Université de Djilali BOUNAÂMA Khemis Miliana

INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

$/25051993/OQNX5C00.wmf$

PROJET DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention d'un Master en Mathématiques

Spécialité : Analyse Mathématique et Application

THÈME

Sur les fonctions sommatoires

Réalisé par :

Mlle TAIB Oumelkheir

Soutenu publiquement le : 12/juin/2017

Devant le jury :

Mr.	B. Sadaoui	Président.
Mr.	M. Karras	Examinateur.
Mr.	M. Houasni	Examinateur.
Mr.	M.Bouderbala	Encadrant.

Année Universitaire 2016/2017

Résumé

Dans ce mémoire on s'intéresse aux formules sommatoires des fonctions arithmétiques, D'abord on rappelle quelque notions de base : fonctions arithmétiques, fonctions additives, fonctions multiplicatives, convolution de Dirichlet, anneau des fonctions arithmétiques. Ensuite, on détail quelques formules sommatoires (formule sommatoire d'Euler-Mac Laurin, formule sommatoire d'Abel). Aussi on porte son attention à faire une comparaison entre une intégrale et une somme. Finalement, nous présentons quelques applications illustratives qui montrer l'importance de ces formules sommatoires, dans l'étude de comportement asymptotique d'une fonction arithmétique, de plus le rôle de la formule sommatoire d'Abel dans la théorie des nombres.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail fait avec tant de passion et patience :

- A mon père Ahmed pour l'éducation qu'il a su me donner et qui m'a permis avec l'aide de Dieu d'arriver là où je suis.
- A ma mère pour la prière quotidienne.
- A mes sœurs Fatima el Zahra, Fadwa et Sarah.
- A mon frère Larbi pour son soutient dans toutes les conditions.
- A tous mes amis (e).

Remerciements

Je remercie d'abord et avant tout le bon **Dieu** qui m'a donné le courage et la patience pour réaliser ce travail.

Mes premiers remerciements vont à mon encadreur monsieur **Bouderbala Mihoub**, enseignant à la Faculté des Sciences et de la Technologie de l'université Djilali Bounaâma Khemis Miliana d'avoir accepter de diriger mon mémoire. Il m'a guidé durant celui-ci et m'a apporté le soutien nécessaire. De part ses qualités pédagogiques, ses précieux conseils, ses stimulants encouragements et sa disponibilité.

Nous tenons également à remercier messieurs les membres de jury Sadaoui B, Karras M et Houasni M pour l'honneur qu'ils nos ont fait en acceptant de siéger à notre soutenance.

Et je veux remercier aussi tous les étudiants de la promotion 2016/2017 de Math de l'université Djilali Bounaâma Khemis Miliana.

Table des matières

Notations générales

Nous donnons quelques notations qui vont nous aider dans la suite de notre travail.

1. $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers ($\mathbb{N}^*$ désigne les entiers naturels non nuls).
2. $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
3. $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres ralatifs.
4. $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
5. $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
6. La lettre p désigne un nombre premier.
7. Pour deux entiers $n > 0$ et $m > 0$ on utilise les notations :

- (n, m) désigne le $pgcd(n, m)$.
- $m \mid n$ signifie m divise n.
- $m \nmid n$ signifie m ne divise pas n (m, n sont des entiers non nuls).
- $p^\alpha \| n$ signifie $p^\alpha \mid n$ et $p^{\alpha+1} \nmid n$.
- Pour deux entiers n et k tels que $0 \leq k \leq n$ on note

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

8. Les deux symboles $\sum_{p|x}$ et $\prod_{p|x}$ représentent respectivement une somme et un produit étendus à tous les nombres premiers qui divisent x.
9. Les deux symboles $\sum_{p\leq x}$ et $\prod_{p\leq x}$ représentent respectivement une somme et un produit étendus à tous les nombres premiers inferieur à x.

10. Pour tout nombre réel x on désigne

    - $[x]$ la partie entière de x qui est l'unique nombre entier k vérifiant $x - 1 < k \leq x$.
    - $\{x\}$ la partie fractionnaire de x, $\{x\} = x - [x]$ $(0 \leq \{x\} < 1)$.

11. $f(x) = \mathrm{O}(g(x))$ ($f(x)$ est un grand O de $g(x)$) s'il existe un constante $M > 0$ telle que $|f(x)| \leq M\,|g(x)|$.

12. $f(x) \sim g(x)$ quand $(x \to \infty)$ signifie $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Introduction

Les fonctions arithmétiques jouent un rôle fondamental en théorie des nombres. Mais elles sont très souvent mal connues dans ce domaine, et possèdent un comportement qui semble irrégulière et sans cohérence. Malgré les recherches assez développés dans ce domaine, les chercheurs coïncident toujours avec certains problèmes surtout au niveau de la sommation des valeurs d'une fonction arithmétique, Exceptionnellement si les valeurs de la fonction arithmétique sont liées par les nombres premiers (Eclude, 300 avant J.-C) qui sont connu par leur croissance illimitée et sa distribution irrégulière. La théorie analytique des nombres est passée par une grande évolution scientifique dans les $19-20^{\text{ème}}$ siècles, parmi les grandes découvertes fondamentales des chercheurs on voit par exemple la formule sommatoire d'Abel et son rôle dans la démonstration du théorème des nombres premiers, aussi la formule sommatoire d'Euler-Mac Laurin qui est basée d'une manière essentielle sur les polynômes de Bernoulli même l'utilisation d'intégrale pour comparer les sommes.

Ce mémoire repose sur trois chapitres, dans le premier chapitre on rappelle les grands notions de base comme les fonctions arithmétiques multiplicatives et additives, produit de convolution et stricture de l'anneau des fonctions arithmétiques et la définition de la fonction sommatoire et la fonction sommatoire lissée.

Ensuite on a étudié dans le deuxième chapitre quelques méthodes pour calculer l'expression de la fonction sommatoire d'une fonction arithmétique, (la formule sommatoire d'Abel, la formule sommatoire d'Euler-Mac Laurin et l'approximation par une intégrale).

Finalement le troisième chapitre est consacré aux applications : Une première application sur la formule sommatoire de Mac Laurin qui constitue à déterminé la formule asymptotique de la somme $\displaystyle\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}$, une deuxième application sur la formule sommatoire d'Abel constitue à déterminé l'équivalence $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\ln x}$.

Chapitre 1

Définitions et généralités sur les fonctions arithmétiques

Dans ce chapitre, on regroupes quelques notions qui seront nécessaires pour la suite.

1.1 Fonctions arithmétiques

Définition 1 *On appelle fonction arithmétique, toute application f définie de $\mathbb{N}^*$ dans le corps $\mathbb{C}$.*

Remarque 1 *L'ensemble des fonctions arithmétiques sera noté par $\mathcal{A}$.*

1.2 Fonctions arithmétiques additives et complètement additives

Fonctions arithmétiques additives

Définition 2 *Une fonction arithmétique f est dite additive si et seulement si elle vérifie :*

$$\begin{cases} f(1) = 0, \\ et \\ f(nm) = f(n) + f(m) \qquad (n, m) = 1. \end{cases}$$

Exemple 1 *Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $\omega(n)$ qui définie par :*

$$\omega(n) = \sum_{p|n} 1.$$

Elle associée à un entier naturel non nul le nombre total des nombres premiers distincts qui divisent n.

Quelques valeurs de la fonction $\omega(n)$

n	1	12	13	14	25	26	27	28	29	30	31	2000
$\omega(n)$	0	2	1	2	1	2	1	2	1	3	1	2

Proposition 1 *La fonction $\omega(n)$ est une fonction additive.*

Preuve Soient n, $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$$

et

$$m = p_1'^{\beta_1} p_2'^{\beta_2} ... p_r'^{\beta_r},$$

$$nm = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k} p_1'^{\beta_1} p_2'^{\beta_2} ... p_r'^{\beta_r},$$

comme $(n, m) = 1$ alors, $p_i \neq p_j' \quad \forall\ i = 1...k$ et $\forall\ j = 1...r$.

