UNIVERSITE DJILALI BOUNAÂMA KHEMIS MILIANA

FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention d'un Master en Mathématiques

Spécialité:Analyse Mathématique et Application

THÈME

Contrôlabilité, Observabilité et stabilisation des équations des ondes dégénérées

Réalisé par:

Mlle ADOUM Karima

Soutenu publiquement le :..../juin/2017

Devant le jury:

Mr.	....	Président.
Mr.	....	Examinateur.
Mr.	....	Examinateur.
Mr.	....	Directeur de Projet.

Année Universitaire 2016/2017

Dédicaces

.

Je dédie cette thèse de master à :

A mes très chers parents.

A mon cher frère : Mohamed et mes sœurs.

A ma petite nièce : Isseraa.

A tous mes amis sans exception.

A tous qui m'ont apporté du soutien toute ma vie.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier grandement Monsieur Abdelkarim kelleche, pour sa grande disponibilité et ses précieux conseils et ses encouragements tout au long de la rédaction de ce mémoire.

Je voudrais remercier aussi toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à mes recherches et à l'élaboration de ce mémoire.

Table des matières

Introduction

Les problèmes de contrôle pour les EDPs dégénérées se posent dans de nombreuses applications comme la climatologie, la génétique des populations et la vision. Cette variété d'applications a crié des problèmes mathématiques difficiles pour les EDPs dégénérées. La dégénérescence peut survenir sur une partie de la frontière ou sur une sous-variété du domaine spatial. La perte de l'ellipticité soulève de nouvelles questions liées à l'équation d'évolution dans des espaces fonctionnels ainsi que de nouvelles estimations pour les équations elliptiques. De même, dans le cas dégénéré, de nouveaux outils sont nécessaires pour l'analyse de l'observabilité ainsi que de la stabilisation. Les problèmes de contrôle pour les équations paraboliques dégénérées ont reçu beaucoup d'attention au cours des dix dernières années. Bien que les équations des ondes dégénérées aient reçu moins d'attention jusqu'à présent, nous pensons que le temps est maintenant venu pour une analyse complète et une meilleure compréhension de ces problèmes. Par conséquent, le but de ce mémoire est d'étudier les problèmes de contrôlabilité, stabilisation et d'observabilité pour ce type des équations.

Le mémoire est organisé de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous avons regroupé les notions nécessaires à la compréhension des énoncés et des démonstrations. De même que des résultats fondamentaux, qui concernent quelques espaces fonctionnels, et quelques théorèmes.

Dans le deuxième chapitre, nous avons étudie la formulation variationnelle du l'équation des ondes non dégénérée et sa contrôlabilité exacte.

Dans le troisième chapitre, nous présentons quelques notations, la notion de l'équation des ondes dégénérée, le paramètre de dégénérescence μ_a, les espaces fonctionnels et les hypothèses. Nous prouvons des inégalités d'observabilité frontière pour ce type des équations.

Le quatrième chapitre, est réservé à l'étude de la contrôlabilité exacte. Nous définissons d'abord le problème de contrôle puis en utilisant la méthode HUM (Hilbert uniqueness method) Enfin, nous consacrons à l'étude de la stabilisation des limites pour même équation quand $\mu_a \in [0, 1[$. nous prouvons que l'équation stabilise exponentiellement la solution correspondante de l'équation d'onde dégénérée.

Chapitre 1

Notions de base

Introduction

Dans ce chapitre, nous avons regroupé les notions nécessaires à la compréhension des énoncés et démonstrations des problèmes qui forment le thème de ce mémoire. De même que des résultats fondamentaux, qui concernent quelques espaces fonctionnels et quelques théorèmes.

1.1 Quelques espaces fonctionnels

1.1.1 Espace L^p

Définition 1 *On pose, pour $p \geqslant 1$*

$$L^p(\Omega,\mu) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \ \textit{mesurable t.q} \ \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{P}} < \infty \right\}.$$

1.1.2 Espaces de Sobolev

Définition 2 *[2] Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ On définit les espaces de Sobolev suivants :*

1. **Espace H^1**

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \ \text{ telle que } \frac{du}{dx_i} \in L^2(\Omega), \ \text{ pour tout } i = 1, ..., N \right\}.$$

Où $\dfrac{du}{dx_i}$ est la dérivée partielle faible de u.

Proposition 1 *L'application suivante définit un produit scalaire sur $H^1\Omega$.*

$$\langle u,v\rangle = \int_\Omega \left(u\left(x\right)v\left(x\right) + \nabla u\left(x\right)\nabla v\left(x\right)\right)dx.$$

On peut définir une norme sur $H^1\left(\Omega\right)$. On notera donc

$$\left\|u\right\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left(\left|u\left(x\right)\right|^2 + \left|\nabla u\left(x\right)\right|^2\right)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

2. **Espace** H^m

Pour $m \in \mathbb{N}$ on a :

$$H^m\left(\Omega\right) = \left\{u \in L^2\left(\Omega\right) \text{ telle que } D^\alpha u \in L^2\left(\Omega\right), \text{ pour tout } \alpha = \mathbb{N}^N\right\}.$$

On le munit de la norme :

$$\left\|u\right\|_{H^m} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega \left|D^\alpha u\right| dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. **Espace** H_0^1

L'espace H_0^1 c'est une espace des fonctions de Sobolev qui s'annulent sur le bord de $\Omega =]0,1[$.

On note

$$H_0^1\left(\Omega\right) = \left\{u \in H^1\left(\Omega\right); u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0\right\}.$$

1.2 Dérivée normale

Définition 3 *On appelle dérivée normale d'une fonction u sur le bord d'un domaine la fonction définie sur les points réguliers de $\partial\Omega$ par*

$$\frac{\partial u}{\partial n}\left(x\right) = \nabla u\left(x\right).n\left(x\right).$$

(Produit scalaire du vecteur $\nabla u\left(x\right)$ avec le vecteur $n\left(x\right)$).

1.3 Théorème de Fubini

Théorème 1 *Soit f une fonction continue sur un rectangle $R = [a,b]\times[c,d]$ et à valeurs réelles. On a :*

$$\int\int_R f\left(x,y\right)dxdy = \int_a^b\left(\int_c^d f\left(x,y\right)dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f\left(x,y\right)dx\right)dy.$$

Ce théorème permet de calculer l'intégrale double par deux intégrales simples successives.

1.4 Théorème de Lax-Milgram

Définition 4 *Une forme bilinéaire $A : H \times H \to R$ est*

1. **Continue** : s'il existe une constante C telle que

$$|a(u,v)| \leq C|u||v| \quad \forall u,v \in H,$$

2. **Coercive** : s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(v,v) \geq \alpha |v|^2 \quad \forall v \in H.$$

Théorème 2 *[4] Soit H un espace de Hilbert, $a(.,.)$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur H et $L : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe $u \in H$ unique solution du problème*

$$a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in H.$$

De plus si a est symétrique u définie par :

$$\frac{1}{2}a(u,u) - L(u) = \min\left\{\frac{1}{2}(v,v) - L(v)\right\}.$$

1.5 Opérateurs et Semi-groupe de contraction

Dans la suite, on désigne par X un espace de Banach.

1.5.1 Opérateur non borné

Définition 5 *Soit $D \subset X$. Un opérateur linéaire dans X est un couple $(A;D)$, et $A : D \longrightarrow X$ est une application linéaire. On dit que A est borné s'il existe $c > 0$ telle que*

$$\forall u \in D(A), \quad \|Au\|_X \leq c\|u\|_X.$$

Sinon on dit que A est non borné.

1.5.2 Opérateur dissipatif

Définition 6 *Un opérateur linéaire A dans X est dit dissipatif si*

$$\forall \lambda > 0, \quad \forall u \in D(A), \quad \|u - \lambda Au\|_X \geqslant \|u\|_X.$$

1.5.3 Opérateur m-dissipatif

Définition 7 *Un opérateur linéaire A dans X est dit m-dissipatif si A est dissipatif et*

$$\forall \lambda > 0, \quad \forall f \in X, \quad \exists u \in D(A), \quad u - \lambda A u = f.$$

1.5.4 Semi-groupe de contraction

Définition 8 *[6] Une famille $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ d'opérateurs linéaires bornés est dite semi-groupe de contraction sur X, si*

1. $\|S(t)\| = 1$ pour tout $t \geq 0$.
2. $S(0) = I$, l'identité dans X.
3. $S(t+s) = S(t)S(s)$ pour tout $t, s \geq 0$.
4. Pour tout $x \in X$, $S(t)x \in C([0, \infty[, X)$.

1.5.5 Générateur infinitésimal

Définition 9 *[6] Le générateur infinitésimal de $S(t)$ est l'opérateur linéaire A défini par :*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \frac{S(h)u - u}{h} \text{ a une limite dans } X \text{ quand } h \longrightarrow 0 \right\}.$$

$$Au = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{S(h)u - u}{h}, \quad \forall u \in D(A).$$

1.6 Solution classique

Soient X un espace de banach, $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un operateur linéaire, et $u : [0, T] \to X$ on dit que u est une solution classique de

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t). \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Si

1. u est continue, et de classe C^1 sur $[0, T]$.
2. $u(t) \in D(A), \forall t \in [0, T]$ et $\frac{du(t)}{dt} = Au(t)$.
3. $u(0) = u_0$.

1.7 bien posé

Définition 10 *Le problème est bien posé si pour toute donnée (second membre, domaine, données au bord, etc .), il admet une solution unique et si cette solution dépend continuement de la donnée.*

Chapitre 2

Etude de l'équation des ondes non dégénérée

2.1 Équation des ondes d'une seule dimension

Modèle mathématique [5]

Soit $I = (a, b)$ un intervalle borné, et soit $T > 0$, considérons le problème suivant, le déplacement transversale infinitésimal d'une corde vibrante :

$$\begin{cases} (u_{tt} - u_{xx})(x,t) = 0, & (x,t) \in I \times (0,T). \\ u(a,t) = v_a(t) \text{ et } u(b,t) = v_b(t), & t \in [0,T]. \\ u(x,0) = u^0(x) \text{ et } u_t(x,0) = u^1(x), & x \in I. \end{cases} \tag{2.1}$$

Où u^0 est le déplacement initial de la corde, u^0 est la vitesse initiale de la corde et v_a, v_b sont des contrôles.

2.1.1 Formulation variationnelle [2]

L'objectif dans cette partie est de transformer l'équation aux dérivées partielles (2.1) a une équation différentielle ordinaire. On multiple donc l'équation (2.1) par la fonction test $\varphi(x)$ qui ne dépend pas du temps t (dépend seulement de la variable spatiale x) :

$$\int_I u_{tt}(x,t)\,\varphi(x)\,dx + \int_I u_{xx}(x,t)\,\varphi(x)\,dx = 0. \tag{2.2}$$

On intègre $u_{xx}(x,t)\,\varphi(x)$ par partie, on trouve

$$\int_I u_{xx}(x,t)\,\varphi(x)\,dx = [u_x(x,t)(\varphi(x))]_a^b - \int_I \varphi_x(x)\,u_x(x,t)\,dx.$$

l'espace pour la fonction test $\varphi(x)$ est $H_0^1(I)$, on introduit alors le produit scalaire de $L^2(I)$ et la forme bilinéaire $a(w,\varphi)$ définie par :

$$\langle w,\varphi\rangle_{L^2(I)} = \int_I w(x)\,\varphi(x)\,dx.$$
$$a(w,\varphi) = -\int_I w_x(x)\,\varphi_x(x)\,dx.$$

On obtient alors la formulation variationnelle

$$\int_I u_{tt}(x,t)\,\varphi(x)\,dx - \int_I \varphi_x(x)\,u_x(x,t)\,dx = 0.$$

Soit un temps final $T > 0$ on a se donne la condition initiales $u_0 \in H_0^1(I)$ et $u_1 \in L^2(I)$ la formulation variationnelle déduite est donc : Trouver une solution u dans

$$u \in C\left([0,T]; H_0^1(I)\right) \cap C^1\left([0,T]; L^2(I)\right),$$

telle que

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}\langle u,\varphi\rangle_{L^2(I)} + a(u,\varphi) = 0, & \forall\varphi \in H_0^1(I), \quad O < t < T. \\ u(x,0) = u^0(x) \text{ et } u_t(x,0) = u^1(x), & x \in I. \end{cases} \tag{2.3}$$

Finalement, la dérivée en temps dans la formulation variationnelle (2.2), doit être prise au sens faible puisqu'a priori la fonction $\langle u(t),\varphi\rangle_{L^2(I)}$n'est qu'une fois dérivable en temps puisqu'elle appartient a $C^1(0,T)$.

Un résultat général

Théorème 3 *[2] Soit $T > 0$ et soit $(u^0,u^1) \in H_0^1(I) \times L^2(I)$, alors le problème (2.3) admet une unique solution u tel que*

$$u \in C\left([0,T]; H^1(I)\right) \cap C^1\left([0,T]; L^2(I)\right).$$

De plus, il excite une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{C\left([0,T],H_0^1(I)\right)} + \|u\|_{C^1([0,T],L^2(I))} \le C\left(\|u_0\|_{H_0^1(I)} + \|u_1\|_{L^2(I)}\right). \tag{2.4}$$

Preuve voir [2] (Analyse numérique et optimisation). ■

2.2 Contrôlabilité du système

Définition 11 *On dit que le système (2.1) est exactement contrôlable dans un temps $T > 0$, si pour toutes les données initiales (u^0,u^1), il existe des fonctions (des contrôles) v_a et v_b telles que la solution de (2.1) vérifie*

$$u(x,T) = u_t(x,T) = 0, \quad x \in I. \tag{2.5}$$

On dit alors que les contrôles v_a et v_b dérive le système vers l'équilibre dans le temps T.

