RÉPUBLIQUE ALGÉERIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE DJILALI BOUNAAMA KHEMIS-MILIANA

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et informatique

MÉMOIRE

Présenté par

ZERAIF Amani

Pour obtenir

LE DIPLOME DE MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse mathématique et applications

Intitulé

Convexité et symétrisation

Membres du jury:

Mr. Belkacem CHAOUCHI	Univ. de Djilali Bounaama Khemis Miliana	Président
Mr. Ali KRELIFA	Univ. de Djilali Bounaama Khemis Miliana	Examiateur
Mr. Omar BENNICHE	Univ. de Djilali Bounaama Khemis Miliana	Examiateur
Mr. Maamar BENBACHIR	Univ. de Djilali Bounaama Khemis Miliana	Encadrant

Résumé

Ce mémoire étendre l'inégalité de Hermite-Hadamard, l'inégalité de Féjèr à une classe de fonctions qui n'est pas nécessairement convexes.

En effet dans le premier chapitre il s'agit d'un rappel succinct sur les fonctions convexes avec une preuve très simple de l'inégalité de Hermite-Hadamard.

Le deuxième chapitre généralise ces résultats en particulier l'inégalité de Hermite-Hadamard à une classe supérieure.

Dans le troisième chapitre, une nouvelle approche qui peut être considérée comme une généralisation multivariée des deux méthodes présentées dans les chapitres un et deux, basé sur le groupe de permutations symétriques et sur les coordonnées barycentriques généralisées sur un polytope arbitraire convexe.

Cette technique de symétrisation permet la déduction de nouvelles inégalités de type Hermite-Hadamard.

Dédicace

Je dédie ce modèste travail

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral.

Source de la joie et de mon bonheur.

celui qui s'est toujours sacrifié pour ma réussite, que dieu le garde.

A toi Mon père

A la lumière de mes jours, source de mes efforts.

Ta prière et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études.

Maman que j'adore

A tous mes chers enseignants qui m'ont apporté le savoir et un enseignement exemplaire.

A ma grande-mère et mes chers frères, ma belle sœur et ma petite nièce Maria, a mes tantes et surtout tante Fafy.

A tous mes collègues de la promotion 2016-2017.

ZERAIF Amani

Remerciements

Tout d'abord, je remercie dieu pour la force, le courage et la connaissance qui m'a offert.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont participé de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier mon encadreur pour son aide et son soutien.

Je veux remercier également les membres du jury d'être présents à l'évaluation de mon travail.

Je remercie particulièrement mes ami(e)s: Hichem, Meriem, Sara, Hamida, Abdou, Tarik, Issam, Farid, Nabila, Djouher d'avoir été auprès de moi pendant tout le long de mon parcours.

ZERAIF Amani

Table des matières

Préambule

L'étude des fonctions convexes a permis de fournir un cadre dans lequel peut se résoudre toute une classe de problèmes d'analyse fonctionnelle non linéaire, les problèmes ainsi abordés sont des questions d'optimisation provenant de divers domaines: la mécanique, l'économie, les équations aux dérivées partielles et l'analyse numérique.

Compte tenu de la difficulté d'aborder de manière un peu générale les problèmes non linéaires, c'est là un rôle très important qui a motivé le développement autonome de la théorie.

Notre travail se compose de trois chapitres :

On commence tout d'abord, par le premier chapitre et donner quelques définitions et propriétés de base .

Le deuxième chapitre est consacré aux résultats principaux sur la fonction convexe et des exemples sur la convexité.

Dans le troisième chapitre, on discutera de la convexité, la symétrisation et la relation entre elles. Ce chapitre est subdivisé en six sections:

Dans la première on introduit le polytope convexe.

Dans la deuxième et la troisième, on établie et on donne des définitions sur la symétrisation des fonctions définies sur le polytope convexe.

Pour la quatrième section, on impose des hypothèses de convexité sur la symétrisation d'une fonction.

Dans la cinquième section on expose une méthode de symétrisation sous certaines hypotèses.

Et en dernier on va définir la fonction Wright-convexe et on donnera des applications sur cette fonction.

Chapitre 1

Autour de l'inégalité de Hermite-Hadamard

Sommaire

Dans ce chapitre, on reprend toutes les notions, définitions et résultats nécessaires pour la suite de notre travail.

1.1 Notations

Pour la suite, nous utiliserons les notations suivantes:

► $\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.

► $\mathbb{R}^d$: Espace euclidien de dimension d.

► $C(\Omega)$: Espace des fonctions réelles continues sur Ω.

► Ω : Désigne un polytope convexe non-vide.

► D : Domaine de définition de f.

► $I = [a, b]$: Un intervalle dans $\mathbb{R}$ avec $T > 0$.

► v : Vecteurs dans $\mathbb{R}^d$.

- $\lambda_i(x)$: Coefficients réels.
- S_n : L'ensemble des permutations.
- σ, τ : Permutations.
- T_σ : Une application.
- c_σ : Coefficiens positifs tels que leur somme est égale à 1.
- $V(X)$: L'ensemble des sommets.
- X : Un polytope.
- e_j : Projection des fonctions.
- μ : Mesure de probabilité.
- S : Un simplex non-dégénéré.
- $\forall$: Quantificateur universel.
- $\exists$: Quantificateur existentiel.

1.2 Abréviations

- $W-convexe$: Wright-convexe.
- $i.e$: C'est à dire.
- dim : Dimension.

1.3 Définitions et propriétés

Définition 1 *On dit qu'une fonction f est convexe sur un intervalle I, si pour tout $x, y \in I$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$.*

On a:

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Définition 2 *On dit qu'une fonction f est concave sur un intervalle I, si et seulement si $(-f)$ est une fonction convexe. C'est-à-dire, si pour tout $x, y \in I$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$.*

On a:

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Exemple 1 *La fonction $f : x \to |x|$ est convexe car,*

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= |\lambda x + (1-\lambda)y| \\ &\leq \lambda |x| + (1-\lambda) |y| \\ &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \end{aligned}$$

Exemple 2 *La fonction $f : x \to x^2$ est convexe car,*

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= (\lambda x + (1-\lambda)\, y)^{\,2} \\ &= \lambda^2 x^2 + (1-\lambda)^{\,2} y^2 + 2xy\lambda\,(1-\lambda) \\ &= \lambda^2 x^2 + y^2 + \lambda^2 y^2 - 2\lambda y^2 + 2xy\lambda\,(1-\lambda)\,, \end{aligned}$$

comme: $2xy \leq x^2 + y^2$ alors:

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq \lambda^2 x^2 + y^2 + \lambda^2 y^2 - 2\lambda y^2 + \left(x^2 + y^2\right) \lambda\,(1-\lambda) \\ &\leq \lambda^2 x^2 + y^2 + \lambda^2 y^2 - 2\lambda y^2 + \left(x^2 + y^2\right) \left(\lambda - \lambda^2\right) \\ &\leq \lambda x^2 + y^2 - \lambda y^2 \\ &\leq \lambda x^2 + (1-\lambda)\, y^2 \\ &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)\, f(y). \end{aligned}$$

Définition 3 *La fonction f est convexe sur I si sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.*

Proposition 1 *Soit la fonction f deux fois dérivable et continue sur un intervalle I alors, la fonction f est:*

- Convexe si $f''(x) \geq 0$.
- Concave si $f''(x) \leq 0$.

