théorème (III.2) nous partitionnons $N^T \Gamma N$ en $\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix}$ où $S_{11} \in R^{k \times k}$, $0 < K < n$, nous désignerons les K premiers vecteurs de N les vecteurs de Schur correspondant à $\sigma(S_{11}) \subseteq \sigma(\Gamma)$. Les vecteurs de Schur correspondant aux valeurs propres de S_{11} construisent l'espace propre correspondant à ces valeurs propres même si certaines sont multiples.

Nous allons utiliser cette propriété pour résoudre l'équation algébrique de Riccati (II.97). On suppose que (A, B) est une paire stabilisable et que A est inversible. Sous les théorèmes (III.1) et (III.2) l'équation (II.97) accepte une solution unique non négative et la méthode proposée ci-dessous sera dirigée vers la recherche de cette solution. Considérons la matrice hamiltonienne inverse (III.13) qui est :

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}B^T A^{-T}Q & -BR^{-1}B^T A^{-T} \\ -A^T Q & A^T \end{bmatrix} \tag{III.4}$$

Nos hypothèses garantissent que H^{-1} n'a pas de valeurs propres sur le cercle unité. Ainsi, d'après le théorème (III.2) nous pouvons trouver une transformation orthogonale $N \in R^{2n \times 2n}$ qui met H^{-1} à RSF

$$H^{-1}N = S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} \tag{III.5}$$

Où

$$N = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \tag{III.6}$$

Il est possible de montrer que le spectre de S_{11} se trouve à l'intérieur du cercle unité alors que le spectre de S_{22} se situe en dehors du cercle unité. Encore une fois N est partitionnée comme dans (III. 6). Nous avons alors le théorème suivant.

- **Théorème (III-3) :** En ce qui concerne la notation et les hypothèses ci-dessus :

n_{11} Est inversible et $p = n_{21} n_{11}^{-1}$ solution de l'équation (II.97) avec $p = p^T \geq 0$.

$$\begin{aligned} \delta(S_{11}) &= \delta(A - B(R + B^T p B)^{-1} B^T p A) \\ &= \delta(A - B R^{-1} B^T (p - Q)) \\ &= \delta(A - B R^{-1} B^T (p^{-1} + Q)^{-1} A), \text{ où } p \text{ est inversible.} \end{aligned}$$

Qui présente le spectre en boucle fermée.

III.2.2 Méthode itérative :

La solution de l'équation différentielle de Riccati (DRE) (II.83) est obtenue par itération d'une manière récursive en utilisant la condition finale (II.77).

III.3. Procédures pour l'obtention des états optimaux et la commande optimale :

Nous présentons deux procédures, la première pour le système de régulation quadratique linéaire à temps discret à horizon fini et la seconde procédure pour le système de régulation quadratique linéaire à temps discret à horizon infini.

III.3.1 Première procédure :

La procédure sommaire du système de régulation quadratique linéaire à temps discret à horizon fini se fait de la manière suivante :

III.3.1.1. Problème à résoudre :

Compte tenu de la matrice des états

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \quad (\text{III.7})$$

L'indice de performance comme

$$J = \frac{1}{2} x^T(k_f) F(k_f) x(k_f) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k_f-1} (x^T(k) Q(k) x(k) + u^T(k) R(k) u(k)) \quad (\text{III.8})$$

Et les conditions aux limites

$x(k=0) = x_0$ est libre et k_f est libre

Le problème est de trouver la commande, l'état et l'indice de performance optimaux en boucle fermée.

III.3.1.2. Solution du problème :

- **Étape 1** : Résolution de l'équation différentielle de Riccati (DRE)

$$p(k) = Q(k) + A^T(k)p(k+1)[I + b(k)R^{-1}(k)B^T(k)p(k+1)]^{-1}A(k) \quad (\text{III.9})$$

à condition finale

$$p(k = k_f) = F(k_f) \quad (\text{III.10})$$

- **Étape 2** : calcul de l'état optimal $x(k)$ à partir de.

$$x(k+1) = [A(k) - B(k)L(k)]x(k) \quad (\text{III.11})$$

Avec la condition initiale $x(k=k_0)=x_0$, où

$$L(k) = R^{-1}(k)B^T(k)A^{-T}(k)[p(k) - Q(k)] \quad (\text{III.12})$$

- **Étape 3** : obtention de la commande optimale $u(k)$ à partir de

$$u(k) = -L(k)x(k) \quad (\text{III.13})$$

Où $L(k)$ est le gain de Kalman.

- **Étape 4** : obtention de l'indice de performance optimal du système

$$J = \frac{1}{2}x^T(k)p(k)x(k) \quad (\text{III.14})$$

III.3.1.3. Schéma Bloc :

Maintenant on peut dessiner un schéma bloc du système de régulation de l'état linéaire à temps discret à horizon fini.

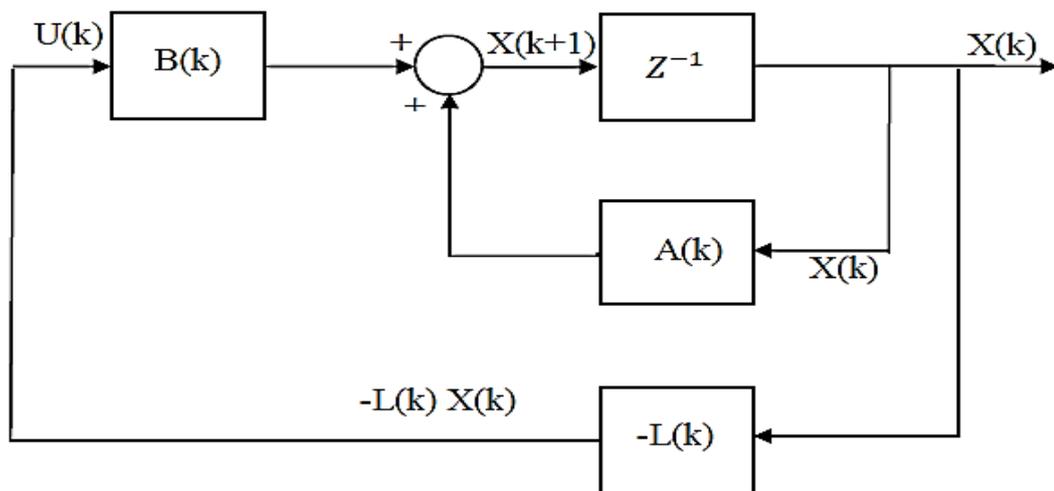


Figure III-1 : Commande optimale en boucle fermée pour régulation linéaire à temps discret à horizon fini.

III.4. Détermination de A et B :

A et B sont à déterminer par la relation physique entre les composants [1] :

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)$$

D'après les propriétés de notre système, le calcul des matrices A et B est effectué de la manière suivante :

$$A = \begin{bmatrix} -2 \frac{k_m k_e}{m r^2 R} & 0 \\ 0 & -2 \frac{L^2 k_m k_e}{I T^2 R} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{k_m}{m R r} & \frac{k_m}{m R r} \\ \frac{L k_m}{I R r} & -\frac{L k_m}{I R r} \end{bmatrix}$$

Où

$$m = \left(m_r + 2 \left(m_R + \frac{I_{Ry}}{r^2} \right) \right) \text{ et } I = \left(I_r + 2I_R + 2L^2 \left(m_R + \frac{I_{Ry}}{r^2} \right) \right)$$

Après l'application numérique on obtient :

$$A = \begin{bmatrix} -0.7874 & 0 \\ 0 & -3.5545 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.3299 & 0.3299 \\ 9.92714 & -9.92714 \end{bmatrix}$$

Après cela, on substitue :

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7874 & 0 \\ 0 & -3.5545 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3299 & 0.3299 \\ 9.92714 & -9.92714 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} \quad (\text{III.15})$$

III.5. Choix des matrices de pondération Q et R :

Il est intéressant de remarquer d'abord que la multiplication des pondérations Q et R par un même scalaire laisse inchangée le gain L [10]. En effet, soit p solution de (II.97) et soit le nouveau problème basé sur les pondérations $\tilde{Q} = \gamma Q$ et $\tilde{R} = \gamma R$. On vérifie que $\tilde{p} = \gamma p$ est la solution de l'équation de Riccati correspondante. En effet : $\tilde{L} = \tilde{R}^{-1} B^T \tilde{p} = R^{-1} B^T p = L$. Sans restriction, les pondérations peuvent être choisies symétriques. Elles sont généralement choisies diagonales. Ainsi, on se ramène au choix de n scalaires pour l'état et de m scalaires pour la commande. Voici une méthode simple de choix et de médication des pondérations en vue d'aboutir à un correcteur satisfaisant.

- 1) Au départ, on choisit généralement des pondérations égales aux matrices identité.