D'une part on a

$$\omega(nm) = r + k,$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \omega(n) + \omega(m) &= \sum_{p|n} 1 + \sum_{p|m} 1 \\ &= r + k. \end{aligned}$$

D'où

$$\omega(nm) = \omega(n) + \omega(m).$$

■

Fonctions arithmétiques complètement additives

Définition 3 *Une fonction arithmétique f est dite complètement additive si et seulement si :*

$$\begin{cases} f(1) = 0, \\ \text{et} \\ \forall\ n,\ m \in \mathbb{N},\ f(nm) = f(n) + f(m). \end{cases}$$

Exemple 2 *Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $\Omega(n)$ qui définie par :*

$$\Omega(n) = \sum_{p^{\alpha} \| n} \alpha.$$

Elle associée à un entier naturel non nul n avec la répétition des facteurs premiers de n.

Quelques valeurs de la fonction $\Omega(n)$

n	1	2	3	4	8	26	27	28	29	30	31	2000
$\Omega(n)$	0	1	1	2	3	2	3	3	1	3	1	7

La fonction $\Omega(n)$ n'est pas complètement additive. Car d'après l'exemple suivant on voit que :

$$\Omega(4) = 2 \text{ et } \Omega(8) = 3 \text{ avec } (4, 8) \neq 1,$$

$$\Omega(4) + \Omega(8) = 4,$$

mais

$$\Omega(4 \times 8) = \Omega\left(2^5\right) = 5.$$

Alors

$$\Omega(4) + \Omega(8) \neq \Omega(4 \times 8).$$

1.3 Fonctions arithmétiques multiplicatives et complètements multiplicatives

Fonctions arithmétiques multiplicatives

Définition 4 *Une fonction arithmétique f est dite multiplicative si et seulement si :*

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ et \\ f(nm) = f(n)f(m) \quad (n,\ m) = 1. \end{cases}$$

Exemple 3 *La fonction indicatrice d'Euler qui est définie pour tout entier n par :*

$$\varphi(n) = card\{m \in \mathbb{N}^*/m \leq n \text{ et } (m, n) = 1\}.$$

Quelques valeurs de la fonction $\varphi(n)$

n	1	2	4	5	6	7	8	9	10	15	20	2000
$\varphi(n)$	1	1	2	4	2	6	4	6	4	8	8	800

Fonctions arithmétiques complètement multiplicatives

Définition 5 *Une fonction arithmétique f est dite complètement multiplicative si et seulement si :*

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ et \\ \forall\ n,\ m \in \mathbb{N}, \quad f(nm) = f(n)f(m). \end{cases}$$

Exemple 4 *La fonction Identité est définie pour tout $n \geq 1$ par :*

$$Id(n) = n.$$

Remarque 2 *L'ensemble des fonctions arithmétiques multiplicative désormé sera noté par $\mathcal{M}$.*

1.4 Quelques fonctions arithmétiques

La fonction $\tau(n)$

Définition 6 *Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction nombre de diviseurs $\tau(n)$ est définie par :*

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1.$$

Quelques valeurs de la fonction $\tau(n)$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	25	2000
$\tau(n)$	2	2	3	2	4	2	4	3	4	6	3	20

La fonction $\beta(n)$

Définition 7 *Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction produit des exposants $\beta(n)$ est définie par :*

$$\beta(n) = \prod_{p^\alpha \| n} \alpha.$$

Quelques valeurs de la fonction $\beta(n)$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	25	72
$\beta(n)$	1	1	2	1	1	1	3	2	1	2	2	6

La fonction noyau $\lambda(n)$

Définition 8 *Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction noyau qu'est notée par $\lambda(n)$ est définie par :*

$$\lambda(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 1, \\ \prod_{p|n} p & \text{pour } n \geq 2. \end{cases}$$

Quelques valeurs de la fonction $\lambda(n)$

n	1	2	4	5	6	7	8	9	10	20	25	2000
$\lambda(n)$	1	2	2	1	6	7	2	3	10	10	5	10

La fonction de Möbius $\mu(n)$

Définition 9 *Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction de Möbius est notée par $\mu(n)$ est définie par :*

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ (-1)^r & \text{si } n = p_1 \cdots p_r,\ r \geq 1 \text{ et les } p_i \text{ premiers distincts}, \\ 0 & \text{ailleur}. \end{cases}$$

Quelques valeurs de la fonction de Möbius

n	1	2	4	5	6	7	8	9	10	20	30	2000
$\mu(n)$	1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1	0	-1	0

La fonction puissance

Définition 10 *On appelle la fonction puissance f_s qui est définie par :*

$$f_s(n) = n^s \quad \text{où } s \in \mathbb{C}.$$

La fonction Unitée $(s = 0)$ *Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction unitée notée par $U(n)$ est définie par :*

$$U(n) = 1,\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

La fonction Identitée $(s = 1)$

$$Id(n) = n,\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

La fonction diviseurs σ_s

Définition 11 *La fonction diviseurs σ_s où $s \in \mathbb{C}$, c'est une fonction liée aux diviseurs de n*

$$\sigma_s : n \mapsto \sigma_s(n) = \sum_{d|n} d^s = \sum_{d|n} f_s(d) \qquad (\sigma_s(1) = 1\ \forall\ s \in \mathbb{C}).$$

Pour tout nombre premier p et tout $a \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sigma_s\left(p^a\right) = 1 + p^s + p^{2s} + \cdots + p^{as} = \begin{cases} \dfrac{p^{s(a+1)} - 1}{p^s - 1} & si\ s \neq 0, \\ a + 1 & si\ s = 0. \end{cases}$$

En particulier pour $s = 1$, la fonction σ_1 est notée par σ

$$\sigma(n) = \sum_{d \mid n} d \qquad (la\ somme\ des\ diviseurs\ de\ n),$$

et l'on a, pour tout nombre premier p et tout $a \in \mathbb{N}^*$,

$$\sigma\left(p^a\right) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^a = \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1}.$$

La fonction de Dirac

Définition 12 *Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction de Dirac en 1 notée par δ_1 est définie par :*

$$\delta_1(n) = \begin{cases} 1 & si\ n = 1, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

La fonction $1_{\mathcal{P}}$

Définition 13 *Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction caractéristique de l'ensemble des nombres premiers notée par $1_{\mathcal{P}}$ est définie par :*

$$1_{\mathcal{P}}(n) = \begin{cases} 1 & si\ n \in \mathcal{P}, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

La fonction $1_{\mathcal{P}}$ pondérée par ln

$$(\ln 1_{\mathcal{P}})(n) = \ln(n) 1_{\mathcal{P}}(n).$$

La fonction Von Mangoldt

Définition 14 *Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction de Von Mangoldt note par $\Lambda(n)$ est définie par :*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & si\ n = p^\alpha \quad avec\ \alpha \geq 1, \\ 0 & ailleur. \end{cases}$$

Quelques valeurs de la fonction Von Mangoldt

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\Lambda(n)$	0	$\ln 2$	$\ln 3$	$\ln 2$	$\ln 5$	0	$\ln 7$	$\ln 2$	$\ln 3$	0	$\ln 11$	0

Proposition 2 *La fonction de Von Mangoldt n'est pas additive et n'est pas multiplicative.*

Preuve Comme

$$\Lambda(1) = 0,$$

alors la fonction de Von Mangoldt n'est pas multiplicative.

