Université Djilali Bounaâma-Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département Mathématiques et Informatique

# Mémoire

*Pour l'obtention du diplôme de*

Master en mathématiques
Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

*Présenté par*

**DOUAER Somia**

---

## Quelques Applications de la Méthode de Selberg-Delange

---

*Soutenue publiquement le 13 juin 2017 devant le jury composé de*

| | |
|---|---|
| **Président du jury :** | **Mr M. KARRAS** |
| | Université Khemis Miliana. |
| **Encadrant :** | **Mr B. SADAOUI** |
| | Université Khemis Miliana. |
| **Examinateur :** | **Mr M. BOUDERBALA** |
| | Université Khemis Miliana. |
| | **Mr M. HOUASNI** |
| | Université Khemis Miliana. |

*Année Universitaire :* ***2016/2017***

## *Mémoire de Master : Quelques Applications de la Méthode de Selberg-Delange.*

**Résumé :**
la méthode de Selberg-Delange est une méthode développée par Atle Selberg et Hubert Delange, qui permettre d'étudier le comportement asymptotique des sommes de type $\sum_{n \leq x} f(n)$ où $f$ est une fonction arithmétique, associée à une série de Dirichlet de la forme $F(s) = G(s, z)\zeta(s)^z \quad (z \in \mathbb{C})$.

**Mots clés :** Fonctions multiplicatives, Série de Dirichlet, Formule de Perron, Fonction Zêta.

## *Master Thesis : images segmentation.*

**Summary :**
The Selberg-Delange mathode is a method developted by Atle Selberg and Habert Delange, that is use to determined the asymptotic behavior of the sum of arithmetic functions of the type $\sum_{n \leq x} f(n)$ whose corresponding Dirichlet's series of the form $F(s) = G(s, z)\zeta(s)^z \quad (z \in \mathbb{C})$.

**Keywords :** Multiplicative functions, Dirichlet series, asymptotic behavior, Perron Formulae, Zêta function.

# Table des matières

# Table des figures

# Notations

1. On désigne par $p$ un nombre premier.

2. le variable $s$ désigne un nombre complexe, on définit sa partie réelle par $\Re(s) = \sigma$ et sa partie imaginaire par $\Im(s) = \tau$.

3. $m$ et $n$ sont des entiers, on écrit $m \mid n$ pour indiquer $m$ divise $n$, et $m \nmid n$ pour indiquer $m$ ne divise pas $n$, et $n \wedge m$ ou $(n, m)$ désigne le $pgcd(n, m)$.

4. $p^\alpha \parallel n$ signifie $p^\alpha \mid n$ et $p^{\alpha+1} \nmid n$.

5. On écrit $\log_k$ le logarithme itéré $k$ fois.On pose aussi $\log^+ x = \max(0, \log x)$ pour $x > 0$.

6. Soit $n$ et $k$ deux entiers positifs avec $k \leq n$. On écrit $\binom{n}{k}$ pour désigner le coefficient binomial défini par $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

7. Les symboles $\prod\limits_{p \leq x}$ et $\sum\limits_{p \leq x}$ indiquent respectivement un produit et une somme de tous les nombres premiers $p \in [2, x]$. Aussi, $\sum\limits_{p} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \sum\limits_{p \leq x}$ et $\prod\limits_{p} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \prod\limits_{p \leq x}$.

8. Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $[a, +\infty[$ où $(a \geq 0)$, on dit que :

   - $f(x) = O(g(x))$ $\quad$ ($f(x)$ est un grand $O$ de $g(x)$), s'il existe une constante $M > 0$ et $\exists\ x_0,\ \forall\ x \geq x_0$, on a $| f(x) | \leq M | g(x) |$. On écrit aussi par symbole Vinogradov $f(x) \ll g(x)$.
   - $f(x) = o(g(x))$ $\quad$ ($f(x)$ est un petit $o$ de $g(x)$) signifie $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0$.
   - $f(x) \sim g(x)$ pour signifier que $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

   ($o$ et $O$ sont les symboles de Landau).

# Remerciements

Tout d’abord, je remercie " ALLAH " le tout puissant qui m’a donné la force, la patience durant ces années d’études, et pour accomplir ce modeste travail.

Je remercie Mr **SADAOUI Boualem**, qui a encadré mon travail, pour ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail.

Je veux exprimer mes remerciements les plus dévoués aux membres de jury qui m’ont honorées en acceptant d’évaluer ce travail.

Je tiens à remercier tous les professeurs de département Mathématique et Informatique qui nous ont enseigné.

Je veux exprimer mes sincères remerciements à toute ma famille surtout à ma mère, pour leurs efforts qu’ils ont fait pour mes études ainsi que mon éducation, et à toutes mes amies.

MERCI.

# Introduction

Le sujet de ce travail est un sujet de la théorie des nombres, plus précisément la théorie analytique des nombres, qui utilise des techniques d'analyse mathématique plus précisément l'analyse complexe.

Entre 1954 et 1971, Atle Selberg et Hubert Delange ont développé une méthode ou ont utilisé les propriétés analytiques de la série de Dirichlet associée à des fonctions arithmétiques, l'idée principale de Selberg [9] était de créer une série de Dirichlet associée à une fonction arithmétique et d'étudier le comportement de la série autour du pôle $s = 1$.

Cette idée a ensuite été étendue par Hubert Delange [2], [3]. Cette méthode est maintenant connue sous le nom de la méthode Selberg-Delange, qui est l'objet principal de ce travail.

Ce travail se compose en quatre chapitre.

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques préliminaires et notions de base qui seront utiles pour la suite, comme les fonctions arithmétiques, la fonction Gamma et la transformation d'Abel.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des séries de Dirichlet, en rappelant quelques propriétés de ses séries, en suite on définit la fonction Zêta de Riemann, et on termine ce chapitre par la donnée de la formule de Perron.

Le troisième chapitre, est réservé à la présentation de la méthode de Selberg-Delange.

Dans le dernier chapitre, on donne une application de cette méthode.

# Chapitre 1

# Préliminaires

Dans ce chapitre, on regroupes quelques outils qui seront nécessaires pour la suite.

## I Fonctions arithmétiques

**Définition 1.** *On appelle fonction arithmétique, toute application $f$ définie de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$.*

On distingue deux types des fonctions arithmétiques :

### I.1 Fonctions arithmétiques multiplicatives

**Définition 2.** *On dit qu'une fonction arithmétique $f$ est multiplicative si*

$$\begin{cases} f(1) = 1, \\ \quad et \\ f(nm) = f(n)f(m) \qquad si\ (n,m) = 1. \qquad (*) \end{cases}$$

*et on écrit pour $n = \prod\limits_{p^\alpha \| n} p^\alpha$,*

$$f(n) = \prod_{p^\alpha \| n} f(p^\alpha).$$

*En particulier, $f$ est dite complètement multiplicative si la condition $(*)$ est vraie pour tout $m, n$ dans $\mathbb{N}^*$ et on écrit*

$$f(n) = \prod_{p^\alpha \| n} (f(p))^\alpha.$$

**Exemple 1.** *pour tout entier* $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, *on définit la fonction multiplicative de Möbius* $\mu(n)$ *par :*

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & si\ n = 1, \\ (-1)^k & si\ \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 1 \quad (n\ est\ produit\ de\ k\ facteurs\ distincts), \\ 0 & si\ (n\ a\ un\ facteur\ carré > 1). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mu(10) &= (-1)^2 = 1, \\ \mu(20) &= 0, \\ \mu(30) &= (-1)^3 = -1. \end{aligned}$$

## I.2 Fonctions arithmétiques additives

**Définition 3.** *On dit qu'une fonction arithmétique est additive si*

$$\begin{cases} f(1) = 0, \\ \quad et \\ f(nm) = f(n) + f(m) \qquad si\ (n, m) = 1. \end{cases}$$

*En particulier, f est dite complètement additive si pour tout m et n on a*

$$f(nm) = f(n) + f(m).$$

**Exemple 2.** *la fonction* $\omega(n)$ *nombre de diviseurs premiers distincts de n, est une fonction additive définie par*

$$\omega(n) = \sum_{p|n} 1.$$

*Pour tout* $n, m$ *premier entre eux, on a* $\omega(nm) = \omega(n) + \omega(m)$.

$$\begin{aligned} \omega(30) &= \omega(5.2.3) = \omega(5) + \omega(2) + \omega(3) = 3, \\ \omega(45) &= \omega(3^2.5) = \omega(3^2) + \omega(5) = 2, \\ \omega(100) &= \omega(5^2.2^2) = \omega(5^2) + \omega(2^2) = 2. \end{aligned}$$

**Exemple 3.** *la fonction* $\Omega(n)$ *nombre de diviseurs premiers, définie par*

$$\Omega(n) = \sum_{p^\alpha \| n} \alpha,$$

*est une fonction complètement additive.*

$$\begin{aligned} \Omega(45) &= \Omega(3^2.5) = 3, \\ \Omega(100) &= \Omega(5^2.2^2) = 4. \end{aligned}$$

# II Fonction Gamma

**Définition 4.** *La fonction Gamma est une fonction spéciale notée $\Gamma$ qui prolonge la fonction factorielle aux valeur réels au complexes, définie par*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}\mathrm{dx} \qquad (\Re(z) > 0).$$

**Propriétés 1.** *[1]*

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}).$
2. $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}).$
3. $\Gamma(n+1) = n! \qquad (n \in \mathbb{N}).$
   *On rappelle aussi que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.*

# III Transformation d'Abel

**Définition 5.** *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites, pour tout entiers $m$ et $N$, on définit $A_0 = 0$, et $A_n = \sum\limits_{m=1}^{n} a_m \quad (n \geq 1)$, telle que pour toute suite convergente, on a*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} a_n b_n &= \sum_{n=1}^{N} (A_n - A_{n-1})b_n \\ &= \sum_{n=1}^{N} A_n b_n - \sum_{n=1}^{N-1} A_n b_{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_N b_N.\end{aligned}$$

**Théorème 1.** *[10] Soit $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de nombres complexes positifs, et*

$$A(t) = \sum_{n\leq x} a_n \qquad (t > 0).$$

*Soit $b(t)$ une fonction différentiable continue sur l'intervalle $[1, x]$. On a*

$$\sum_{1\leq n\leq x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int_1^x A(t)b'(t)\mathrm{d}t.$$

# IV Théorème des résidus

**Définition 6.** *Si une fonction $f$ est holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_0\}$, et si la fonction*

$$z \longmapsto f(z) - \sum_{k=1}^{p} \frac{c_k}{(z-z_0)^k}$$

*a une singularité artificielle en $z_0$, on dit que $z_0$ est un pôle de $f$ et si $c_p \neq 0$, l'entier $p$ est appelé ordre de ce pôle. Le coefficient $c_1$ joue un rôle particulier : il est appelé résidu de $f$ au point $z_0$, que l'on notera dans la suite Rés$(f, z_0)$. La fonction*

$$z \longmapsto \sum_{k=1}^{p} \frac{c_k}{(z-z_0)^k}$$

*est appelée partie principale de $f$.*

**Théorème 2.** *[4] Si une fonction $f$ est holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_0 \cdots z_n\}$, où $\Omega$ est un ouvert simplement connexe, si $f$ a un pôle au point $z_0 \cdots z_n$, alors pour tout chemin fermé $\gamma \subset \Omega \setminus \{z_0 \cdots z_n\}$,*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{n} Rés(f, z_k) Ind_{\gamma}(z_k).$$

# Chapitre 2

# Séries de Dirichlet

Ce chapitre est consacré à l'étude des séries de Dirichlet (définitions, convergence, prolongement ...).