- 2) Dans une seconde étape, on accélère ou décélère globalement le système en multipliant la matrice Q par un scalaire γ (accélération avec $\gamma > 1$ et décélération avec $\gamma < 1$), jusqu'à obtenir une dynamique moyenne adaptée.
- 3) Dans le cas où certains états auraient des dynamiques trop lentes par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération de Q correspondant aux premiers.
- 4) Dans le cas où certains actionneurs seraient trop sollicités par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération de leur correspondant.

Les étapes 2, 3 et 4 peuvent être réitérées dans l'ordre souhaité jusqu'à obtenir un correcteur satisfaisant le cahier de charges.

Ainsi, nous remplaçons les valeurs des matrices A, B, Q et R dans l'équation différentielle de Riccati, on trouve

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.7874 & 0 \\ 0 & -3.5545 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_{11}(k+1) & p_{12}(k+1) \\ p_{21}(k+1) & p_{22}(k+1) \end{bmatrix} \times \\ & \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3299 & 0.3299 \\ 9.92714 & -9.92714 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.02 & 0 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.3299 & 0.3299 \\ 9.92714 & 9.92714 \end{bmatrix}^T \right]^{-1} \times \\ & \begin{bmatrix} -0.7874 & 0 \\ 0 & -3.5545 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (III.16)$$

Maintenant, nous utilisons la procédure donnée ci-dessus :

• **1^{er} exemple** : pour $k_f = 10$

• **Étape 1** : Résoudre l'équation différentielle de Riccati (III.17). Pour la condition finale $k_f = 10$ on trouve :

$$\begin{bmatrix} p_{11}(10) & p_{12}(10) \\ p_{21}(10) & p_{22}(10) \end{bmatrix} = F(10) = Q \quad (III.17)$$

• **Étape 2** : la commande optimale $u(k)$ est obtenue à partir de (III.11).

$$[u(k)] = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} l_{11}(k) & l_{12}(k) \\ l_{21}(k) & l_{22}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (\text{Eq.3.18})$$

Où $L(k) = \begin{bmatrix} l_{11}(k) & l_{12}(k) \\ l_{21}(k) & l_{22}(k) \end{bmatrix}$ est donné par l'équation (III.11).

• **Étape 3** : Utilisation de la commande optimale (III.18) les états optimaux sont calculés en résolvant l'équation d'état (III.11) en avant dans le temps. Il s'agit d'un processus itératif dans la direction vers l'arrière.

III.6. Deuxième procédure :

La procédure sommaire du système de régulation quadratique linéaire à temps discret à horizon infini se fait de la manière suivante :

III.6.1. Problème à résoudre :

Compte tenu de la matrice des états

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (\text{III.19})$$

L'indice de performance comme

$$J(k_0) = \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^{\infty} (x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)) \quad (\text{III.20})$$

Où $k_f = \infty$

Le problème est de trouver la commande, l'état et l'indice de performance optimaux.

III.6.2. Solution du problème :

• **Étape 1** : Résolution de l'équation algébrique de Riccati (ARE)

$$\bar{P} = Q + A^T \bar{P} [I + BR^{-1}B^T \bar{P}]^{-1} A \quad (\text{III.21})$$

Où

$$\bar{P} = Q + A^T [\bar{P} - \bar{P}B[B^T \bar{P}B + R]^{-1} B^T \bar{P}] A \quad (\text{III.22})$$

• **Étape 2** : calcul de l'état optimal $x(k)$ à partir de :

$$x(k+1) = [A - B\bar{L}]x(k) \quad (\text{III.23})$$

Ou de

$$x(k+1) = [A - B\bar{L}_a]x(k) \quad (\text{III.24})$$

Avec la condition initiale $x(k=k_0) = x_0$,

$$\bar{L} = -R^{-1}B^T A^{-T} [\bar{p} - Q] \quad (\text{III.25})$$

Et

$$\bar{L}_a = [R + B^T \bar{p}B]^{-1} B^T \bar{p}A \quad (\text{III.26})$$

- **Étape 3** : Obtention de la commande optimale à partir de

$$u(k) = -\bar{L}x(k) \tag{III.27}$$

Ou de

$$u(k) = -\bar{L}_a x(k) \tag{III.28}$$

- **Étape 4** : Obtention de l'indice de performance optimal

$$J(k_0) = \frac{1}{2} x^T(k) \bar{p} x(k) \tag{III.39}$$

III.6.3. Schéma Bloc :

Le schéma bloc du système de régulation de l'état linéaire à temps discret à horizon infini est représenté sur la figure suivante :

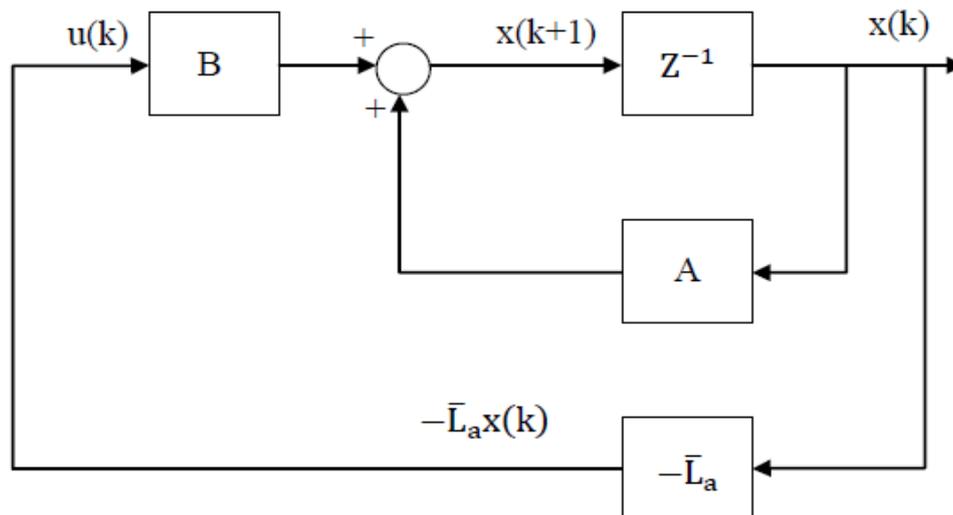


Figure III.2 : Commande optimale en boucle fermée pour le système de régulation de l'état stable en temps discret à horizon infini.

Nous avons déjà identifié les différentes matrices de l'état (III.1) et l'indice de performance (III.2), qui sont A, B, Q et R , sauf que nous avons maintenant $F(k_f) = 0$.

Ensuite, la solution de l'équation algébrique de Riccati (III.21), la commande optimale (III.27), et les états optimaux (III.23) sont résolus en utilisant MATLAB.

III.7. Résultat de la simulation :

III.7.1. Cas de l'horizon fini :

- $k_f=10$:

La figure III.3 représente les coefficients de la matrice de Riccati $p(k) =$

$$\begin{bmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) \end{bmatrix}$$

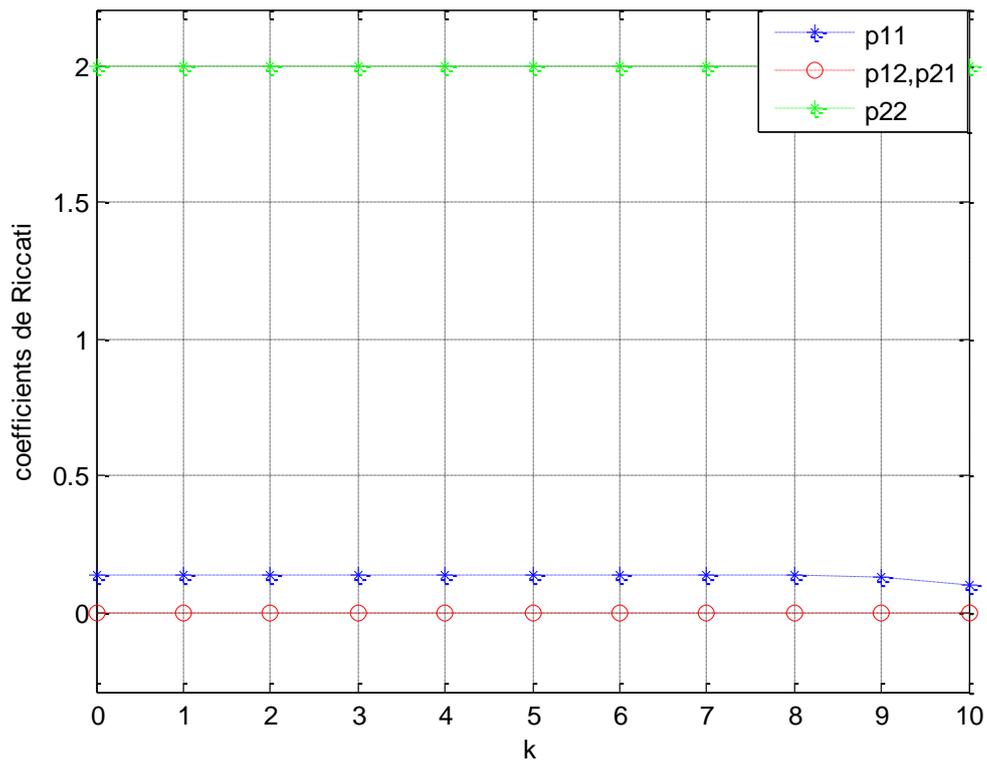


Fig.III.3 : Coefficients de la matrice de Riccati $p_{11}(k)$, $p_{12}(k)$, $p_{21}(k)$ et $p_{22}(k)$.