Montrons que $\Lambda(n)$ n'est pas additive. On a

$$\begin{aligned}\Lambda(8) &= \ln 2,\\ \Lambda(9) &= \ln 3,\\ \Lambda(8.9) &= 0,\end{aligned}$$

comme

$$\Lambda(8.9) \neq \Lambda(8) + \Lambda(9).$$

Alors, la fonction $\Lambda(n)$ n'est pas additive. ■

La fonction de Von Mangoldt généralisée

Définition 15 *Pour tout entier* $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$, *et pour* $k \in \mathbb{N}$, *la fonction de Von Mongoldt généralisée est définie par :*

$$\Lambda_k(n) = \sum_{d \backslash n} \mu(d) \ln^k(\frac{n}{d}).$$

Quelque valeurs de la fonction Λ_k

$$\begin{aligned}\Lambda_2(1) &= 0,\\ \Lambda_2(4) &= \ln^2(4) - \ln^2(2),\\ \Lambda_3(1) &= 0,\\ \Lambda_3(4) &= \ln^3(4) - \ln^3(2),\\ \Lambda_3(20) &= -\ln^3(10) - \ln^3(4).\end{aligned}$$

La fonction $\pi\,(n)$

Définition 16 *La fonction qui compte les nombres premiers inférieurs ou égale à* n, *est notée par* $\pi\,(n)$

$$\pi\,(n) = \begin{cases} \sum_{p \leq n} 1 & pour\ n \geq 2, \\ 0 & pour\ n < 2. \end{cases}$$

Quelques valeurs de la fonction $\pi\,(n)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	50
$\pi\,(n)$	0	1	2	2	3	3	4	4	4	4	5	15

La fonction $\theta(n)$

Définition 17 *La première fonction de Tchébychev est notée par* $\theta(n)$

$$\theta(n) = \begin{cases} \sum\limits_{p \leq n} \ln p & \text{pour } n \geq 2, \\ 0 & \text{pour } n < 2. \end{cases}$$

Quelques valeurs de la fonction $\theta(n)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12
$\theta(n)$	0	$\ln 2$	$\ln 6$	$\ln 6$	$\ln 30$	$\ln 30$	$\ln 210$	$\ln 210$	$\ln 210$	$\ln 3210$	$\ln 3210$

La fonction $\psi(n)$

Définition 18 *La deuxième fonction de Tchébychev est noté par* $\psi(n)$

$$\psi(n) = \begin{cases} \sum\limits_{p^{\alpha} \leq x} \ln p & \text{pour } n \geq 2, \\ 0 & \text{pour } n < 2. \end{cases}$$

Quelques valeurs de la fonction $\psi(n)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12
$\psi(n)$	0	$\ln 2$	$\ln 3$	$\ln 2$	$\ln 5$	$\ln 6$	$\ln 7$	$\ln 2$	$\ln 3$	$\ln 11$	$\ln 6$

Théorème 1 [12] *Soit* f *une fonction arithmétique* $(f \in \mathcal{A})$.

1. *La fonction* f *est multiplicative si et seulement si*

$$f(1) = 1 \text{ et } \forall\ n = \prod_{p^{\alpha} \| n} p^{\alpha} \geq 2, \text{ on a } f(n) = \prod_{p^{\alpha} \| n} f(p^{\alpha}).$$

2. *La fonction* f *est complètement multiplicative si, et seulement si*

$$f(1) = 1 \text{ et } \forall\ n = \prod_{p^{\alpha} \| n} p^{\alpha} \geq 2, \text{ on a } f(n) = \prod_{p^{\alpha} \| n} (f(p))^{\alpha}.$$

3. *Si la fonction* f *est additive alors*

$$f(1) = 0 \text{ et } \forall\ n = \prod_{p^{\alpha} \| n} p^{\alpha} \geq 2, \text{ on a } f(n) = \sum_{p^{\alpha} \| n} f(p^{\alpha}).$$

4. *Si* f *est complètement additive, alors*

$$f(1) = 0 \text{ et } \forall\ n = \prod_{p^{\alpha} \| n} p^{\alpha} \geq 2, \text{ on a } f(n) = \sum_{p^{\alpha} \| n} \alpha f(p).$$

Lemme 1 [12] *Soient n et m deux entiers tels que $(n,m)=1$ et $d \mid nm$, alors d s'écrit d'une manière unique $d=d_1d_2$ telle que $d_1 \mid n$ et $d_2 \mid m$.*

Théorème 2 *Pour toute fonction multiplicative f, la fonction arithmétique définie par*

$$n \mapsto \sum_{d|n} f(d) \qquad (n \in \mathbb{N}^*) \text{ est multiplicative.}$$

Preuve

Comme f multiplicative on pose $h(n) = \sum_{d|n} f(d)$. D'abord on a

$$h(1) = f(1) = 1.$$

Soient $n,\ m \in \mathbb{N}^*$ tels que $(n,\ m) = 1.$ et $d \mid nm$, alors $d = d_1d_2$ avec $d_1 \mid n$ et $d_2 \mid m$

$$\begin{aligned} h(nm) &= \sum_{d_1d_2|nm} f(d_1d_2) \\ &= \sum_{d_1|n, d_2|m} f(d_1)f(d_2) \\ &= \sum_{d_1|n}\sum_{d_2|m} f(d_1)f(d_2) \\ &= \sum_{d_1|n} f(d_1) \sum_{d_2|m} f(d_2), \end{aligned}$$

d'où

$$h(nm) = h(n) \times h(m).$$

■

1.5 Produit de convolution

Définition 19 *Soient f et g deux fonctions arithmétiques.*
La somme, le produit et la quotient de deux fonctions arithmétiques f et g sont définie par :

$$\begin{aligned} &(f+g)(n) = f(n) + g(n) && \forall\ n \in \mathbb{N}^*, \\ &(fg)(n) = f(n)g(n) && \forall\ n \in \mathbb{N}^*, \\ &\left(\frac{f}{g}\right)(n) = \frac{f(n)}{g(n)} \text{ si } g(n) \neq 0, && \forall\ n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Définition 20 *Le produit de convolution de Direchlet de f et g notée $f*g$, est défini par :*

$$(f*g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d}).$$

Théorème 3 *Si f et g sont des fonctions multiplicatives, alors $f * g$ est aussi.*

Preuve

Soient f et g deux fonctions multiplicatives.

$$(f * g)(1) = 1.$$

Soit $(n, m) = 1$ et $d \mid nm$,alors $d = d_1 d_2$ telle que $d_1 \mid n$ et $d_2 \mid m$

$$\begin{aligned}(f * g)(nm) &= \sum_{d \mid nm} f(d) g(\tfrac{nm}{d}) \\ &= \sum_{d_1 d_2 \mid nm} f(d_1 d_2) g(\tfrac{nm}{d_1 d_2}) \\ &= \sum_{d_1 \mid n} f(d) g(\tfrac{n}{d_1}) \sum_{d_2 \mid m} f(d_2) g(\tfrac{m}{d_2}),\end{aligned}$$

d'où

$$(f * g)(nm) = (f * g)(n)(f * g)(m).$$

■

Théorème 4 *Si f, g sont des fonctions arithmétiques multiplicatives et h est une fonction complètment multiplicative alors,*

$$h(f * g) = (hf) * (hg)\,.$$

Preuve

Soient f, g deux fonctions arithmétiques multiplicatives et h est une fonction arithmétique complètment multiplicative

$$\begin{aligned}h(f * g)(n) &= h(n) \sum_{d \mid n} f(d) g(\frac{n}{d}), \\ &= \sum_{d \mid n} f(d) g(\frac{n}{d}) h(n)\end{aligned}$$

avec $n = dr$

$$\begin{aligned}h(f * g)(n) &= \sum_{d \mid n} f(d) g(r) h(dr) \\ &= \sum_{d \mid n} f(d) g(r) h(d) h(r) \\ &= \sum_{d \mid n} (hf)(d)(hg)(\frac{n}{d}),\end{aligned}$$

d'où

$$h(f * g) = hf * hg.$$

■

1.6 L'anneau des fonctions arithmétiques

Théorème 5 *L'ensemble des fonctions arithmétiques $\mathcal{A}$ muni de la loi $(+)$ et $(*)$ est un anneau commutatif.*