Théorème 4 *[5] Soient $T = b - a$ et $(u^0, u^1) \in H^1(I) \times L^2(I)$ telle que*

$$u^0(a) + u^0(b) + \int_a^b u^1(s)\, ds = 0. \tag{2.6}$$

Alors, il existe un choix unique de fonctions

$$v_a, v_b \in H^1(0,T). \tag{2.7}$$

Tel que la solution de (2.1) vérifie (2.5). De plus, v_a et v_b sont données par les formules

$$2v_a(t) = u^0(a+t) + u^0(a) + \int_a^{a+t} u^1(s)\, ds. \tag{2.8}$$

$$2v_b(t) = u^0(b-t) + u^0(b) + \int_{b-t}^{b} u^1(s)\, ds. \tag{2.9}$$

De plus, la solution u possède la propriété suivante :

$$u(a,t) + u(b,t) + \textstyle\int_a^b u_t(s,t)\, ds = 0, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.10}$$

Preuve En appliquant la formule de dalembert, alors les solutions de (2.1) peuvent être écrites sous la forme

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t), \tag{2.11}$$

telles que :

$$f : (a, b+T) \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ et } \ g : (a-T, b) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

En utilisant les données initiales on obtient

$$u(a,t) = v_a(t) = f(a+t) + g(a-t), \quad t \in [0,T]. \tag{2.12}$$

$$u(b,t) = v_b(t) = f(b+t) + g(b-t), \quad t \in [0,T]. \tag{2.13}$$

$$u(x,0) = u^0(x) = f(x) + g(x), \quad x \in I. \tag{2.14}$$

$$u_t(x,0) = u^1(x) = f'(x) - g'(x), \quad x \in I. \tag{2.15}$$

En intégrant la formule (2.15) on trouve

$$f(x) - g(x) = U^{(1)}(x). \tag{2.16}$$

Ou U^1 est une primitive de u^1.

On somme (2.14) et (2.16), on arrive à

$$2f(x) = u^0(x) + U^1(x), \quad x \in I. \tag{2.17}$$

De plus on soustrait (2.14) de (2.16), il vient

$$2g\,(x) = u^0\,(x) - U^1(x), \quad x \in I, \tag{2.18}$$

d'après (2.12) et (2.17), on conclut que

$$2g\,(a-t) = 2v_a\,(t) - u^0\,(a+t) - U^1\,(a+t)\,, \quad 0 < t < b-a, \tag{2.19}$$

où on a établit un changement de variable

$$x = a + t. \tag{2.20}$$

et on remplace (2.20) dans (2.17), on trouve

$$2f\,(a+t) = u^0\,(a+t) + U^1(a+t), \quad 0 < t < b-a. \tag{2.21}$$

Multiplions (2.12) par 2, on a

$$\begin{aligned} 2v_a\,(t) &= 2f\,(a+t) + 2g\,(a-t)\,, \quad t \in [0,T]\,. \\ 2f\,(a+t) &= 2v_a\,(t) - 2g\,(a-t)\,, \quad t \in [0,T]\,. \end{aligned} \tag{2.22}$$

On remarque que (2.21) égale à (2.22), il s'en suit :

$$u^0\,(a+t) + U^1(a+t) = 2v_a\,(t) - 2g\,(a-t)\,, \quad t \in [0,T]\,. \tag{2.23}$$

Finalement on déduit la formule (2.19).

De même manière, on conclut de (2.13) et (2.18) que

$$2f\,(b+t) = 2v_b\,(t) - u^0\,(b-t) + U^1\,(b-t)\,, \quad 0 < t < b-a. \tag{2.24}$$

Nous pouvons réécrire ces relations sous la forme suivante :

$$2g\,(s) = 2v_a\,(a-s) - (U^1 + u^0)\,(2a-s)\,, \quad 2a-b < s < a. \tag{2.25}$$

$$2f\,(s) = 2v_b\,(s-b) + (U^1 - u^0)\,(2b-s)\,, \quad b < s < 2b-a. \tag{2.26}$$

Les résultats (2.25) et (2.26) sont obtenus d'après les changements de variables $t = a - s$ dans (2.25),et $t = s - b$ dans (2.26). Pour $a < x < b$ et $\max\{x-a, b-x\} < t < b-a$, on a

$$2u\,(x,t) = 2f\,(x+t) + 2g\,(x-t)\,. \tag{2.27}$$

On remplace $2f\,(x+t)$ par la formule (2.26) et $2g\,(x-t)$ par la formule (2.25) on trouve

$$\begin{aligned} 2u\,(x,t) = {} & 2v_b\,(x+t-b) + \left(U^1 - u^0\right)(2b-x-t) \\ & + 2v_a\,(a-x+t) - \left(U^1 + u^0\right)(2a-x-t)\,. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Donc

$$2u\left(x,t\right)=2v_{a}\left(a+t-x\right)+2v_{b}\left(x+t-b\right)\\ -u^{0}\left(2a-x+t\right)-u^{0}\left(2b-x-t\right)+\int_{2a-x+t}^{2b-x-t}u^{1}\left(s\right)ds. \tag{2.29}$$

On a, en particulier

$$u\left(x,t\right)=v_{a}\left(a+t-x\right)+v_{b}\left(x+t-b\right)\\ +\frac{1}{2}\left[-u^{0}\left(2a-x+t\right)-u^{0}\left(2b-x-t\right)+\int_{2a-x+t}^{2b-x-t}u^{1}\left(s\right)ds\right].$$

On remplace t par $b-a$ dans la formule précédente

$$u\left(x,b-a\right)=v_{a}\left(b-x\right)+v_{b}\left(x-a\right)\\ -\frac{1}{2}\left[u^{0}\left(a-x+b\right)+u^{0}\left(b-x+a\right)-\int_{a-x+b}^{b-x-+a}u^{1}\left(s\right)ds\right].$$

Alors

$$u\left(x,b-a\right)=v_{a}\left(b-x\right)+v_{b}\left(x-a\right)-u^{0}\left(a-x+b\right). \tag{2.30}$$

Et

$$u_{t}\left(x,b-a\right)=v_{a}^{\prime}\left(b-x\right)+v_{b}^{\prime}\left(x-a\right)-u_{t}^{0}\left(a-x+b\right).\\ =v_{a}^{\prime}\left(b-x\right)+v_{b}^{\prime}\left(x-a\right)-u^{1}\left(a-x+b\right). \tag{2.31}$$

Ainsi, les conditions finales (2.5) sont équivalentes à

$$u\left(x,b-a\right)=v_{a}\left(b-x\right)+v_{b}\left(x-a\right)-u^{0}\left(a-x+b\right)=0.$$

Il en résulte que

$$u^{0}\left(a-x+b\right)=v_{a}\left(b-x\right)+v_{b}\left(x-a\right).\\ u_{t}\left(x,b-a\right)=v_{a}^{\prime}\left(b-x\right)+v_{b}^{\prime}\left(x-a\right)-u^{1}\left(a-x+b\right)=0. \tag{2.32}$$

Ce qui donne

$$u^{1}\left(a-x+b\right)=v_{a}^{\prime}\left(b-x\right)+v_{b}^{\prime}\left(x-a\right). \tag{2.33}$$

On intègre (2.33), il vient

$$-V^{1}\left(a-x+b\right)=-v_{a}\left(b-x\right)+v_{b}\left(x-a\right), \tag{2.34}$$

tel que V^1 est la primitive de u^1.

On fait la somme et la différence entre (2.32) et (2.34) on obtient respectivement

$$2v_{a}\left(b-x\right)=\left(u^{0}+V^{1}\right)\left(a+b-x\right),\quad x\in I.\\ 2v_{b}\left(x-a\right)=\left(u^{0}-V^{1}\right)\left(a+b-x\right),\quad x\in I.$$

où

$$\begin{aligned} 2v_a(t) &= (u^0 + V^1)(a+t), \quad 0 < t < b-a. \\ 2v_b(t) &= (u^0 - V^1)(b-t), \quad 0 < t < b-a. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Nous introduisons les sous-ensembles H, D, B, G de $I \times (0,T)$ (les lettres signifient "Haut", "Droite", "Bas", "Gauche") définis par

$$\begin{aligned} H &:= \{(x,t) \in I \times (0,T) \quad : t > x-a \text{ et } t > b-x\}. \\ D &:= \{(x,t) \in I \times (0,T) \quad : b-x < t < x-a\}. \\ B &:= \{(x,t) \in I \times (0,T) \quad : t < x-a \text{ et } t < b-x\}. \\ G &:= \{(x,t) \in I \times (0,T) \quad : x-a < t < b-x\}. \end{aligned}$$

On peut facilement déduire de (2.29) et (2.35) les formules suivantes :

$$2u(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{si } (x,t) \in H. \\ (u^0 - V^1)(x-t), & \text{si } (x,t) \in D. \\ u^0(x+t) + u^0(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} u^1(s)\,ds, & \text{si } (x,t) \in B. \\ (u^0 + V^1)(x+t), & \text{si } (x,t) \in G. \end{cases} \tag{2.36}$$

En comparant les limites de ces formules à $t = x-a$ et $t = b-x$, on obtient que pour toute fonction $0 < t < T$, la fonction $x \longrightarrow u(x,t)$ est continue seulement si

$$V^1(a) = u^0(a) \text{ et } V^1(b) = -u^0(b).$$

Par hypothèse (2.6) u^1 a une primitive unique V^1 avec cette propriété. Le choix de V^1 de cette manière, (2.35) suit de (2.8), (2.9), et on déduit de (2.36) que

si $(x,t) \in H$

$$2u(x,t) = 0.$$

Si $(x,t) \in D$

$$\begin{aligned} 2u(x,t) &= \left(u^0 - V^1\right)(x-t) = u^0(x-t) - V^1(x-t). \\ &= u^0(x-t) - V^1(b) + \int_{x-t}^{b} u^1(s)\,ds = u^0(x-t) + u^0(b) + \int_{x-t}^{b} u^1(s)\,ds. \end{aligned}$$

Si $(x,t) \in B$

$$u^0(x+t) + u^0(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} u^1(s)\,ds.$$

Si $(x,t) \in G$

$$\begin{aligned} \left(u^0 + V^1\right)(x+t) &= u^0(x+t) + V^1(x+t) = u^0(x+t) + V^1(a) + \int_a^{x+t} u^1(s)\,ds. \\ &= u^0(x+t) + u^0(a) + \int_a^{x+t} u^1(s)\,ds. \end{aligned}$$

On résume ce qui précède comme suit

$$2u\left(x,t\right)=\begin{cases}0, & \text{si } \left(x,t\right)\in H.\\ u^{0}\left(x-t\right)+u^{0}\left(b\right)+\int_{x-t}^{b}u^{1}\left(s\right)ds, & \text{si } \left(x,t\right)\in D.\\ u^{0}\left(x+t\right)+u^{0}\left(x-t\right)+\int_{x-t}^{x+t}u^{1}\left(s\right)ds, & \text{si } \left(x,t\right)\in B.\\ u^{0}\left(x+t\right)+u^{0}\left(a\right)+\int_{a}^{x+t}u^{1}\left(s\right)ds & \text{si } \left(x,t\right)\in G.\end{cases} \tag{2.37}$$

■

Remarque 1 *Le problème (2.1) est exactement contrôlable si $T>b-a$. En effet, il suffit de conduire le système à se reposer dans le temps $b-a$, puis prolonge les fonctions de contrôle v_a, v_b par zéro pour $b-a<t<T$. Puisque*

$$v_a(b-a)=v_b(b-a)=0,$$

par (2.6), (2.8) et (2.9), la propriété (2.7) reste valide.

Chapitre 3

Observabilité d'équation des ondes dégénérée

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques notations, la notion de l'équation des ondes dégénérée, le paramètre de dégénérescence μ_a, les espaces fonctionnels et les hypothèses et nous considérons le double problème, prouvons bien posé et prouvons l'inégalité directe ainsi que la propriété d'observabilité des limites pour $\mu_a \in [0, 2[$.

3.1 Notation

3.1.1 Équation des ondes dégénérée

Définition 12 *Équation des ondes dégénérée c'est une équation aux dérivées partielles d'ordre deux s'écrit sous la forme suivante*

$$u_{tt} - (a(x) u_x)_x = 0, \quad \forall (t, x) \in]0, \infty[\times]0, 1[, \tag{3.1}$$

telle que a est une fonction positive sur$]0, 1]$ *avec* $a(0) = 0$.

3.1.2 Paramètre de dégénerexence

La dégénerexence de (3.1) a $x = 0$ est mesurée par le paramètre

$$\mu_a := \sup_{0<x\leq 1} \frac{x |a'(x)|}{a(x)}.$$

On dit que l'équation des ondes dégénérée faiblement si $\mu_a \in [0,1[$ et dégeneré fortement si $\mu_a > 1$.