La figure III.4 représente les états optimaux x_1 (la vitesse linéaire du robot unicycle), x_2 (la vitesse angulaire du robot unicycle).

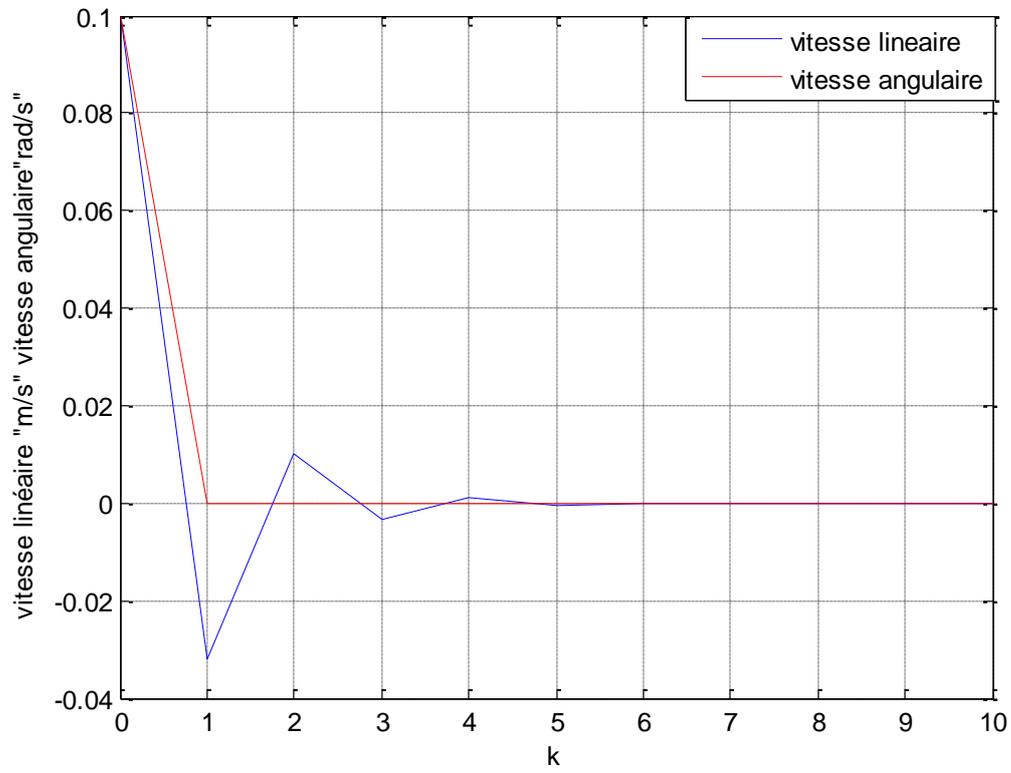


Fig.III.4 : Etats optimaux ($x_1(k)$ = vitesse linéaire et $x_2(k)$ = vitesse angulaire).

La figure III.5 représente les commandes optimaux $u_1(k)$ (tension du moteur M1 de la roue droite), $u_2(k)$ (tension du moteur M2 de la roue gauche).

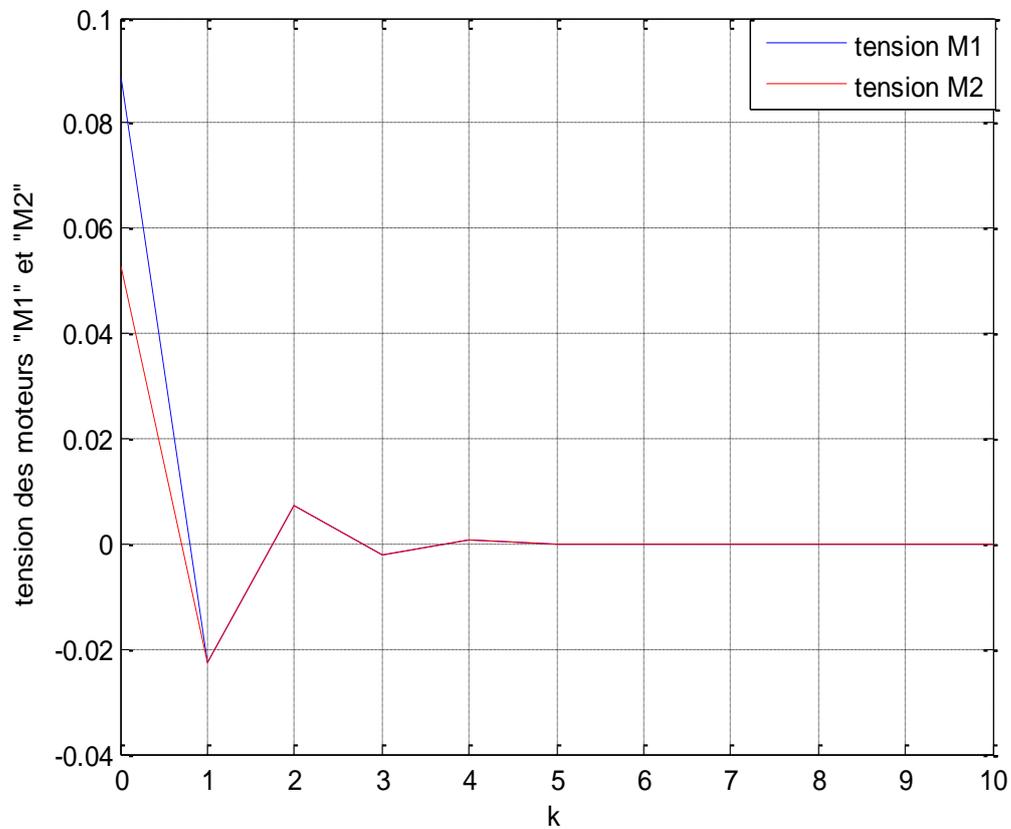


Fig.III.5 : Commandes optimaux $u_1(k)$ (tension du moteur M1 de la roue droite) et $u_2(k)$ (tension du moteur M2 de la roue gauche).

• Pour $Q + I$ et $R + I, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$:

La figure III.6 représente les coefficients de la matrice de Riccati $p(k) = \begin{bmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) \end{bmatrix}$ après la variation des matrices de pondération Q et R (l'addition de la matrice d'identité I à chaque matrice de pondération Q et R).

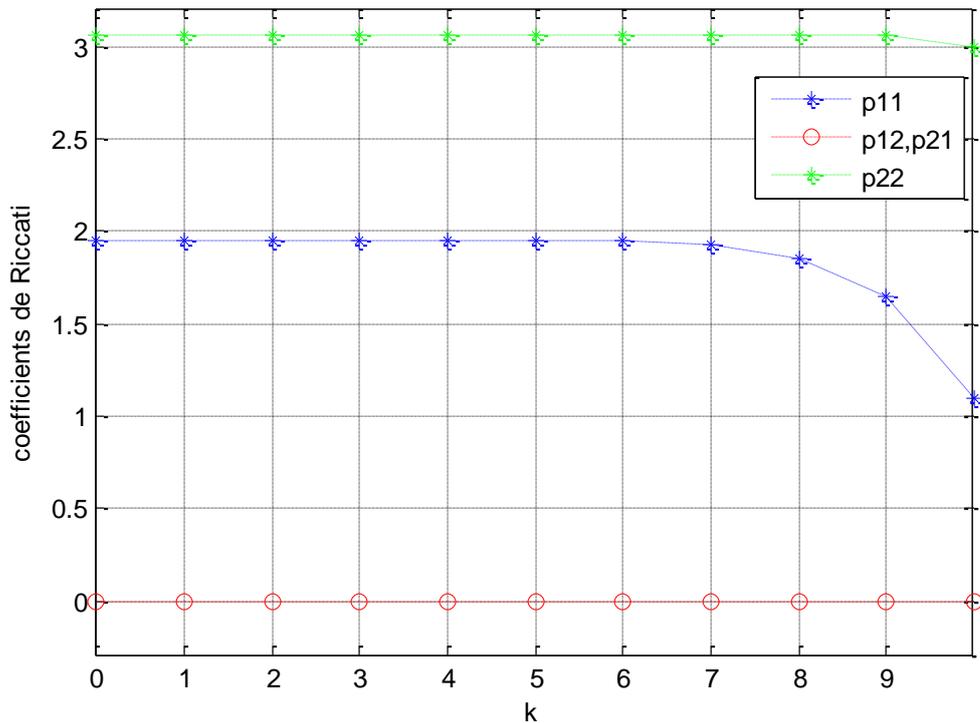


Fig.III.6 : Coefficients de la matrice de Riccati $p_{11}(k)$, $p_{12}(k)$, $p_{21}(k)$ et $p_{22}(k)$, après la variation de Q et R .