## I Définition

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite à coefficients complexes, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la série de Dirichlet sous la forme suivante :

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \qquad s \in \mathbb{C}.$$

**Théorème 3.** *Soit*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

*une série de Dirichlet.*

1. *Si la série converge en un point $s_0 \in \mathbb{C}$, elle converge en tout point $s$ tel que $\sigma > \sigma_0$ et la série converge uniformément sur tout domaine de la forme $\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} : \mid \arg(s - s_0) \mid \leq \theta\}$ pour un certain $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.*

2. *Si la série converge absolument en un point $s_0 \in \mathbb{C}$, elle converge absolument et uniformément sur le demi-plan $\sigma \geq \sigma_0$.*

Pour démontrer ce théorème on utilise le lemme suivant :

**lemme 4.** *Soient $\theta, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ telle que $0 < \theta < \beta$. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $x = \Re(z) > 0$ , on a*

$$\mid e^{-\theta z} - e^{-\beta z} \mid \leq \frac{\mid z \mid}{x}(e^{-\theta x} - e^{-\beta x}).$$

*Démonstration.* On a
$$e^{-\theta z} - e^{-\beta z} = z \int_{\theta}^{\beta} e^{-tz} \mathrm{dt}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mid e^{-\theta z} - e^{-\beta z} \mid &= \mid z \int_{\theta}^{\beta} e^{-tz} \mathrm{dt} \mid \\
&\leq \mid z \mid \int_{\theta}^{\beta} \mid e^{-tz} \mid \mathrm{dt} \\
&\leq \mid z \mid \int_{\theta}^{\beta} \mid e^{-t(\Re(z)+i\Im(z))} \mid \mathrm{dt} \\
&\leq \mid z \mid \int_{\theta}^{\beta} e^{-t\Re(z)} \mathrm{dt} \\
&\leq \mid z \mid \int_{\theta}^{\beta} e^{-tx} \mathrm{dt} \\
&\leq \mid z \mid \left[ \frac{1}{x} e^{-tx} \right]_{\theta}^{\beta} \\
&\leq \frac{\mid z \mid}{x} (e^{-\theta x} - e^{-\beta x}).
\end{aligned}$$

□

*Démonstration.* (*du théorème* 3) On applique la transformation d'Abel et le critère de Cauchy.
Soit $s \in \mathbb{C}, \sigma > \sigma_0$, on pose $u_n = a_n n^{-s_0}$ et $v_n = n^{s_0 - s}$ des suites complexes et pour $q \geq p$, On a
$$S_{p,q} = \sum_{n=p}^{q} u_n v_n = \sum_{n=p}^{q} \frac{a_n}{n^s}$$

et
$$U_{p,q} = \sum_{n=p}^{q} u_n = \sum_{n=p}^{q} \frac{a_n}{n^{s_0}}.$$

D'après le critère de Cauchy,

pour tout $\epsilon > 0, \exists\, N_\epsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que $q \geq p \geq N_\epsilon$, $\left| \sum_{n=p}^{q} u_n \right| \leq \epsilon \Rightarrow \mid U_{p,q} \mid \leq \epsilon$.

Si $\sigma > \sigma_0$, on remarque

$$\mid v_n \mid = \left| \frac{1}{n^{s-s_0}} \right| = \frac{1}{n^{\sigma-\sigma_0}} < 1.$$

En utilisant une transformation d'Abel,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=p}^{q} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=p}^{q} u_n v_n &= \sum_{n=p}^{q} (U_{p,n} - U_{p,n-1}) v_n \\
&= \sum_{n=p}^{q} U_{p,n} v_n - \sum_{n=p}^{q-1} U_p v_{n+1} \\
&= U_{p,q} v_q + \sum_{n=p}^{q-1} U_{p,n} v_n - \sum_{n=p}^{q-1} U_{p,n} v_{n+1} \\
&= U_{p,q} v_q + \sum_{n=p}^{q-1} U_{p,n} (v_n - v_{n+1}).
\end{aligned}$$

D'où, pour $q > p \geq N_\epsilon$, on a

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=p}^{q} \frac{a_n}{n^s} \right| &\leq \epsilon \mid v_q \mid + \epsilon \sum_{n=p}^{q-1} \mid v_n - v_{n+1} \mid \\
&\leq \epsilon \left( 1 + \sum_{n=p}^{q-1} \mid v_n - v_{n+1} \mid \right).
\end{aligned}$$

Or $\mid v_n - v_{n+1} \mid = \left| \frac{1}{n^{s-s_0}} - \frac{1}{(n+1)^{s-s_0}} \right| = \mid e^{-(s-s_0)\log n} - e^{-(s-s_0)\log(n+1)} \mid$.

On applique le lemme précédent, on pose $s - s_0 = z, \log n = \theta$ et $\log(n+1) = \beta$, on obtient :

$$\mid v_n - v_{n+1} \mid \leq \frac{\mid s - s_0 \mid}{\sigma - \sigma_0} \left( \frac{1}{n^{\sigma-\sigma_0}} - \frac{1}{(n+1)^{\sigma-\sigma_0}} \right).$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mid \sum_{n=p}^{q} \frac{a_n}{n^s} \mid &\leq \epsilon \left(1 + \frac{\mid s-s_0 \mid}{\sigma-\sigma_0} \sum_{n=p}^{q-1} (\frac{1}{n^{\sigma-\sigma_0}} - \frac{1}{(n+1)^{\sigma-\sigma_0}})\right) \\
&\leq \epsilon (1 + \frac{\mid s-s_0 \mid}{\sigma-\sigma_0} (\frac{1}{p^{\sigma-\sigma_0}} - \frac{1}{(p+1)^{\sigma-\sigma_0}} + \frac{1}{(p+1)^{\sigma-\sigma_0}} - \frac{1}{(p+2)^{\sigma-\sigma_0}} + \cdots \\
&+ \frac{1}{(q-2)^{\sigma-\sigma_0}} - \frac{1}{(q-1)^{\sigma-\sigma_0}} + \frac{1}{(q-1)^{\sigma-\sigma_0}} - \frac{1}{q^{\sigma-\sigma_0}})) \\
&\leq \epsilon \left(1 + \frac{\mid s-s_0 \mid}{\sigma-\sigma_0} (\frac{1}{p^{\sigma-\sigma_0}} - \frac{1}{q^{\sigma-\sigma_0}})\right) \\
&\leq \epsilon \left(1 + \frac{\mid s-s_0 \mid}{\sigma-\sigma_0}\right) \\
&\leq 2\epsilon.
\end{aligned}$$

La série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ vérifie le critère de Cauchy donc elle converge.
On montre la convergence uniforme dans le domaine $\mathcal{D}$ où $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ Si $s \in \mathcal{D}, \exists\, \theta_1 = \theta_1(s)$ tel que

$$\cos(\theta_1) = \frac{\sigma-\sigma_0}{\mid s-s_0 \mid} \quad \text{et} \quad \mid \theta_1 \mid \leq \theta.$$

D'où

$$\frac{\mid s-s_0 \mid}{\sigma-\sigma_0} = \frac{1}{\cos(\theta_1)} \leq \frac{1}{\cos(\theta)},$$

et on a pour tout $s \in \mathcal{D}$, $\left| \sum\limits_{n=p}^{q} \frac{a_n}{n^s} \right| \leq \epsilon \left(1 + \frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0}\right)$, C'est à dire

$$\mid \sum_{n=p}^{q} \frac{a_n}{n^s} \mid \leq \epsilon \left(1 + \frac{1}{\cos(\theta)}\right).$$

D'après le critère de Cauchy de convergence uniforme,
$\forall \epsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}^*$ tel que $p, q \geq N$, $\sup\limits_{s \in \mathcal{D}} \left| \sum\limits_{n=p}^{q} \frac{a_n}{n^s} \right| \leq \epsilon$. Donc elle converge uniformément sur $\mathcal{D}$. $\square$

On rappelle que lorsque $s = \sigma + i\tau$ avec $\sigma = \Re(s)$ et $\tau = \Im(s)$ sont des réels, on a $n^s = n^\sigma n^{i\tau} = n^\sigma . e^{i\tau \log n}$, donc le module $\mid n^s \mid$ est égal à $n^\sigma$.