3.1.3 Espaces fonctionnels

On introduit maintenant quelques espaces fonctionnels qui seront utilisés par la suite, on définit

L'espace $V_a^1(0,1)$

$$V_a^1(0,1) = \begin{cases} (i) \;\; u \in L^2(0,1). \\ (ii) \;\; u \text{ est localement absolument continue dans }]0,1]. \\ (iii) \;\; \sqrt{a u_x} \in L^2(0,1). \end{cases} \tag{3.2}$$

$V_a^1\ (0,1)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{1,a} = \int_0^1 \left(a\left(x\right) u'\left(x\right) v'\left(x\right) + u\left(x\right) v\left(x\right)\right) dx, \quad \forall u, v \in V_a^1(0,1).$$

Dont la norme est :

$$\|u\|_{1,a} = \left\{\int_0^1 \left(a\left(x\right)\left|u'\left(x\right)\right|^2 + \left|u\left(x\right)\right|^2\right) dx\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in V_a^1(0,1).$$

Et le semi norme

$$|u|_{1,a} = \left\{\int_0^1 a\left(x\right)\left|u'\left(x\right)\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in V_a^1(0,1).$$

En fait, $|u|_{1,a}$ est une norme équivalente sur le sous-espace fermé de $V_{a,0}^1(0,1)$ défini comme

$$V_{a,0}^1(0,1) = \left\{u \in V_a^1(0,1) : u\left(1\right) = 0\right\}.$$

L'espace $V_a^2\ (0,1)$

$$V_a^2\ (0,1) = \left\{u \in V_a^1\ (0,1) : au' \in H^1\ (0,1)\right\}.$$

Note que si $u \in V_a^2(0,1)$, alors au' est continue sur $[0,1]$.

L'espace $H_a^1(0,1)$

$$H_a^1(0,1) = \left\{u \in V_{a,0}^1\left(0,1\right) \text{ telles que } u(0) = 0 \text{ quand } \mu_a \in [0,1[\right\}.$$

L'espace $H_a^2(0,1)$

$$H_a^2(0,1) = V_a^2(0,1) \cap H_a^1(0,1).$$

Notons que toutes les fonctions $u \in H_a^2(0,1)$ satisfont à des conditions de frontières homogènes à $x = 0$ et $x = 1$. Ces conditions sont de type Dirichlet lorsque $\mu_a \in [0,1[$, et de type Neumann /Dirichlet à $x = 0$ et $x = 1$ respectivement, lorsque $\mu_a \in [1,2[$.

L'espace $H_a^{-1}(0,1)$

On définie $H_a^{-1}(0,1)$ Comme l'espace dual de $H_a^1(0,1)$.

Hypothèses

Soit $a \in C([0,1]) \cap C^1(]0,1])$,une fonction vérifie les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_1 : a(x) > 0 \ \forall x \in]0,1], \text{ et } a(0) = 0. \\ H_2 : \mu_a := \sup\limits_{0<x\leq 1} \dfrac{x\,|a'(x)|}{a(x)} < 2. \\ H_3 : a \in C^{[\mu_a]}([0,1]). \end{cases} \tag{3.3}$$

Où [.] représente la partie entière.

Remarque 2 *Nous présentons ci-dessous quelques conséquences simples de (3.3).*

1. En intégrant l'inégalité

$$sa'(s) \leq \mu_a a(s).$$

sur $[x,1]$ on trouve

$$a(x) \geqslant a(1)\, x^{\mu_a}. \quad \forall s \in]0,1].$$

Preuve

$$sa'(s) \leq \mu_a a(s).$$
$$\frac{\mu_a}{s} \geqslant \frac{a'(s)}{a(s)}.$$

En intégrant l'inégalité précédent sur $[x,1]$ on trouve

$$\mu_a \int_x^1 \frac{ds}{s} = \mu_a [\ln s]_x^1 = -\mu_a \ln x = \ln \frac{1}{x^{\mu_a}} \geqslant \int_x^1 \frac{a'(s)}{a(s)} ds = [\ln a(s)]_x^1 = \ln \frac{a(1)}{a(x)},$$

donc

$$\frac{1}{x^{\mu_a}} \geqslant \frac{a(1)}{a(x)}.$$
$$1 \geqslant \frac{x^{\mu_a} a(1)}{a(x)}.$$
$$a(x) \geqslant a(1)\, x^{\mu_a}. \quad \forall s \in]0,1]. \tag{3.4}$$

Par conséquent, $\dfrac{1}{a} \in L^1(0,1)$ lorsque $\mu_a \in [0,1[$. ■

Proposition 2 *supposons (3.3) alors*

$$\|u\|^2_{L^2(0,1)} \leq C_a\, |u|^2_{1,a} \quad \forall u \in V^1_{a,0}(0,1). \tag{3.5}$$

Ou

$$C_a = \frac{1}{a(1)} \min\left\{4, \frac{1}{2-\mu_a}\right\}. \tag{3.6}$$

Preuve Soit $u \in V_{a,0}^{1}(0,1)$ nous allons prouver deux limites différentes pour $\|u\|_{L^2(0,1)}^2$ en terme de $|u|_{1,a}^2$. La conclusion (3.5) suivra en prend le minimum des deux constante correspondante : premièrement, pour tout $x \in]0,1]$ on a :

$$|u(x)| = |u(x) - u(1)| = [u(x)]_x^1 = \left| \int_x^1 u'(s)\, ds \right|.$$

Et on exploitant la définition de semi norme $|u|_{1,a}$, on obtient

$$\begin{aligned} |u|_{1,a} &\leq \left(\int_x^1 a(s)\, ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^1 |u'(s)|\, ds \right). \\ &\leq \left(\int_x^1 a(s)\, ds \right)^{\frac{1}{2}} (|u(1)| - |u(x)|), \quad \forall u \in V_{a,0}^1(0,1). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$|u(x)|^2\, dx \leq |u|_{1,a}^2 \int_x^1 \frac{ds}{a(s)}.$$

$$\int_0^1 |u(x)|^2\, dx \leq |u|_{1,a}^2 \int_0^1 dx \int_x^1 \frac{ds}{a(s)}.$$

le théorème de Fubini implique :

$$\int_0^1 |u(x)|^2\, dx \leq |u|_{1,a}^2 \int_x^1 \frac{ds}{a(s)} \int_0^s dx = |u|_{1,a}^2 \int_x^1 \frac{s}{a(s)} ds. \tag{3.7}$$

L'identité (3.4) et le fait que $a(s) \geqslant a(1)\, s^{\mu_a}$ donnent

$$\int_0^1 \frac{s}{a(s)} ds \leq \int_0^1 \frac{s}{a(1)\, s^{\mu_a}} ds = \frac{1}{a(1)} \int_0^1 s^{1-\mu_a} ds.$$

Les considérations précédentes permettent d'écrire :

$$\int_0^1 |u(x)|^2\, dx = \|u\|_{L^2(0,1)} \leq |u|_{1,a}^2 \int_x^1 \frac{s}{a(s)} ds \leq \frac{|u|_{1,a}^2}{a(1)} \int_0^1 s^{1-\mu_a} ds.$$

Et comme :

$$\int_0^1 s^{1-\mu_a} ds = \left[\frac{s^{2-\mu_a}}{2-\mu_a} \right]_0^1 = \frac{1}{2-\mu_a}.$$

On obtient

$$\|u\|_{L^2(0,1)} = \frac{|u|_{1,a}^2}{a(1)} \frac{1}{2-\mu_a}, \quad \forall u \in V_{a,0}^1(0,1). \tag{3.8}$$

On a pour tout $x \in]0,1[$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_x^1 \left(s u'(s) + \frac{1}{2} u(s) \right)^2 ds, \\ &\leq \int_x^1 \left(s^2 |u'(s)|^2 + \frac{1}{4} |u(s)|^2 + s u'(s)\, u(s) \right) ds, \\ &\leq \int_x^1 \left(s^2 |u'(s)|^2 + \frac{1}{4} |u(s)|^2 \right) ds + \int_x^1 s u'(s)\, u(s)\, ds. \end{aligned}$$

Comme :

$$su(s)\,u'(s) = \frac{s}{2}\frac{d}{ds}u^2(s) = \frac{s}{2}\left(u^2(s)\right)'.$$

On peut écrie :

$$\int_x^1 \frac{s\left(u^2(s)\right)'}{2}ds = \int_x^1 \frac{-u^2(s) + \left(su^2(s)\right)'}{2}ds = -\int_x^1 \frac{u^2(s)}{2}ds + \frac{u^2(1)}{2} - \frac{x}{2}u^2(x).$$

On trouve alors

$$\begin{aligned}&\int_x^1 \left(s^2\left|u'(s)\right|^2 + \frac{1}{4}\left|u(s)\right|^2\right)ds + \int_x^1 su'(s)\,u(s)\,ds. \\ &= \int_x^1 \left(s^2\left|u'(s)\right|^2 - \frac{1}{4}\left|u(s)\right|^2\right)ds - \frac{1}{2}x\left|u(x)\right|^2.\end{aligned} \tag{3.9}$$

En passant à la limite quand $x \longrightarrow 0$, par (3.4) on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|u(s)\right|^2 ds &\leq 4\int_0^1 s^2\left|u'(s)\right|^2 ds. \\ &\leq 4\int_0^1 s^{\mu_a}\left|u'(s)\right|^2 ds. \\ &\leq \frac{4}{a(1)}\int_0^1 a(s)\left|u'(s)\right|^2 ds. \quad \forall u \in V_{a,0}(0,1).\end{aligned} \tag{3.10}$$

La conclusion découle de (3.8) et (3.10) ■

Exemple 1 *Soit $\theta \in]0,2[$ on définit*

$$a(x) = x^{\theta}, \quad \forall x \in [0,1]. \tag{3.11}$$

Telle que la fonction a vérifie l'hypothèse (3.3), dans ce cas, nous avons

$$\|u\|^2_{L^2(0,1)} \leq \min\left\{4, \tfrac{1}{2-\theta}\right\}|u|^2_{1,a}, \quad \forall u \in V_{a,0}(0,1). \tag{3.12}$$

Proposition 3 *Supposons que (3.3) est satisfaite, les propriétés suivantes sont vraies.*

(I) *Pour tout $u \in V_a^1(0,1)$*

$$\lim_{x \longrightarrow 0} xu^2(x) = 0. \tag{3.13}$$

$$u^2(1) \leq \max\left\{2, \frac{1}{a(1)}\right\}\|u\|^2_{1,a}. \tag{3.14}$$

De plus, Si $\mu_a \in [0,1[$, alors u est absolument continue dans $[0,1]$.

(II) *Pour tout $u \in V_a^2(0,1)$*

$$\lim_{x \longrightarrow 0} xa(x)\,u'(x)^2 = 0. \tag{3.15}$$

Pour tout $u \in V_a^2(0,1)$ *et* $\phi \in V_a^1(0,1)$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} a(x)\,\phi(x)\,u'(x) = 0. \tag{3.16}$$

Avec

$$\phi(x) = 0 \text{ lorsque } \mu_a \in [0,1[.$$

(III) *Si* $\mu_a \in [1,2[$, *alors pour tout* $u \in V_a^2(0,1)$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} a(x)\,u'(x) = 0. \tag{3.17}$$

Preuve (I) Soit $u \in V_a^1(0,1)$ On va montrer que

$$v(x) := \begin{cases} xu^2(x), & 0 < x \leq 1. \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Est continue sur $[0,1]$. En effet, v est localement absolument continue dans $]0,1]$ et

$$v'(x) = u^2(x) + 2xu'(x)\,u(x), \quad \forall x \in [0,1].$$

Maintenant, le second nombre au-dessus est en $L^1(0,1)$ parce que $u \in L^2(0,1)$, grâce à (3.4),

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 u'(x)^2\,dx &\leq \int_0^1 x^{\mu_a} |u'(s)|^2\,ds, \quad \forall u \in V_{a,0}(0,1). \\ &\leq \frac{1}{a(1)} \int_0^1 a(s)\,|u'(s)|^2\,ds, \quad \forall u \in V_{a,0}(0,1). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Comme : $\lim_{x \longrightarrow 0} v(x) =: L$, alors $u^2(x) \sim \dfrac{L}{x}$. Ensuite, nous avons

$$\begin{aligned} v(1) = u^2(1) &= \int_0^1 \left(u^2(x) + 2xu'(x)\,u(x)\right) dx. \\ &= \int_0^1 u^2(x)\,dx + \int_0^1 (2xu'(x)\,u(x))\,dx. \\ &\leq 2\int_0^1 u^2(x)\,dx + \int_0^1 \left(x^2\,|u'(x)|^2\right) dx. \end{aligned}$$

Car

$$\int_0^1 2(xu'(x)\,u(x))\,dx = \int_0^1 x\frac{d}{dx}u^2(x) = \int_0^1 x\left(u^2(x)\right)' dx \leq \int_0^1 x^2\left(u^2(x)\right)' dx.$$

Donc

$$u^2(1) \leq 2\int_0^1 u^2(x)\,dx + \frac{1}{a(1)}\int_0^1 a(x)\,|u'(x)|^2\,dx.$$

En vue de (3.18). En plus, supposons que $\mu_a \in [0,1[$, alors

$$u'(x) = \frac{1}{\sqrt{a(x)}}\sqrt{a(x)\,u'(x)}, \quad \forall x \in]0,1].$$

Est sommable sur $(0,1)$ grâce à remarque 3 et (3.2). Donc, u est absolument continu dans $[0,1]$.