La figure III.7 représente les états optimaux x_1 (la vitesse linéaire du robot unicycle), x_2 (la vitesse angulaire du robot unicycle), après la variation des matrices de pondération Q et R (l'addition de la matrice d'identité I à chaque matrice de pondération Q et R).

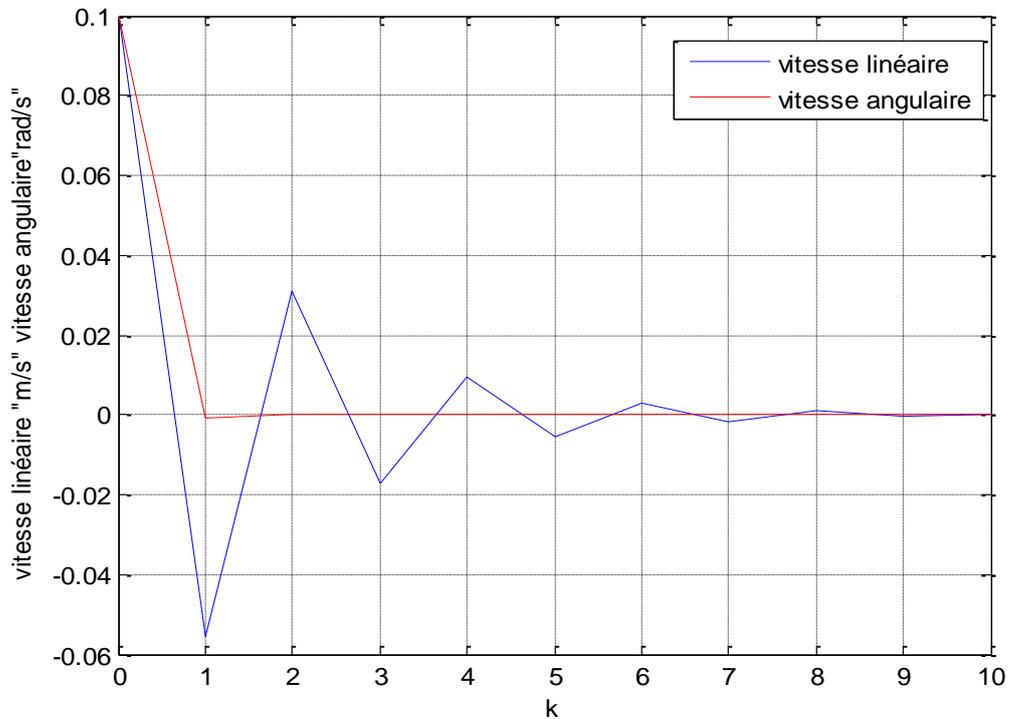


Fig.III.7 : Etats optimaux ($x_1(k)$ = vitesse linéaire et $x_2(k)$ = vitesse angulaire), après la variation de Q et R .

La figure III.8 représente les commandes optimaux $u_1(k)$ (tension du moteur M1 de la roue droite), $u_2(k)$ (tension du moteur M2 de la roue gauche), après la variation des matrices de pondération Q et R (l'addition de la matrice d'identité I à chaque matrice de pondération Q et R).

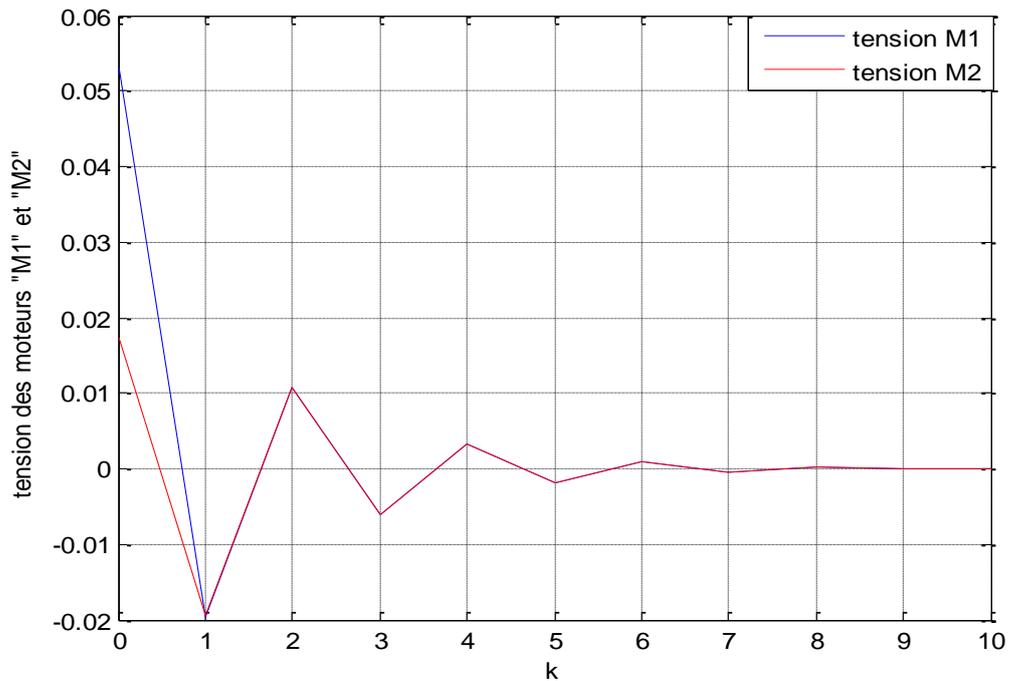


Fig.III.8 : Commandes optimales $u_1(k)$ (tension du moteur M1 de la roue droite) et $u_2(k)$ (tension du moteur M2 de la roue gauche), après la variation de Q et R .

• Pour $Q + V$ et $R + V$, $V = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.05 \\ 0.05 & 0.01 \end{bmatrix}$:

La figure III.9 représente les coefficients de la matrice de Riccati $p(k) = \begin{bmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) \end{bmatrix}$ après la variation des matrices de pondération Q et R (l'addition de la matrice V à chaque matrice de pondération Q et R)