Preuve

1) $(\mathcal{A}, +)$ est un groupe commutatif, son élément neutre est la fonction arithmétique nulle $\mathbf{0}$ définie par $\mathbf{0}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) La loi $(*)$ est associative. Pour f, g et h dans $\mathcal{A}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} f * (g * h)(n) &= \sum_{d|n} f(d)((g * h)(\frac{n}{d})) \\ &= \sum_{d|n} f(d)(g * h)(\frac{n}{d}) \\ &= \sum_{d|n} \sum_{\delta|\frac{n}{d}} f(d)(g(\delta)h(\frac{n}{\delta d}), \end{aligned}$$

avec

$$d \times \delta \times \frac{n}{\delta d} = n,$$

on a donc

$$f * (g * h)(n) = \sum_{abc=n} f(a)g(b)h(c).$$

On a aussi

$$\begin{aligned} (f * g) * h(n) &= \sum_{d|n} (f * g)(d)h(\frac{n}{d}) \\ &= \sum_{d|n} \sum_{\delta|\frac{n}{d}} f(\delta)(g(\frac{d}{\delta})h(\frac{n}{d}) \qquad \text{avec } \delta \times \frac{d}{\delta} \times \frac{n}{d} = n. \end{aligned}$$

On a donc

$$(f * g) * h(n) = \sum_{abc=n} f(a)g(b)h(c),$$

ce qui montre que :

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

3) La distributivité de $(*)$ sur $(+)$. Soient f, g et $h \in \mathcal{A}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned} (f * (g + h))(n) &= \sum_{d|n} f(d)(g + h)(\frac{n}{d}) \\ &= \sum_{d|n} f(d)(g(\frac{n}{d}) + h(\frac{n}{d})) \\ &= \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d}) + \sum_{d|n} f(d)h(\frac{n}{d}) \\ &= (f * g)(n) + (f * h)(n). \end{aligned}$$

D'où

$$f * (g + h) = f * g + f * h.$$

4) L'élément neutre de la loi $(*)$ est la fonction arithmétique neutre I définie par :

$$I(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 1, \\ 0 & \text{pour } n \geq 2. \end{cases}$$

Il est bien clair que

$$f * I = I * f = f \qquad (\forall\ f \in \mathcal{A}).$$

5) La commutativité de la loi $(*)$

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g(\frac{n}{d}),$$

$d \mid n \Longrightarrow n = \delta d$ avec $\delta \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} (f * g)(n) &= \sum_{d|n} f(\frac{n}{d}) g(d) \\ &= \sum_{d|n} g(d) f(\frac{n}{d}), \end{aligned}$$

D'où

$$(f * g)(n) = (g * f)(n).$$

■

1.7 Fonctions sommatoires et fonctions sommatoires Lissées

Fonctions sommatoires

Définition 21 *Soit f une fonction arithmétique, la fonction sommatoire de f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :*

$$M_f(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} f(n).$$

Exemple 5 *Pour tout $x \geq 1$,*

$$\begin{aligned} M_1(x) &= \sum_{1 \leq n \leq x} 1 = [x] = x - \{x\} = x + O(1), \\ \pi(x) &= M_{1_{\mathbf{p}}}(x) = \sum_{p \leq x} 1, \\ \theta(x) &= M_{1_{\mathcal{P}}} \log(x) = \sum_{p \leq x} \log p, \\ \psi(x) &= M_{\Lambda}(x) = \sum_{p^{\alpha} \leq x} \log p. \end{aligned}$$

Fonction sommatoire lissée

Définition 22 *(**Fonction de Schwartz**) Une fonction de Schwartz $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe C^∞ telle que*

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 \qquad \lim_{|x|\to\infty} \left| x^n f^{(m)}(x) \right| = 0.$$

f est une fonction à décroissance plus rapide que tout polynôme a l'infini.

Définition 23 *Soit f une fonction arithmétique. On appelle fonction sommatoire lissée associée à f et à la fonction de Schwartz ϕ la série suivante :*

$$\mathcal{M}_f(\phi) = \sum_{n\geq 1} f(n)\phi(n).$$

Chapitre 2

Quelques formules sommatoires

Dans ce chapitre, on étudié quelques méthodes pour calculer l'expression de la fonction sommatoire d'une fonction arithmétiques comme la formule sommatoire d'Abel, la formule sommatoire d'Euler-Mac Laurin et l'approximation par une intégrale.

2.1 Approximation par une intégrale, intégration par parties

La formule d'intégration par parties s'écrite :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx,$$

l'intégrale par parties consiste à intégrer une des deux fonctions présentes dans l'intégrale initiale (g' devient g) et à dériver l'autre (f devient f').

La sommation par parties consiste en une opération analogue dans un contexte discret.

Théorème 6 **1**. *Pour deux entiers a, $b \in \mathbb{Z}$, $a < b$ et toute fonction $f \in \mathcal{C}^1([a,b] \to \mathbb{C})$, on a*

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)dt + \frac{f(b)-f(a)}{2} + \int_a^b B_1(t)f'(t)dt$$

$$\left(B_1(t) = t - [t] - \frac{1}{2}\right).$$

2. **(a)** *Pour tout entier $n \geq 1$, on a*

$$\ln n! = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + A - \int_n^{+\infty} \frac{B_1(t)}{t}dt$$

$$A = 1 + \int_1^{+\infty} \frac{B_1(t)}{t}dt = \frac{\ln 2\pi}{2}$$

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi} \ \ (n \to +\infty).$$

(**b**) *Pour tout nombre réel $x > 1$, on a*

$$\ln([x]!) = x \ln x - x + \mathrm{O}(\ln x).$$

3. *Pour tout nombre réel $\sigma > 1$, l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{B_1(t)}{t^{\sigma+1}} dt$ *est convergente et l'on a*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sigma - 1} - \sigma \int_1^{+\infty} \frac{B_1(t)}{t^{\sigma+1}} dt.$$

Preuve

1) La démonstration est basée sur l'évaluation des deux intégrales suivantes

$$\int_{n-1}^{n} f(t)dt \text{ et } \int_{n-1}^{n} [t] f'(t)dt \text{ pour } a < n \leq b.$$

Par intégration par parties nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{n-1}^{n} f(t)dt &= [tf(t)]_{n-1}^{n} - \int_{n-1}^{n} tf'(t)\, dt \ \ (u = f(t) \text{ et } v' = 1) \\ &= nf(n) - (n-1)f(n-1) - \int_{n-1}^{n} tf'(t)\, dt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{n-1}^{n} [t] f'(t)dt &= (n-1) \int_{n-1}^{n} f'(t)dt = (n-1)(f(n) - f(n-1)) \\ &= (nf(n) - (n-1) f(n-1)) - f(n). \end{aligned}$$

De la dernière égalité, il vient

$$\begin{aligned} f(n) &= (nf(n) - (n-1) f(n-1)) - \int_{n-1}^{n} [t] f'(t)dt \\ &= (nf(n) - (n-1) f(n-1) - \int_{n-1}^{n} tf'(t)dt) + \int_{n-1}^{n} (t - [t]) f'(t)dt. \end{aligned}$$

En remplaçant

$$nf(n) - (n-1)f(n-1) - \int_{n-1}^{n} tf'(t)\, dt,$$

par

$$\int_{n-1}^{n} f(t)dt,$$

dans l'expression de $f(n)$, on obtient

$$f(n) = \int_{n-1}^{n} f(t)dt + \int_{n-1}^{n} (t - [t]) f'(t)\, dt.$$

En sommant sur les nombres n de $a + 1$ jusqu'à b, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{a<n\leq b} f(n) &= \sum_{n=a+1}^{b} \int_{n-1}^{n} f(t)dt + \sum_{n=a+1}^{b} \int_{n-1}^{n} (t - [t]) f'(t)\, dt \\ &= \int_a^b f(t)dt + \int_a^b (t - [t]) f'(t)dt. \end{aligned}$$

En écrivant $t-[t]$ sous la forme

$$t-[t]=t-[t]-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=B_1(t)+\frac{1}{2},$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b (t-[t])\, f'(t)dt &= \frac{1}{2}\int_a^b f'(t)dt+\int_a^b B_1(t)f'(t)dt\\ &= \frac{f(b)-f(a)}{2}+\int_a^b B_1(t)f'(t)dt,\end{aligned}$$

d'où la formule annoncée.