Proposition 2 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, alors on a l'inégalité suivante:*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f\,(x)\, dx \leq \frac{f\,(a) + f\,(b)}{2}, \tag{1.1}$$

qui est l'inégalité de Hermite-Hadamard qui a été prouvée en 1893.

Théorème 1 *On suppose que $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur I, alors pour tout $\lambda \in [0,1]$.*

On a:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq l(\lambda) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq L(\lambda) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{1.2}$$

où:

$$l(\lambda) := \lambda f\left(\frac{\lambda b+(2-\lambda)a}{2}\right) + (1-\lambda)\, f\left(\frac{(1+\lambda)\,b+(1-\lambda)\,a}{2}\right),$$

et:

$$L(\lambda) := \frac{1}{2}\left(f\left(\lambda b+(1-\lambda)\,a\right) + \lambda f(a) + (1-\lambda)\, f(b)\right).$$

Preuve. *On a:*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{\lambda b+(1-\lambda)a+\lambda a+(1-\lambda)b}{2}\right) \\ &\leq \frac{f(\lambda b+(1-\lambda)a)+f(\lambda a+(1-\lambda)b)}{2} \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \end{aligned}$$

On peut écrire:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(\lambda b+(1-\lambda)a)+f(\lambda a+(1-\lambda)b)}{2} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{1.3}$$

Soit f une fonction convexe sur I, on applique:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{1.4}$$

sur le sous-intervalle $[a, \lambda b+(1-\lambda)a]$ avec $\lambda \neq 0$

$$f\left(\frac{\lambda b+(2-\lambda)a}{2}\right) \leq \frac{1}{\lambda(b-a)}\int_a^{\lambda b+(1-\lambda)a} f(x)dx \leq \frac{f(\lambda b+(1-\lambda)a)+f(a)}{2}. \tag{1.5}$$

Appliquons 1.4 aussi sur $[\lambda b+(1-\lambda)a, b]$ avec $\lambda \neq 1$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{(\lambda+1)b+(1-\lambda)a}{2}\right) &\leq \frac{1}{(1-\lambda)(b-a)}\int_{\lambda b+(1-\lambda)a}^b f(x)dx \\ &\leq \frac{f(\lambda b+(1-\lambda)a)+f(b)}{2}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

on multiplie 1.5 par λ et 1.6 par $(1-\lambda)$ et on fait la somme:

$$\begin{aligned} &\lambda f\left(\frac{\lambda b+(2-\lambda)a}{2}\right) + (1-\lambda) f\left(\frac{(1+\lambda)b+(1-\lambda)a}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)+f(\lambda b+(1-\lambda)a)\right). \end{aligned}$$

Soit:

$$l(\lambda) = \lambda f\left(\frac{\lambda b + (2-\lambda)a}{2}\right) + (1-\lambda) f\left(\frac{(1+\lambda)\, b + (1-\lambda)\, a}{2}\right),$$

et:

$$L(\lambda) = \frac{1}{2}\left(f\left(\lambda b + (1-\lambda)\, a\right) + \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)\right).$$

Donc:

$$l(\lambda) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \leq L(\lambda),$$

et comme f est convexe alors:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq l(\lambda) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \leq L(\lambda) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

■

Corollaire 1 *On suppose que $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, alors on a l'inégalité suivante:*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \sup_{\lambda\in[0,1]} l(\lambda) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \leq \inf_{\lambda\in[0,1]} L(\lambda) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Où $l(\lambda)$ et $L(\lambda)$ sont définis dans le théorème 1.2.

Preuve. *Soient f et l des fonctions convexes sur $[0,1]$ tq:*

$$l(\lambda) = \lambda f\left(\frac{\lambda b + (2-\lambda)a}{2}\right) + (1-\lambda) f\left(\frac{(1+\lambda)\, b + (1-\lambda)\, a}{2}\right),$$

pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a:

$$\sup_{\lambda\in[0,1]} l(\lambda) = l(1) = f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

et soit L une fonction convexe sur $[0,1]$ tq:

$$L(\lambda) = \frac{1}{2}\left(f\left(\lambda b + (1-\lambda)\, a\right) + \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)\right),$$

pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a:

$$\inf_{\lambda\in[0,1]} L(\lambda) = L(0) = \frac{f(a)+f(b)}{2},$$

donc:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \sup_{\lambda\in[0,1]} l(\lambda),$$

et

$$\inf_{\lambda\in[0,1]} L(\lambda) \leq \frac{f\left(a\right)+f\left(b\right)}{2},$$

ce qui donne:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \sup_{\lambda\in[0,1]} l(\lambda) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)dx \leq \inf_{\lambda\in[0,1]} L(\lambda) \leq \frac{f\left(a\right)+f\left(b\right)}{2}.$$

■

Chapitre 2

Inégalité de Hermite-Hadamard pour des fonctions non-convexes

Sommaire

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions, propriétés et résultats fondamentaux sur la convexité.

2.1 Convexité par symétrisation

Notation 1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction arbitraire, on définit la nouvelle fonction:*

$$
\begin{aligned}
F &: [a,b] \to \mathbb{R} \\
x &\to F(x) = f(a+b-x) + f(x).
\end{aligned}
$$

Définition 4 *La fonction f est dite une convexité par symétrisation sur I si la fonction F est convexe.*

Théorème 2 *On suppose que la fonction F est convexe, alors on a les propriétés suivantes:*

1. Si f est une fonction convexe alors F est une fonction convexe aussi, mais l'inverse n'est pas vrai.

2. La fonction F est symétrique en $\frac{a+b}{2}$ pour tout x sur I, on a:

$$\forall x \in [a, b], F(a+b-x) = F(x).$$

3. $$\forall x \in [a, b], F\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq F(x) \leq F(a) = F(b) = f(a) + f(b).$$

4. La fonction F est croissante sur $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ et décroissante sur $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$.