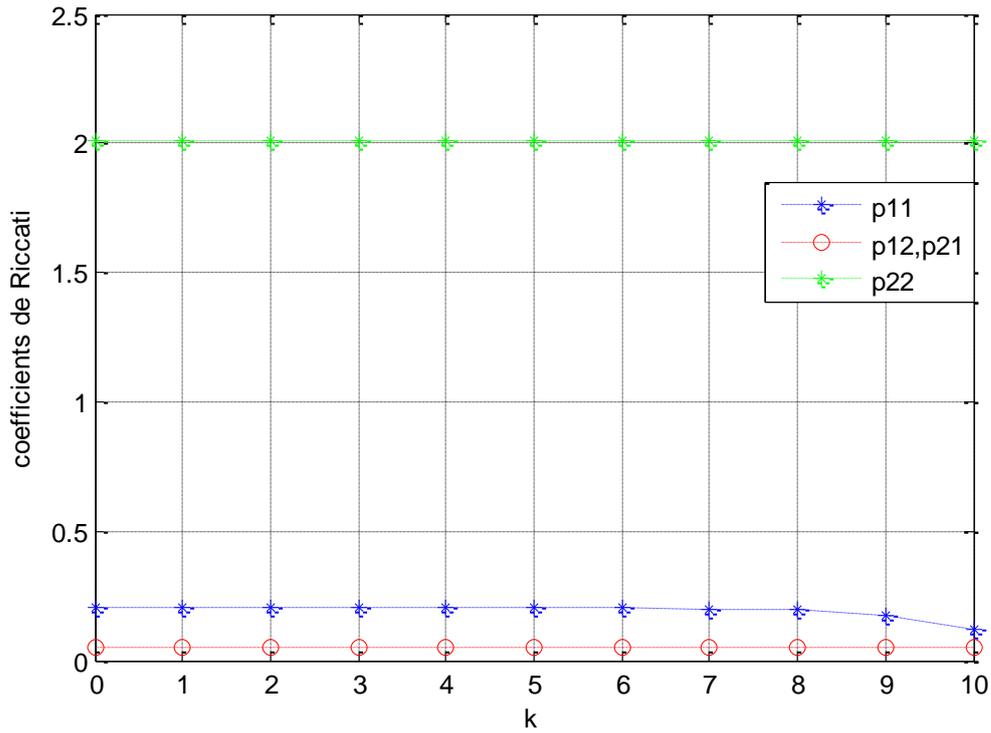
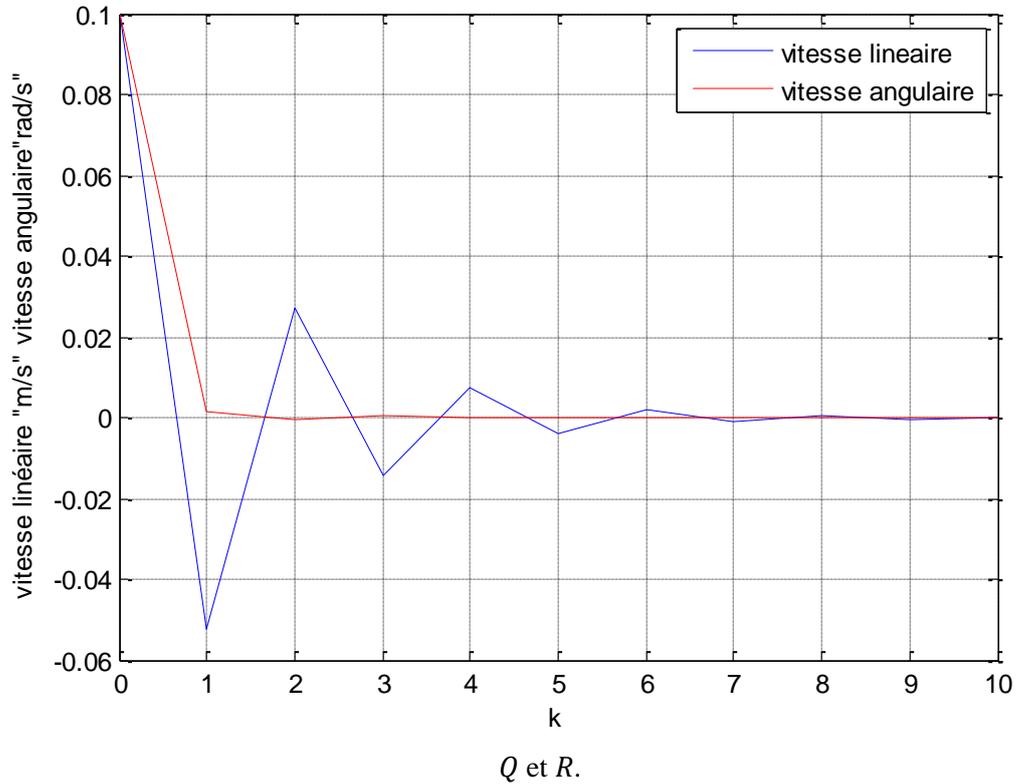


Fig.III.9 : Coefficients de la matrice de Riccati $p_{11}(k)$, $p_{12}(k)$, $p_{21}(k)$ et $p_{22}(k)$, après la variation de Q et R .

La figure III.10 représente les états optimaux x_1 (la vitesse linéaire du robot unicycle), x_2 (la vitesse angulaire du robot unicycle), après la variation des matrices de pondération Q et R (l'addition de la matrice V à chaque matrice de pondération Q et R).

Fig.III.10 : États optimaux ($x_1(k)$ = vitesse linéaire et $x_2(k)$ = vitesse angulaire), après la variation de



La figure III.11 représente les commandes optimaux $u_1(k)$ (tension du moteur M1 de la roue droite), $u_2(k)$ (tension du moteur M2 de la roue gauche), après la variation des matrices de pondération Q et R (l'addition de la matrice V à chaque matrice de pondération Q et R).

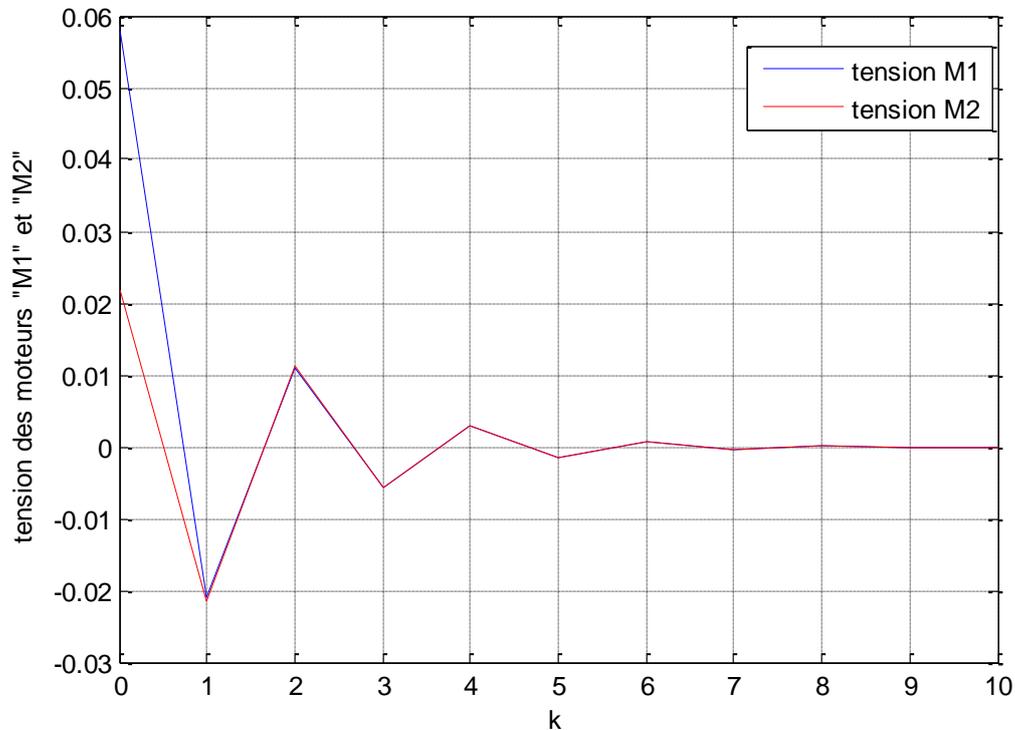


Fig.III.11 : Commandes optimales $u_1(k)$ (tension du moteur M1 de la roue droite) et $u_2(k)$ (tension du moteur M2 de la roue gauche), après la variation de Q et R .

III.7.2. Cas d'horizon infini :

La figure III.12 représente les états optimaux x_1 (la vitesse linéaire du robot unicycle), x_2 (la vitesse angulaire du robot unicycle).

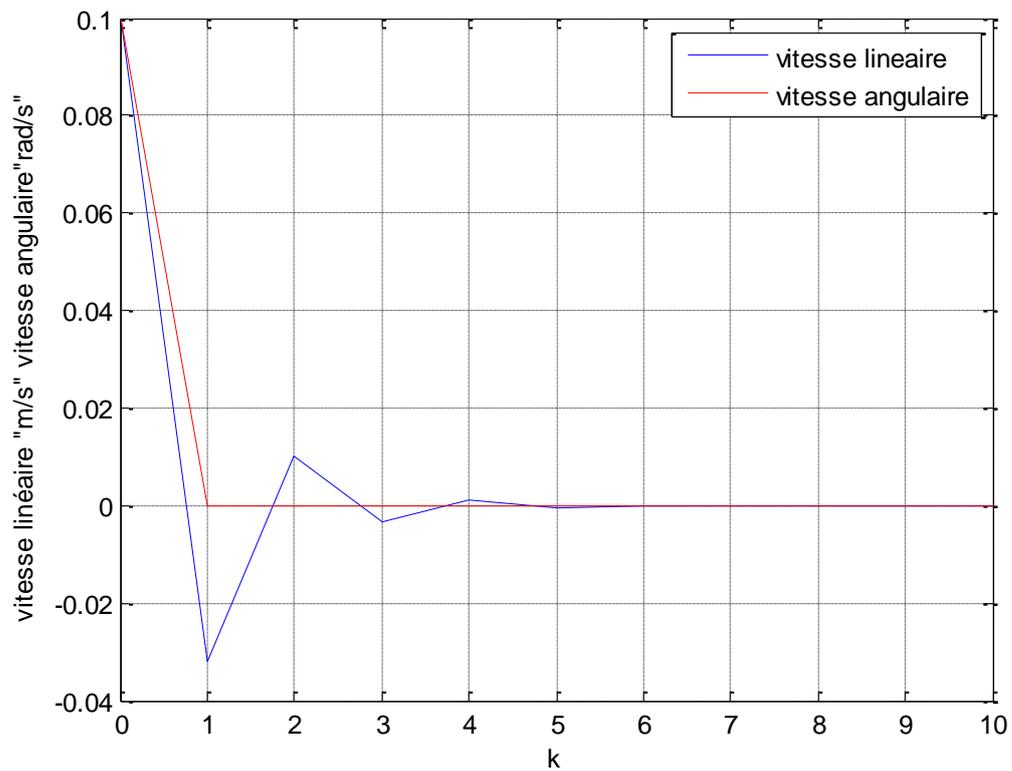


Fig.III.12 : Etats optimaux ($x_1(k)$ = vitesse linéaire et $x_2(k)$ = vitesse angulaire).