Remarque : On peut introduire l'intégrale de Stieltjes de f par rapport à la mesure $d\left([t]\right)$. On trouve

$$\sum_{a<n\leq b} f(n)=\int_a^b f\left(t\right)d\left([t]\right),$$

ce qui implique

$$\int_a^b f\left(t\right)d\left([t]\right)=f(a+1)+\cdots+f(b)=\sum_{a<n\leq b} f(n).$$

L'évaluation de la différence $\sum\limits_{a<n\leq b} f(n)-\int_a^b f\left(t\right)dt$ donne

$$\begin{aligned}\sum_{a<n\leq b} f(n)-\int_a^b f\left(t\right)dt &= \int_a^b f\left(t\right)d\left([t]\right)-\int_a^b f\left(t\right)dt\\ &= \int_a^b f\left(t\right)d\left(t-\{t\}\right)-\int_a^b f\left(t\right)dt\\ &= -\int_a^b f\left(t\right)d\left(\{t\}\right),\end{aligned}$$

En intégrant $\int_a^b f\left(t\right)d\left(\{t\}\right)$ par parties on obtient

$$\int_a^b f\left(t\right)d\left(\{t\}\right)=\left[f(t)\left\{t\right\}\right]_a^b-\int_a^b \left\{t\right\}f'\left(t\right)dt\ \ \left(\left[f(t)\left\{t\right\}\right]_a^b=0 \text{ car } a,\ b\in\mathbb{Z}\right).$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{a<n\leq b} f(n) &= \int_a^b f\left(t\right)dt+\int_a^b \left\{t\right\}f'\left(t\right)dt\\ &= \int_a^b f\left(t\right)dt+\int_a^b \left(t-[t]\right)f'\left(t\right)dt.\end{aligned}$$

2. **a**) Pour $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\ln n! &= \sum_{1<m\leq n} \ln m = \sum_{1<m\leq n} f(m) \qquad \left(f(x) = \ln x,\ f'(x) = \frac{1}{x} \right) \\
&= \int_1^n (\ln t)\, dt + \frac{\ln n}{2} + \int_1^n B_1(t) f'(t)\, dt \\
&= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \left(1 + \int_1^{+\infty} \frac{B_1(t)}{t} dt\right) - \int_n^{+\infty} \frac{B_1(t)}{t} dt \\
&= n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + \frac{\ln 2\pi}{2} - \int_n^{\infty} \frac{B_1(t)}{t} dt,
\end{aligned}$$

sachant que

$$-\int_n^{\infty} \frac{B_1(t)}{t} dt \leq \int_n^{\infty} \frac{dt}{t} = \ln n,$$

ce qui implique que

$$-\int_n^{\infty} \frac{B_1(t)}{t} dt = \mathrm{O}(\ln n),$$

alors

$$\ln n! = n \ln n - n + \mathrm{O}(\ln n) + \mathrm{O}(\ln 2\pi) + \mathrm{O}(\ln n).$$

Et comme

$$\mathrm{O}(\ln 2\pi) \leq \mathrm{O}(\ln n),$$

donc

$$\ln n! = n \ln n - n + \mathrm{O}(\ln n). \tag{2.1}$$

b) On peut vérifier que pour tout $x > 1$, on a

$$\ln([x]!) = x \ln x - x + \mathrm{O}(\ln x).$$

En remplaçant n dans(2.1) par $[x]$, en obtient

$$\begin{aligned}
\ln([x]!) &= [x] \ln [x] - [x] + \mathrm{O}(\ln [x]) \\
&= x \ln x - x \ln x + [x] \ln [x] - [x] + \mathrm{O}(\ln [x]),
\end{aligned}$$

Sachant que

$$\begin{aligned}
-x \ln x + [x] \ln [x] &\leq -x \ln x + [x] \ln x \\
&\leq (-x + [x]) \ln x \leq 1 \ln x \\
-x \ln x + [x] \ln [x] &= \mathrm{O}(\ln x),
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\ln([x]!) &= x\ln x + \mathrm{O}(\ln x) - [x] + \mathrm{O}(\ln[x]) \\ &= x\ln x + \mathrm{O}(\ln x) - x + \mathrm{O}(1) + \mathrm{O}(\ln[x]),\end{aligned}$$

et comme

$$1 < x \text{ et } \ln x \geq \ln[x],$$

donc

$$\ln([x]!) = x\ln x - x + \mathrm{O}(\ln x).$$

3) La convergente de l'intégrale est assurée par l'inégalité $|B_1(t)| \leq \frac{1}{2}$,

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{B_1(t)}{t^{\sigma+1}} dt\right| \leq \frac{1}{2}\int_1^N \frac{dt}{t^{\sigma+1}} = \frac{1}{2\sigma}.$$

D'abord, on écrit la somme sous la forme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma} = 1 + \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{1<n\leq N} f(n)\right),$$

en suite on applique la première assertion avec

$$a = 1,\ b = N,\ f(t) = \frac{1}{t^\sigma},\ f'(t) = \frac{-\sigma}{t^{\sigma+1}}.$$

■

2.2 La formule sommatoire d'Abel

Théorème 7 *Soit* $\{a(n)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de nombres complexes,* $A(t) = \sum_{1\leq n\leq t} a(n)$ *avec* $A(t) = 0$ *pour* $t < 1$, x *et* y *deux nombres réels tels que* $0 < y < x$ *et* f *une fonction continûment dérivable de l'intervalle* $[y, x] \to \mathbb{C}$. *On a alors*

$$\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\,dt. \tag{2.2}$$

Preuve

On pose $m = [y]$ et $k = [x]$. On a alors

$$A(y) = A(m),\ A(x) = A(k) \text{ et } \sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = \sum_{n=m+1}^{k} a(n)f(n).$$

Notons que $a(n) = A(n) - A(n-1)$ pour $n \geq 1$ $(A(0) = 0)$.
Cela implique

$$\begin{aligned}\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) &= \sum_{n=m+1}^{k} \{A(n) - A(n-1)\} f(n) \\ &= \sum_{n=m+1}^{k} A(n)f(n) - \sum_{n=m+1}^{k} A(n-1) f(n).\end{aligned}$$

Sachant que

$$\sum_{n=m+1}^{k} A(n-1) f(n) = \sum_{n=m}^{k-1} A(n) f(n+1),$$

alors

$$\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = \sum_{n=m+1}^{k} A(n)f(n) - \sum_{n=m}^{k-1} A(n) f(n+1).$$

On a encore

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=m+1}^{k} A(n)f(n) = \sum_{n=m+1}^{k-1} A(n)f(n) + A(k) f(k), \\ \text{et} \\ \displaystyle\sum_{n=m}^{k-1} A(n) f(n+1) = A(m) f(m+1) + \sum_{n=m+1}^{k-1} A(n) f(n+1), \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned}\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) &= \sum_{n=m+1}^{k-1} A(n) \left(f(n) - f(n+1)\right) + A(k) f(k) - A(m) f(m+1) \\ &= -\sum_{n=m+1}^{k-1} A(n) \int_{n}^{n+1} f'(t)dt + A(k) f(k) - A(m) f(m+1).\end{aligned}$$

Puisque, pour $n \leq t < n+1$ on a $A(t) = A(n)$, alors

$$A(n) \int_{n}^{n+1} f'(t)dt = \int_{n}^{n+1} A(t) f'(t)dt.$$

Il en vient

$$\begin{aligned}\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) &= -\sum_{n=m+1}^{k-1} \int_{n}^{n+1} A(t) f'(t)dt + A(k) f(k) - A(m) f(m+1) \\ &= -\int_{m+1}^{k} A(t) f'(t)dt + A(k) f(k) - A(m) f(m+1).\end{aligned}$$

Maintenant on écrit $A(k) f(k)$ et $A(m) f(m+1)$ sous les formes suivantes :

$$A(k) f(k) = A(k) \left(f(k) - f(x)\right) + A(k)f(x) = -\int_{k}^{x} A(t)f'(t)\, dt + A(x)f(x),$$

$$(A(k) = A(x))$$

et

$$\begin{aligned} -A\,(m)\,f\,(m+1) &= -A\,(m)\,(f\,(m+1)-f(y)) - A(m)f(y) \\ &= -\left(\int_y^{m+1} A(t)f'\,(t)\,dt\right) - A(y)f(y), \\ &\quad (A\,(m) = A\,(y))\,. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} \sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) &= A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^{m+1} A(t)f'\,(t)\,dt \\ &\quad - \int_{m+1}^{k} A\,(t)\,f'(t)dt - \int_k^x A(t)f'\,(t)\,dt, \end{aligned}$$

alors

$$\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'\,(t)\,dt.$$

Une autre démonstration.