(II) Soit $u \in V_a^2(0,1)$. Nous affirmons que

$$v(x) = \begin{cases} xa(x)\, u'(x)^2, & 0 < x \leq 1. \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Est continue sur $[0,1]$. En effet, v est localement absolument continue dans $]0,1]$ et

$$\begin{aligned} v'(x) &= a(x)u'(x)^2 + xa'(x)u'(x)^2 + 2xa(x)u'(x)u''(x). \\ &= a(x)u'(x)^2 + 2xu'(x)(a(x)u'(x))' - xa'(x)u'(x)^2. \end{aligned}$$

Remarquez que le premier terme ci-dessus est sommable sur $[0,1]$ en vue de (3.2), La même chose est vraie pour la deuxième parce que, par (3.4)

$$x\,|u'(x)| \leq x^{\frac{\mu_a}{2}}\,|u'(x)| \leq \sqrt{\frac{a(x)}{a(1)}}\,|u'(x)|\,, \quad \forall x \in \left]0,1\right].$$

En ce qui concerne le troisième terme, en raison de (3.3)

$$x\,|a'(x)|\, u'(x)^2 \leq \mu_a a(x)u'(x)^2, \quad \forall x \in \left]0,1\right].$$

Et le second membre ci-dessus est sommable en vue de (3.3). Alors, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} v(x) =: L$, existe et doit disparaître, autrement $a(x)u^2(x) \sim \dfrac{L}{x}$. (Proche de zéro) ne serait pas sommable. Ceci conclut la preuve de (3.15).

(III) Ensuite, nous allons prouver (3.17) en notant que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} a(x)u'(x) =: L$, existe parce que $u \in V_a^2\,(0,1)$ et $a(x)u'(x)^2 \tilde{}\ \dfrac{L^2}{a(x)}$, (proche de zéro) ne serait pas sommable.

Enfin, pour montrer (3.16), on commence par prouver que la fonction

$$w(x) = \begin{cases} a(x)\phi(x)u'(x), & 0 < x \leq 1. \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Est continue sur $[0,1]$,

$$w'(x) = a(x)\phi'(x)u'(x) + \phi(x)\left(a(x)u'(x)\right)'.$$

Est sommable sur $[0,1]$. Par conséquent, la limite

$$\lim_{x \longrightarrow 0} w(x) =: L.$$

Existe et

$$a(x)\,|\phi(x)u'(x)| \sim |L|\,,$$

proche de 0. Nous devons maintenant distinguer deux cas.

Si $\mu_a \in [0,1[$ et $\phi(0) = 0$. La conclusion est immédiate.

D'autre part, Si $\mu_a \in [1,2[$, alors, en raison de (3.17),

$$\begin{aligned} a(x)\,|u'(x)| &= \left|\int_0^x (a(x)u'(x))'\,dx\right|. \\ &\leq \sqrt{x}\,\left\|(au')'\right\|_{L^2(0,1)}, \quad \forall x \in \left]0,1\right]. \end{aligned}$$

Si $L \neq 0$, alors, dans un voisinage de 0,

$$\begin{aligned} \frac{|L|}{2} &\leq a(x)\,|\phi(x)u'(x)|. \\ &\leq \sqrt{x}\,\left\|(au')'\right\|_{L^2(0,1)} |\phi(x)|, \quad \forall x \in \left]0,1\right]. \end{aligned}$$

Contrairement au fait que. ■

3.2 Observabilité

Soit a vérifie l'hypothèse (3.3), Soit $\mu_a \in [0,2[$. Considérons l'équation des ondes dégénérée

$$u_{tt} - (a\,(x)\,u_x)_x = 0, \quad (t,x) \in \left]0,\infty\right[\times \left]0,1\right[. \tag{3.19}$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} u\,(t,1) = 0, & 0 < t < \infty. \\ u\,(t,0) = 0, & \text{si } \mu_a \in [0,1[. \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0} a\,(x)\,u_x\,(t,x) = 0, & \text{si } \mu_a \in [1,2[. \end{cases} \tag{3.20}$$

Et les conditions initiales

$$\begin{cases} u\,(0,x) = u_0\,(x)\,, & x \in \left]0,1\right[. \\ u_t\,(0,x) = u_1\,(x)\,. \end{cases}$$

Nous rappelons que, puisque l'équation (3.19) est dégénérée, Différentes conditions aux limites doivent être imposées à $x = 0$ selon que l'on s'intéresse à :

1. Le cas faiblement dégénéré $\mu_a \in [0,1[$, où, en vue de la Proposition 3_(I), nous avons que la condition de frontière de Dirichlet $u(t,0) = 0$ a un sens pour toute solution.

2. Le cas fortement dégénéré $\mu_a \in [1,2[$, où, en vue de la Proposition 3_(II), nous avons que la condition de limite de Neumann $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} a\,(x)\,u_x\,(t,x) = 0$ est vérifié par toute solution classique.

3.2.1 Bien-posé

Considérons l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_0 = H_a^1(0,1) \times L^2(0,1)$, avec le produit scalaire

$$\langle (u,v), (\tilde{u},\tilde{v}) \rangle = \int_0^1 (v(x)\tilde{v}(x) + a(x)u'(x)\tilde{u}'(x))\,dx, \quad \forall (u,v), (\tilde{u},\tilde{v}) \in \mathcal{H}_0.$$

En se basant sur l'équation des ondes classique, on peut montrer que l'opérateur non borné

$$A : D(A) \subset \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_0,$$

défini par

$$\begin{cases} D(A) = H_a^2(0,1) \times H_a^1(0,1), & \forall (u,v) \in D(A). \\ A(u,v) = \left(v, (au')'\right). \end{cases}$$

Est dissipative maximale sur $\mathcal{H}_0$. Par conséquent, A est le générateur d'un semi-groupe de contraction dans $\mathcal{H}_0$, noté par e^{tA}. Pour toute

$$U_0 := (u_0, v_0) \in \mathcal{H}_{0,} \quad U(t) := e^{tA}U_0.$$

C'est la solution mild du problème de Cauchy

$$\begin{cases} U'(t) = AU(t), & t \geqslant 0. \\ U(0) = U_0. \end{cases}$$

Lorsque $U_0 \in D(A)$, la solution $U(t)$ est classique dans le sens que

$$U \in C^1([0,\infty[\,;\mathcal{H}_0) \cap C([0,\infty[\,;D(A)).$$

Et l'équation se vérifie sur $[0,\infty[$.

3.2.2 Solution classique

Définition 13 *[1] Si $(u_0,u_1) \in H_a^2(0,1) \times H_a^1(0,1)$, alors u est la solution classique de (3.19)–(3.20) signifiant que*

$$u \in C^2\left([0,\infty[\,;L^2(0,1)\right) \cap C^1\left([0,\infty[\,;H_a^1(0,1)\right) \cap C\left([0,\infty[\,;H_a^2(0,1)\right),$$

et (3.19) est satisfaite pour tout $t \in [0,\infty[$ et $x \in [0,1]$.

3.2.3 Solution Mild

Définition 14 *[1] Soit $(u_0,u_1) \in H_a^1(0,1) \times L^2(0,1)$, on dit que la fonction*

$$u \in C^1\left([0,\infty[\,;L^2(0,1)\right) \cap C\left([0,\infty[\,;H_a^1(0,1)\right).$$

Est la solution mild du problème (3.19)–(3.20) si

$$(u(t), v(t)) = e^{tA}(u_0,v_0), \quad t \geqslant 0.$$

Énergie de la solution mild

Définition 15 *L'énergie d'une solution mild u de (3.19) est la fonction continue définie par*

$$E_u(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{u_t^2(t,x) + a(x)\,u_x^2(t,x)\right\} dx, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{3.21}$$

Proposition 4 *Supposons (3.3) et soit u la solution mild de (3.19)–(3.20). Alors*

$$E(t) = E(0), \quad \forall t \geqslant 0. \tag{3.22}$$

Preuve Supposons d'abord que u soit une solution classique de (3.19). Puis, en multipliant l'équation par u_t et intégrant par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 u_t(t,x)\left\{u_{tt}(t,x) - \left(a(x)\,u_x(t,x)\right)_x\right\} dx. \\
&= \int_0^1 u_t(t,x)\,u_{tt}(t,x)\,dt - \int_0^1 u_t(t,x)\left(a(x)\,u_x(t,x)\right)_x dx. \\
&= \int_0^1 u_t(t,x)\,u_{tt}(t,x)\,dt - \left[a(x)\,u_t(t,x)\,u_x(t,x)\right]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 a(x)\,u_x(t,x)\,u_{tx}(t,x)\,dx. \\
&= \underbrace{\int_0^1 \left\{u_t(t,x)\,u_{tt}(t,x) + a(x)\,u_x(t,x)\,u_{tx}(t,x)\right\} dx}_{=\frac{d}{dt}E_u(t)} - \left[a(x)\,u_t(t,x)\,u_x(t,x)\right]_{x=0}^{x=1}.
\end{aligned}$$

.En notant que les termes limites disparaissent en raison des conditions aux limites dans les deux cas faiblement et fortement dégénérés, nous concluons que l'énergie de E est constante. ■

3.2.4 Observabilité frontière

Lemme 1 *Pour toute solution mild u de (3.19) nous avons que $u_x(.,1) \in L^2(0,T)$ pour tout $T \geqslant 0$ et*

$$a(1)\int_0^T u_x^2(t,1)dt \leq \left(6T + \frac{1}{\min\{1, a(1)\}}\right) E_u(0). \tag{3.23}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
a(1)\int_0^T u_x^2(t,1)dt &= \int_0^T \int_0^1 \left\{u_t^2(t,x) + \left(a(x) - xa'(x)\right) u_x^2(t,x)\right\} dtdx \\
&+ 2\left[\int_0^1 x u_x(t,x) u_t(t,x) dx\right]_{t=0}^{t=T}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Preuve Supposons d'abord $(u_0, u_1) \in H_a^2(0,1) \times H_a^1(0,1)$. De sorte que u est une solution classique de (3.19). Ensuite, en multipliant l'équation (3.19) par xu_x et en intégrant sur $]0,T[\,\times]0,1[$

on obtient

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^T \int_0^1 x u_x(t,x)\left(u_{tt}(t,x) - (a(x)u_x(t,x))_x\right) dxdt. \qquad (3.25)\\
&= \left[\int_0^1 x u_x(t,x) u_t(t,x)\, dx\right]_{t=0}^{t=T} - \int_0^T \int_0^1 x u_{tx}(t,x) u_t(t,x)\, dxdt\\
&- \int_0^T \int_0^1 \left(x a'(x) u_x^2(t,x) + x a(x) u_x(t,x) u_{xx}(t,x)\right) dxdt.\\
&= \left[\int_0^1 x u_x(t,x) u_t(t,x)\, dx\right]_{t=0}^{t=T} - \int_0^T \int_0^1 \left(x a'(x) u_x^2(t,x)\right) dxdt\\
&- \int_0^T \int_0^1 x\left(\frac{u_t^2(t,x)}{2}\right)_x + x a(x)\left(\frac{u_x^2(t,x)}{2}\right)_x dxdt.
\end{aligned}$$

Nous procédons à l'intégration par parties des deux derniers termes ci-dessus. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^1 x\left(\frac{u_t^2(t,x)}{2}\right)_x dxdt &= \int_0^T \left[x \frac{u_t^2(t,x)}{2}\right]_{x=0}^{x=1} dt \qquad (3.26)\\
&- \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^1 \left(u_t^2(t,x)\right) dxdt.\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^T \int_0^1 \left(u_t^2(t,x)\right) dxdt.
\end{aligned}$$

car $x u_t^2(t,x)$ disparaît à $x = 1$ et, en raison de (3.13), également à $x = 0$. De plus, en raison de (3.15), nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^1 x a(x)\left(\frac{u_x^2(t,x)}{2}\right)_x dxdt &= \frac{1}{2}\int_0^T \left[x a(x) \frac{u_x^2(t,x)}{2}\right]_{x=0}^{x=1} dt \qquad (3.27)\\
&- \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^1 (x a(x))' u_x^2(t,x)\, dxdt.\\
&= \frac{1}{2}\int_0^T a(1)\left(u_x^2(t,1)\right) dt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^1 (x a(x))' u_x^2(t,x)\, dxdt.
\end{aligned}$$

Ensuite, l'identité (3.24) suit par insertion (3.26) et (3.27) en (3.25)

$$\left[\int_0^1 x u_x(t,x) u_t(t,x)\, dx\right]_{t=0}^{t=T} - \int_0^T \int_0^1 \left(x a'(x) u_x^2(t,x)\right) dxdt$$

$$\begin{aligned}
&- \int_0^T \int_0^1 x\left(\frac{u_t^2(t,x)}{2}\right)_x + x a(x)\left(\frac{u_x^2(t,x)}{2}\right)_x dxdt.\\
&= \left[\int_0^1 x u_x(t,x) u_t(t,x)\, dx\right]_{t=0}^{t=T} - \frac{3}{2}\int_0^T \int_0^1 \left(x a'(x) u_x^2(t,x)\right) dxdt\\
&+ \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^1 \left(u_t^2(t,x)\right) dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T a(1)\left(u_x^2(t,1)\right) dt.
\end{aligned}$$

Ensuite, rappel (3.4) pour obtenir

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 xu_x(t,x)\,u_t(t,x)\,dx\right| &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{x^2u_x^2(t,x)+u_t^2(t,x)\right\}dx. \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{x^2\left(\frac{a(x)\,u_x^2(t,x)}{a(x)}\right)+u_t^2(t,x)\right\}dx. \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{\left(a(x)\,u_x^2(t,x)\right)\frac{1}{a(x)}+u_t^2(t,x)\right\}dx. \\ &\leq \frac{1}{\min\{1,a(1)\}}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\int_0^1 \left\{\left(a(x)\,u_x^2(t,x)\right)+u_t^2(t,x)\right\}dx\right)}_{E_u(t)}. \\ &\leq \frac{E_u(o)}{\min\{1,a(1)\}}.\end{aligned} \tag{3.28}$$

Maintenant, nous déduisons (3.23) de (3.24), (3.28), l'inégalité

$$x\,|a'(x)| \leq 2a(x),$$

et la constance de l'énergie. La conclusion a donc été prouvée pour les solutions classiques.