Preuve. Propriété 2: Soit $x \in I$ et F une fonction convexe définie par:

$$F(x) = f(a+b-x) + f(x),$$

alors:

$$\begin{aligned} F(a+b-x) &= f(a+b-(a+b-x)) + f(a+b-x) \\ &= f((x) + f(a+b-x) \\ &= F(x), \end{aligned}$$

donc F est symétrique en $\frac{a+b}{2}$.

Propriété 3:

D'un coté on remplace $\frac{a+b}{2}$ par $\frac{a+b+x-x}{2}$ donc l'inégalité est:

$$F\left(\frac{a+b-x+x}{2}\right) \leq \frac{1}{2}F(a+b-x) + \frac{1}{2}F(x) = F(x).$$

Dans l'autre coté, on remarque que: $\forall x \in [a, b]$

$$x = \frac{x-a}{b-a}b + \frac{b-x}{b-a}a \quad / \quad \frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x}{b-a} = 1,$$

alors:

$$\begin{aligned} F(x) &= F\left(\frac{x-a}{b-a}b + \frac{b-x}{b-a}a\right) \\ &\leq \frac{x-a}{b-a}F(b) + \frac{b-x}{b-a}F(a) \\ &= F(a) = F(b). \end{aligned}$$

Propriété 4:

F est décroissante sur $[a, \frac{a+b}{2}]$.

En effet, soit $x, y \in [a, \frac{a+b}{2}]$ tq:

$$a \leq x \leq y \leq \frac{a+b}{2} \Rightarrow \exists \lambda \in [0,1] \quad / \quad y = \lambda x + (1-\lambda)\frac{a+b}{2}.$$

On a:

$$\begin{aligned} F(y) &= F\left(\lambda x + (1-\lambda)\frac{a+b}{2}\right) \\ &\leq \lambda F(x) + (1-\lambda) F\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &\leq \lambda F(x) + (1-\lambda) F(x) = F(x), \end{aligned}$$

donc F est décroissante.

$$F(y) \leq F(x).$$

F est croissante sur $[\frac{a+b}{2}, b]$.

Soit $x, y \in [\frac{a+b}{2}, b]$ tel que: $x \leq y$ donc $a+b-y, a+b-x \in [a, \frac{a+b}{2}]$, pour que:

$$a+b-y \leq a+b-x.$$

En utilisant le fait que F est décroissante sur $[a, \frac{a+b}{2}]$, on déduit que:

$$F(x) \leq F(y).$$

Cela nous permet de dire que F est croissante sur $[\frac{a+b}{2}, b]$. ■

Exemple 3 *On a la fonction f définie comme ce qui suit:*

$$\begin{aligned} &f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \\ &x \rightarrow f(x) = \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0, \end{aligned}$$

tel que: $a < 0 < b$, α_2 et $\alpha_3 > 0$ et $a + b > 0$ n'est pas nécessairement convexe sur I mais,

$$F(x) = f(a+b-x) + f(x),$$

est convexe ($F'' > 0$).

Preuve. On a :

$$F(x) = f(a+b-x) + f(x),$$

telle que:

$$f(x) = \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0.$$

D'abord on va calculer F'

$$F'(x) = -f'(a+b-x) + f'(x),$$

telle que:

$$f'(x) = 3\alpha_3 x^2 + 2\alpha_2 x + \alpha_1.$$

Ensuite on va caluler F''

$$F''(x) = f''(a+b-x) + f''(x),$$

telle que:

$$f''(x) = 6\alpha_3 x + 2\alpha_2.$$

Donc:

$$\begin{aligned} F''(x) &= 6\alpha_3(a+b-x) + 2\alpha_2 + 6\alpha_3 x + 2\alpha_2 \\ &= 6\alpha_3(a+b) - 6\alpha_3 x + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 x > 0 \\ &= 6\alpha_3(a+b) + 4\alpha_2 > 0, \end{aligned}$$

car, $a+b>0$ et α_2 et $\alpha_3 > 0$.

Donc F est convexe. ■

Exemple 4 *Soit la fonction f tq:*

$$\begin{aligned} &f : [a,b] \to \mathbb{R} \\ &x \to f(x) = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

tq: $a < 0 < b$ et $a+b > 0$, n'est pas convexe sur I mais,

$$F(x) = f(a+b-x) + f(x),$$

est convexe.

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} F(x) &= f(a+b-x) + f(x) \\ &= \frac{e^{a+b-x} - e^{-(a+b)+x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

D'abord on va calculer F'

$$F'(x) = \frac{-e^{a+b-x} - e^{-(a+b)+x} + e^x + e^{-x}}{2}.$$

Ensuite on va caluler F''

$$\begin{aligned} F''(x) &= \frac{e^{a+b-x} - e^{-(a+b)+x} + e^x - e^{-x}}{2} \\ &= 2\left(\frac{e^{\frac{a+b}{2}} \cdot e^{\frac{a+b-2x}{2}} - e^{\frac{a+b-2x}{2}} \cdot e^{\frac{-(a+b)}{2}} + e^{\frac{a+b}{2}} \cdot e^{\frac{-(a+b)+2x}{2}} - e^{\frac{-(a+b)+2x}{2}} \cdot e^{\frac{-(a+b)}{2}}}{4}\right) \\ &= 2\left(\frac{e^{\frac{a+b-2x}{2}} + e^{\frac{-(a+b)+2x}{2}}}{2}\right)\left(\frac{e^{\frac{a+b}{2}} - e^{\frac{-(a+b)}{2}}}{2}\right) \\ &= 2ch\left(\frac{a+b}{2} - x\right) sh\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0. \end{aligned}$$

Alors: $F''(x) > 0$ donc F est convexe. ■

Théorème 3 *Soit f une fonction intégrable définie sur I avec F convexe, alors la fonction f satisfait l'inégalité de Hermite-Hdamard.*

Preuve. On a:

$$F(x) = f(a+b-x) + f(x).$$

1.

$$\begin{aligned} F\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(a+b-\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &= 2f\left(\frac{a+b}{2}\right). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(a+b-x) + f(x)dx \\ &= \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b \left(f(a+b-x)dx + \int_a^b f(x)\right) dx\right), \end{aligned}$$

on a:
$$\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$
alors:
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$
$$\begin{aligned}\frac{F(a)+F(b)}{2} &= \frac{f(a+b-a)+f(a)+f(a+b-b)+f((b)}{2} \\ &= f(a)+f(b).\end{aligned}$$
On a par hypothèse:
$$\begin{aligned} F\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)\,dx \leq \frac{F(a)+F(b)}{2} \Longleftrightarrow \\ 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq f(a)+f(b) \Longleftrightarrow \\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \end{aligned}$$