La quantité $\sum\limits_{y<n\leq x} a(n)f(n)$ vaut

$$\int_y^x f(t)d\,(A\,(t)) \text{ (intégral de Stieltjes-Riemann voir [1]).}$$

Par intégration par parties, nous obtenons

$$\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'\,(t)\,dt.$$

Remarques.

1. Dans le cas où $0 < y < 1$, la formule (2.2) devienre

$$\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - \int_y^x A(t)f'\,(t)\,dt.$$

2. Dans le cas où $A(x)f(x)$ s'annule à l'infini et au moins l'une des deux quantités $\sum\limits_{n>y} a(n)f(n)$ ou $\int_y^{+\infty} f'\,(t)$ a un sens, la formule (2.2) devient

$$\sum_{n=[y]+1}^{+\infty} a(n)f(n) = -\int_y^{+\infty} A(t)f'\,(t)\,dt.$$

■

2.3 La formule sommatoire d'Euler-Mac Laurin

2.3.1 Les nombres et les polynômes de Bernoulli

Les nombres de Bernoulli

Notons B_n les nombres de Bernoulli et $B_n(t)$ les polynômes de Bernoulli.

Définition 24 *Les nombres de Bernoulli sont définis comme les coefficients de Taylor de la série génératrice exponentielle*

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{t}{e^t - 1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

La relation $(e^t - 1)B(t) = t$ entraine que l'on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_k \binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

Et par suit on a

$$\begin{aligned} &B_0 = 1, \\ &2B_1 + B_0 = 0, \text{ donc } B_1 = -\frac{1}{2}, \\ &3B_2 + 3B_1 + B_0 = 0, \text{ donc } B_2 = \frac{1}{6}, \\ &4B_3 + 6B_2 + 4B_1 + B_0 = 0, \text{ donc } B_3 = 0, \\ &5B_4 + 10B_3 + 10B_2 + 5B_1 + B_0 = 0, \text{ donc } B_4 = -\frac{1}{30}, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Théorème 8 [12] *Pour tout entier $1 < n$, on a*

$$B_{2n+1} = 0.$$

Les polynômes de Bernoulli

Définition 25 *On définit les polynômes de Bernoulli $B_n(t)$ par la série génératrice*

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k t^{n-k},$$

tel que B_k est le $k-$éme nombre de Bernoulli.

Lemme 2 *Il existe une unique suite de polynômes réels* $\{B_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}[t]$ *définis par les relations*

$$\begin{cases} B_0(t) = 1, \\ B_n(t) = n\int_0^t B_{n-1}(x)dx + B_n, \quad (n \geq 1), \\ \int_0^1 B_n(t)dt = 0, \quad (n \geq 1), \end{cases}$$

Où $B_n(x)$ *est un polynôme de Bernoulli d'indice* n *et* B_n *est un nombre de Bernoullid'indice* n.

Preuve

1) **L'existence** : Les polynômes $B_n(t)$ se calculent successivement à partir de $B_0(t) = 1$, en remplaçant dans les deux dernières formules on trouve

$$B_1(t) = \int_0^t B_0(x)dx + B_1,$$

$$B_1(t) = t + B_1$$

et

$$\int_0^1 B_1(t)dt = 0,$$

donc on trouve

$$B_1(t) = t - \frac{1}{2},$$

de même technique on trouve

$$\begin{aligned} &B_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}, \\ &B_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{t}{2}, \\ &B_4(t) = t^4 - 2t^3 + t^2 - \frac{1}{30}, \\ &... \end{aligned}$$

2) **l'unicité** : On suppose qu' il existe deux suites des polynômes de Bernoulli $\{B_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{q_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned} B_0 &= q_0 = 1, \\ B_1 &= q_1 = t - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et d'après la deuxième formule on a

$$B_n(t) = n\int_0^t B_{n-1}(x)dx + B_n$$

et

$$q_n(t) = n\int_0^t q_{n-1}(x)dx + B_n,$$

et d'après la troisième formules on a

$$\int_0^1 B_n(t)dt = 0,$$

et

$$\int_0^1 q_n(t)dt = 0,$$

donc

$$\int_0^1 B_n(t)dt = \int_0^1 q_n(t)dt,$$

$$\int_0^1 (B_n(t) - q_n(t))dt = 0,$$

$$B_n(t) - q_n(t) = 0,$$

alors

$$B_n(t) = q_n(t).$$

On conclure alors que $\{B_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{q_n(x)\}$. ■

Proposition 3 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a*

1) $B_n(t+1) - B_n(t) = nt^{n-1}$.
2) $B_n'(t) = nB_{n-1}(t)$.
3) $B_n(t+s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(s)t^{n-k}$.

Preuve

1) On montre que $B_n(t+1) - B_n(t) = nt^{n-1}$.

Par récurrence, pour $n = 1$

$$B_1(t+1) - B_1(t) = t + 1 - \frac{1}{2} - t + \frac{1}{2} = t^0 = 1.$$

On suppose que $B_n(t+1) - B_n(t) = nt^{n-1}$ est vraie pour n et on montrons que la propriété est vraie pour $(n+1)$. On a

$$B_{n+1}(t+1) - B_{n+1}(t) = (n+1)(\int_0^{t+1} B_n(x+1)dt - \int_0^t B_n(x)dx),$$

sachant que

$$\int_0^{t+1} B_n(x)dx = \int_0^1 B_n(x)dx + \int_1^{t+1} B_n(x)dx$$
$$= \int_1^{t+1} B_n(x)dx,$$

car

$$\int_0^1 B_n(x)dx = 0.$$

Par le changement de variable $x = u + 1$, on obtient

$$\int_1^{t+1} B_n(x)dx = \int_0^t B_n(1+u)du,$$

donc

$$\int_0^{t+1} B_n(x)dx = \int_0^t B_n(1+x)dx.$$

Par suite

$$B_{n+1}(t+1) - B_{n+1}(t) = (n+1)\int_0^{t+1} (B_n(x+1) - B_n(x))dx$$
$$= (n+1)\int_0^{t+1} nx^{n-1}dx.$$

Alors

$$B_{n+1}(t+1) - B_{n+1}(t) = (n+1)t^n$$

D'où

$$B_n(t+1) - B_n(t) = nt^{n-1}.$$

2) Montrons que $B_n'(t) = nB_{n-1}(t)$. On a

$$\begin{aligned} B_n(t) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i t^{n-i} \\ B_n'(t) &= \sum_{i=1}^{n} (n-i) \binom{n}{i} B_i t^{n-i-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} n \binom{n-1}{i} B_i t^{n-i-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} n \binom{n-1}{i} B_i t^{n-i-1} \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} n \binom{n-1}{i} B_i t^{n-i-1}. \end{aligned}$$

D'où

$$B_n'(t) = nB_{n-1}(t).$$

3) Montrons que

$$B_n(t+s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(s) t^{n-k}.$$

On a

$$B(x)\exp(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t) \frac{x^n}{n!},$$

par suite

$$B(x)\exp(x(s+t)) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(s+t) \frac{x^n}{n!}. \tag{2.3}$$

Et d'autre part, on a

$$\begin{aligned} B(x)\exp(x(s+t)) &= B(x)\exp(xs)\exp(xt) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t)\exp(xs) \frac{x^n}{n!}, \end{aligned}$$

telle que

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(s) t^{n-k},$$

donc

$$B(x)\exp(x(s+t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(s) t^{n-1} \frac{x^n}{n!}. \tag{2.4}$$

Par comparaison de (2.3)et (2.4) , on trouve

$$B_n(t+s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(s) t^{n-k}.$$

■

Remarque 3 [5]*Les polymomes de Bernoulli sont périodiques de période* 1, *car*

$$B_n(t+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(1) t^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k t^{n-k},$$
$$B_n(t+1) = B_n(t).$$