## II Abscisse de convergence

**Définition 7.** *[1] Soit* $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *la série de Dirichlet.*
*On note par*

$$\sigma_c = \inf\left\{\sigma \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma} \quad \textit{converge}\right\}$$

*la borne inférieure de l'ensemble des nombres réels, tel que* $\sigma_c$ *l'abscisse de convergence ou l'abscisse de convergence simple de la série de Dirichlet, et on écrit*

$$\sigma_c = \begin{cases} -\infty & \textit{si } F(s) \textit{ converge pour tout } s, \\ +\infty & \textit{si } F(s) \textit{ diverge pour tout } s. \end{cases}$$

*Alors la série de Dirichlet :*

- *Sur le demi plan* $\sigma > \sigma_c$*, est converge.*
- *Sur le demi plan* $\sigma < \sigma_c$*, est diverge.*

## III Abscisse de convergence absolue

**Définition 8.** *[1] Soit* $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *la série de Dirichlet.*
*On note par*

$$\sigma_a = \inf\left\{\sigma \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma} \quad \textit{converge absolument}\right\}$$

*la borne inférieure de l'ensemble des nombres réels, tel que* $\sigma_a$ *est l'abscisse de convergence absolue de la série de Dirichlet, et on écrit*

$$\sigma_a = \begin{cases} -\infty & \textit{si } F(s) \textit{ converge absolument pour tout } s, \\ +\infty & \textit{si } F(s) \textit{ diverge pour tout } s. \end{cases}$$

*Alors la série de Dirichlet :*

- *Sur le demi plan* $\sigma > \sigma_a$*, est converge absolument.*
- *Sur le demi plan* $\sigma < \sigma_a$*, est ne converge pas absolument.*

**Théorème 5.** *Soit* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ *la série de Dirichlet, on a*

$$\sigma_c \leq \sigma_a \leq \sigma_c + 1.$$

*Démonstration.* On pose $u_n = a_n n^{-\sigma_0}, v_n = n^{-\sigma+\sigma_0}$ des suites réelles telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma}.$$

On suppose que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma}$ converge absolument, alors elle converge, donc $\sigma_c \leq \sigma_a$ et pour démontrer $\sigma_a \leq \sigma_c + 1$, on prend $\sigma > 1 + \sigma_c$. Soit s$\in \mathbb{C}$,la série converge lorsque $s = s_0$, tel que $\sigma > 1 + \sigma_0$ donc $\sigma > 1 + \sigma_0 > 1 + \sigma_c$ c'est-à-dire $\sigma - 1 > \sigma_0 > \sigma_c$, Alors la suite $(a_n n^{-\sigma_0})_n$ est bornée par une constante $M$. et on écrit

$$\frac{\mid a_n \mid}{n^{\sigma}} = \frac{\mid a_n \mid}{n^{\sigma_0}} \frac{1}{n^{\sigma-\sigma_0}} \leq \frac{M}{n^{\sigma-\sigma_0}}.$$

Puisque $\sigma - \sigma_0 > 1$, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^{\sigma-\sigma_0}}$ converge, et donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma}$ est converge absolument. Ainsi $\sigma_a \leq \sigma_c + 1$. □

# IV Convolution de Dirichlet

La convolution de Dirichlet est une loi de composition sur l'ensemble des fonctions arithmétiques qui rend compte de la structure multiplicative de l'ensemble des entiers.

**Définition 9.** *La convolution de Dirichlet de deux fonctions arithmétiques $f$ et $g$ définie par*

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{ab=n} f(a)g(b).$$

**Théorème 6.** *[6] Soient $F(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ et $G(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$ deux séries de Dirichlet dont les abscisses de convergence $\sigma_a(f)$ et $\sigma_a(g)$. Alors si $s > max(\sigma_a(f), \sigma_a(g))$, on a*

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}$$

*où $h = f * g$.*

**Proposition 1.** *[6] Si $f, g$ et $h$ sont des fonctions arithmétiques, alors*

1. *$f * g = g * f$ (commutativité).*
2. *$(f * g) * h = f * (g * h)$ (associativité).*

3. $f * (g + h) = f * g + f * h$ *(distributivité).*

On définit la fonction $\delta$ par :

$$\delta(n) = \delta_n = \begin{cases} 1 & n = 1, \\ 0 & n > 1. \end{cases}$$

**Définition 10.** *Soit $f$ une fonction arithmétique. On dira que la fonction arithmétique $g$ est l'inverse de $f$ si $f * g = g * f = \delta$ notée $f^{-1}$.*

**Proposition 2.** *Une fonction arithmétique a un élément inverse si et seulement si $f(1) \neq 0$.*

*Démonstration.* Pour la première implication : On suppose que $f$ une fonction arithmétique a un élément inverse, il existe $g \in A$ telle que $g = f^{-1}$ c'est-à-dire $f * g = \delta$. Alors

$$(f * g)(1) = (f * f^{-1})(1) = \delta_1 = 1$$

ainsi

$$(f * g)(1) = \sum_{d|1} f(d) g(\frac{1}{d}) = f(1) g(1) = 1.$$

Donc $f(1) \neq 0$.
Pour la deuxième implication : On suppose que $f(1) \neq 0$, et on cherche $g \in A$ telle que $f * g = \delta$. Pour tout $n > 1$

$$(f * g)(n) = \delta(n) = 0 = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Donc :
$(f * g)(1) = f(1)g(1) = 1$,
$(f * g)(2) = f(1)g(2) + f(2)g(1) = 0$,
$(f * g)(3) = f(1)g(3) + f(3)g(1) = 0$,
$(f * g)(4) = f(1)g(4) + f(2)g(2) + f(4)g(1), \cdots$
par récurrence, on obtient

$$f(1)g(n) + \sum_{\substack{1 < d \leq n \\ d|n}} f(d) g(\frac{n}{d}) = 0,$$

donc

$$g(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{1 < d \leq n \\ d|n}} f(d) g(\frac{n}{d}).$$

Alors $g \in A$ telle que $f * g = \delta$. $\square$

# V Développement en produit eulérien

**Théorème 7.** *Soit $f$ une fonction multiplicative et*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s}$$

*une série de Dirichlet. On a alors équivalence entre la convergence absolue de $F$ en $s$ et la condition*

$$\sum_{p} \sum_{v=1}^{\infty} | f(p^v) p^{-vs} | < \infty.$$

*Et lorsque cette condition est réalisée, on a*

$$F(s) = \prod_{p} \left( 1 + \sum_{v=1}^{\infty} f(p^v) p^{-vs} \right).$$

*Démonstration.* Soit $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ la série de Dirichlet, a une abscisse de convergence absolue $\sigma_a < +\infty$, avec $f$ une fonction multiplicative.
Soit $P$ un ensemble de nombres premiers, et $N(P)$ l'ensemble des entiers dont tous les facteurs premiers appartiennent à $P$.
En utilisant la multiplicativité de $f$, on a

$$\begin{aligned}
\prod_{p} \left( \sum_{v=0}^{\infty} \frac{f(p^v)}{p^{vs}} \right) &= \prod_{p} \left( 1 + \frac{f(p)}{p^s} + \cdots + \frac{f(p^k)}{p^{ks}} + \cdots \right) \\
&= \left( 1 + \frac{f(p_1)}{p_1^s} + \frac{f(p_1^2)}{p_1^{2s}} + \cdots \right) \left( 1 + \frac{f(p_2^2)}{p_2^s} + \frac{f(p_2)}{p_2^{2s}} + \cdots \right) \cdots \\
&= 1 + \sum_{1 \leq i} \frac{f(p_i)}{p_i^s} + \sum_{1 \leq i \leq j} \frac{f(p_i) f(p_j)}{p_i^s p_j^s} + \sum_{1 \leq i \leq j \leq k} \frac{f(p_i) f(p_j) f(p_k)}{p_i^s p_j^s p_k^s} + \cdots \\
&= \sum_{n \in N(P)} \frac{f(n)}{n^s}
\end{aligned}$$

pour $\sigma > \sigma_a$.
Ainsi, si on pose :

$$J = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} - \prod_{p} \left( 1 + \frac{f(p)}{p^s} + \cdots + \frac{f(p^k)}{p^{ks}} + \cdots \right) \right|.$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned}
J &= \left|1+\frac{f(2)}{2^s}+\cdots-\left(1+\frac{f(2)}{2^s}+\frac{f(2^2)}{2^{2s}}+\cdots\right)\left(1+\frac{f(3)}{3^s}+\frac{f(3^2)}{3^{2s}}+\cdots\right)\cdots\right| \\
&= \left|1+\frac{f(2)}{2^s}+\cdots-\left(1+\cdots+\frac{f(2)f(3)}{2^s3^s}+\frac{f(2)f(5)}{2^s5^s}+\cdots+\frac{f(2)f(3^2)}{2^s3^{2s}}+\frac{f(2)f(5^2)}{2^s5^{-2s}}+\cdots+\frac{f(2)f(3)f(4)}{2^s3^s5^s}+\cdots\right)\right| \\
&= \left|\frac{f(6)}{2^s3^s}+\frac{f(10)}{2^s5^s}+\cdots\right| \\
&= \left|\sum_{n\in N(P)}\frac{f(n)}{n^s}\right| \\
&\leq \sum_{n\in N(P)}\frac{\mid f(n)\mid}{n^\sigma}.
\end{aligned}$$

On remarque pour $\{n\in\mathbb{N} : n\in N(P)\}\subset\{n\in\mathbb{N} : n>P\}$,
d'où,

$$\sum_{n\in N(P)}\frac{\mid f(n)\mid}{n^\sigma}=\sum_{n>P}\frac{\mid f(n)\mid}{n^\sigma},$$

et $\sum_n f(n)n^{-s}$ converge absolument sur $\sigma>\sigma_a$, pour $\epsilon>0$

$$\sum_{n>P}\frac{\mid f(n)\mid}{n^\sigma}<\epsilon.$$

Donc, pour $\sigma_a<+\infty$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=\prod_p\left(1+\frac{f(p)}{p^s}+\cdots+\frac{f(p^k)}{p^{ks}}+\cdots\right).$$

Pour $\sigma>\sigma_a$, le produit infini (produit eulérien) converge uniformément sur tout demi-plan $\sigma>\sigma_0>\sigma_a$.
De plus, si $f$ est complètement multiplicative :

$$1+\frac{f(p)}{p^s}+\cdots+\frac{f(p^k)}{p^{ks}}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{f(p)}{p^s}},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

□

# VI Fonction Zêta de Riemann

**Définition 11.** *Pour la fonction arithmétique $f(n) = 1$, on a*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \\ &= \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

*Cette série est appelée la fonction Zêta de Riemann qu'on la note $\zeta(s)$.*

**Proposition 3.** *La fonction Zêta de Riemann est définie pour tout $s \in \mathbb{C}$, tel que : $\Re(s) > 1$.*

*Démonstration.* On a $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mid n^s \mid} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mid n^{\sigma} e^{i \log \tau} \mid} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}\end{aligned}$$

d'après la série de Riemann $\zeta(s)$ est convergente pour $\sigma > 1$. □

**Proposition 4.** *Pour tout nombre premier $p$, la fonction Zêta de Riemann vérifie la relation suivante :*

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \\ &= \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-s}}.\end{aligned}$$

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \\ &= \prod_{p} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1} \\ &= \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-s}}.\end{aligned}$$