La figure III.13 représente les commandes optimaux $u_1(k)$ (tension du moteur M1 de la roue droite), $u_2(k)$ (tension du moteur M2 de la roue gauche).

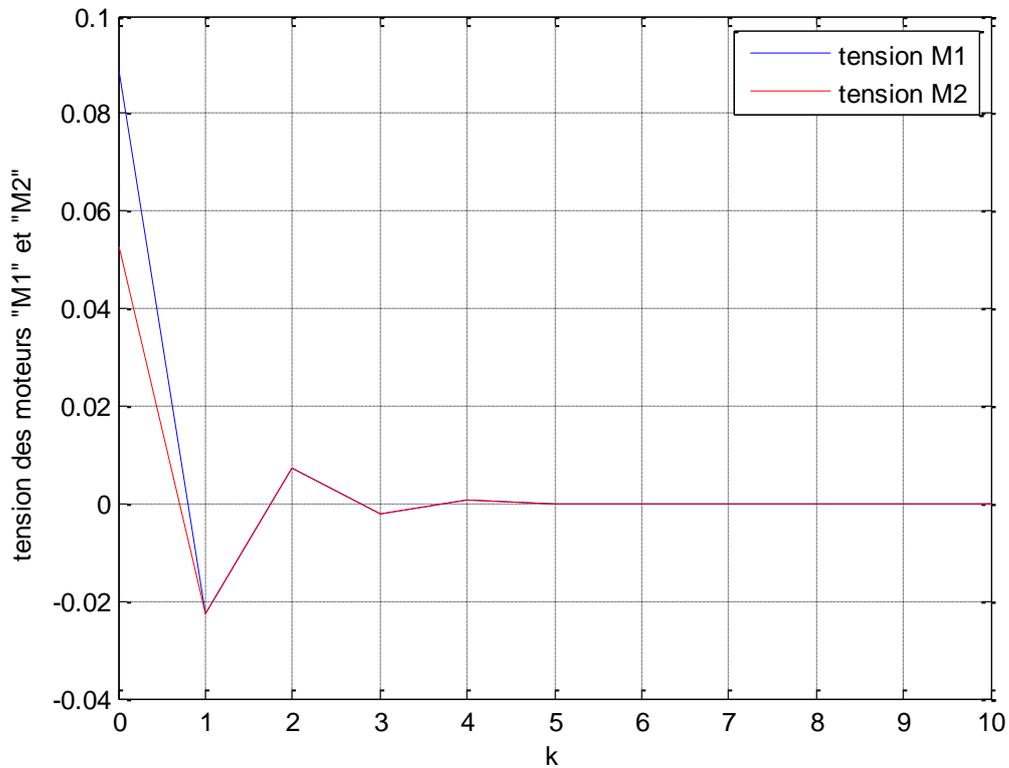


Fig.III.13 : Commandes optimales $u_1(k)$ (tension du moteur M1 de la roue droite) et $u_2(k)$ (tension du moteur M2 de la roue gauche).

• Pour $Q + I$ et $R + I$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$:

La figure III.14 représente les états optimaux x_1 (la vitesse linéaire du robot unicycle), x_2 (la vitesse angulaire du robot unicycle), après la variation des matrices de pondération Q et R (l'addition de la matrice d'identité I à chaque matrice de pondération Q et R).

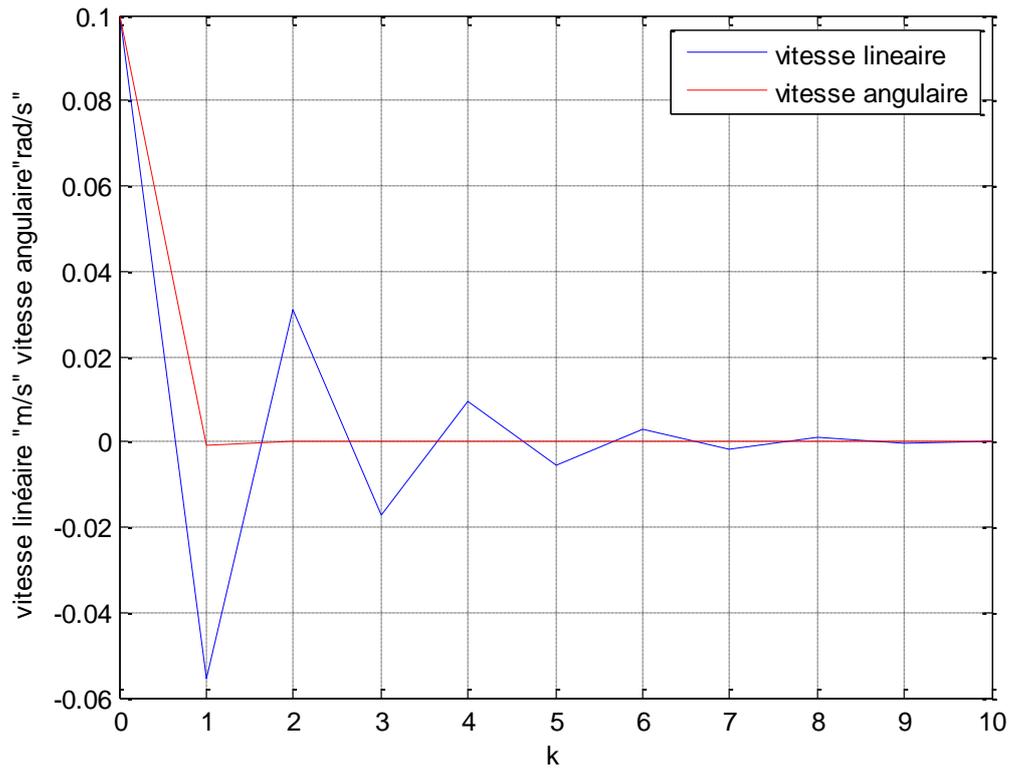


Fig.III.14 : États optimaux ($x_1(k)$ = vitesse linéaire et $x_2(k)$ = vitesse angulaire), après la variation de Q et R .

La figure III.15 représente les commandes optimaux $u_1(k)$ (tension du moteur M1 de la roue droite), $u_2(k)$ (tension du moteur M2 de la roue gauche), après la variation des matrices de pondération Q et R (l'addition de la matrice d'identité I à chaque matrice de pondération Q et R)

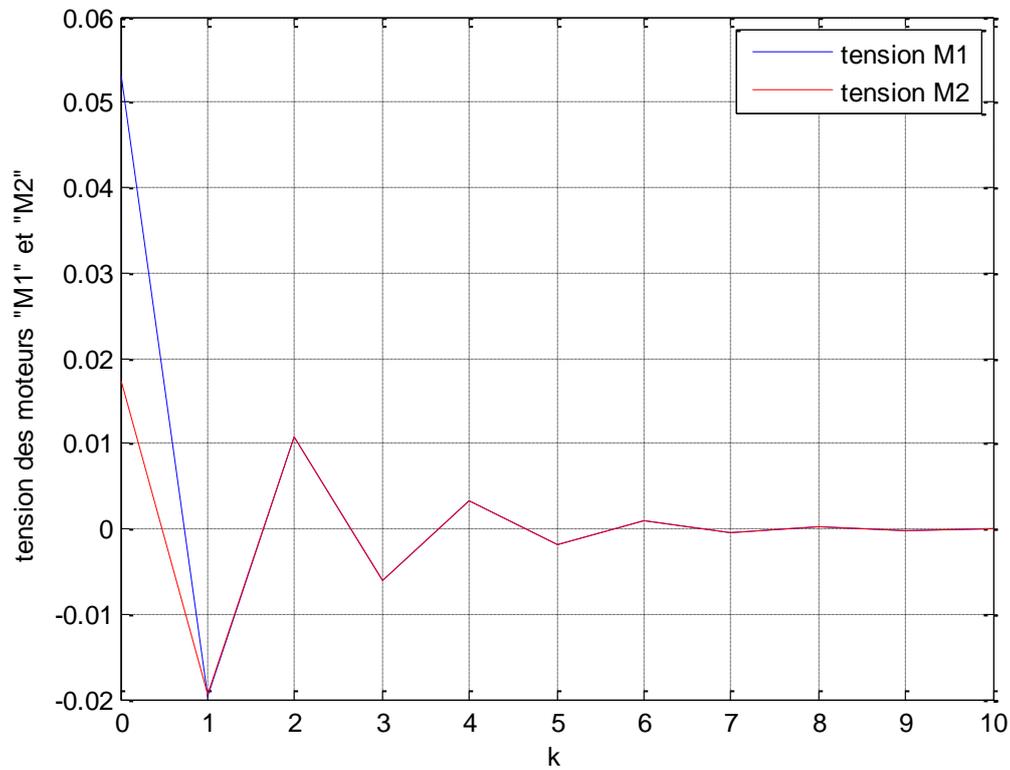


Fig.III.15 : Commandes optimales $u_1(k)$ (tension du moteur M1 de la roue droite) et $u_2(k)$ (tension du moteur M2 de la roue gauche), après la variation de Q et R .