Afin d'étendre (3.23) et (3.24) à la solution mild associée à la donnée initiale

$$(u_0,u_1)\in H_a^1(0,1)\times L^2(0,1),$$

il suffit de rapprocher ces données par

$$(u_0^n,u_1^n)\in H_a^2(0,1)\times H_a^2(0,1),$$

et utiliser (3.23) pour montrer que les dérivés normales des solutions classiques donnent une suite de Cauchy dans $L^2(0,T)$. ■

Lemme 2 *Pour toute solution mild u de (3.19) nous avons que, pour tout $T>0$*

$$\int_0^T\int_0^1 \left\{a(x)u_x^2(t,x)-u_t^2(t,x)\right\}dtdx+\left[\int_0^1 u(t,x)\,u_t(t,x)\,dx\right]_{t=0}^{t=T}=0. \tag{3.29}$$

Preuve On suppose u une solution classique de (3.19). En multipliant l'équation (3.19) par u

$$u(t,x)\left(u_{tt}(t,x)-\left(a(x)\,u_x(t,x)\right)_x\right)=0.$$

Et en intégrant sur $]0,T[\times]0,1[$ on obtient

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^T\int_0^1 u(t,x)\left(u_{tt}(t,x)-\left(a(x)\,u_x(t,x)\right)_x\right)dxdt. \\ &= \left[\int_0^1 u(t,x)\,u_t(t,x)\,dx\right]_{t=0}^{t=T}-\int_0^T\int_0^1 u_t^2(t,x)\,dxdt \\ &\quad -\underbrace{\int_0^T \left[a(x)\,u(t,x)\,u_x(t,x)\right]_{x=0}^{x=1}dt}_{=0}+\int_0^T\int_0^1 \left(a(x)\,u_x^2(t,x)\right)dxdt. \\ &= \left[\int_0^1 u(t,x)\,u_t(t,x)\,dx\right]_{t=0}^{t=T}+\int_0^T\int_0^1 \left\{a(x)u_x^2(t,x)-u_t^2(t,x)\right\}dtdx.\end{aligned}$$

La conclusion découle de l'identité ci-dessus parce que $a(x)\,u(t,x)\,u_x(t,x)$ s'annule à $x=1$ et, en raison de (3.16), également en $x=0$. Un argument de rapprochement permet d'étendre la conclusion de solutions milds. ■

Inégalité d'observabilité

Théorème 5 *Supposons (3.3) et soit u la solution mild de (3.19)–(3.20). Alors, pour tout $T>0$,*

$$a(1)\int_0^T u_x^2(t,1)\,dt \geqslant \left\{(2-\mu_a)\,T - \frac{4}{\min\{1,a(1)\}} - 2\mu_a\sqrt{C_a}\right\} E_u(0)\,. \tag{3.30}$$

Où

$$C_a = \frac{1}{a(1)}\min\left\{4, \frac{2}{2-\mu_a}\right\}.$$

Preuve Supposons u est une solution classique de (3.19). En ajoutant ou second membre de (3.24) le premier membre de (3.29) multiplié par $\frac{\mu_a}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned}
a(1)\int_0^T u_x^2(t,1)dt &= \int_0^T\int_0^1 \left\{u_t^2(t,x) + (a(x)-xa'(x))\,u_x^2(t,x)\right\}dtdx \\
&+ 2\left[\int_0^1 xu_x(t,x)u_t(t,x)dx\right]_{t=0}^{t=T} \\
&+ \underbrace{\frac{\mu_a}{2}\int_0^T\int_0^1 \left\{a(x)u_x^2(t,x) - u_t^2(t,x)\right\}dtdx + \left[\int_0^1 u(t,x)\,u_t(t,x)\,dx\right]_{t=0}^{t=T}}_{=0}. \\
&= 2\left[\int_0^1 xu_x(t,x)u_t(t,x)dx\right]_{t=0}^{t=T} + \frac{\mu_a}{2}\left[\int_0^1 u(t,x)\,u_t(t,x)\,dx\right]_{t=0}^{t=T} \\
&+ \int_0^T\int_0^1 u_t^2(t,x) + a(x)u_x^2(t,x) - xa'(x)u_x^2(t,x) + \frac{\mu_a}{2}a(x)u_x^2(t,x) \\
&- \frac{\mu_a}{2}u_t^2(t,x)\,dtdx.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_0^1 u_t^2(t,x) + a(x)u_x^2(t,x) - xa'(x)u_x^2(t,x) + \frac{\mu_a}{2}a(x)u_x^2(t,x) - \frac{\mu_a}{2}u_t^2(t,x)\,dtdx \\
&= \int_0^T\int_0^1 u_t^2(t,x) + a(x)u_x^2(t,x)dxdt + \frac{\mu_a}{2}\int_0^T\int_0^1 u_t^2(t,x)\,a(x)u_x^2(t,x)\,dtdx \\
&- \int_0^T\int_0^1 xa'(x)u_x^2(t,x)dxdt. \\
&= +2\int_0^T\left(\frac{1}{2}\int_0^1 u_t^2(t,x) + a(x)u_x^2(t,x)dx\right)dt - \mu_a\int_0^T\left(\frac{1}{2}\int_0^1 u_t^2(t,x)\,a(x)u_x^2(t,x)\,dx\right)dt \\
&- \int_0^T\int_0^1 xa'(x)u_x^2(t,x)dxdt.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_0^T E_u(0)\,dt - \mu_a \int_0^T E_u(0)\,dt - \int_0^T\int_0^1 xa'(x)u_x^2(t,x)dxdt. \\
&\geqslant (2-\mu_a)\,T E_u(0)\,.
\end{aligned}
$$

Où nous avons utilisé l'inégalité

$$xa'(x) \leq \mu_a a(x).$$

Et la constance de l'énergie. La conclusion découle de l'inégalité ci-dessus rappelant (3.28) et en observant que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left|\int_0^1 u(t,x)\,u_t(t,x)\,dx\right| &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{C_a}}u^2(t,x) + \sqrt{C_a}u_t^2(t,x)\right)dx. \\
&\leq \sqrt{C_a}E_u(0)\,.
\end{aligned}
$$

■

Définition 16 *On dit que l'équation (3.19) observable dans le temps $T > 0$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(u_0, u_1) \in H_a^1(0,1) \times L^2(0,1)$ la solution mild de (3.19)–(3.20) satisfait*

$$\int_0^T u_x^2(t,1)\,dt \geqslant CE_u(0)\,. \tag{3.31}$$

Constante d'observabilité

Définition 17 *Toute constante satisfaisante (3.31) est appelée constante d'observabilité pour (3.19) dans le temps T. Le supremum de toutes les constantes d'observabilité pour (3.19) est noté par C_T. De façon équivalente, (3.19) est observable si*

$$C_T = \inf_{(u_0,u_1)\neq(0,0)} \frac{\int_0^T u_x^2(t,1)\,dt}{E_u(0)} > 0.$$

Remarque 3 *L'inverse $C_T = \dfrac{1}{C_T}$ est appelé le coût de l'observabilité (ou le coût du contrôle) dans le temps T.*

Corollaire 1 *Supposons (3.3). Puis (3.19) est observable dans le temps T à condition que*

$$T > T_a := \frac{4}{(2-\mu_a)\min\{1, a(1)\}} + 2\mu_a\sqrt{C_a}.$$

Dans ce cas

$$C_T \geqslant \frac{1}{a(1)}\left\{(2-\mu_a)\,T - \frac{4}{\min\{1, a(1)\}} - 2\mu_a\sqrt{C_a}\right\}.$$

Chapitre 4

Contrôlabilité et stabilisation d'équation des ondes dégénérée

Introduction

Le but de ce chapitre est réservé à l'étude de la contrôlabilité exacte. Nous considérons le problème de stabilisation des limites et prouvons son bien posé, ainsi que sa stabilité exponentielle.

4.1 Contrôlabilité

Nous considérons le système dégénéré contrôlé suivant

$$y_{tt} - (a(x)\, y_x)_x = 0, \quad \forall (x,t) \in \left]0,\infty\right[\times \left]0,1\right[. \tag{4.1}$$

Avec les conditions aux limites suivant :

$$\begin{cases} y(t,1) = f, & 0 < t < \infty. \\ y(t,0) = 0, & \text{si } \mu_a \in [0,1[. \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0} a(x)\, y_x(t,x) = 0, & \text{si } \mu_a \in [1,2[. \end{cases} \tag{4.2}$$

Et les conditions initiales :

$$\begin{cases} y(0,x) = y_0(x), & x \in \left]0,1\right[. \\ y_t(0,x) = y_1(x). \end{cases}$$

Où $f \in L^2(0,T)$ est la fonction de contrôle. La solution de ce système est définie par la transposition.

4.1.1 Solution par transposition

Définition 18 *soit $f \in L^2_{loc}(0,\infty)$ et soit $(y_0, y_1) \in L^2(0,1) \times H_a^{-1}(0,1)$, être fixé arbitrairement. On dit que y est une solution par transposition de (4.1)–(4.2) si*

$$y \in C^1\left([0,\infty[\,, H_a^{-1}(0,1)\right) \cap C\left([0,\infty[\,, L^2(0,1)\right),$$

satisfait pour tout $T > 0$,$\forall \left(w_T^0, w_T^1\right) \in H_a^1(0,1) \times L^2(0,1)$

$$\begin{aligned} \left\langle y'(T), w_T^0 \right\rangle_{H_a^{-1}(0,1), H_a^1(0,1)} - \int_0^1 y(T)\, w_T^1 dx = \left\langle y_1, w(0) \right\rangle_{H_a^{-1}(0,1), H_a^1(0,1)} \\ - \int_0^1 y_0 w'(0) + \int_0^T f(t)\, w_x(t,1)\, dt \end{aligned} \tag{4.3}$$

Où w est la solution de l'équation

$$w_{tt} - \left(a(x)\, w_x\right)_x = 0 \text{ dans }]0,\infty[\times]0,1[\,. \tag{4.4}$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} w(t,1) = 0, & 0 < t < \infty. \\ w(t,0) = 0, & si\ \mu_a \in [0,1[\,. \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0} a(x)\, w_x(t,x) = 0, & si\ \mu_a \in [1,2[\,. \end{cases} \tag{4.5}$$

et les conditions finales :

$$\begin{cases} w(T,x) = w_T^0(x), & x \in]0,1[\,. \\ w_t(T,x) = w_T^1(x)\,. \end{cases}$$

Notons que grâce au changement de variable

$$u(t,x) = w(T-t,x).$$

Et à nos résultats précédents, Le problème (4.4) admet une solution unique

$$w \in C^1\left([0,\infty[\,, L^2(0,1)\right) \cap C\left([0,\infty[\,, H_a^1(0,1)\right).$$

De plus, cette solution dépend continûment

$$W^T =: \left(w_T^0, w_T^1\right) \in H_a^1(0,1) \times L^2(0,1)\,.$$

Et l'énergie E_w de w est conservée dans le temps. Maintenant grâce à l'inégalité directe (3.23), nous avons

$$\int_0^T w_x^2(t,1)\, dt \leq D_T E_w(0) = D_T E_w(T)\,.$$

Ainsi, le second nombre de (4.3) définit une forme linéaire continue par rapport à $(w_T^0, w_T^1) \in H_a^1(0,1) \times L^2(0,1)$. Par conséquent, il existe une unique solution par transposition

$$y \in C^1\left([0,\infty[\,, H_a^{-1}(0,1)\right) \cap C\left([0,\infty[\,, L^2(0,1)\right),$$

de (4.3).

4.1.2 Contrôlabilité exacte

Définition 19 *Soit*

$$(y_0, y_1) \in L^2(0,1) \times H_a^{-1}(0,1), \text{ et } \left(y_0^T, y_1^T\right) \in L^2(0,1) \times H_a^{-1}(0,1).$$

S'il existe un contrôle $f \in L^2(0,T)$ tel que la solution de (4.1) satisfait

$$(y, y_t)(T, .) \equiv \left(y_0^T, y_1^T\right)(.) = (0,0).$$

on dit que (4.1) est exactement contrôlable dans $L^2(0,1) \times H_a^{-1}(0,1)$.