□

# VII Formule de Perron

La formule de Perron joue un rôle très important dans l'inversion principale, analogue avec la formule de Cauchy dans la théorie de puissance des séries. Soit

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

la série de Dirichlet avec abscisse de convergence $\sigma_c$ et abscisse de convergence absolue $\sigma_a$.
On prolonge la définition de la fonction $n \longmapsto a_n$, en posant $a_x = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, on définit la fonction sommatoire normalisée par

$$A^*(x) = \sum_{n<x} a_n + \frac{1}{2} a_x \qquad (x \geqslant 0).$$

**Théorème 8.** *(Formule de Perron) Pour $k > \max(0, \sigma_c)$. On a*

$$A^*(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} F(s) x^s s^{-1} \mathrm{d}s \qquad (x > 0), \tag{2.1}$$

*tel que l'intégrale est converge conditionnellement pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ et converge au sens de principe de Cauchy pour $x \in \mathbb{N}$.*

Pour démontrer ce théorème, on utilise le lemme suivant, et on note $h(x)$ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$h(x) = \begin{cases} 1 & (x > 1), \\ \frac{1}{2} & (x = 1), \\ 0 & (0 < x < 1). \end{cases}$$

**lemme 9.** *Pour tout $k, T, T'$ des entiers positive, on a*

1. $\left| h(x) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{k-iT'}^{k+iT} x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} \right| \leq \frac{x^k}{2\pi |\log x|} \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) \qquad (x \neq 1),$

2. $\left| h(1) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{k-iT}^{k+iT} \frac{\mathrm{d}s}{s} \right| \leq \frac{k}{T+k} \qquad (x = 1).$

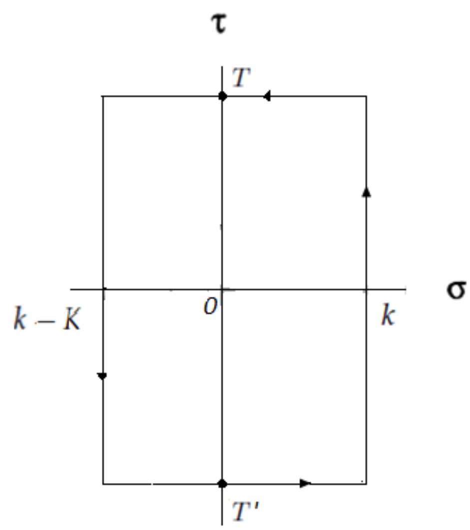


FIGURE 2.1

*Démonstration.* On commence par le cas $x \neq 1$.
cas 1 : $x > 1$
Soit $K$ un entier strictement supérieur à $k$ et $\mathcal{R}_K$ designer le rectangle de sommets $k - iT'$, $k + iT$, $k - K + iT$, $k - K - iT'$ qui entoure le pôle $s = 0$, et $\mid s \mid$ sur les côtés horizontaux $[k + iT,\ k - K + iT]$ ainsi que $[k - K - iT',\ k - iT']$ est suffisamment grand à $T$. Par le théorème des résidus nous pouvons écrire

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{R}_K} x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} = \sum_{1 \leq j \leq n} \text{Rés}(f, s_j).$$

On a un seul pôle c'est le 0, Alors
$\text{Rés}(f, s_1) = \lim\limits_{s \longrightarrow 0} (s - 0) \frac{x^s}{s} = 1,$
donc

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{R}_k} x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} = 1 = h(x).$$

Donc :

$$\frac{1}{2\pi i} \left( \int\limits_{k-iT'}^{k+iT} x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} + \int\limits_{k+iT}^{k-K+iT} x^s \frac{ds}{s} + \int\limits_{k-K+iT}^{k-K-iT'} x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} + \int\limits_{k-K-iT'}^{k-iT'} x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} \right) = h(x),$$

c'est à dire :

$$h(x) - \frac{1}{2\pi i}\int_{k-iT'}^{k+iT} x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{k+iT}^{k-K+iT} x^s \frac{ds}{s} + \int_{k-K+iT}^{k-K-iT'} x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} + \int_{k-K-iT'}^{k-iT'} x^s \frac{\mathrm{d}s}{s}\right).$$

On majore les intégrales comme suite :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{k+iT}^{k-K+iT} x^s \frac{\mathrm{d}s}{s}\right| &\leq \left|\int_{k}^{k-K} x^{\sigma+iT}\frac{1}{\sigma+iT}\mathrm{d}s\right| \\
&\leq \int_{k-K}^{k} \mid x^{\sigma+iT} \mid \frac{1}{\mid \sigma+iT \mid}\mathrm{d}\sigma \\
&\leq \frac{1}{T}\int_{k-K}^{k} x^{\sigma}\mathrm{d}\sigma \\
&\leq \frac{1}{T\mid \log x \mid} x^k(1-x^{-K}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_{k-K-iT'}^{k-iT'} x^s \frac{\mathrm{d}s}{s}\right| &\leq \int_{k-K}^{k} \mid x^{\sigma+iT'} \mid \frac{1}{\mid \sigma+iT' \mid}\mathrm{d}\sigma \\
&\leq \frac{1}{T'}\int_{k-K}^{k} x^{\sigma}\mathrm{d}\sigma \\
&\leq \frac{1}{T'\mid \log x \mid} x^k(1-x^{-K}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_{k-K+iT}^{k-K-iT'} x^s \frac{\mathrm{d}s}{s}\right| &\leq \int_{-T'}^{T} \mid x^{k-K+i\tau} \mid \frac{1}{\mid k-K+i\tau \mid}\,\mathrm{d}\tau \\
&\leq \int_{-T'}^{T} x^{k-K}\frac{1}{K-k}\,\mathrm{d}\tau \\
&\leq \frac{x^{k-K}}{K-k}(T+T').
\end{aligned}$$

On remplace ses valeurs, c'est-à-dire :
$\mid h(x) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{k-iT'}^{k+iT} x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} \mid \leq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{T \log x} x^k (1 - x^{-K}) + \frac{1}{T' \log x} x^k (1 - x^{-K}) + \frac{x^{k-K}}{K-k} (T + T') \right),$
lorsque $K \longrightarrow +\infty$, on obtient

$$\left| h(x) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{k-iT'}^{k+iT} x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{T \mid \log x \mid} x^k + \frac{1}{T' \mid \log x \mid} x^k \right)$$
$$\leq \frac{x^k}{2\pi \mid \log x \mid} \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right).$$

cas 2 : $0 < x < 1$
Peuvent traitées de façon symétrique, en appliquant le même argument, et on remplace $K$ par $-K$, aussi $h(x) = 0$ car le rectangle n'entoure pas le pôle $s$. Donc

$$\mid \int\limits_{k-iT'}^{k+iT} x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} \mid \leq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{T \log x} x^k (1 - x^K) + \frac{1}{T' \log x} x^k (1 - x^K) + \frac{x^{k+K}}{k+K} (T + T') \right),$$

pour $K \longrightarrow +\infty$, on se trouve

$$\left| \int\limits_{k-iT'}^{k+iT} x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} \right| \leq \frac{x^k}{2\pi \mid \log x \mid} \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right).$$

D'où le résultat. cas : $x = 1$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{k-iT'}^{k+iT} s^{-1} \, \mathrm{d}s &= \frac{1}{2\pi i} [\log s]_{k-iT'}^{k+iT} = \frac{1}{2\pi i} [\log \mid s \mid + i \arg s]_{k-iT'}^{k+iT} \\
&= \frac{1}{2\pi i} [\log \mid k + iT \mid + i \arg(k + iT) - \log \mid k - iT' \mid - i \arg(k - iT')] \\
&= \frac{1}{2\pi} [\arg(k + iT) - \arg(k - iT')] \\
&= \frac{1}{2\pi} [2\theta] \qquad (\theta = \arctan(T/k)) \\
&= \frac{1}{\pi} \arctan \frac{T}{k}
\end{aligned}$$

donc pour $y \geq 0$, $y = \frac{T}{k}$

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan\frac{T}{k}\right| &\leq \left|\frac{\pi}{2} - \arctan y\right| \\ &= \int_y^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ &\leq \frac{2}{1+y}.\end{aligned}$$

□

## VIII Preuve de formule de Perron

D'abord, on suppose que $k > \sigma_a$. Alors la série $F(s)$ est absolument et uniformément convergente pour $\sigma = k$, par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{k-iT'}^{k+iT} F(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s &= \frac{1}{2\pi i}\int_{k-iT'}^{k+iT}\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{k-iT'}^{k+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{\mathrm{d}s}{s}.\end{aligned}$$

On applique la partie $(1)$ du lemme (9) pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{k-iT'}^{k+iT} F(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s - A^*(x)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{k-iT'}^{k+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{\mathrm{d}s}{s} - A^*(x)\right| \\ &\leq \frac{x^k}{2\pi}\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mid a_n \mid}{\mid n \mid^k \log(x/n)}.\end{aligned}$$

Puisque le facteur $\mid \log(x/n) \mid$ est indépendant de $n$, nous obtenons la première affirmation du théorème en permettant à $T$ et à $T'$ de tendre indépendant à $\infty$. La deuxième affirmation est prouvée que plus ou moins de la même façon : elle suffit à la correspondance au $n = x$ par $k \mid a_x \mid /(T+k)$.

On suppose maintenant $\sigma_c < k \leq \sigma_a$. Par théorème (5), on a $k+1 > \sigma_a$. On considère l'intégrale

$$I = \int_{\mathcal{R}} F(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s,$$

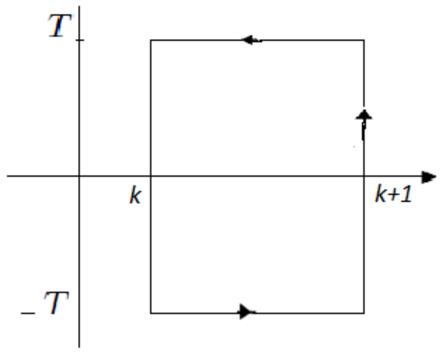


FIGURE 2.2

où $\mathcal{R}$ est le rectangle constitué par les lignes $\sigma = k,\ \tau = T,\ \sigma = k+1$ et $\tau = -T$.