■

Théorème 4 *Soit f une fonction intégrable définie sur I avec F convexe, alors pour tout $\lambda \in [0,1]$.*

On a:
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq h(\lambda) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq H(\lambda) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2},$$
où:
$$h(\lambda) := \frac{\lambda}{2}\left[f\left(\frac{(2-\lambda)b+\lambda a}{2}\right)+f\left(\frac{\lambda b+(2-\lambda)a}{2}\right)\right]+\frac{(1-\lambda)}{2}\left[f\left(\frac{(1+\lambda)a+(1-\lambda)b}{2}\right)\right],$$
et:
$$H(\lambda) := \frac{1}{4}\left[f(a)+f(b)+f(\lambda b+(1-\lambda)a+f\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)\right].$$

Preuve. Soit F une fonction convexe sur I, on applique:
$$F\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)\,dx \leq \frac{F(a)+F(b)}{2}, \tag{2.1}$$
sur le sous-intervalle $[a, \lambda b+(1-\lambda)a]$ tq: $\lambda \neq 0$ on aura:
$$F\left(\frac{a+\lambda b+(1-\lambda)a}{2}\right) \leq \frac{1}{\lambda b+(1-\lambda)a-a}\int_a^{\lambda b+(1-\lambda)a} F(x)dx \leq \frac{F(a)+F(\lambda b+(1-\lambda)a)}{2}.$$

$$F\left(\frac{\lambda b+(2-\lambda)a}{2}\right) \leq \frac{1}{\lambda(b-a)}\int_a^{\lambda b+(1-\lambda)a} F(x)dx \leq \frac{F(a)+F(\lambda b+(1-\lambda)a)}{2}. \tag{2.2}$$

Appliquons aussi 2.1 sur le sous-intervalle $[\lambda b+(1-\lambda)a, b]$ tq: $\lambda \neq 1$ on aura:

$$F\left(\frac{\lambda b+(1-\lambda)a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-(\lambda b+(1-\lambda)a)}\int_{\lambda b+(1-\lambda)a}^{b} F(x)dx \leq \frac{F(\lambda b+(1-\lambda)a)+F(b)}{2}.$$

$$F\left(\frac{(1+\lambda)b+(1-\lambda)a}{2}\right) \leq \frac{1}{(1-\lambda)(b-a)}\int_{\lambda b+(1-\lambda)a}^{b} F(x)dx \leq \frac{F(\lambda b+(1-\lambda)a)+F(b)}{2}. \tag{2.3}$$

On multiplie 2.2 par λ et 2.3 par $(1-\lambda)$ et en ajoutant les résultats des inégalités on aura :

$$\begin{aligned}
&\lambda F\left(\frac{\lambda b+(2-\lambda)a}{2}\right)+(1-\lambda)\,F\left(\frac{(1+\lambda)b+(1-\lambda)a}{2}\right)\\
&\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx\\
&\leq \lambda.\frac{F(a)+F(\lambda b+(1-\lambda)a)}{2}+(1-\lambda).\frac{F(\lambda b+(1-\lambda)b)+F(b)}{2},
\end{aligned}$$

et on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda}{2}\left[f\left(\frac{(2-\lambda)b+\lambda a}{2}\right)+f\left(\frac{\lambda b+(2-\lambda)a}{2}\right)\right]+\frac{(1-\lambda)}{2}\left[f\left(\frac{(1+\lambda)a+(1-\lambda)b}{2}\right)\right]\\
&\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\\
&\leq \frac{1}{4}\left[f(a)+f(b)+f(\lambda b+(1-\lambda)a+f\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)\right],
\end{aligned}$$

ce qui donne:

$$h(\lambda) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq H(\lambda).$$

La fonction F est convexe, on obtient alors:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq h(\lambda) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) \leq H(\lambda) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

■

Le théorème suivant généralise le théorème 1.2.

Corollaire 2 *Supposons que $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable définie sur I avec F convexe, on aura l'inégalité suivante:*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \sup_{\lambda\in[0,1]} h(\lambda) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq H(\frac{1}{2}) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Preuve. *Soient f et H des fonctions convexes sur $[0,1]$, tq:*

$$H(\lambda) := \frac{1}{4}\left[f(a) + f(b) + f(\lambda b + (1-\lambda)a + f\left(\lambda a + (1-\lambda)b\right)\right].$$

Alors on a:

$$\begin{aligned}
\frac{f(a)+f(b)}{2} &= \frac{2}{4}\left[f(a)+f(b)\right] = \frac{1}{4}\left[f(a)+f(b)\right] + \frac{1}{4}\left[f(a)+f(b)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[f(a)+f(b)\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) \\
&\geq \frac{1}{4}\left[f(a)+f(b)\right] + \frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\geq \frac{1}{4}\left[f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\
&\geq \frac{1}{4}\left[f(a)+f(b)+f\left(\frac{b}{2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)a\right)+f\left(\frac{a}{2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)b\right)\right] = H\left(\frac{1}{2}\right),
\end{aligned}$$

donc:

$$H\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2},$$

d'autre part soit h aussi une fonction convexe sur $[0,1]$, tq:

$$h(\lambda) := \frac{\lambda}{2}\left[f\left(\frac{(2-\lambda)b+\lambda a}{2}\right) + f\left(\frac{\lambda b+(2-\lambda)a}{2}\right)\right] + \frac{(1-\lambda)}{2}\left[f\left(\frac{(1+\lambda)a+(1-\lambda)b}{2}\right)\right],$$

pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a:

$$\sup_{\lambda\in[0,1]} h(\lambda) = h(1) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right] = f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

donc:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \sup_{\lambda\in[0,1]} h(\lambda),$$

ce qui donne:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \sup_{\lambda\in[0,1]} h(\lambda) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq H(\frac{1}{2}) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

■

Théorème 5 *Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $g : [a,b] \to [0,+\infty[$ une fonction intégrable et symétrique en $\frac{a+b}{2}$, alors on a l'inégalité suivante:*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b g(x)f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx,$$

qui est l'inégalité de Féjèr.

Preuve. L'inégalité de Féjèr a été établi pour $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et $g : I \to [0, +\infty[$ intégrable et symétrique en $\frac{a+b}{2}$.