Par linéarité et réversibilité, on peut vérifier que

$$\left(y_0^T, y_1^T\right)(.) = (0,0).$$

Considérons la forme bilinéaire Λ

$$\Lambda\left(W^T, V^T\right) =: \int_0^T w_x(t,1)\, v_x(t,1)\, dt, \quad \forall W^T, V^T \in H_a^1(0,1) \times L^2(0,1).$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy Λ est continue. De plus, grâce à l'inégalité d'observabilité (3.30) Λ est coercive pour $T > T_a$. Nous définissons également l'application linéaire continue

$$l\left(W^T\right) := \langle y_1, w(0)\rangle_{H_a^{-1}(0,1), H_a^1(0,1)} - \int_0^1 y_0 w'(0)\, dx, \quad \forall W^T \in H_a^1(0,1) \times L^2(0,1).$$

L est continue sur l'espace de Hilbert $H_a^1(0,1) \times L^2(0,1)$, on peut appliquer le théoreme de Lax-Milgram. Ceci implique qu'il existe un unique $W_T \in H_a^1(0,1) \times L^2(0,1)$ tel que

$$\Lambda\left(W^T, V^T\right) = -l\left(V^T\right).$$

On définit $f = w_x(t,1)$ et on note y la solution par transposition de (4.3). Ensuite nous avons

$$\begin{aligned}\Lambda\left(W^T, V^T\right) &= \int w_x(t,1)\, v_x(t,1)\, dt = \int_0^T f(t)\, v_x(t,1)\, dt.\\ &= -\langle y_1, v(0)\rangle_{H_a^{-1}(0,1), H_a^1(0,1)} + \int_0^1 y_0 v'(0)\, dx.\end{aligned}$$

D'autre part, par définition des solutions de transposition, nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t)\, v_x(t,1)\, dt = {}& \left\langle y'(T), v_T^0\right\rangle_{H_a^{-1}(0,1), H_a^1(0,1)} - \int_0^1 y(T)\, v_T^1 dx \\ & - \langle y_1, v(0)\rangle_{H_a^{-1}(0,1), H_a^1(0,1)} + \int_0^1 y_0 v'(0)\, dx,\end{aligned} \tag{4.6}$$

ainsi, en comparant ces deux dernières relations, on en déduit

$$\langle y'(T), v_T^0\rangle_{H_a^{-1}(0,1), H_a^1(0,1)} - \int_0^1 y(T)\, v_T^1 dx = 0, \quad \forall \left(v_T^0, v_T^1\right) \in H_a^1(0,1) \times L^2(0,1).$$

Ainsi, nous avons

$$(y, y')(T, .) \equiv (0,0) \text{ sur } (0,1).$$

4.2 Stabilisation

Soit a vérifié l'hypothèse (3.3), soit $\mu_a \in [0,2[$. Considérons l'équation des ondes dégénérée avec l'amortissement des limites

$$u_{tt} - (a(x)u_x)_x = 0, \quad (t,x) \in]0,T[\times]0,1[\, . \tag{4.7}$$

Avec

$$\begin{cases} u_t(t,1) + u_x(t,1) + \beta u(t,1) = 0. \\ u(0,x) = u_0(x). \\ u_t(0,x) = u_1(x). \end{cases} \text{et} \begin{cases} u(t,0) = 0, & \text{si } \mu_a \in [0,1[\, . \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0} a(x) u_x u(t,x) = 0, & \text{si } \mu_a \in [1,2[\, . \end{cases} \tag{4.8}$$

Où $\beta > 0$ est donné.

4.2.1 Bien-posé

Soit

$$W_a^1(0,1) = \begin{cases} V_a^1(0,1), & \text{si } \mu_a \in [1,2[\, . \\ V_a^1(0,1) \; \forall u \in V_a^1(0,1) \text{ telles que } u(0) = 0, & \text{si } \mu_a \in [0,1[\, . \end{cases}$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} W_a^2(0,1) &= V_a^2(0,1) \cap W_a^1(0,1), & \text{si } \mu_a \in [0,1[\, . \\ W_a^2(0,1) &= V_a^2(0,1), & \text{si } \mu_a \in [1,2[\, . \end{aligned}$$

Considérons l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\beta = W_a^1(0,1) \times L^2(0,1)$, avec le produit scalaire

$$\begin{aligned} \langle (u,v), (\tilde{u},\tilde{v}) \rangle = & \int_0^1 (v(x)\tilde{v}(x) + a(x)u'(x)\tilde{u}'(x))\, dx \\ & + a(1)\beta u(1)\tilde{u}(1), \quad \forall (u,v), (\tilde{u},\tilde{v}) \in \mathcal{H}_\beta. \end{aligned}$$

Et l'opérateur non borné $A_\beta : D(A_\beta) \subset \mathcal{H}_\beta \to \mathcal{H}_\beta$ défini par

$$\begin{cases} D(A_\beta) = \{(u,v) \in W_a^2(0,1) \times W_a^1(0,1) : u'(1) + v(1) + \beta u(1) = 0\} \, . \\ A_\beta(u,v) = \left(v, (au')'\right) \quad \forall (u,v) \in D(A_\beta) \, . \end{cases}$$

On note que $u'(1)$, $v(1)$ et $\beta u(1)$ sont bien définis pour tout $(u,v) \in W_a^2(0,1) \times W_a^1(0,1)$.

Proposition 5 *Supposons (3.3). Alors A_β est un opérateur dissipatif maximal sur $\mathcal{H}$.*

Preuve Soit $(u,v) \in D(A_\beta)$. alors

$$\begin{aligned}
\langle A_\beta (u,v), (u,v)\rangle &= \int_0^1 \left((au')' v + au'v'\right) dx + a(1)\beta u(1) v(1). \\
&= \int_0^1 (au')' v dx + \int_0^1 au'v' dx + a(1)\beta u(1) v(1). \\
&= [au'v]_0^1 - \int_0^1 au'v'dx + [au'v]_0^1 - \int_0^1 (au')' vdx + a(1)\beta u(1) v(1). \\
&= 2[au'v]_0^1 - \int_0^1 au'v'dx - [au'v]_0^1 + \int_0^1 au'v'dx + a(1)\beta u(1) v(1). \\
&= [au'v]_0^1 + a(1)\beta u(1) v(1). \\
&= a(1) u'(1) v(1) + a(1)\beta u(1) v(1). \\
&= a(1) v(1) (u'(1) + \beta u(1)) = -a(1) v^2(1) \leq 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, A_β est dissipatif.

Pour montrer que A_β est la dissipative maximale, pour tout $(f,g) \in \mathcal{H}_\beta$, il faut résoudre le problème

$$\begin{cases} (u,v) \in D(A_\beta). \\ v = u - f. \\ u - (au')' = f + g. \end{cases} \tag{4.9}$$

Considérons la forme bilinéaire $b : W_a^1(0,1) \times W_a^1(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$b(u,\phi) = \int_0^1 (u\phi + au'\phi') dx + (\beta+1) a(1) u(1) \phi(1),$$

et la forme linéaire $L : W_a^1(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$L\phi = \int_0^1 (f+g)\phi dx + a(1)\phi(1) f(1).$$

b est une forme bilinéaire continue et L est une fonction linéaire continue sur $W_a^1(0,1)$. De plus, puisque $\beta > 0$, b est également coercive sur $W_a^1(0,1) \times W_a^1(0,1)$. Ainsi, par le théorème de Lax-Milgram, il existe une solution unique $u \in W_a^1(0,1)$ du problème variationnel

$$b(u,\phi) = L\phi, \quad \forall \phi \in W_a^1(0,1). \tag{4.10}$$

Nous montrons que $(u,v) \in D(A_\beta)$ et permet de résoudre (4.9) comme suit. On note $C_c^\infty(0,1)$ l'espace des fonctions à support compact en $(0,1)$. Depuis $C_c^\infty(0,1) \subset W_a^1(0,1)$, nous avons

$$\textstyle\int_0^1 (u\phi + au'\phi') dx = \int_0^1 (f+g)\phi dx, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(0,1).$$

Donc par dualité, on a

$$u - (au')' = f + g.$$

Dans le sens des distributions. Ainsi $u \in W_a^2(0,1)$ et

$$u - (au')' = f + g.$$

Ainsi, on déduit après une intégration par parties avec (3.16) que

$$\int_0^1 u\phi dx + \int_0^1 au'\phi' dx - a(1)\, u'(1)\, \phi(1) = \int_0^1 (f+g)\, \phi dx, \quad \forall \phi \in W_a^1(0,1).$$

Ceci combiné avec (4.10) rendements

$$a(1)\,\phi(1)\,(u'(1) + (\beta+1)\, u(1) - f(1)) = 0, \quad \forall \phi \in W_a^1(0,1).$$

Puisque $a(1) > 0$ et la fonction ϕ définie par $\phi(x) = x$ pour tout $x \in (0,1)$ est dans $W_a^1(0,1)$ on en déduit

$$u'(1) + (\beta+1)\, u(1) - f(1) = 0.$$

En définissant $v = u - f$, on vérifie $(u,v) \in D(A_\beta)$ et on résout (4.9).

Par conséquent, A_β est le générateur d'un semi-groupe de contraction dans $\mathcal{H}_\beta$, noté par e^{tA}.

$$U(t) := e^{tA_\beta} U_0, \qquad \forall U_0 = (u_0, u_1) \in \mathcal{H}_\beta,$$

peut être considérée comme la solution faible du problème de Cauchy

$$\begin{cases} U'(t) = A_\beta U(t), \quad t > 0. \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{4.11}$$

De plus, la solution ci-dessus est classique lorsque $U_0 \in D(A_\beta)$. Nous avons donc le résultat suivant. ■

Corollaire 2 *Supposons (3.3). Alors, pour tout $U_0 = (u_0, u_1) \in D(A_\beta)$, le problème (4.11) a une solution unique $U \in C^1([0,\infty[, \mathcal{H}_\beta) \cap C([0,\infty[, D(A_\beta))$, donnée par*

$$U(t) = e^{tA_\beta} U_0.$$

De plus, on définit

$$U(t) = (u(t), v(t)).$$

Nous avons :

- U est la solution unique du problème (4.7)−(4.8) telle que

$$u \in C^2\left([0,\infty[, L^2(0,1)\right) \cap C^1\left([0,\infty[, W_a^1(0,1)\right) \cap C\left([0,\infty[, W_a^2(0,1)\right).$$

- L'énergie de u définie par

$$E_u(t) =: \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \left(u_t^2 + au_x^2\right)dx + \beta a(1)\, u^2(t,1)\right]. \tag{4.12}$$

Satisfait

$$\frac{dE_u}{dt}(t) = -a(1)\, u_t^2(t,1) \leq 0, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{4.13}$$

Nous allons avoir besoin des résultats suivants dans la suite.

Proposition 6 *Supposons (3.3). Alors*

$$\|u\|_{L^2(0,1)}^2 \leq 2\,|u(1)|^2 + C_a'\,|u|_{1,a}^2, \quad \forall u \in W_a^1(0,1). \tag{4.14}$$

Où

$$C_a' = \frac{1}{a(1)}\min\left\{4, \frac{2}{2-\mu_a}\right\}. \tag{4.15}$$

Supposons en outre que $\beta > 0$. Alors, notons $|||.|||_{1,a}$, la norme définie par

$$|||u|||_{1,a} = \left(|u|_{1,a}^2 + \beta a(1)\, u^2(1)\right)^{\frac{1}{2}}, \quad u \in W_a^1(0,1).$$

Nous avons

$$|||u|||_{1,a}^2 \geqslant \alpha_a\,\|u\|_{L^2(0,1)}^2, \quad \forall u \in W_a^1(0,1). \tag{4.16}$$

Où

$$\alpha_a = \min\left(\frac{1}{C_a'}, \frac{\beta a(1)}{2}\right) > 0.$$

De plus, nous avons

$$\frac{\alpha_a}{\alpha_a+1}\left(\|u\|_{1,a}^2 + \beta\alpha(1)\, u^2(1)\right) \leq |||u|||_{1,a}^2 \leq \gamma_a\,\|u\|_{1,a}^2, \quad \forall u \in W_a^1(0,1). \tag{4.17}$$

Où

$$\gamma_a = \max\left(2\beta a(1), 1 + \frac{2\beta}{2-\mu_a}\right).$$

Preuve La conclusion (4.14) suivra en prenant le minimum des deux constantes correspondantes. Tout d'abord, pour tout $x \in]0,1]$ nous avons que

$$|u(x) - u(1)| = \left|\int_x^1 u'(s)\,ds\right| \leq |u|_{1,a}\left\{\int_x^1 \frac{ds}{a(s)}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent, en procédant comme dans la preuve de (3.7), nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^1 |u(x) - u(1)|^2\,dx &\leq |u|_{1,a}^2 \int_0^1 dx \int_x^1 \frac{ds}{a(s)} = |u|_{1,a}^2 \int_0^1 \frac{s}{a(s)}ds. \\ &\leq \frac{|u|_{1,a}^2}{a(1)(2-\mu_\alpha)}.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Depuis
$$\int_0^1 |u(x)|^2 dx \le 2|u(1)|^2 + 2\int_0^1 |u(x)-u(1)|^2 dx.$$
Nous en déduisons par (4.18) la première borne ci-dessus
$$\|u\|^2_{L^2(0,1)} \le 2|u(1)|^2 + \frac{2|u|^2_{1,a}}{a(1)(2-\mu_a)}, \quad \forall u \in W^1_a(0,1). \tag{4.19}$$
Ensuite, observez que, pour tout $x \in]0,1[$
$$\begin{aligned}
0 &\le \int_x^1 \left(su'(s) + \frac{1}{2}u(s)\right)^2 ds.\\
&= \int_x^1 \left(s^2|u'(s)|^2 + \frac{1}{4}|u(s)|^2 + su(s)u'(s)\right) ds.\\
&= \int_x^1 \left(s^2|u'(s)|^2 - \frac{1}{4}|u(s)|^2\right) ds + \frac{1}{2}u^2(1) - \frac{1}{2}x|u(x)|^2.
\end{aligned}$$
Par conséquent, en prenant la limite comme $x \longrightarrow 0$, par (3.3) et (3.13), nous obtenons la deuxième limite annoncée :
$$\begin{aligned}
\int_0^1 |u(s)|^2 ds &\le 2u^2(1) + 4\int_0^1 s^2|u'(s)|^2 ds.\\
&\le 2u^2(1) + \frac{4}{a(1)}\int_0^1 a(s)|u'(s)|^2 ds, \quad \forall u \in W^1_a(0,1).
\end{aligned} \tag{4.20}$$
L'inégalité (4.14) découle de (4.19) et (4.20).