D'après le théorème $[II.1.15]$ (voir [10]), pour $\sigma_0 > \sigma_c$ et $\epsilon > 0$,

$$F(s) \ll \mid \tau \mid^{1-(\sigma-\sigma_0)+\epsilon} \qquad (\mid \tau \mid \geq 1),$$

on a

$$\begin{aligned} F(s)x^s s^{-1} &\ll \mid \tau \mid^{1-(\sigma-\sigma_0)+\epsilon} x^s s^{-1} & (\mid \tau \mid \geq 1) \\ &\ll \tau^{-(\sigma-\sigma_0)+\epsilon} x^\sigma & (s \in \mathcal{R},\ \mid \tau \mid \geq 1). \end{aligned}$$

Par théorème des résidus, l'intégrale $I$ est nulle et on écrit

$$I = \left( \int\limits_{k+1+iT}^{k+iT} + \int\limits_{k+iT}^{k-iT} + \int\limits_{k-iT}^{k+1+iT} + \int\limits_{k+1-iT}^{k+1+iT} \right) F(s)x^s s^{-1} \mathrm{d}s = 0.$$

On calcul l'intégrale sur $[k+1+iT,\ k+iT]$ :

$$\begin{aligned} \int\limits_{k+1+iT}^{k+iT} F(s)x^s s^{-1} \mathrm{d}s &\ll \int\limits_{k+1+iT}^{k+iT} \tau^{-(\sigma-\sigma_c)+\epsilon} x^\sigma \mathrm{d}\sigma \\ &\ll \int\limits_{k+1}^{k} T^{-(\sigma-\sigma_c)+\epsilon} x^\sigma \mathrm{d}\sigma \longrightarrow 0 \ \text{ quand } \ T \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

On fait les même étapes sur $(k - iT,\ k + 1 - iT)$.
Par conséquent,

$$\int_{k+iT}^{k-iT} F(s) x^s s^{-1} \mathrm{d}s = \int_{k+1-iT}^{k+1+iT} F(s) x^s s^{-1} \mathrm{d}s.$$

**Théorème 10.** *(Première Formule de Perron) [10] Pour $k > \max(0, \sigma_a), T \geq 1$ et $x \geq 1$, on a*

$$A(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-iT}^{k+iT} F(s) \frac{\mathrm{d}s}{s} + O\left( x^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mid a_n \mid}{n^k (1 + T \mid \log(x/n) \mid)} \right).$$

**Corollaire 11.** *(Deuxième formule de Perron) [10] Soit $F(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ série de Dirichlet avec abscisse de convergence absolue $\sigma_a$.*
*On suppose qu'il existe un certain nombre réel $\alpha \geq 0$ tels que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid n^{-\sigma} \ll (\sigma - \sigma_a)^{-\alpha} \qquad (\sigma > \sigma_a),$$

*et que $B$ une fonction non décroissante satisfaisant*

$$\mid a_n \mid \leq B(n) \qquad (n \geq 1).$$

*Alors pour $x \geq 2,\ T \geq 2,\ \sigma \leq \sigma_a$ et $k = \sigma_a - \sigma + 1/\log x$, on a*

$$\sum_{n \leq x} \frac{a_n}{n^s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-iT}^{k+iT} F(s+w) x^w \frac{\mathrm{d}w}{w} \quad + O\left( x^{\sigma_a - \sigma} \frac{(\log x)^{\alpha}}{T} + \frac{B(2x)}{x^{\sigma}} \left( 1 + x \frac{\log T}{T} \right) \right).$$

**Théorème 12.** *[10] Pour $k > \max(0, \sigma_c)$ et $x \geq 1$, on a*

$$\sum_{n \leq x} a_n \log(x/n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} F(s) x^s \frac{\mathrm{d}s}{s^2},$$

*et*

$$\int_0^x A(t) \mathrm{dt} = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} F(s) x^{s+1} \frac{\mathrm{d}s}{s(s+1)}.$$

# Chapitre 3

# Méthode de Selberg-Delange

Avant d'annoncer le résultat principale qui décrit la méthode de Selberg-Delange, on donne quelque théorème essentiels.

**Théorème 13.** *[7] Il existe une constante positive c telle que $\zeta(s)$ ne s'annule pas dans la région du plan définie par*

$$\sigma \geq 1 - c/\log(2+ \mid \tau \mid).$$

**Théorème 14.** *[10] Il existe une constante positive c, pour $\mid \tau \mid \geq 3$ et $\sigma \geq 1 - c/\log \mid \tau \mid$, on a*

$$\begin{aligned} \zeta'(s)/\zeta(s) &\ll \log \mid \tau \mid, \\ 1/\zeta(s) &\ll \log \mid \tau \mid, \\ \mid \log \zeta(s) \mid &\leq \log_2 \mid \tau \mid + O(1). \end{aligned}$$

## I puissances complexes de $\zeta(s)$

Le théorème que l'on va introduire permet d'obtenir une formule asymptotique pour la fonction sommatoire associée à une série de Dirichlet de la forme

$$F(s) = G(s,z)\zeta(s)^z \qquad (z \in \mathbb{C}) \tag{3.1}$$

pour $\sigma > 1$, où $G(s,z)$ vérifie certaine propriétés de régularité et de croissance lente au voisinage de $\sigma = 1$ précisées plus loin.
On introduit la fonction

$$Z(s,z) = s^{-1}((s-1)\zeta(s))^z, \tag{3.2}$$

qui joue un rôle spéciale, elle définie sur n'importe quel domaine simplement connexe qui n'est pas un zéro de $\zeta(s)$. On suppose que toujours ce domaine comprend le demi droite réel $[1,+\infty[$ , on peut alors choisir la valeur principale du logarithme complexe, de sorte que $Z(1,z)=1$.

**Théorème 15.** *[10] la fonction $Z(s,z)$ est holomorphe dans le disque $\mid s-1\mid<1$, et*

$$Z(s,z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\gamma_j(z)(s-1)^j, \tag{3.3}$$

*tells que $\gamma_j(z)$ sont des fonctions entières de z, pour tout $A>0$ et $\epsilon>0$,*

$$\frac{1}{j!}\gamma_j(z)\ll_{A,\epsilon}(1+\epsilon)^j \qquad (\mid z\mid\leq A). \tag{3.4}$$

On note par $\mathcal{D}$ le domaine qui défini par

$$\sigma\geq 1-\frac{c}{\log(\mid\tau\mid+1)} \qquad \sigma\notin\left]1-c,1\right]. \tag{3.5}$$

et $cc$ une constante positive. telle que

$$\zeta(s)^z=sZ(s,z)(s-1)^{-z} \qquad (s\in\mathcal{D}), \tag{3.6}$$

où $Z(s,z)$ est la partie "régulière" de $\zeta(s)^z$ au voisinage de 1. Par ailleurs, la majoration $\mid\log\zeta(s)\mid\leq\log_2\mid\tau\mid+O(1)$ donnée par théorème (14), pour $A>0$,

$$\zeta(s)^z\ll_A(1+\log^+\mid\tau\mid)^A \qquad (\mid z\mid\leq A,\ s\in\mathcal{D},\ \mid s-1\mid\gg 1). \tag{3.7}$$

# II Formule de Hankel

**Définition 12.** *(Contour de Hankel) Soit r un réel positif, on appelle contour de Hankel le chemin formé du cercle $\mid s\mid=r$ à l'exclusion du point $-r$ et de la demi-droite $]-\infty,-r]$ tracée deux fois, avec arguments respectifs $\pi$ et $-\pi$.*

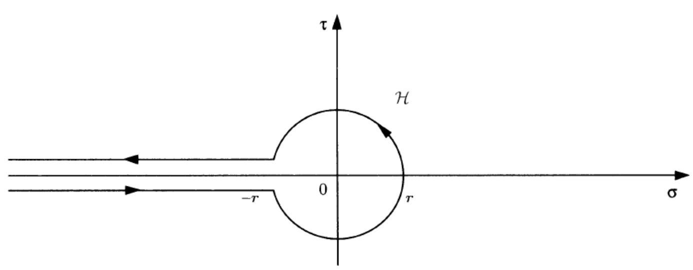


FIGURE 3.1 – *Contour de Hankel*

**Théorème 16.** *(Formule de Hankel) Soit $\mathcal{H}$ un contour de Hankel, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{H}} s^{-z} e^s \mathrm{d}s. \tag{3.8}$$

*Démonstration.* L'intégrale est absolument et uniformément convergente sur tout compact de $\mathbb{C}$, et définit une fonction entière de $z$, par le théorème des résidus, est indépendante de $r$, puisque la singularité unique de la fonction à intégrer à $s = 0$. et lorsque $\Re(z) < 1$, l'intégrale est entoure le cercle $\mid s \mid = r$.
Pour $s \in \mathbb{C}$, on a
$s^{-z} = e^{-z \log s} = e^{-z(\log|s| + i \arg s)}$. Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{H}} s^{-z} e^s \mathrm{d}s &= \frac{1}{2\pi i} \left( \int\limits_{-\infty}^{-r} s^{-z} e^s \mathrm{d}s + \int\limits_{-r}^{-\infty} s^{-z} e^s \mathrm{d}s + \int\limits_{\pi}^{-\pi} s^{-z} e^s \mathrm{d}s \right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left( \int\limits_{-\infty}^{-r} e^{-z(\log|s| + i\arg s)} e^s \mathrm{d}s + \int\limits_{-r}^{-\infty} e^{-z(\log|s| + i\arg s)} e^s \mathrm{d}s + \int\limits_{\pi}^{-\pi} r^{-z} e^{re^{i\theta}} \mathrm{d}\theta \right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left( \int\limits_{-\infty}^{-r} \mid s \mid^{-z} e^{-iz\arg s} e^s \mathrm{d}s + \int\limits_{-r}^{-\infty} \mid s \mid^{-z} e^{-iz\arg s} e^s \mathrm{d}s + \int\limits_{\pi}^{-\pi} r^{-z} e^{re^{i\theta}} \mathrm{d}\theta \right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{-r} \sigma^{-z} (e^{-i\pi z} + e^{i\pi z}) e^{-\sigma} \mathrm{d}\sigma + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\pi}^{-\pi} r^{-z} e^{re^{i\theta}} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{r}^{\infty} (e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}) \sigma^{-z} e^{-\sigma} \mathrm{d}\sigma + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\pi}^{-\pi} r^{-z} e^{re^{i\theta}} \mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

Lorsque $\Re(z) < 1$, et $r$ tend vers 0, on obtient

$$\frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2\pi i} \int\limits_{0}^{\infty} \sigma^{-z} e^{-\sigma} \mathrm{d}\sigma = \frac{\sin \pi z}{\pi} \Gamma(1 - z) = \frac{1}{\Gamma(z)}.$$