Où on a les mêmes conditions avec F et g, alors on aura:

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b g(x)F(x)dx \leq \frac{F(a)+F(b)}{2}\int_a^b g(x)dx,$$

en utilisant la formule suivante:

$$F(x) = f(a+b-x) + f(x),$$

on aura donc:

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b g(x)F(x)dx \leq \frac{2\left[f(a)+f(b)\right]}{2}\int_a^b g(x)dx.$$
$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b g(x)[f(a+b-x)+f(x)]dx \leq [f(a)+f(b)]\int_a^b g(x)dx.$$

Le changement de variable: $x = a + b - x$ transforme:

$$\int_a^b g(x)f(a+b-x)dx,$$

en

$$\int_a^b g(a+b-x)f(x)dx,$$

et comme g, f sont symmetriques en $\frac{a+b}{2}$. on obtient:

$$\begin{aligned}\int_a^b g(a+b-x)[f(a+b-x)+f(x)]dx &= \int_a^b g(x)[f(x)+f(x)]dx \\ &= 2\int_a^b g(x)f(x)dx,\end{aligned}$$

donc:

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx \leq 2\int_a^b g(x)f(x)dx \leq [f(a)+f(b)]\int_a^b g(x)dx. \tag{2.4}$$

dévisons 2.4 sur (2) on obtient alors:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b g(x)f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx.$$

■

2.2 Applications

1. Soient a, b deux nombres réels tels que: $a+b>0$, on a: la fonction

$$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$$
$$x \to x^n.$$

Dans le cas général elle n'est pas convexe pour tous les entiers, mais la fonction F est convexe.

$$F_n : [a,b] \to \mathbb{R}$$
$$x_n \to f_n(a+b-x) + f_n(x).$$

D'après le théorème 3, on a:

$$f_n\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f_n(x)dx \leq \frac{f_n(a)+f_n(b)}{2} \tag{2.5}$$
$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b x^n dx \leq \frac{a^n+b^n}{2}.$$

2. Et comme:

$$b^{n+1} - a^{n+1} = |b-a| \sum_{k=0}^{k=n} a^k b^{n-k}. \tag{2.6}$$

Alors on a:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b x^n dx &= \frac{1}{b-a}.\frac{1}{n+1}[x^{n+1}]_a^b \\
&= \frac{1}{(b-a)(n+1)}(b^{n+1} - a^{n+1}) \\
&= \frac{1}{(b-a)(n+1)}(b-a)\sum_{k=0}^{k=n} a^k b^{n-k} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{k=n} a^k b^{n-k}.
\end{aligned}$$

Ce qui donne:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{k=n} a^k b^{n-k} \leq \frac{a^n+b^n}{2}.$$

C'est la généralisation de l'inégalité de Haber.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{k=n} a^k b^{n-k},$$

pour $n \in \mathbb{N}$ et a, b deux nombres réels positives.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$,tq: $a + b > 0$, on a la fonction:

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow a_0 + a_1 x^1 + ... + a_n x^n.$$

Où: $a_k > 0$ pour $k > 1$, n'est pas nécessairement convexe, mais la fonction

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow f(a + b - x) + f(x),$$

est convexe, selon le théorème 3 c'est le cas où les coefficients sont égales à 1 ($a_k = 1$), on a:

$$\sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{a+b}{2}\right)^k \leq \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{k=n} \int_a^b x^k dx \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=n} (a^k + b^k).$$

Chapitre 3

Symétrisation, convexité et applications

Sommaire

Dans ce chapitre, on introduit des notations, des définitions et des lemmes concernant la symétrisation et la convexité. Ce chapitre et organisé comme suit:

Dans la section 1, on a un rappel sur quelques notions sur la convexité et la symétrisation.

Dans la section 2, on introduit le polytope convexe.

Dans la section 3, on établie et on analyse la relation entre la permutation de la numération du groupe symétrique et les coordonnées barycentriques.

Dans la section 4, on donne des définitions de symétrisation pour toute fonction définie sur un polytope convexe arbitraire.

Dans la section 5, on impose une hypothèse de convexité sur la fonction de symétrisation.

Dans la section 6, on développe, sous certaines hypothèses sur le polytope, une version générale de la méthode de symétrisation.

En dernier dans la section 7, on va définir les fonctions Wright-convexes et on va donner certaines applications.

3.1 Rappel

3.1.1 Inégalité de Jensen

Forme discrète

Théorème 6 [(1)] *Soient f une fonction convexe et $(\lambda_1, \ldots.., \lambda_n)$ n-uplet de réels positifs tq:*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,$$

alors:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f\left(x_i\right).$$

Forme intégrale

Théorème 7 *Soient g une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et φ une fonction convexe dans $\mathbb{R}$, alors:*

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\left(g(x)\right)dx.$$

[(1)] Johan Ludwig Jensen, 1859-1925, Mathématicien amateur Danois. L'inégalité de Jensen apparait pour la première fois en 1906 dans un article publié par Jensen dans la revue Acta Mathematica. Pour découvrir sa biographie : http://www-groups.dcs.standrews.

ac.uk/history/Biographies/Jensen.html.

3.1.2 L'enveloppe convexe

Définition 5 [(2)] *Soit A une partie de E, l'envellope convexe de A est l'intersection de toutes les parties convexes de E qui contiennent A.*

Proposition 3 *L'enveloppe convexe de A est la plus petite partie convexe de E qui contient A.*

3.1.3 Simplexe

En géométrie, un simplexe ou n-simplexe est l'analogue du triangle en dimension n.

Un simplexe est l'enveloppe convexe d'un ensemble de $(n+1)$ points utilisés pour former un repère affine dans un espace affine de $\dim n$.

Dans le repère (o, i) on a: $[oi]$ est un segment $(\dim 1)$.

Dans le repère (o, i, j) on a: $[oij]$ est un triangle $(\dim 2)$.

Dans le repère (o, i, j, k) on a: $[oijk]$ est un tétraèdre (pyramide à base triangulaire) $(\dim 3)$.

On peut écrire de manière unique:

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i,$$

où λ_i sont les coordonnées barycentriques positives ou nulles de x relatives à $a_0, ..., a_n$.

3.1.4 Les coordonnées barycentriques

Soit E un espace affine de dimension égale à n. Soit $(P_0, ..., P_n)$ un repère affine sur E. On sait alors qu'il existe pour tout point P de E une famille (λ_i) de scalaires telle que:

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \neq 0,$$

et telle que P soit le barycentre de la famille$((P_1, \lambda_1), ..., (P_n, \lambda_n))$.