Notons $\tilde{B}_n(t)$ les fonctions de Bernoulli périodiques de période 1.

$$\tilde{B}_n(t) = B_n(\{t\}).$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\tilde{B}_n(k) = B_n(0) = B_n.$$

Théorème 9 *Pour toute fonction f de classe C^{k+1} ($k \in \mathbb{N}$) sur $[a,\ b]$ où $a,\ b \in \mathbb{Z}$ avec $a < b$, on a la formule sommatoire d'Euler-Mac Laurin*

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)dt + \sum_{m=0}^{k} \frac{(-1)^{m+1} B_{m+1} \left(f^{(m)}(b) - f^{(m)}(a)\right)}{(m+1)!}$$
$$+ \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \int_a^b B_{k+1}(t) f^{(k+1)}(t)dt.$$

Preuve

Nous prenons en considération dans cette formule que

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2} \text{ et } B_{2r+1} = 0 \ \ (\forall r \geq 1).$$

On a vu dans le théorème précédent que

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)dt + \frac{f(b) - f(a)}{2} + \int_a^b B_1(t) f^{(1)}(t)dt.$$

Ensuite on intègre k fois par parties, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b B_1(t) f'(t)dt$, en posant à chaque fois

$$u = f^{(m)}(t) \text{ et } dv = d\left(\frac{B_m(t)}{m}\right),$$

et en tenant compte du fait que

$$B_m(a) = B_m(b) = B_m(0) = B_m \ \ (\forall m \in \mathbb{N}).$$

■

Chapitre 3

Applications

3.1 Une application sur la formule sommatoire d'Abel

La formule sommatoire d'Abel nous permet d'exprimer chacune des deux fonctions $\pi(x)$ et $\theta(x)$ en fonction de l'autre et déduire des équivalences concernant le comportement asymptotique des trois fonctions $\frac{\pi(x)\ln x}{x}$, $\frac{\theta(x)}{x}$, $\frac{\psi(x)}{x}$.

On verra plus loin dans la partie suivante que

$$\psi(x) \sim x \Leftrightarrow \theta(x) \sim x \Leftrightarrow \pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad (x \to +\infty).$$

Théorème 10 **1**. *Pour $x \geq 2$, on a*

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t \ln^2 t} dt. \tag{3.1}$$

$$\theta(x) = \pi(x) \ln x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt. \tag{3.2}$$

2. *Les équivalences suivantes ont lieu*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1. \tag{3.3}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\theta(x)}{x} = 1. \tag{3.4}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1. \tag{3.5}$$

Preuve

1. On considère la fonction caractéristique des nombres premiers

$$b(n)=\begin{cases}1 & \text{si } n \text{ est premier}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Pour obtenir l'expression de $\pi(x)$ $(x\geq 2)$, on pose dans le théorème (7)

$$a(n)=b(n)\ln n \ \ (n\in\mathbb{N}^*),\ A(x)=\theta(x),\ y=3/2,\ A(y)=0,$$
$$f(x)=\frac{1}{\ln x},\ f\in\mathcal{C}^1([y,x]\to\mathbb{R}),\ f'(x)=-\frac{1}{x\ln^2 x},$$

on obtient

$$\begin{aligned}\pi(x)&=\sum_{y<n\leq x}a(n)f(n)\\ &=A(x)f(x)+\int_{3/2}^{x}\frac{A(t)}{t\ln^2 t}dt=\frac{\theta(x)}{\ln x}+\int_2^x\frac{\theta(t)}{t\ln^2 t}dt.\end{aligned}$$

Pour obtenir l'expression de $\theta(x)$ $(x\geq 2)$, on pose dans le théorème (7)

$$\begin{cases}a(n)=b(n)\ \ (n\in\mathbb{N}^*),\ A(x)=\sum\limits_{0\leq n\leq x}a(n)=\sum\limits_{p\leq x}1=\pi(x),\ y=\dfrac{3}{2}\ (A(y)=0),\\ f(x)=\ln x,\ f\in\mathcal{C}^1([y,x]\to\mathbb{R}),\ f'(x)=\dfrac{1}{x},\end{cases}$$

on obtient

$$\theta(x)=\sum_{3/2<n\leq x}b(n)f(n)=A(x)f(x)-\int_{3/2}^x\frac{A(t)}{t}dt=\pi(x)\ln x-\int_2^x\frac{\pi(t)}{t}dt.$$

2. (3.3) $\Rightarrow$ (3.4) : La relation (3.2) implique

$$\frac{\theta(x)}{x}=\frac{\pi(x)\ln x}{x}-\frac{1}{x}\int_2^x\frac{\pi(t)}{t}dt.$$

Il suffit donc de prouver que

$$\left(\frac{1}{x}\int_2^x\frac{\pi(t)}{t}dt\right)\to 0\ \ (x\to+\infty).$$

La relation (3.3) implique que

$$\frac{\pi(t)}{t}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{\ln t}\right)\ \text{pour } t\geq 2,$$

alors

$$\frac{1}{x}\int_2^x\frac{\pi(t)}{t}dt=\mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\int_2^x\frac{dt}{\ln t}\right).$$

Évaluons l'intégrale $\displaystyle\int_2^x\frac{dt}{\ln t}$. On a

$$\int_2^x\frac{dt}{\ln t}=\int_2^{\sqrt{x}}\frac{dt}{\ln t}+\int_{\sqrt{x}}^x\frac{dt}{\ln t}\leq\frac{1}{\ln 2}\int_2^{\sqrt{x}}dt+\frac{1}{\ln\sqrt{x}}\int_{\sqrt{x}}^x dt$$
$$\int_2^x\frac{dt}{\ln t}<\frac{\sqrt{x}}{\ln 2}+\frac{2(x-\sqrt{x})}{\ln x}.$$

Par suite

$$\frac{1}{x}\int_2^x \frac{dt}{\ln t} < \frac{\sqrt{x}}{(\ln 2)\,x} + \frac{2\,(x-\sqrt{x})}{x\ln x} \to 0 \ \ (x \to +\infty)\,.$$

Il en vient

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\theta\,(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\pi\,(x)\ln x}{x} + \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi\,(t)}{t}dt\right) = 1.$$

(3.4) $\Rightarrow$ (3.3) : La relation (3.1) implique

$$\frac{\pi(x)\ln x}{x} = \frac{\theta\,(x)}{x} + \frac{\ln x}{x}\int_2^x \frac{\theta\,(t)}{t\ln^2 t}dt.$$

Nous aurons besoin uniquement de montrer que (3.4) implique

$$\frac{\ln x}{x}\int_2^x \frac{\theta\,(t)}{t\ln^2 t}dt \to 0 \ \ (x \to +\infty)\,.$$

Or (3.4) implique $\theta\,(t) = \mathrm{O}(t)$ d'où

$$\int_2^x \frac{\theta\,(t)}{t\ln^2 t}dt = \mathrm{O}\left(\int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t}\right).$$

Évaluons l'intégrale $\displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t}$. On a

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t} = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\ln^2 t} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\ln^2 t} \le \frac{1}{\ln^2 2}\int_2^{\sqrt{x}} dt + \frac{1}{\ln^2\sqrt{x}}\int_{\sqrt{x}}^x dt$$

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t} < \frac{\sqrt{x}}{\ln^2 2} + \frac{4\,(x-\sqrt{x})}{\ln^2 x},$$

ce qui prouve

$$\frac{\ln x}{x}\int_2^x \frac{\theta\,(t)}{t\ln^2 t}dt < \frac{\ln x}{x}\left(\frac{\sqrt{x}}{\ln^2 2} + \frac{4\,(x-\sqrt{x})}{\ln^2 x}\right) \to 0 \ \ (x \to +\infty)\,.$$

Alors

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi\,(x)\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\theta\,(x)}{x}\right) + \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\int_2^x \frac{\theta\,(t)}{t\ln^2 t}dt\right) = 1.$$