Et par conséquent pour tout $z$ par le principe du prolongement analytique. □

# III Résultat principal

On donne, maintenant le théorème principale Pour $z \in \mathbb{C}$, $c_0 > 0$, $\delta \in ]0, 1]$ et $M > 0$, on considère $F(s)$ une série de Dirichlet a la propriété $\mathcal{P}(z, c_0, \delta, M)$ si

$$G(s, z) = F(s) \zeta(s)^{-z}$$

est holomorphe pour

$$\sigma > 1 - c_0/(\log^+ \mid \tau \mid +1),$$

et vérifie dans ce domaine la majoration

$$\mid G(s,z) \mid \leq M(1+ \mid \tau \mid)^{1-\delta}. \tag{3.9}$$

Si $F(s)$ vérifie la propriété $\mathcal{P}(z, c_0, \delta, M)$ et si il existe une suite de nombres réels positifs $\{b_n\}_{n\geq 1}$ telle que $\mid a_n \mid \leq b_n$, et la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$$

vérifie $\mathcal{P}(w, c_0, \delta, M)$ pour $w \in \mathbb{C}$, alors on dit que $F(s)$ est de type $\mathcal{T}(z, w, c_0, \delta, M)$, donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} = G_1(s,w)\zeta(s)^w,$$

où $G_1(s,w)$ est holomorphe et majorée par $M(1+ \mid \tau \mid)^{1-\delta}$ sur le domaine $\sigma > 1 - c_0/(\log^+ \mid \tau \mid +1)$.
Dans cet domaine lorsque $G(s,z)$ est holomorphe, on dit que

$$G^{(k)}(s,z) = \frac{d^k}{ds^k} G(s,z). \tag{3.10}$$

**Théorème 17.** *Soit $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ une série de Dirichlet de type $\mathcal{T}(z, w, c_0, \delta, M)$. Pour $x \geq 3$, $N \geq 0$, $\mid z \mid \leq A$ et $\mid w \mid \leq A$, on a*

$$\sum_{n\leq x} a_n = x(\log x)^{z-1} \left\{ \sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda_k(z)}{(\log x)^k} + O(MR_N(x)) \right\} \tag{3.11}$$

*avec*

$$R_N(x) = e^{-c_1\sqrt{\log x}} + \left( \frac{c_2 N + 1}{\log x} \right)^{N+1},$$

*et*

$$\lambda_k(z) = \frac{1}{\Gamma(z-k)} \sum_{h+j=k} \frac{1}{h!j!} G^{(h)}(1,z)\gamma_j(z).$$

*$c_1$, $c_2$ sont des constantes positive, et la constante implicite du symbole $O$ de Landau dépendant au plus de $A$, $c_0$ et $M$.*

*Démonstration.* Soit $c$ une constante positif telle que $c < c_0$ et telle que $\zeta(s)$ ne s'annule pas dans le domaine

$$\sigma \geq 1 - c/(\log^+ \mid \tau \mid +1),$$

et $F(s) = G(s,z)\zeta(s)^z$ se prolonge en une fonction holomorphe sur le domaine $\mathcal{D}$, d'après (3.7) et (3.9), on a

$$\begin{aligned} F(s) &\ll M(1+ \mid \tau \mid)^{1-\delta}(1 + \log^+ \mid \tau \mid)^A \\ &\ll M(1+ \mid \tau \mid)^{1-\delta}(1+ \mid \tau \mid)^{1+\delta/2} \\ &\ll M(1+ \mid \tau \mid)^{1-\delta/2}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

La fonction sommatoire $A(x) = \sum\limits_{n \leq x} a_n$ est liée à $F(s)$ par la formule de Perron suivante :

$$\begin{aligned} \int\limits_0^x A(t)\mathrm{dt} &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{k-i\infty}^{k+i\infty} F(s)x^{s+1} \frac{\mathrm{ds}}{s(s+1)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left( \int\limits_{k-i\infty}^{k-iT} + \int\limits_{k-iT}^{k+iT} + \int\limits_{k+iT}^{k+i\infty} \right) F(s)x^{s+1} \frac{\mathrm{ds}}{s(s+1)} \end{aligned}$$

pour $k = 1 + 1/\log x$.

Introduisons les paramètres $T > 1$ et $r = 1/(2\log x)$. Le théorème de résidus permet de déformer le segment d'intégration $[k - iT, k + iT]$ en un chemin formé du contour de Hankel tronqué noté $\Gamma$, entourant le point $s = 1$, de rayon $r$ et de partie linéaire $[1 - \frac{1}{2}c, 1 - r]$ ; des arcs d'équation

$$\sigma = \sigma(\tau) = 1 - \frac{1}{2}c/(1 + \log^+ \mid \tau \mid)\text{pour } 0 \leq \mid \tau \mid \leq T;$$

et des segments horizontaux $[\sigma(T) + iT, k + iT]$. Lorsque $T > 1$ est un paramètre et $\delta < 1$, on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{k-iT}^{k+iT} A(t)\mathrm{dt} = \frac{1}{2\pi i} \left( \underbrace{\int_{L_1} + \int_{L_4}}_{\text{segments horizontaux}} + \underbrace{\int_{L_2} + \int_{L_3}}_{\text{courbes}} + \underbrace{\int_{\Gamma}}_{\text{contour de Hankel}} \right) F(s) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\mathrm{ds},$$

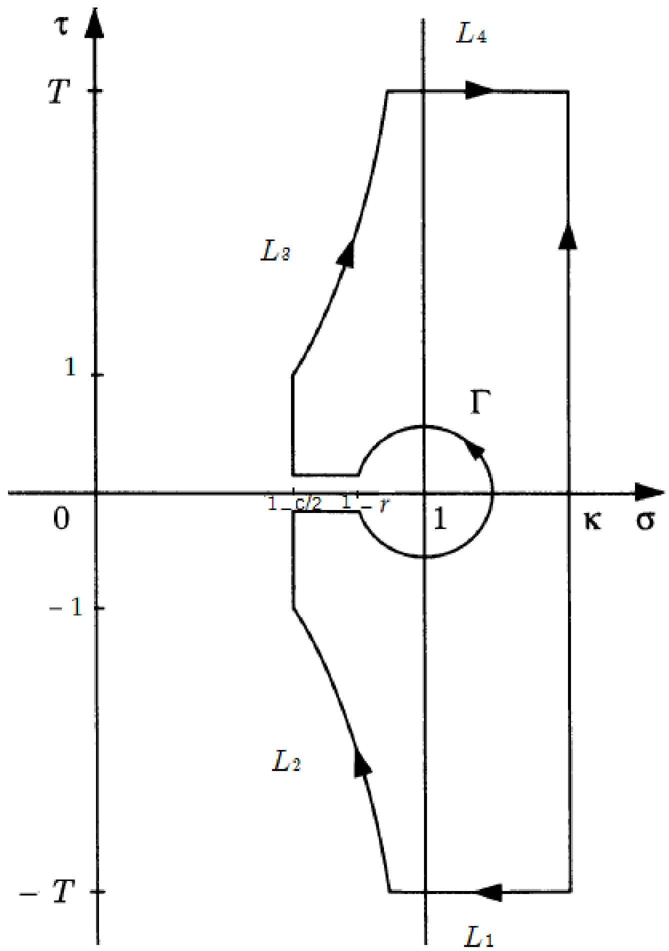


FIGURE 3.2

tels que :

$L_1$ : le segment horizontal $[\sigma(T) - iT, k - iT]$,

$L_2$ : la courbe décrite par $[1 - \frac{1}{2}c, 1 - \frac{1}{2}c - i] \cup \{\sigma_1 = \sigma(\tau) = 1 - \frac{1}{2}c/(1 + \log^+ \mid \tau \mid), T \leq\mid \tau \mid\leq 0\}$,

$L_3$ : la courbe décrite par $[1 - \frac{1}{2}c, 1 - \frac{1}{2}c + i] \cup \{\sigma_2 = \sigma(\tau) = 1 - \frac{1}{2}c(1 + \log^+ \mid \tau \mid),\ 0 \leq\mid \tau \mid\leq T\}$,

$L_4$ : le segment horizontal $[\sigma(T) + iT, k + iT]$,

$\Gamma$ : Le contour de Hankel tronqué $\Gamma$ de centre $s = 1,$ rayon $r = \dfrac{1}{2\log x}$ et de partie linéaire

$[1 - \frac{1}{2}c, 1 - r]$.

Premièrement, on calcule les intégrales sur les demi droites verticales. D'après (3.12), on a

$$\begin{aligned}\left|\int_{k+iT}^{k+i\infty} F(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\mathrm{ds}\right| &\ll \left|\int_{T}^{\infty} M(1+\mid\tau\mid)^{1-\frac{\delta}{2}}\frac{x^{k+i\tau+1}}{(k+i\tau)(k+i\tau+1)}\mathrm{d}\tau\right| \\ &\ll \int_{T}^{\infty} M\tau^{1-\frac{\delta}{2}}\frac{x^{2+\frac{1}{\log x}}}{\tau^2}\mathrm{d}\tau \\ &\ll Mx^2\int_{T}^{\infty}\tau^{1-\frac{\delta}{2}}\tau^{-2}\mathrm{d}\tau \\ &\ll Mx^2T^{-\frac{\delta}{2}}.\end{aligned}$$

Et par symétrie on obtient la même borne pour l'intégrale sur le demie droite verticale $[k-iT, k-i\infty[$. Pour cela

$$\int_0^x A(t)\mathrm{dt} = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-iT}^{k+iT} F(s)x^{s+1}\frac{\mathrm{ds}}{s(s+1)} + O(Mx^2T^{-\frac{\delta}{2}}).$$

Pour les autres intégrales, on commence par le chemin $L_4$ :

$$\begin{aligned}\left|\int_{L_4} F(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\mathrm{ds}\right| &\ll \left|\int_{\sigma(T)}^{k} M(1+\mid\tau\mid)^{1-\frac{\delta}{2}}\frac{x^{\sigma+iT+1}}{(\sigma+iT)(\sigma+iT+1)}\mathrm{d}\sigma\right| \\ &\ll \int_{\sigma(T)}^{k} M(1+\mid\tau\mid)^{1-\frac{\delta}{2}}\frac{x^{\sigma+1}}{\mid\sigma+iT\mid\mid\sigma+iT+1\mid}\mathrm{d}\sigma \\ &\ll MT^{1-\frac{\delta}{2}}T^{-2}\int_{\sigma(T)}^{k} x^{\sigma+1}\mathrm{d}\sigma \\ &\ll MT^{-1-\frac{\delta}{2}}[\frac{1}{\log x}x^{\sigma+1}]_{\sigma(T)}^{k} \\ &\ll MT^{-1-\frac{\delta}{2}}.\end{aligned}$$

Par symétrie on obtient la même borne pour $L_1$.