Alors les λ_i sont les coordonnées barycentriques de P dans le repère formé par les P_i, on écrit:

$$P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i.$$

(2) Wikipédie. L'encylopédie libre L'enveloppe convexe. https://fr.wikipedia.org/wiki/Enveloppe_convexe

3.1.5 Polytope

Définition 6 [(3)] *Dans l'espace $\mathbb{R}^n$, on distingue le polyèdre du polytope de la manière suivante: Le polyèdre P est un sous-espace défini par des hyperplans:*

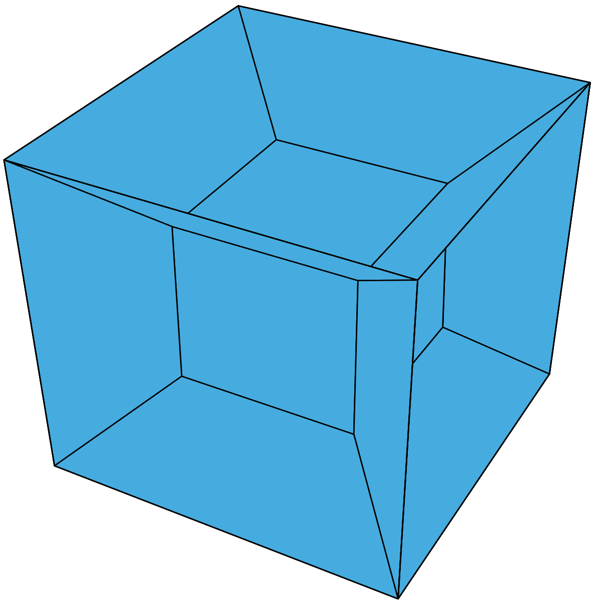
$$P = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b\},$$

où: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

Tandis que le polytope $\tilde{P}$ est une enveloppe convexe:

$$\tilde{P} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / x = \sum_i \lambda_i x_i, \quad \sum_i \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

En général on suppose qu'un polytope est un polytope convexe et borné.



Exemple d'un polytope: un hypercube

3.1.6 Sommet

Un sommet d'un polytope est un $0 - simplexe$.

Le sommet d'un angle est le point d'intersection des deux cotés de cet angle.

Le sommet d'un cône est le point d'intersection de toutes les génératrices de ce cône.

[(3)] Wikipédie. L'encylopédie libre. Polytope https://fr.wikipedia.org/wiki/Polytope

3.2 Introduction et préliminaires

Définition 7 *Soit Ω un polytope convexe non vide (qui est l'enveloppe convexe de $(n+1)$ sommets $\{v_0, v_1......, v_n\}$ dans $\mathbb{R}^d$). Et $v_0, v_1......, v_n$ sont des points qui peuvent être considérés dans l'espace vectoriel linéaire comme des vecteurs.*

La moyenne des sommets dans $V(\Omega)$ est le sommet du centre de gravité de Ω ou de:

$$V(\Omega) := \{v_i\}_{i=0}^{n}.$$

Définition 8 *Soit x un point arbitraire de Ω, on appelle coordonnées barycentriques de x par rapport à $V(\Omega)$ l'ensemble de coefficients réels $\{\lambda_i(x)\}_{i=0}^{n}$ relatif aux sommets de Ω, tels que les trois propriétés suivantes soient vérifiées:*

$$\lambda_i(x) \geq 0, \qquad i = 0, ..., n. \tag{3.1}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) = 1. \tag{3.2}$$

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) v_i. \tag{3.3}$$

Remarque 1 *Les coordonnées barycentriques existent pour les plus grands types de polytopes et ils peuvent perdre leur unicité pour polytope convexe quelconque.*

Et aussi les sommets v_i de la triangularisation du polytope Ω coïncide avec $V(\Omega)$.

Remarque 2 *Le polytope convexe Ω peut être triangularisé en utilisant uniquement les sommets de Ω. Et chaque triangulation de $V(\Omega)$ représente l'ensemble des coordonnées barycentriques, qui satisfait toutes les propriétés 3.1, 3.2 et 3.3 par la suite, on suppose que $\{\lambda_i\}_{i=0}^{n}$ est généré par une triangularisation de $V(\Omega)$.*

Dans 3.3, $\{\lambda_i\}_{i=0}^{n}$ satisfait la propriété:

$$\lambda_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}, \qquad (\forall i, j \in \{0, ..., n\}). \tag{3.4}$$

3.3 Permutations et les coordonnées barycentriques

D'abord, commençons par présenter quelques notations et définitions:

Notation 2 *L'ensemble de toutes les permutations sur* $\{0, 1, ..., n\}$ *est noté par* S_n*. Chaque permutation* $\sigma \in S_n$ *est une application:*

$$\sigma : \{0, ..., n\} \to \{0, ..., n\},$$

alors:

$$\{\sigma(0), ..., \sigma(n)\} \to \{0, ..., n\},$$

est un réarrangement de $\{0, ..., n\}$.

Il y a $(n+1)!$ permutations dans S_n.

Définition 9 *Chaque permutation* σ *génère une application:*

$$T_\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^d,$$

tq:

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) v_i,$$

alors, on peut définir pour tout x dans Ω :

$$\begin{aligned} T_\sigma(x) &:= T_\sigma\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) v_i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) v_{\sigma(i).} \end{aligned}$$

Remarque 3 T_σ *est bien définie, continue et satisfait la propriété* $T_\sigma(\Omega) \subset \Omega$ *pour toute* $\sigma \in S_n$*. Aussi on a:* Ω, $T_\sigma(\Omega)$, $V(\Omega)$ *et* $V(T_\sigma(\Omega))$ *sont reliées pour toute* $\sigma \in S_n$*.*

Et pour tout polytope X on utilise $V(X)$ comme notation pour désigner l'ensemble des sommets de X.

Proposition 4 *Pour toute* $\sigma \in S_n$*, l'application* T_σ *satisfait:*

$$T_\sigma(v_j) = v_{\sigma(j)}, \qquad \forall\, j \in \{0, ..., n\}. \tag{3.5}$$

$$T_{\sigma}\left(\Omega\right)=\Omega. \tag{3.6}$$

T_σ envoie les sommets de Ω aux sommets de $T_\sigma\left(\Omega\right)$ tq: le sommet de centre de gravité de Ω est:

$$V(T(\Omega)) := \{T_\sigma\left(v_i\right)\}_{i=0}^n.$$

C'est:

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n v_i = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n T_\sigma\left(v_i\right). \tag{3.7}$$

Preuve. Pour la première identité on a:

$$T_\sigma\left(x\right)=\sum_{i=0}^n \lambda_i\left(x\right)v_{\sigma(i)},$$

donc:

$$T_\sigma\left(v_j\right)=\sum_{i=0}^n \lambda_i(v_j)v_{\sigma\ (i)},$$

et comme:

$$\lambda_i(v_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & si\ i=j\\ 0 & si\ i\neq j\end{cases}, \qquad \left(\forall i,j\in\{0,...,n\}\right),$$

alors:

$$T_\sigma\left(v_j\right)=v_{\sigma(i)}=v_{\sigma(j)}, \qquad pour\ i=j.$$

Donc:

$$T_\sigma\left(v_j\right)=v_{\sigma\ (j)}, \quad \forall\ j\in\{0,...,n\}\,.$$

Pour la deuxième égalité: on doit prouver les doubles inculsions $T_\sigma\left(\Omega\right)\subset\Omega$ et $\Omega\subset T_\sigma\left(\Omega\right).$