Pour établir l'équivalence (3.4) $\Leftrightarrow$ (3.5) , on utilise la définition de la fonction $\psi\,(x)$ qui implique les relations suivantes

$$0 \le \psi\,(x) - \theta(x) = \sum_{2\le m\le \frac{\ln x}{\ln 2}} \theta\left(x^{\frac{1}{m}}\right).$$

On note que pour tout $x > 1$,

$$\theta(x) = \sum_{p\le x} \ln p \le (\ln x)\sum_{p\le x} 1 \le x\ln x.$$

Il en vient

$$\sum_{2\le m\le \frac{\ln x}{\ln 2}} \theta\left(x^{\frac{1}{m}}\right) \le \sum_{2\le m\le \frac{\ln x}{\ln 2}} x^{1/m}\ln\left(x^{1/m}\right) \le \sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)\sum_{2\le m\le \frac{\ln x}{\ln 2}} 1 \le \frac{\sqrt{x}\ln^2 x}{2\ln 2}$$

$$\left(\sum_{2\le m\le \frac{\ln x}{\ln 2}} 1 \le \frac{\ln x}{\ln 2}\right).$$

On en déduit

$$0 \leq \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\theta(x)}{x} < \frac{\ln^2 x}{(2\ln 2)\sqrt{x}} \to 0 \ \ (x \to +\infty).$$

La dernière relation implique

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\theta(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x},$$

d'où l'équivalence

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\theta(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

■

3.2 Une application sur la formule sommatoire d'Euler-Mac Laurin

Théorème 11 *Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a*

$$\ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} \leq \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} \leq \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{60n^4}.$$

Où γ étant la constante d'Euler qui donner par

$$\gamma = \frac{3}{2} - \int_1^{+\infty} \frac{B_1(t)}{t^2} dt = \frac{3}{2} - \int_1^{n} \frac{B_1(t)}{t^2} dt - \int_n^{+\infty} \frac{B_1(t)}{t^2} dt.$$

Preuve On écrit

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{m\leq n} \frac{1}{m} = 1 + \sum_{1<m\leq n} \frac{1}{m},$$

et on applique la formule d'Euler-Mac Laurin avec

$$f(t) = \frac{1}{t},\ k = 3,\ a = 1 \text{ et } b = n, \quad \left(f^{(m)}(t) = \frac{(-1)^m\, m!}{t^{m+1}}\right).$$

On obtient

$$\begin{aligned}\sum_{m\leq n} \frac{1}{m} &= 1 + \int_1^n \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - 1\right) + \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\ &+ \frac{1}{120}\left(\frac{1}{n^4} - 1\right) - \int_1^n \frac{B_4(t)}{t^5} dt \\ &= \ln n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + \frac{23}{40} - \int_1^n \frac{B_4(t)}{t^5} dt.\end{aligned}$$

Cela implique

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + \frac{23}{40} - \int_1^n \frac{B_4(t)}{t^5} dt.$$

En faisant tendre $n \to \infty$, dans les deux membres de la dernière égalité, on obtient

$$\gamma = \frac{23}{40} - \int_1^{+\infty} \frac{B_4(t)}{t^5} dt = \frac{23}{40} - \int_1^{n} \frac{B_4(t)}{t^5} dt - \int_n^{+\infty} \frac{B_4(t)}{t^5} dt.$$

Il en vient
$$\frac{23}{40}-\int_1^n \frac{B_4(t)}{t^5}dt=\gamma+\int_n^{+\infty}\frac{B_4(t)}{t^5}dt,$$
par suite
$$\sum_{m\leq n}\frac{1}{m}=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{120n^4}+\int_n^{+\infty}\frac{B_4(t)}{t^5}dt.$$
Sachant que
$$-\frac{1}{30}\leq B_4(t)\leq\frac{7}{240}\ \ (\forall\ t\in\mathbb{R}),$$
alors
$$-\frac{1}{120n^4}\leq\int_n^{+\infty}\frac{B_4(t)}{t^5}dt\leq\frac{7}{960n^4},$$
par suite
$$\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}\leq\sum_{m\leq n}\frac{1}{m}\leq\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{64n^4}.$$
On trouve le même résultat si on applique la formule sommatoire d'Abel. On écrit
$$\begin{aligned}&\sum_{1\leq m\leq n}\frac{1}{m}=1+\sum_{1<m\leq n}a(m)f(m)\text{ où }a(n)=1\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*\\&A(x)=\sum_{1\leq n\leq x}a(n)=[x]\text{ et }f(t)=\frac{1}{t}.\end{aligned}$$
On obtient
$$\begin{aligned}\sum_{m\leq n}\frac{1}{m}&=1+\sum_{1<m\leq n}a(m)f(m)=1+\underbrace{A(n)f(n)}_{=1}-\underbrace{A(1)f(1)}_{=1}+\int_1^n\frac{[t]}{t^2}dt\\&=1+\int_1^n\frac{[t]}{t^2}dt=1-\int_1^n\frac{\left(t-[t]-\frac{1}{2}\right)}{t^2}dt+\int_1^n\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\int_1^n\frac{dt}{t^2}\\&=1-\int_1^n\frac{\left(t-[t]-\frac{1}{2}\right)}{t^2}dt+\int_1^n\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\int_1^n\frac{dt}{t^2}\\&=\ln n+\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}-\int_1^n\frac{B_1(t)}{t^2}dt.\end{aligned}$$
Cela implique
$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}-\int_1^n\frac{B_1(t)}{t^2}dt.$$
On fait tendre $n\to\infty$, on obtient
$$\gamma=\frac{3}{2}-\int_1^{+\infty}\frac{B_1(t)}{t^2}dt=\frac{3}{2}-\int_1^n\frac{B_1(t)}{t^2}dt-\int_n^{+\infty}\frac{B_1(t)}{t^2}dt,$$
d'où
$$\frac{3}{2}-\int_1^n\frac{B_1(t)}{t^2}dt=\gamma+\int_n^{+\infty}\frac{B_1(t)}{t^2}dt$$
et
$$\sum_{m\leq n}\frac{1}{m}=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}+\int_n^{+\infty}\frac{B_1(t)}{t^2}dt.$$

Ensuite on intègre par parties en posant

$$u = \frac{1}{t^2},\ du = \frac{-2}{t^3}dt,\ dv = B_1(t)dt,\ v = \frac{1}{2}B_2(t).$$

Il en vient

$$\int_n^{+\infty} \frac{B_1(t)}{t^2}dt = \frac{-B_2}{2n^2} + \int_n^{+\infty} \frac{B_2(t)}{t^3}dt = -\frac{1}{12n^2} + \int_n^{+\infty} \frac{B_2(t)}{t^3}dt,$$

par suite

$$\sum_{m\leq n} \frac{1}{m} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \int_n^{+\infty} \frac{B_2(t)}{t^3}dt,$$

et ainsi de suite on calcule la somme $\sum_{m\leq n}\frac{1}{m}$ avec la précision souhaitée. ∎

Bibliographie

[1] **A.Blanchard,** Initiation a théorie analytique des nombres, 1969.

[2] **Anatoly A Karatsuba**. Complex analysis in number theory.

[3] **Emilie Kaufmann**. De l'analyse complexe a la répartition des nombres premiers, 2008.

[4] **Gérald Tenenbaum**. les nombres premiers, 1997.

[5] **Guy Laville**. Euler Maclaurin versus prolongement analytique. Univ de Caen Lmno, 2015.

[6] **H M Edwards**. Higher arithmétique, introduction to number theory. 2008.

[7] **J.M De Konink and A.Ivic**. Topics in arithmetical functions, 1980.

[8] **Kenneth F. Ireland et Michael I. Rosen**. A classical introduction to modern number theory. Springer, 1990.

[9] **Michel Balazard.** Sur la fonction sommatoire de la fonction de von Mangoldt généralisée, 2008.

[10] **Sebastien Gaboury.** Sur les convolutions des fonctions arithmétiques. D. M. S. Univ Laval Québec, 2007.

[11] **Sébastien Gaboury**. Sur les convolutions des fonctions arithmétiques, 2007.

[12] **Tom M apostol**. Introduction to analytic number theory, 1976.