• Pour $Q + V$ et $R + V$, $V = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.05 \\ 0.05 & 0.01 \end{bmatrix}$:

La figure III.16 représente les états optimaux x_1 (la vitesse linéaire du robot unicycle), x_2 (la vitesse angulaire du robot unicycle), après la variation des matrices de pondération Q et R (l'addition de la matrice V à chaque matrice de pondération Q et R).

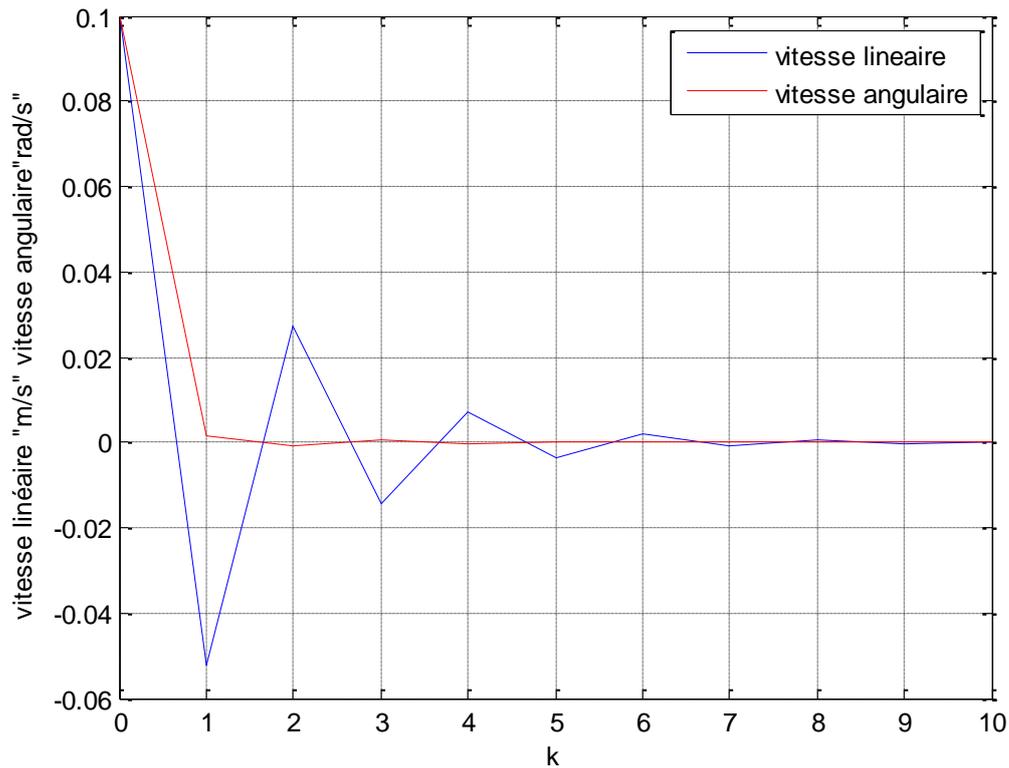


Fig.III.16 : Etats optimaux ($x_1(k)$ = vitesse linéaire et $x_2(k)$ = vitesse angulaire), après la variation de Q et R .

La figure III.17 représente les commandes optimaux $u_1(k)$ (tension du moteur M1 de la roue droite), $u_2(k)$ (tension du moteur M2 de la roue gauche), après la variation des matrices de pondération Q et R (l'addition de la matrice V à chaque matrice de pondération Q et R).

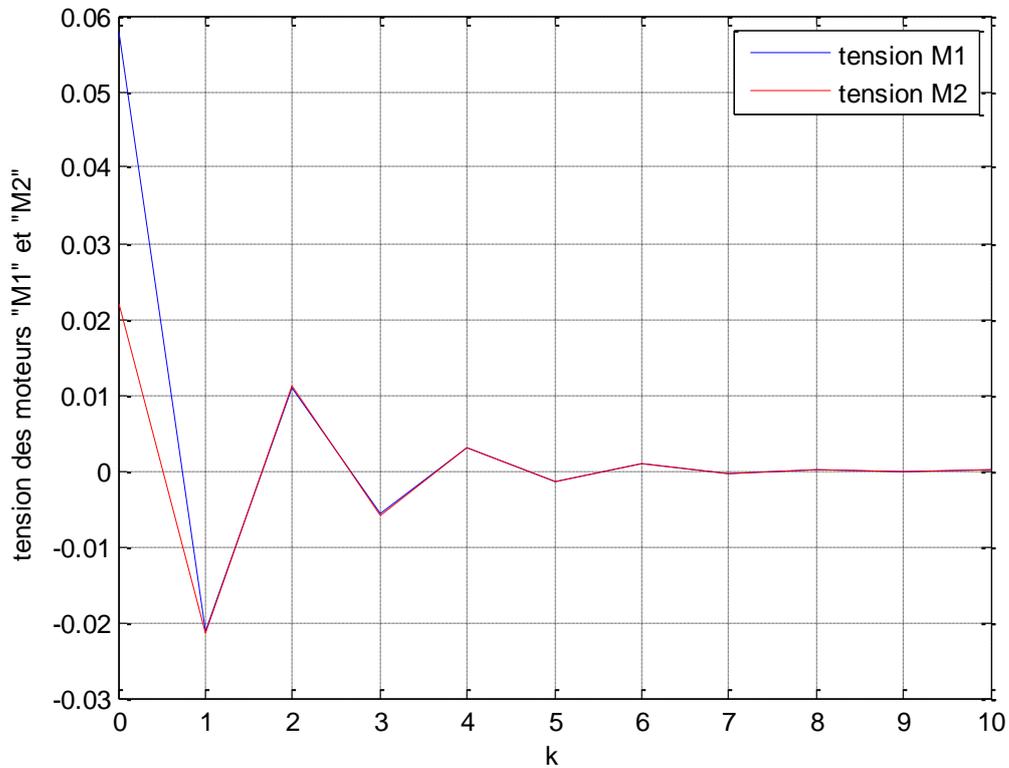


Fig.III.17 : Commandes optimales $u_1(k)$ (tension du moteur M1 de la roue droite) et $u_2(k)$ (tension du moteur M2 de la roue gauche), après la variation de Q et R .

III.8. Conclusion :

Ce dernier chapitre a été consacré à la résolution de l'équation de Riccati pour le cas discret, et dans ses deux formes différentielle (DRE), et algébrique (ARE). Pour cela nous avons mis en étude la méthode de Schur pour l'équation algébrique, et la méthode itérative pour résoudre l'équation différentielle. Aussi pour obtenir les états optimaux et la commande optimale dans les cas, l'horizon fini et l'horizon infini, nous avons présentés deux procédures.

A la fin de ce chapitre nous avons exposé les résultats de simulation obtenue par Matlab, ces résultats sont les coefficients de la matrice de Riccati, les états optimaux et la commande optimale, après le changement effectué au niveau des matrice de pondération Q et R , par l'addition en premier la matrice d'identité I , puis une deuxième fois par l'addition d'une matrice V de notre choix.

Après l'observation de ces résultats, nous déduisons que la minimisation de la commande optimale dépend de la valeur des matrices Q et R , si la valeur de ces dernières est petite, nous obtenons une commande optimale en un temps minimal.

Conclusion Générale

Conclusion générale

Le travail de recherche accompli dans ce mémoire, a été consacré à l'application d'un type de commande optimale, celle à régulateur linéaire quadratique, sur un robot mobile de type unicycle, dans le cas à temps discret.

Ce travail, a été commencé par l'étude des différents types de robots mobile, ainsi que l'architecture du robot mobile, puis nous avons intéressé au robot mobile à roues ainsi que ses principaux modèles : unicycle, tricycle, type voiture, omnidirectionnel.

La partie que nous avons commencé ce travail avec, a été dédié aussi à citer les capteurs utilisés en robotique mobiles, et qui permet au robot de faire son chemin et envisager et visualiser sa trajectoire, la dernière partie, nous a donné le modèle cinématique et dynamique du robot étudié ainsi que le modèle linéaire du moteur doté par ce robot.