On prend un élement quelconque $y\in T_\sigma\left(\Omega\right)$ alors, il existe $x\in\Omega$ tq:

$$y=T_\sigma\left(x\right),$$

on a par définition:

$$T_\sigma\left(x\right)=\sum_{i=0}^n \lambda_i(x)v_{\sigma\ (i)}=y.$$

Donc $y\in\Omega$, alors: $T_\sigma\left(\Omega\right)\subset\Omega.$

Pour l'inclusion inverse $\Omega\subset T_\sigma\left(\Omega\right)$, on prend $x\in\Omega$ tq:

$$x=\sum_{i=0}^n \lambda_i(x)v_i.$$

On définit:

$$\tilde{x} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_{\sigma^{-1}(i)}(\tilde{x}) v_{\sigma^{-1}(i)}.$$

Où:

$$\lambda_{\sigma^{-1}(i)}(\tilde{x}) := \lambda_i(x), \qquad i = 0, ..., n.$$

Donc $\tilde{x} \in \Omega$ et on a:

$$\begin{aligned} T_\sigma\left(\tilde{x}\right) &= T_\sigma\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_{\sigma^{-1}(i)}(\tilde{x}) v_{\sigma^{-1}(i)}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) v_i \\ &= x. \end{aligned}$$

Donc:

$$T_\sigma\left(\tilde{x}\right) = x,$$

ainsi $\Omega \subset T_\sigma\left(\Omega\right)$, ce qui donne:

$$T_\sigma\left(\Omega\right) = \Omega.$$

Pour la dernière égalité, on a:

$$\begin{aligned} T_\sigma\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} v_i\right) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} T_\sigma\left(v_i\right) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} T_\sigma\left(v_i\right). \end{aligned} \tag{3.8}$$

D'autre part on a:

$$\begin{aligned} T_\sigma\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} v_i\right) &:= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} v_{\sigma(i)} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} v_{\sigma(i)} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} v_i, \end{aligned} \tag{3.9}$$

de 3.8 et 3.9 on obtient:

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} v_i = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} T_\sigma\left(v_i\right).$$

■

Proposition 5 *Pour toute permutation $\sigma \in S_n$, l'application T_σ est un homéomorphisme de Ω sur lui-même. De plus on a:*

$$T_\sigma^{-1} = T_{\sigma^{-1}}. \tag{3.10}$$

Preuve. D'aprés la proposition 2 on a:

$$T_\sigma(\Omega) = \Omega.$$

Donc T_σ est surjective pour toute permutation $\sigma \in S_n$, l'injectivité est une conséquence de l'unicité des coordonnées barycentriques pour les simplexes.

En effet, la continuité de T_σ et $T_{\sigma^{-1}}$ découle du fait que, les coordonnées barycentriques d'un point sont des fonctions continues de ce point.

Finalement, on a: $T_{\sigma^{-1}}$ est l'inverse de T_σ c'est-à-dire:

$$T_{\sigma^{-1}}(T_\sigma(x)) = x,$$

pour tout x$\in \Omega$ on a:

$$T_\sigma(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) v_{\sigma(i)},$$

on obtient donc:

$$\begin{aligned} T_{\sigma^{-1}}(T_\sigma(x)) &= T_{\sigma^{-1}}\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) v_{\sigma(i)}\right) \\ &= T_{\sigma^{-1}}\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_{\sigma^{-1}(i)}(x) v_{(i)}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \lambda_{\sigma^{-1}(i)}(x) v_{\sigma^{-1}(i)} \\ &= x. \end{aligned}$$

■

Remarque 4 *Si $\sigma, \tau \in S_n$ alors:*

$$T_\sigma \circ T_\tau = T_{\sigma \circ \tau}.$$

Comme:

$$T_\sigma(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) v_{\sigma(i)},$$

alors:

$$\begin{aligned} T_\sigma \circ T_\tau (x) &= T_\sigma (T_\tau) \\ &= T_\sigma \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) v_{\tau(i)} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) v_{\tau(\sigma(i))} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) v_{\tau\circ\sigma(i)} \\ &= T_{\sigma\circ\tau} (x) , \end{aligned}$$

cela confirme l'égalité 3.10.

On définit l'ensemble des fonctions $\left\{ \tilde{\lambda}_{i,\sigma} \right\}_{i=0}^{n}$ pour toute permutation $\sigma \in S_n$ comme suit:

$$\tilde{\lambda}_{i,\sigma}(y) := \lambda_{\sigma(i)} (T_\sigma(x)) ,$$

Pour tout $i = 0, ..., n$ et pour tout y dans $T_\sigma (\Omega)$, tq:

$$y = T_\sigma(x).$$

Où $x \in \Omega$.

Proposition 6 $\left\{ \tilde{\lambda}_{i,\sigma} \right\}_{i=0}^{n}$ *définit un ensemble des coordonnées barycentriques de* $T_\sigma (\Omega)$ *et de* $\left\{ v_{\sigma(i)} \right\}_{i=0}^{n}$ *pour toute permutation* $\sigma \in S_n$.

Preuve. $\left\{ \tilde{\lambda}_{i,\sigma} \right\}_{i=0}^{n}$ définit un ensemble de coordonnées barycentriques, fixons une permutation $\sigma \in S_n$ et pour tout $y \in T_\sigma (\Omega)$ on a:

$$\tilde{\lambda}_{i,\sigma} (y) \geq 0, \qquad i = 0, ..., n. \tag{3.11}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \tilde{\lambda}_{i,\sigma} (y) = 1, \tag{3.12}$$

pour tout $y \in T_\sigma (\Omega)$, on a:

$$y = \sum_{i=0}^{n} \tilde{\lambda}_{i,\sigma} (y) \, v_{\sigma(i)}. \tag{3.13}$$

Et comme $y = T_\sigma(x)$ et à partir de 3.3 on a:

$$\begin{aligned} y &= T_\sigma(x) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (T_\sigma(x)) v_i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \lambda_{\sigma(i)} (T_\sigma(x)) v_{\sigma(i)}, \end{aligned}$$

on sait déjà que:

$$\tilde{\lambda}_{i,\sigma}(y) := \lambda_{\sigma(i)}(T_\sigma(x)),$$

donc:

$$y = \sum_{i=0}^{n} \tilde{\lambda}_{i,\sigma}(y) v_{\sigma(i)}.$$

■

Lemme 1 *Pour tout x dans Ω, et pour tout permutation τ, on a l'identité suivante:*