Pour $L_3$ :

$$\begin{aligned}
\left|\int\limits_{L_3} F(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\mathrm{d}s\right| &\ll \int\limits_0^T M(1+\mid \tau\mid)^{1-\delta/2}\frac{\mid x^{1+\sigma(\tau)+i\tau}\mid}{\mid \sigma(\tau)+i\tau \mid\mid \sigma(\tau)+i\tau+1\mid}\mathrm{d}\tau \\
&+\int\limits_0^1 M(1+\mid \tau\mid)^{1-\delta/2}\frac{\mid x^{2-\frac{1}{2}c+i\tau}\mid}{\mid 1-\frac{1}{2}c+i\tau\mid\mid 2-\frac{1}{2}c+i\tau\mid}\mathrm{d}\tau \\
&\ll Mx^{\sigma(T)+1}\int\limits_0^T \tau^{1-\delta/2}\tau^2\mathrm{d}\tau + Mx^{2-\frac{1}{2}c}\int\limits_0^1 \tau^{1-\delta/2}\tau^2\mathrm{d}\tau \\
&\ll Mx^{\sigma(T)+1}+Mx^2 \\
&\ll M(x^{\sigma(T)+1}+x^2) \\
&\ll Mx^{\sigma(T)+1}.
\end{aligned}$$

Par symétrie on obtient la même borne pour $L_2$. Donc

$$\int\limits_{k-iT}^{k+iT} A(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} F(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\mathrm{d}s + O(Mx^2T^{-\delta/2}+Mx^{1+\sigma(T)}).$$

Qu'on optimise pour $T = e^{\sqrt{((c/\delta)\log x)}} = e^{c_3\sqrt{\log x}}$, pour $x \geq x_0$, on obtient finalement :

$$\int\limits_0^x A(t)\mathrm{d}t = \Phi(x) + O(Mx^2 e^{-c_3\sqrt{\log x}}) \tag{3.13}$$

avec

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} F(s)x^{s+1}\frac{\mathrm{d}s}{s(s+1)}. \tag{3.14}$$

Reste à étudier le terme principale de $\Phi(x)$.
$\Phi(x)$ est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}^+$ en $x$, et on a

$$\Phi'(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} F(s)x^s\frac{\mathrm{d}s}{s},$$

$$\Phi''(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} F(s)x^{s-1}\mathrm{d}s.$$

On fait une étude asymptotique de $\Phi''(x)$, et on commence par $F(s)$. Pour $s \in \Gamma$, on peut écrire

$$F(s) = sG(s,z)Z(s,z)(s-1)^{-z},$$

par (3.3), (3.4) et (3.9) :

$$F(s) \ll M \mid s-1 \mid^{-A}$$

donc et pour $r = 1/(2\log x)$

$$\begin{aligned}
\Phi''(x) &= \frac{1}{2\pi i} F(s) x^{s-1} \mathrm{d}s \\
&\ll \frac{M}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mid s-1 \mid^{-A} x^{s-1} \mathrm{d}s \\
&\ll \frac{M}{2\pi i} (2\log x)^{A} \int_{\Gamma} x^{s-1} \mathrm{d}s \\
&\ll M (\log x)^{A}. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Lorsque $s \in \Gamma$, on obtient par (3.3)

$$G(s,z)Z(s,z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(z)(s-1)^k,$$

avec

$$\begin{aligned}
g_k(z) &= \frac{1}{k!} \sum_{h+j=k} \binom{k}{j} G^{(h)}(1,z)\gamma_j(z) \\
&= \Gamma(z-k)\lambda_k(z).
\end{aligned}$$

De plus, $G(s,z)Z(s,z)$ est holomorphe et $O(M)$ dans le disque $\mid s-1 \mid \leq c$, la formule de Cauchy indique que

$$g_k(z) \ll Mc^{-k}.$$

On observe que $\Gamma$ est contenu dans le disque $\mid s-1 \mid \leq \frac{1}{2}c$, on peut écrire pour $s \in \Gamma$, $N \geq 0$ :

$$G(s,z)Z(s,z) = \sum_{k=0}^{\mathbb{N}} g_k(z)(s-1)^k + O(M(\mid s-1 \mid /c)^{N+1}).$$

Donc

$$\begin{aligned}
F(s) &= G(s,z)Z(s,z)s(s-1)^{-z} \\
&= \sum_{k=0}^{N} g_k(z)(s-1)^k + O(M(\mid s-1 \mid /c)^{N+1})s(s-1)^{-z}.
\end{aligned}$$

On remplace la valeur de $F(s)$ dans $\Phi'(x)$, on obtient :

$$\Phi'(x) = \sum_{k=0}^{N} g_k(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} x^s (s-1)^{k-z} \mathrm{d}s + O(Mc^{-N} R(x)), \tag{3.16}$$

avec

$$\begin{aligned}
R(x) &= \int_{\Gamma} \mid x^s (s-1)^{N+1-z} \mid\mid \mathrm{d}s \mid \\
&= \int_{1-\frac{c}{2}}^{1-r} \mid x^s (s-1)^{N+1-z} \mid\mid \mathrm{d}s \mid + \int_{\pi}^{-\pi} x^s (s-1)^{N+1-z} \mid\mid \mathrm{d}s \mid \\
&\ll \int_{1-\frac{c}{2}}^{1-r} (1-\sigma)^{N+1-\Re(z)} x^{\sigma} \mathrm{d}\sigma + \int_{0}^{r} x^{1+t} t^{N+1-\Re(z)} \mathrm{d}t \\
&\ll \int_{1-\frac{c}{2}}^{1-r} (1-\sigma)^{N+1-\Re(z)} x^{\sigma} \mathrm{d}\sigma + x^{1+r} r^{N+2-\Re(z)} \\
&\ll (\log x)^{\Re(z)-N-2} \int_{1-\frac{c}{2}}^{1-r} [\log x(1-\sigma)]^{N+1-\Re(z)} x^{\sigma} \log x \mathrm{d}\sigma + x((2\log x)^{-1})^{N+2-\Re(z)} \\
&\ll -(\log x)^{\Re(z)-N-2} \int_{\frac{c\log x}{2}}^{r\log x} x^{1-\frac{t}{\log x}} t^{N+1-\Re(z)} \mathrm{d}t + x(2\log x)^{\Re(z)-N-2} \qquad (\log x(1-\sigma) = t) \\
&\ll x(\log x)^{\Re(z)-N-2} \left\{ \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} t^{N+1-\Re(z)} e^{-t} \mathrm{d}t + 2^{-N} \right\} \\
&\ll x(\log x)^{\Re(z)-N-2} \Gamma(N+A+2) \\
&\ll x(\log x)^{z-1} \left( \frac{c_4 N + 1}{\log x} \right)^{N+1}.
\end{aligned}$$

Par le changement de variable :
$w = (s-1)\log x \Rightarrow s = \frac{w}{\log x} + 1$ et $\mathrm{d}s = \frac{1}{\log x} \mathrm{d}w$,

on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} x^{s}(s-1)^{k-z}\mathrm{d}s &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{H}(\frac{1}{2}c\log x)} x^{\frac{w}{\log x}+1}\Big(\frac{w}{\log x}\Big)^{k-z}\frac{1}{\log x}\mathrm{d}w \\
&= \frac{x}{2\pi i}(\log x)^{z-k-1}\int_{\Gamma} e^{w}w^{z-k}\mathrm{d}w \\
&= x(\log x)^{z-k-1}\left\{\frac{1}{\Gamma(z-k)} + O((c_5k+1)^{k}x^{-c/4})\right\}.
\end{aligned}$$

Où

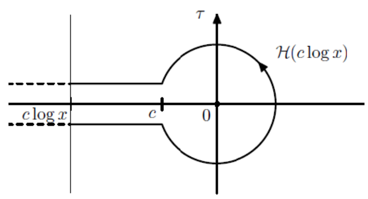


FIGURE 3.3

Le terme principale de (3.16) est

$$x(\log x)^{z-1}\left\{\frac{\lambda_k(z)}{(\log x)^{k}} + O(E_N)\right\},$$

avec

$$\begin{aligned}
E_N &= x^{-c/4}\sum_{k=0}^{N} \mid g_k(z) \mid \left(\frac{c_5k+1}{\log x}\right)^{k} \\
&\ll Mx^{-c/4}c_6^{N}\sum_{k=0}^{N} k!\left(\frac{5}{c\log x}\right)^{k} \\
&\leq Mx^{-c/4}\left(\frac{5c_6}{c\log x}\right)^{N}\sum_{k=0}^{N}\frac{N!}{(N-k)!}\left(\frac{c\log x}{5}\right)^{N-k} \\
&\leq Mx^{-c/20}N!\left(\frac{5c_6}{c\log x}\right)^{N} \\
&\leq \left(\frac{c_7N+1}{\log x}\right)^{N+1}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\Phi'(x) = x(\log x)^{z-1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_k(z)}{(\log x)^k} + O\left(M(\frac{c_8 N+1}{\log x})^{N+1}\right)\right\}.$$

On montre, en utilisant (3.13) et (3.15), que $\Phi'(x)$ est une approximation appropriée, pour $A(x)$, a cet effet, on prend un paramètre $h$ et $x < t < x+h$ tel que

$$\int_x^{x+h} A(t)\mathrm{d}t = A(x) + \int_x^{x+h}(A(t)-A(x))\mathrm{d}t.$$

A partir de (3.13), on obtient pour $0 < h < x/2$,

$$\int_x^{x+h} A(t)\mathrm{d}t = \Phi(x+h) - \Phi(x) + O(Mx^2 e^{-c_3\sqrt{\log x}}). \tag{3.17}$$

La relation (3.14) implique que

$$\begin{aligned}\Phi(x+h)-\Phi(x) &= h\Phi'(x) + h^2\int_0^1 (1-t)\Phi''(x+th)\mathrm{d}t \\ &= \Phi'(x) + O(Mh^2(\log x)^A).\end{aligned} \tag{3.18}$$