Nous avons
$$\begin{aligned}
|||u|||^2_{1,a} &\geqslant \min\left(\frac{1}{C'_a}, \frac{\beta a(1)}{2}\right)\left(2u^2(1) + C'_a|u|^2_{1,a}\right).\\
&\geqslant \alpha_a \|u\|^2_{L^2(0,1)}. \quad \forall u \in W^1_a(0,1).
\end{aligned}$$
L'écriture
$$1 = \frac{\alpha_\alpha}{\alpha_\alpha + 1} + \frac{1}{\alpha_\alpha + 1},$$
et en utilisant l'inégalité ci-dessus, nous obtenons
$$|||u|||^2_{1,a} \geqslant \frac{\alpha_\alpha}{\alpha_\alpha+1}|||u|||^2_{1,a} + \frac{\alpha_\alpha}{\alpha_\alpha+1}\|u\|^2_{L^2(0,1)}, \quad \forall u \in W^1_a(0,1).$$
Cela donne le premier membre de (4.17).

D'autre part
$$\begin{aligned}
|u(1)|^2 &\le 2\int_0^1 |u(x)|^2 dx + 2\int_0^1 |u(x)-u(1)|^2 dx.\\
&\le 2\|u\|^2_{L^2(0,1)} + \frac{2|u|^2_{1,a}}{a(1)(2-\mu_a)}.
\end{aligned}$$

Cela donne l'inégalité

$$\begin{aligned}|||u|||_{1,a}^2 &\leq 2\beta a\left(1\right)\left\|u\right\|_{L^2(0,1)}^2 + \left(1+\frac{2\beta}{2-\mu_a}\right)|u|_{1,a}^2 . \\ &\leq \max\left(2\beta a\left(1\right), 1+\frac{2\beta}{2-\mu_a}\right)\left\|u\right\|_{1,a}^2 .\end{aligned}$$

On obtient l'inégalité juste (4.17). ■

Proposition 7 *Supposons (3.3) et que $\beta > 0$ est donné. Ensuite, le problème variationnel*

$$\int_0^1 az'\phi' dx + \beta a\left(1\right) z\left(1\right)\phi\left(1\right) = \lambda a\left(1\right)\phi\left(1\right), \quad \forall \phi \in W_a^1\left(0,1\right). \tag{4.21}$$

Admet une unique solution $z \in W_a^1(0,1)$ qui satisfait les estimations suivantes :

$$|||z|||_{1,a}^2 \leq \frac{a\left(1\right)}{\beta}\lambda^2. \tag{4.22}$$

$$\left\|z\right\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \frac{a\left(1\right)}{\beta\alpha_a}\lambda^2.$$

De plus $z \in W_a^2(0,1)$ et résout

$$\begin{cases} -\left(az'\right)' = 0. \\ z'\left(1\right) + \beta z\left(1\right) = \lambda. \end{cases} \tag{4.23}$$

Preuve Nous désignons par $\tilde{b}$ la forme bilinéaire sur $W_a^1(0,1)$ définie par

$$\tilde{b}\left(z,\phi\right) =: \int_0^1 az'\phi' dx + \beta a\left(1\right) z\left(1\right)\phi\left(1\right), \quad z,\phi \in W_a^1\left(0,1\right).$$

$\tilde{b}$ est une forme bilinéaire continue symétrique et coercitive sur $W_a^1(0,1)$ et la forme linéaire $\tilde{L}$ définie par

$$\tilde{L}\phi =: \lambda a(1)\phi(1), \quad \forall \phi \in W_a^1(0,1),$$

est continu. Par conséquent, grâce au théorème de Lax-Milgram, le problème variationnel ci-dessus admet une solution unique $z \in W_a^1(0,1)$. Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}|||z|||_{1,a}^2 = |z|_{1,a}^2 + \beta a\left(1\right) z^2\left(1\right) &= \int_0^1 a\left(x\right)\left(z'\left(x\right)\right)^2 dx + \beta a\left(1\right) z^2\left(1\right) \\ = \tilde{b}\left(z,z\right) = \lambda a\left(1\right) z\left(1\right) &\leq \frac{\sqrt{a\left(1\right)}}{\sqrt{\beta}}\left|\lambda\right| |||z|||_{1,a} .\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$|||z|||_{1,a}^2 \leq \frac{a\left(1\right)}{\beta}\lambda^2.$$

Avec (4.16)

$$\alpha_\alpha \left\|z\right\|_{L^2(0,1)}^2 \leq |||z|||_{1,a}^2 \leq \frac{a\left(1\right)}{\beta}\lambda^2 \implies \left\|z\right\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \frac{a\left(1\right)}{\alpha_\alpha\beta}\lambda^2.$$

Nous montrons que $z \in W_a^2(0,1)$ et résout (4.23). ■

4.2.2 Stabilité exponentielle

Théorème 6 *[1] Supposons (3.3) et que $\beta > 0$ est donné. Ensuite, pour tout $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}_\beta$, la solution de (4.7)–(4.8). Satisfait à la décroissance exponentielle uniforme*

$$E_u(t) \leq E_u(0)\, e^{\frac{1-t}{M_{\alpha,\beta}}}, \quad \forall t \in [M_{\alpha,\beta}, +\infty). \tag{4.24}$$

Où $M_{a,\beta} > 0$ est donné dans (4.40) et est indépendant de (u_0, u_1).

Preuve Soit $U_0 = (u_0, u_1) \in D(A_\beta)$ et U soit la solution du problème (4.11). Ensuite, nous rappelons ce paramètre comme ci-dessus $U(t) = (u(t), v(t))$, Nous avons que u c'est la solution du problème (4.7) −(4.8). Nous multiplions (4.7) par xu_x et intégrons l'équation sur $(S,T) \times (0,1)$.

$$\int_S^T \int_0^1 xu_x u_{tt} - xu_x\left(a(x)\,u_x\right)_x dxdt = 0.$$

Cela donne après des intégrations par partie

$$\int_S^T \int_0^1 \left(-x\left(\frac{u_t^2}{2}\right)_x + a(x)\,u_x^2 + xa(x)\left(\frac{u_x^2}{2}\right)_x\right) dxdt + \left[\int_0^1 xu_x u_t dx\right]_S^T - \int_S^T \left[xau_x^2\right]_0^1 dt = 0.$$

Nous nous intégrons par partie encore deux fois. On trouve

$$\int_S^T \int_0^1 \left(\frac{u_t^2}{2} + (a - xa')\frac{u_x^2}{2}\right) dxdt + \left[\int_0^1 xu_x u_t dx\right]_S^T - \frac{1}{2}\int_S^T \left(\left[xau_x^2\right]_0^1 + \left[xu_t^2\right]_0^1\right) dt = 0.$$

Maintenant, nous rappelons que $u(t,.) \in W_a^2(0,1)$ et $u_t(t,.) \in W_a^1(0,1)$ pour chaque $t > 0$. Par conséquent, puisque $W_a^p(0,1) \subset V_a^p(0,1)$ pour $p = 1, 2$ et grâce à la proposition 3 (propriétés (I) et (II)), nous avons

$$\left(xu_t^2(t,x)\right)_{|x=0} = 0.$$
$$\left(xa(x)\,u_x^2(t,x)\right)_{|x=0} = 0.$$

En utilisant ces deux relations dans l'équation ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\int_S^T \int_0^1 \left(\frac{u_t^2}{2} + (a - xa')\frac{u_x^2}{2}\right) dxdt + \left[\int_0^1 xu_x u_t dx\right]_S^T \\ &- \frac{1}{2}\int_S^T \left(a(1)\,u_x^2(t,1) + u_t^2(t,1)\right) dt = 0. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Nous multiplions (4.7) par u et intégrons l'équation sur $(S,T) \times (0,1)$. Cela donne après une intégration par partie

$$\int_S^T \int_0^1 \left(-u_t^2 + au_x^2\right) dxdt + \left[\int_0^1 uu_t dx\right]_S^T - \int_S^T \left[au_x u\right]_0^1 dt = 0.$$

En utilisant maintenant la proposition 3, nous avons

$$\left(a(x)\,u(t,x)\,u_x(t,x)\right)_{|x=0} = 0,$$

pour que

$$\int_S^T\int_0^1\left(-u_t^2+au_x^2\right)dxdt+\left[\int_0^1 uu_tdx\right]_S^T-\int_S^T a\left(1\right)u_x\left(t,1\right)u\left(t,1\right)dt=0. \tag{4.26}$$

Nous combinons maintenant (4.25) multiplié par 2 avec (4.26) multiplié $\frac{\mu_\alpha}{2}$. Cela donne

$$\begin{aligned}&\int_S^T\int_0^1\left[2-\mu_\alpha\right]\frac{u_t^2}{2}+\left[2\left(a-xa'\right)+a\mu_\alpha\right]u_x^2dxdt+2\left[\int_0^1 xu_xu_tdx\right]_S^T+\frac{\mu_\alpha}{2}\left[\int_0^1 uu_tdx\right]_S^T\\&-\int_S^T a\left(1\right)u_x^2\left(t,1\right)+u_t^2\left(t,1\right)dt-\frac{\mu_\alpha}{2}\int_S^T a\left(1\right)u_x\left(t,1\right)u\left(t,1\right)dt=0.\end{aligned} \tag{4.27}$$

D'aprés la condition

$$u_t\left(t,1\right)+u_x\left(t,1\right)+\beta u\left(t,1\right)=0.$$

On trouve

$$u_x\left(t,1\right)=-\beta u\left(t,1\right)-u_t\left(t,1\right). \tag{4.28}$$

on remplace (4.28) dans (4.27) il vient

$$\begin{aligned}&\int_S^T\int_0^1\left(2-\mu_\alpha\right)\frac{u_t^2}{2}+\left(2\left(a-xa'\right)+a\mu_\alpha\right)u_x^2dxdt++a\left(1\right)\beta\left[-\beta+\frac{\mu_\alpha}{2}\right]\int_S^T u^2\left(t,1\right)dt\\&=-2\left[\int_0^1 xu_xu_tdx\right]_S^T-\frac{\mu_\alpha}{2}\left[\int_0^1 uu_tdx\right]_S^T+\int_S^T\left[a\left(1\right)+1\right]u_t^2\left(t,1\right)dt\\&-\int_S^T\left[-2\beta+\frac{\mu_\alpha}{2}\right]a\left(1\right)u_t\left(t,1\right)u\left(t,1\right)dt\end{aligned}$$

On a

$$\left[-\beta+\frac{\mu_\alpha}{2}\right]=\frac{2-\mu_a}{2}-\left(1+\beta-\mu_a\right).$$

Finalement on trouve

$$\begin{aligned}&\int_S^T\int_0^1\left[\left(2-\mu_a\right)\frac{u_t^2}{2}+\left[2\left(a-xa'\right)+a\mu_a\right]\frac{u_x^2}{2}\right]dxdt+\frac{2-\mu_a}{2}\beta a\left(1\right)\int_S^T u^2\left(t,1\right)dt\\&=-2\left[\int_0^1 xu_xu_tdx\right]_S^T-\frac{\mu_a}{2}\left[\int_0^1 u_tudx\right]_S^T+\int_S^T h\left(t\right)dt.\end{aligned} \tag{4.29}$$

Où la fonction h est donnée par

$$\begin{aligned}h\left(t\right)&=\left(1+a\left(1\right)\right)u_t^2\left(t,1\right)+a\left(1\right)\beta\left(1+\beta-\mu_a\right)u^2\left(t,1\right)\\&+\left(2\beta-\frac{\mu_a}{2}\right)a\left(1\right)u_t\left(t,1\right)u\left(t,1\right),\quad t\in\left(S,T\right).\end{aligned} \tag{4.30}$$