Le deuxième chapitre, a été complètement destiné à l'étude de la commande optimale, en déclarant le problème de commande optimale, citant les trois principes fondamentaux. Par la suite nous avons fait un traitement à ce type de commande à régulateur linéaire quadratique, qui figure que notre système est linéaire et la commande et quadratique, nous avons étudié cette commande dans les cas de temps continu et discret. La résolution du problème à temps continu a été faites par l'écriture Hamiltonienne, et la vérification sur les trois niveaux conditionnelles l'état adjoint, la condition de transversalité et la condition de l'absence de contraintes sur la commande, par cela nous sommes arrivés à énoncer l'équation différentielle de Riccati (DRE). Pour le problème à temps discret, nous sommes arrivés à énoncer l'équation algébrique de Riccati (ARE) par la vérification des trois équations dont les conditions précédentes par l'écriture Lagrangienne.

L'obtention des états optimaux et la commande optimale, se fait par la résolution de l'équations de Riccati, cela est présenté dans le troisièmes chapitre par deux méthodes, une pour résoudre l'équations différentielle (DRE) à l'horizon fini, nous parlons de la méthode de la méthode itérative. L'autre est la méthode de Schur, celle-là pour résoudre l'équation algébrique (ARE) à l'horizon infini.

Les deux procédures présentées dans ce troisième chapitre, ont pour l'intérêt de figurer les états optimaux et la commande optimale, sont résolues par Matlab. Les travaux de simulation nous ont donné des résultats, qui sont les coefficients de la matrice de Riccati, les états optimaux et la commande optimale, suivant des paramètres qui concerne le modèle dynamique du robot dans le cas à temps discret. La remarque qui se fait par rapport à ces résultats, sont d'abord aux coefficients, ces derniers sont supérieurs ou égale à zéro ($p_{ij}(k) \geq 0$) et $p_{12}(k) = p_{21}(k)$, Cela montre que $p(k)=p^T(k)$ et $p(k) > 0$.

A ce propos, nous faisons une deuxième remarque par rapport aux signaux de commande en fonction du temps, qui s'augmentent après la variation des matrices de pondération $[Q]$ et $[R]$, soit en premier par l'addition de la matrice d'identité $[I]$, soit par l'addition d'une matrice choisi $[V]$. Nous constatons que les matrices de pondérations ont un effet sur la durée d'application du signal de commande, ces matrices doivent êtres petites le plus possibles pour que nous pouvons obtenir un signal de commande dans un minimum de temps et en minimum d'itérations.

Bibliographie

- [1] **A.Droniou, T. Quenolle, A. Schumacher**, " Filters LQR". Télécom Paris Tech Parcours ROSE, 7 mars 2011.
- [2] **Abdelkader Merakeb**, "Optimisation multicritères en contrôle optimal : Application au véhicule électrique". Thèse de Doctorat. Spécialité : mathématique. Université Mouloud Mammeri, Tizi Ouzou. Soutenue le : 14/06/2011.
- [3] **Anil Kunnappillil Madhusudhanan**, Matteo Corno, Bram Bonsen and Edward Holweg, "Solving Algebraic Riccati Equation Real Time for Integrated Vehicle Dynamics Control". 2012 American Control Conference Fairmont Queen Elizabeth, Montréal, Canada 27-June 29, 2012.
- [4] **Belkhadria Khemisti**, "commande d'un robot mobile par réseaux de neurones artificiels" Mémoire en vue de l'obtention du diplôme de magister en électronique. Option : Robotique.
- [5] **BENHADDOUCHE DJEMAI** "Commande Optimale Appliquée à un Robot Mobile ". Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme Magister option : contrôle Université de Batna Année 2013.
- [6] **Bernard BAYLE**, "Robotique mobile". Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg Université Louis Pasteur. Année 2008–2009.
- [7] **Cyril Drocourt**, "Localisation et modélisation de l'environnement d'un robot mobile par coopération de deux capteurs omnidirectionnels". Thèse pour l'obtention du grade de Docteur de l'Université de technologie de Compiègne. Discipline : Robotique. Soutenu le : 22/02/2002.
- [8] **David Filliat**, "Robotique Mobile". École Nationale Supérieure de Techniques Avancées Paris Tech. Année 2011.
- [9] **Desineni Subbaram Naidu**, " Optimal Control Systems". Idaho State University Pocatello. Idaho, USA.June 2002.
- [10] **Edouard Laroche**, " Commande Optimale ". Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg. Anne 2009-2010.
- [11] Généralités sur la robotique mobile par **ISTIA**, Université Angers.
- [12] **HEDDOUCHE Kamel** " Etude et conception d'un Robot marchant " Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme master option : Microélectronique et Hyper fréquence Université Mohamed Khider Biskra Soutenu le : 03 Juin 2014

- [13] **Julien Beaudry**, "Conception et Contrôle d'un Robot Mobile à Vitesses Différentielles ". Rapport de projet de fin d'études soumis comme condition partielle à l'obtention du diplôme de baccalauréat en ingénierie. Ecole Polytechnique de Montréal. Soutenu le : 05/12/2001.
- [14] **Khenniche Ghania**, "Théorie et application du calcul des variations en commande optimale ". Mémoire de Magister Présenté à l'Université 20 Août 55, Skikda Faculté des Sciences et Sciences de l'Ingénierie. Spécialité : Mathématiques. Soutenu le : 04/06/2007.
- [15] **Laub, A.J.**, "A Schur Method for Solving Algebraic Riccati Equations ». [17]
- [16] **Mariam Baroudi**, "Contrôle d'un bras robotique flexible". Mémoire présenté comme exigence partielle de la maîtrise en ingénierie. Université du Québec. Année 2010.
- [17] **Marie-José Aldon**, "Capteurs et méthodes pour la localisation des robots mobiles". Université de Montpellier II.
- [18] **Mauro Eduardo Maya Mendez**. " Commande référencée capteur des robots non holonomes ". Thèse pour obtenir le grade de Docteur en Sciences Spécialité Informatique Temps Réel, Automatique et Robotique. L'École Nationale Supérieure des Mines de Paris Sophia Antipolis. Soutenu le : 05/04/2007.
- [19] **Mohamed Bilel Ben Slimen**, "Conception de lois de commande structurées (hiérarchisées, décentralisées) pour les chaînes de traction pilotées". Thèse de Doctorat. Discipline : Automatique. Ecole polytechnique de l'Université de Nantes. Soutenu le : 13/10/2011.
- [20] **Nicholas Assimakis**, "Discrete Time Riccati Equation Recursive Multiple Steps Solutions". Department of Electronics Technological Educational Institute of Lamia, Grèce, Année 2009.
- [21] **Pierre Riedinger**, "Contribution à la commande des systèmes complexes". Mémoire pour l'obtention de l'Habilitation à Diriger des Recherches de l'Institut National Polytechnique de Lorraine. Spécialité : Automatique et Traitement du Signal. Présenté publiquement le 4 juin 2010.
- [22] **Régis Grasse**, "Aide à la navigation pour les personnes handicapées : reconnaissance de trajets". Thèse pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de Metz. Discipline : Automatique. Soutenu le : 05/10/2007.
- [23] **Rich Chi Ooi**, "Balancing a Two-Wheeled Autonomous Robot". Faculty of Engineering and Mathematical Sciences, University of Western Australia. November 2003.

[24] **Stéphane Lens**, "Locomotion d'un robot mobile". Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade d'Ingénieur Civil Informaticien Année académique 2007-2008. Université de Liège.

[25] **Vladimir Kucera**, "The Discrete Riccati Equation of Optimal Control". Ústav theorie informace a automatizace ČSA V (Institute of Information Theory and Automation — Czechoslovak Academy of Sciences), Vyšehradská 49, Praha 2. Année 1972.

[26] **Z.Rémi Vial**, "Vers un dimensionnement optimal structure-commande de système multi-convertisseurs. Application aux réseaux de tramways". Thèse pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de Grenoble. Spécialité : Génie électrique. Soutenue le : 26/01/2012.

Annexe

m : la masse de robot : 1.213068 kg.

m_r : la masse de corps du robot : 1.13 kg.

m_R : la masse de la roue : 0.03 kg.

k_m : Constante du moteur : 0.06123 Nm/A.

k_e : constant EMF Retour : 0.06087 Vs/rad.

r : Rayon de roue : 0.051 m.

L : Longueur au centre de la masse de corps du robot : 0.15 m

R : Résistance Terminal nominale : 3 ohms.

I : inertie du robot : 0.006047 kg.m².

I_r : inertie de corps du robot : 0.0041 kg.m².

I_R : inertie de la roue : 0.000039 kg.m².

I_{Ry} : inertie de la roue par apport au l'axe y : 0.00003 kg.m².