Donc on peut écrire

$$\int_x^{x+h} A(t)\mathrm{d}t = h\Phi'(x) + O(Mx^2 e^{-c_3\sqrt{\log x}} + Mh^2(\log x)^A). \tag{3.19}$$

Alors

$$A(x) = \Phi'(x) + O(Mx^2 h^{-1} e^{-c_3\sqrt{\log x}} + Mh(\log x)^A + h^{-1}L), \tag{3.20}$$

avec

$$L = \int_x^{x+h} \mid A(t) - A(x) \mid \mathrm{d}t.$$

C'est ici qu'intervienne l'hypothèse faite sur la série de Dirichlet associé à $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ de la fonction sommatoire $B(t) = \sum_{n\le t} b_n$. En effet on a

$$\begin{aligned}L &\le \int_x^{x+h}(B(t)-B(x))\mathrm{d}t \\ &\le \int_x^{x+h} B(t)\mathrm{d}t - \int_x^{x-h} B(t)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.21}$$

D'après les résultats obtenus, on obtient une fonction $\Phi_1(x)$ satisfaisant (3.18). On remplace $A(t)$ par $B(t)$ et $\Phi$ par $\Phi_1$ telle que $B(t)$ et $\Phi_1(x)$ vérifient (3.19), et l'on a donc

$$L \ll Mh^2(\log x)^A + Mx^2 e^{-c_9\sqrt{\log x}}.$$

On remplace $L$ par son terme erreur dans l'expression (3.20), et on choisit

$$h = xe^{-\frac{1}{2}c_3\sqrt{\log x}},$$

on obtient

$$A(x) = \Phi'(x) + O(Mxe^{-c_{10}\sqrt{\log x}}). \tag{3.22}$$

On remplace la valeur $\Phi'(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} A(x) &= \Phi'(x) + O(Mxe^{-c_{10}\sqrt{\log x}}) \\ &= x(\log x)^{z-1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_k(z)}{(\log x)^k} + O\left(M\left(\frac{c_8 N+1}{\log x}\right)^{N+1}\right)\right\} + O(Mxe^{-c_{10}\sqrt{\log x}}) \\ &= x(\log x)^{z-1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_k(z)}{(\log x)^k} + O(MR_N(x))\right\}. \end{aligned}$$

□

# Chapitre 4

# Une Application de la méthode de Selberg-Delange

Dans ce chapitre, on utilise les résultats de chapitre précédent pour résoudre le problème arithmétique suivant.

## I Les entiers ayant k facteurs premiers

Selberg (1954), a imaginée une autre démonstration du problème suivant :

$$\pi_k(x) = \sharp\{n \leq x \ : \ \omega(n) = k\} \sim \frac{x}{\log x}\frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} \qquad (x \longrightarrow \infty)$$

le nombre des entiers ayant $k$ facteurs premiers, où $\omega(n)$ le nombre de diviseurs premiers distincts de $n$.
Cette démonstration consiste à identifier $\pi_k(x)$ comme le coefficient de $z^k$ dans l'expression

$$\sum_{n\leq x} z^{\omega(n)} \tag{4.1}$$

et appliquer la formule de Cauchy. Pour cela, on considère la série de Dirichlet

$$F_1(s,z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{\omega(n)} n^{-s} = \prod_p \left(1 + \frac{z}{p^s - 1}\right) \qquad (\sigma > 1).$$

Puisque d'après le produit Eulérien on pose $z^{\omega(n)} = f(n)$ donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{\omega(n)} n^{-s} = \prod_p \left(1 + \frac{z^{\omega(p)}}{p^s - 1}\right).$$

Pour $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, $\omega(n) = k$ donc $\omega(p) = 1$ c'est-à-dire $z^{\omega(p)} = z$.
Alors la fonction

$$G_1(s,z) = F_1(s,z)\zeta(s)^{-z} = \prod_p \left(1 + \frac{z}{p^s - 1}\right)\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^z$$

est développable en série de Dirichlet

$$G_1(s,z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{1z}(n) n^{-s},$$

où $b_{1z}(n)$ une fonction multiplicative dont les valeurs sur les puissances des nombres premiers sont déterminés par :

$$1 + \sum_{v=1}^{\infty} b_{1z}(p^v)\xi^v = \left(1 + \frac{\xi z}{1 - \xi}\right)(1 - \xi)^z \qquad (\mid \xi \mid < 1).$$

C'est-à-dire Pour $n = \prod\limits_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, on écrit

$$\begin{aligned}
G_1(s,z) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{1z}(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i})(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i})^{-s} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} b_{1z}(p_i^{\alpha_i}) \prod_{i=1}^{k} (p^{-s})^{\alpha_i} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} b_{1z}(p_i^{\alpha_i})(p^{-s})^{\alpha_i} \\
&= \sum_{v=0}^{\infty} \prod_{p} b_{1z}(p^v)(p^{-s})^v \\
&= \prod_p \left(b_{1z}(1) + \sum_{v=1}^{\infty} \prod_p b_{1z}(p^v)(p^{-s})^v\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\prod_p \left(b_{1z}(1) + \sum_{v=1}^{\infty} \prod_p b_{1z}(p^v)(p^{-s})^v\right) = \prod_p \left(1 + \frac{z}{p^s - 1}\right)\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^z.$$

Pour $b_{1z}(n)$ fonction multiplicative, donc $b_{1z}(1) = 1$ et on obtient

$$1+\sum_{v=1}^{\infty} b_{1z}(p^v).(p^{-s})^v = \left(1+\frac{z}{p^s-1}\right)\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^z,$$

et pour $\xi = p^{-s}$, on écrit :

$$\begin{aligned}1+\sum_{v=1}^{\infty} b_{1z}(p^v)\xi^v &= \left(1+\frac{z}{\frac{1}{\xi}-1}\right)(1-\xi)^z\\ &= \left(1+\frac{\xi z}{1-\xi}\right)(1-\xi)^z.\end{aligned}$$

On a en particulier,

$$b_{1z}(p) = 0, \tag{4.2}$$

et l'inégalité de Cauchy implique pour $\mid z \mid \leq A$

$$\mid b_{1z}(p^v) \mid \leq M.2^{v/2} \qquad (v \geq 2), \tag{4.3}$$

avec

$$M = M(A) = \sup_{\substack{|z|\leq A\\ |\xi|\leq \frac{1}{\sqrt{2}}}} \mid \left(1+\frac{\xi z}{1-\xi}\right)(1-\xi)^z \mid .$$

Le résultat (4.2) et (4.3) montrent que l'on a pour $\sigma > \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}\sum_p \sum_{v=1}^{\infty} \mid b_{1,z}(p^V) \mid p^{-vs} &= \sum_p \left(b_{1z}(p)p^{-\sigma} + \sum_{v=2}^{\infty} \mid b_{1,z}(p^V) \mid p^{-vs}\right)\\ &= \sum_p \sum_{v=2}^{\infty} \mid b_{1,z}(p^V) \mid p^{-vs}\\ &\leq M \sum_p \sum_{v=2}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{p^\sigma}\right)^v\\ &\leq M \sum_p \frac{2}{p^{2\sigma}} \frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{p^\sigma}}\\ &\leq \sum_p \frac{2}{p^{2\sigma}} \frac{p^\sigma}{p^\sigma-\sqrt{2}}\\ &\leq 2M \sum_p \frac{1}{p^\sigma(p^\sigma-\sqrt{2})},\end{aligned}$$

donc

$$\sum_p \sum_{v=1}^{\infty} \mid b_{1,z}(p^V) \mid p^{-vs} \leq cM/(\sigma - \frac{1}{2}),$$

où $c$ es une constante absolue. Par le théorème [1.2][10], on en déduit que $G_1(s,z)$ est absolument convergente pour $\sigma > \frac{1}{2}$ et que l'on a pour $\sigma \geq \frac{3}{4}$

$$G_1(s,z) \ll_A 1.$$

Les hypothèses du théorème (17) sont donc satisfaites et on peut énoncer le résultat suivant.

**Théorème 18.** *Pour toute constante positive $A$, il existe des constantes positives, $c_1 = c_1(A)$ et $c_2 = c_2(A)$, telles que l'on ait uniformément pour $x \geq 3$, $N \geq 0$ et $\mid z \mid \leq A$,*

$$\sum_{n \leq x} z^{\omega(n)} = x(\log x)^{z-1} \left\{ \sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda_k(z)}{(\log x)^k} + O_A(R_N(x)) \right\} \tag{4.4}$$

*avec*

$$R_N(x) = e^{-c_1\sqrt{\log x}} + \left( \frac{c_2 N + 1}{\log x} \right)^{N+1},$$

*et*

$$\lambda_k(z) = \frac{1}{\Gamma(z-k)} \sum_{h+j=k} \frac{1}{h!j!} G_i^{(h)}(1,z) \gamma_j(z),$$

*où les $\gamma_j(z)$ sont les fonctions entières définies au théorème* (15).

**Remarque 1.** *Il est à noter que $\lambda_k(0) = 0$, $\forall k$.*
*Nous écrivons en particulier,*

$$\lambda_0(z) = z\lambda(z), \text{ avec } \lambda(z) = \frac{G_1(1,z)}{\Gamma(z+1)}.$$

# Bibliographie


[1] André Blanchard. *Initiation a la Théorie Analytique des Nombre Premiers*. Dunod paris, 1969.

[2] Hubert Delange. Sur les formules dues à atle selberg. pages 101–111, 1959.

[3] Hubert Delange. Sur les formules de atle selberg. *Acta Arith. 19*, 1971.

[4] Sylvie Benzoni et Francis Filbet. *Cours de Math´ematiques pour la Licence Analyse Complexe*. 07/05/2007.

[5] Gérald Tenenbaum et Michel Mendès France. *Les Nombres Premiers*. Presses Universitaire de France, 1997.

[6] Sébastien Gaboury. *Sur Les Convolutions De Fonctions Arithmétiques. (Mémoire)*. Université Laval, 2007.

[7] Anatoly A. Karatsuba. *Complex Analysis in Number Theory*. CRC Press, Steklove Mathematical Institue Russian Academy of sciences Moscow, Russia, 1995.

[8] M.Tip Easter Phahovibul. *Extensions of the Selberg-Delange method*. 2015.

[9] Atle Selberg. Note on the paper by l. g. sathe. pages 83–87, 1954.

[10] Gérald Tenenbaum. *Introduction to analytic and probabilistic number theory*. press Syndicate de l'universtiy de Cambridge, 1995.