Par définition de μ_a, nous avons

$$\left(2-\mu_a\right)a\leq 2\left(a-xa'\right)+a\mu_a.$$

Avec (4.29), donne

$$\int_S^T \int_0^1 \left[(2-\mu_a) \frac{u_t^2}{2} + [(2-\mu_a) a] \frac{u_x^2}{2} \right] dxdt + \frac{2-\mu_a}{2} \beta a(1) \int_S^T u^2(t,1)\, dt$$
$$\leq -2 \left[\int_0^1 x u_x u_t dx \right]_S^T - \frac{\mu_a}{2} \left[\int_0^1 u_t u dx \right]_S^T + \int_S^T h(t)\, dt.$$

Puis on a

$$(2-\mu_a) \int_S^T \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 u_t^2 + a u_x^2 dx + \beta a(1) u^2(t,1)}_{E_u(t)} dt \leq -2 \left[\int_0^1 x u_x u_t dx \right]_S^T - \frac{\mu_a}{2} \left[\int_0^1 u_t u dx \right]_S^T$$
$$+ \int_S^T h(t)\, dt$$

donc

$$(2-\mu_a) \int_S^T E_u(t)\, dt \leq - \left[\int_0^1 2 x u_x u_t + \frac{\mu_a}{2} u_t u dx \right]_S^T + \int_S^T h(t)\, dt, \quad \forall 0 \leq S \leq T. \tag{4.31}$$

D'autre part, nous avons

$$\left(2\beta - \frac{\mu_a}{2}\right) u_t(t,1)\, u(t,1) \leq \frac{1}{2} \left(\left(2\beta - \frac{\mu_a}{2}\right)^2 u^2(t,1) + u_t^2(t,1) \right).$$

On remplace le seconde nombre dans (4.30)

$$h(t) \leq (1 + a(1))\, u_t^2(t,1) + a(1)\, \beta (1 + \beta - \mu_a)\, u^2(t,1) + \frac{a(1)}{2} \left(\left(2\beta - \frac{\mu_a}{2}\right)^2 u^2(t,1) + u_t^2(t,1) \right).$$
$$\leq \left(1 + \frac{3}{2} a(1)\right) u_t^2(t,1) + a(1) \left(\beta(1 + \beta - \mu_a) + \frac{1}{2} \left(2\beta - \frac{\mu_a}{2}\right)^2 \right) u^2(t,1).$$

On trouve donc

$$h(t) \leq \eta_1 u_t^2(t,1) + \eta_2 a(1)\, u^2(t,1), \quad t \in (S,T). \tag{4.32}$$

Où

$$\eta_1 = \left(1 + \frac{3}{2} a(1)\right), \text{ et } \eta_2 = \left[\beta(1 + \beta - \mu_a) + \frac{1}{2} \left(2\beta - \frac{\mu_a}{2}\right)^2 \right].$$

Nous avons aussi

$$\int_0^1 \left| 2 x u_x u_t + \frac{\mu_a}{2} u_t u \right| dx \leq \int_0^1 \frac{1}{2} \left[2\left(x^2 u_x^2 + u_t^2\right) + \frac{\mu_a}{2} \left(u_t^2 + u^2\right) \right].$$
$$\leq \int_0^1 \left[x^2 u_x^2 + \left(1 + \frac{\mu_a}{4}\right) u_t^2 + \frac{\mu_a}{4} u^2 \right] dx.$$

En utilisant (3.18) avec (4.14), on en déduit que

$$\int_0^1 \left| 2 x u_x u_t + \frac{\mu_a}{2} u_t u \right| dx \leq \int_0^1 \left[\left(1 + \frac{\mu_a}{4}\right) u_t^2 + \left(\frac{1}{a(1)} + \frac{\mu_a}{4} C_a' \right) a u_x^2 + \frac{\mu_a}{2} u^2(1) \right] dx.$$
$$\leq C_a'' E_u(t).$$

où

$$C_a'' = 2\max\left(1+\frac{\mu_a}{4}, \frac{1}{a\left(1\right)}+\frac{\mu_a}{4}C_a', \frac{\mu_a}{2\beta a\left(1\right)}\right).$$

En utilisant cette inégalité avec (4.32) dans (4.31), on obtient

$$\begin{aligned}(2-\mu_a)\int_S^T E_u\left(t\right)dt \leq C_a''\left(E_u\left(S\right)+E_u\left(T\right)\right)+\eta_1\int_S^T u_t^2\left(t,1\right)dt\\ +\eta_2\int_S^T a\left(1\right)u^2\left(t,1\right)dt.\end{aligned} \tag{4.33}$$

En utilisant la relation de (4.13), il vient

$$\frac{\eta_1}{a\left(1\right)}\int_S^T a\left(1\right)u_t^2\left(t,1\right)dt = \frac{\eta_1}{a\left(1\right)}\left[E_u\left(t\right)\right]_S^T.$$

On remplace le seconde membre dans (4.33), on déduit que

$$\begin{aligned}(2-\mu_a)\int_S^T E_u\left(t\right)dt &\leq C_a''\left(E_u\left(S\right)+E_u\left(T\right)\right)+\frac{\eta_1}{a\left(1\right)}\left(E_u\left(S\right)-E_u\left(T\right)\right)\\ &\quad +\eta_2\int_S^T a\left(1\right)u^2\left(t,1\right)dt.\\ &\leq \left(2C_a''+\frac{\eta_1}{a\left(1\right)}\right)E_u\left(S\right)+\eta_2\int_S^T a\left(1\right)u^2\left(t,1\right)dt.\end{aligned} \tag{4.34}$$

Nous estimons maintenant le dernier terme de cette inégalité comme suit. Ensemble $\lambda = u(t,1)$ et désignent par z la solution du problème (4.23).

Remarque 4 *on peut vérifiée facilement que si z solution de problème (4.23) alors z_t est aussi solution de (4.23).*

Nous multiplions (4.7) par z et intégrons l'équation sur $(S,T)\times(0,1)$. Cela donne après des intégrations par partie

$$\int_S^T a\left(1\right)u^2\left(t,1\right)dt = \int_S^T\int_0^1 u_t z_t dx dt - a\left(1\right)\int_S^T u_t\left(t,1\right)z\left(t,1\right)dt - \left[\int_0^1 u_t z dx\right]_S^T. \tag{4.35}$$

Nous estimons les termes du second membre dans cette inégalité, comme suit. Tout d'abord, grâce à la deuxième inégalité en (4.22), nous avons

$$\|z_t\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \frac{a\left(1\right)}{\beta\alpha_a}u_t\left(t,1\right)^2. \tag{4.36}$$

De plus, grâce à la première inégalité dans (4.22) on a

$$||\ z\ |||_{1,a}^2 \leq \frac{a\left(1\right)}{\beta}u^2\left(t,1\right).$$

et d'aprés la définition de $|||\cdot|||_{1,a}$, on trouve

$$\beta\alpha\left(1\right)z^2\left(t,1\right) \leq |||\ z\ |||_{1,a}^2.$$

Donc

$$\beta\alpha(1)\, z^2(t,1) \leq \frac{a(1)}{\beta} u^2(t,1)\,.$$

Pour que

$$z^2(t,1) \leq \frac{1}{\beta^2} u^2(t,1) \leq \frac{2}{\beta^3 a(1)} E_u(t)\,. \tag{4.37}$$

D'autre part, nous avons, grâce à la deuxième inégalité en (4.22)

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 u_t(t,x)\, z(t,x)\, dx\right| &\leq \frac{1}{\beta\sqrt{\alpha_a}}\left(\int_0^1 \frac{u_t^2}{2} dx + \frac{\beta a(1)}{2} u^2(t,1)\right), \quad \forall t \in [S,T]\,. \\ &\leq \frac{1}{\beta\sqrt{\alpha_a}} E_u(t)\,.\end{aligned} \tag{4.38}$$

Nous utilisons (4.36)$-$(4.38) dans (4.35). Cela donne

$$\begin{aligned}\int_S^T a(1)\, u^2(t,1)\, dt &\leq \delta\left(1 + \frac{1}{\beta^3}\right)\int_S^T E_u(t)\, dt + \frac{1}{2\delta}\left(1 + \frac{1}{\beta\alpha_a}\right)\int_S^T a(1)\, u_t^2(t,1)\, dt \\ &+ \frac{1}{\beta\sqrt{\alpha_a}}\left(E_u(S) + E_u(T)\right).\end{aligned}$$

En utilisant maintenant (4.13) dans cette estimation, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_S^T a(1)\, u^2(t,1)\, dt &\leq \delta\left(1 + \frac{1}{\beta^3}\right)\int_S^T E_u(t)\, dt + \frac{1}{2\delta}\left(1 + \frac{1}{\beta\alpha_a}\right)\left(E_u(S) - E_u(T)\right) \\ &+ \frac{1}{\beta\sqrt{\alpha_a}}\left(E_u(S) + E_u(T)\right).\end{aligned}$$

Nous choisissons maintenant

$$\delta = \frac{(2-\mu_a)}{2\eta_2\left(1 + \frac{1}{\beta^3}\right)}.$$

Dans l'inégalité ci-dessus et combiner l'inégalité résultante en (4.34) pour obtenir

$$\int_S^T E_u(t)\, dt \leq M_{\alpha,\beta} E_u(s)\,. \tag{4.39}$$

Où

$$M_{\alpha,\beta} = \frac{2}{(2-\mu_a)}\left[2C_a'' + \frac{\eta_1}{a(1)} + \frac{\eta_2^2\left(1 + \frac{1}{\beta^3}\right)}{2-\mu_a}\left(1 + \frac{1}{\beta\alpha_a}\right) + \frac{2\eta_2}{\beta\sqrt{\alpha_a}}\right]. \tag{4.40}$$

■

Lemme 3 *[1] Supposons que $f : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ soit une fonction non-croissante et qu'il y ait une constante $M > 0$ telle que*

$$\textstyle\int_t^\infty f(s)\, ds \leq M f(t)\,, \quad \forall t \in [0,+\infty)\,.$$

Ensuite nous avons

$$f(t) \leq f(0)\, e^{\frac{1-t}{M}}, \quad \forall t \in [M,+\infty)\,.$$

L'application de ce résultat sur $f = E_u$ qui est non négatif, décroissante sur $[0,\infty)$ et satisfait (4.39), nous avons

$$E_u(t) \leq E_u(0)\, e^{\frac{1-t}{M_{\alpha,\beta}}}, \quad \forall t \in [M_{\alpha,\beta},+\infty)\,.$$

Bibliographie

[1] **ALABAU-BOUSSOUIRA. F**, **PIERMARCO. C**, **GUNTER. L**, Control and stabilization of degenerate wave equations, Mai 22, 2015.

[2] **ALLAIRE. G**, Analyse numérique et optimisation, Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau 2005.

[3] **ALLAIRE. G**, **ALOUGES. F**, Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles, École Polytechnique, année 2015_2016

[4] **BREZIS. H,** Analyse Fonctionnelle Théorie et Application, Masson, Paris, 1983.

[5] **KOMORNIK. V,** In Exact controllability and stabilization : The Multiplier Method, volume 36 of Collection RMA. Masson-John Wiley, Paris-Chicester, 1994.

[6] **PAZY**, Semigroups of linear operator and applications to partial diffrential equations. Applied Mathematical Sciences 44 Springer-Verlag, New York, 1983.

[7] **SAIDANE. R**, Sur l'explosion en temps fini des solutions de certains systèmes d'équatios parabolique dégénérées, mémoire dz magister, université Badji Mokhtar Annaba, 2010 – 2011.

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à étudier une équation des ondes avec une seule dimension spatiale et avec un coefficient de diffusion qui dégénère sur une partie de la frontière. La dégénérescence est mesurée par un paramètre réel μ_a. Nous établissons des inégalités d'observabilité pour cette équation et ainsi, en utilisant la méthode HUM, on déduit la contrôlabilité exacte du problème de contrôle correspondant. Nous concluons le document en étudiant la stabilisation frontière de l'équation considéré et nous montrons qu'un contrôle (feedback) appropriée stabilise le système de façon exponentielle.

Cette thèse est une synthèse du papier de Fatiha Alabau-Boussouira, Piermarco Cannarsa, Günter Leugering intitulé "Control and stabilization of degenerate wave equations " publié le 22 Mai 2015.

Mots clés : Equation des ondes dégénérée, Observabilité, Contrôlabilité, Stabilisation.

Abstract

We study a wave equation in one space dimension with a general diffusion coefficient which degenerates on part of the boundary. Degeneracy is measured by a real parameter μ_a. We establish observability inequalities and using the HUM method we deduce the exact controllability of the corresponding degenerate control problem. We conclude the paper by studying the boundary stabilization of the degenerate linearly damped wave equation and show that a suitable boundary feedback stabilizes the system exponentially.

This thesis can be viewed as a synthesis of the paper of Fatiha Alabau-Boussouira, Piermarco Cannarsa, Günter Leugering entitled "Control and stabilization of degenerate wave equations " published in May 22, 2015.
Key words : Degenerate wave Equation, Observability, Controllability, stabilization.