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_{\tau(i)}(x) = 1. \tag{3.14}$$

De plus, on a:

$$\frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_{\sigma(i)}(x) = \frac{1}{n+1}, \qquad \forall i \in \{0, ..., n\}. \tag{3.15}$$

Preuve. Pour la première identité, on a pour toute permutation $\tau \in S_n$:

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_{\tau(i)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x),$$

et comme:

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) = 1,$$

alors, on obtient:

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_{\tau(i)}(x) = 1.$$

Pour la deuxième identité, on a: $\sum_{\sigma \in S_n} \lambda_{\sigma(i)}(x)$ est indépendant de i pour toute permutation $\sigma \in S_n$. Alors:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_{\sigma(i)}(x) &= \frac{n! \sum_{i=0}^{n} \lambda_{\sigma(i)}(x)}{(n+1)!} \\ &= \frac{n! \sum_{i=0}^{n} \lambda_{\sigma(i)}(x)}{(n+1)n!} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{n} \lambda_{\sigma(i)}(x)}{(n+1)}. \end{aligned}$$

Comme: $\sum_{i=0}^{n} \lambda_{\sigma(i)}(x) = 1$, alors:

$$\frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_{\sigma(i)}(x) = \frac{1}{(n+1)}.$$

■

Proposition 7 *Le centre de gravité de Ω, se présente comme suit:*

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} v_i = T_\tau \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} v_i \right) \quad , \qquad (\forall \tau \in S_n). \tag{3.16}$$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} v_i = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in S_n} v_{\sigma(i)} \ , \qquad (\forall i = 0, ..., n). \tag{3.17}$$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} v_i = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in S_n} T_\sigma(x), \qquad (\forall x \in \Omega). \tag{3.18}$$

Preuve. Pour la première égalité on a: $\forall \tau \in S_n$

$$T_\tau \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} v_i \right) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} T_\tau(v_i).$$

D'aprés 3.7 on obtient alors:

$$T_\tau \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} v_i \right) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} v_i.$$

Pour la deuxième égalité on a pour tout $i = 0, ..., n$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in S_n} v_{\sigma(i)} &= \frac{n! \sum_{i=0}^{n} v_i}{(n+1)!} \\ &= \frac{n! \sum_{i=0}^{n} v_i}{n!(n+1)} \\ &= \frac{1}{(n+1)} \sum_{i=0}^{n} v_i. \end{aligned}$$

Pour la dernière égalité on a:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)!}\sum_{\sigma\in S_n} T_\sigma\left(x\right) &:= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{\sigma\in S_n}\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\left(x\right)v_{\sigma(i)}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\lambda_i\left(x\right)\left(\frac{1}{(n+1)!}\sum_{\sigma\in S_n}v_{\sigma(i)}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\lambda_i\left(x\right)\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}v_j\right)\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}v_j\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\left(x\right)\right)\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}v_j.
\end{aligned}$$

■

Remarque 5 *Pour toute permutation $\sigma \in S_n$, la proposition 2 montre que l'application T_σ envoie le sommet v_i en $v_{\sigma(i)}$. On remarque que le terme à droite de la dernière égalité dans la proposition 5 est indépendant de x, donc on remplace $x = v_i$ dans 3.18 on obtient donc:*

$$\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}v_j = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{\sigma\in S_n}T_\sigma\left(v_i\right) \tag{3.19}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{\sigma\in S_n}v_{\sigma(i)}, \qquad i = 0,...n. \tag{3.20}$$

3.4 Procédure de construction de la symétrisation

Définition 10 *La symétrisation d'une fonction arbitraire $f : \Omega \to \Omega$ est:*

$$\tilde{f}\left(x\right) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{\sigma\in S_n}f\left(T_\sigma(x)\right). \tag{3.21}$$

Pour toute permuatation σ l'application T_σ envoie Ω à Ω, donc: la fonction symétrisée 3.21 est bien définie.

Commençons par un exemple unidimensionnel d'une fonction symétrisée. On considère le cas $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

En remarquant que les coordonnées barycentriques d'un point x de Ω tq: $v_0 := a, v_1 = b$ sont donnés respectivement comme suit:

$$\lambda_0(x) = \frac{x-b}{a-b}.$$
$$\lambda_1(x) = \frac{x-a}{b-a}.$$

Quand: $n = 1$, on obtient seulement deux permutations:

$$\sigma_0(\{0,1\}) := \{0,1\}.$$
$$\sigma_1(\{0,1\}) := \{1,0\}.$$

Et c'est pourquoi, la fonction symétrisée 3.21 est réduite à la forme:

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x) + f(a+b-x)}{2}. \tag{3.22}$$

De plus, on peut vérifier que la fonction $\tilde{f}$ est symétrisée en $\frac{a+b}{2}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(a+b-\frac{a+b}{2}\right)}{2} \\
&= \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2} \\
&= \frac{2f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2} \\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right).
\end{aligned}$$

Et pour tous $x \in \Omega$ on a:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(a+b-x) &= \frac{f(a+b-x) + f(a+b-a-b+x)}{2} \\
&= \frac{f(a+b-x) + f(x)}{2} \\
&= \tilde{f}(x).
\end{aligned}$$

Alors dans ce cas, la procédure de symétrisation de définition 6 attribue à toute fonction f une fonction symétrique unique $\tilde{f}$.

On a les intégrales approximatives qui sont notées par:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \tilde{f}(x)dx.$$

Preuve. On a:

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x) + f(a+b-x)}{2},$$

on intègre par rapport à x sur $[a,b]$:

$$\begin{aligned}\int_a^b \tilde{f}(x)\,dx &= \int_a^b \frac{f(x)+f(a+b-x)}{2}dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_a^b f(x)+f(a+b-x)\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b 2f(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

car f est symétrique:

$$f(a+b-x)=f(x).$$

■

Lemme 2 *La fonction symétrisée* $\tilde{f}$ *d'une fonction affine* $f:\Omega\to\Omega$ *satisfait pour tous* $x\in\Omega$,

$$\tilde{f}(x)=f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}v_i\right) \tag{3.23}$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}f(v_i). \tag{3.24}$$

Preuve. Soit $\mathbb{C}(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles continues sur Ω.

On définit l'opérateur L dans $\mathbb{C}(\Omega)$ par la formule:

$$L(f)=\tilde{f}.$$

Si f est une fonction constante alors:

$$L(f)=f.$$

Cela montre que: l'égalité 3.23 et 3.24 sont satisfaites pour toutes les fonctions constantes.

Il reste à montrer que 3.23 et 3.24 pour les fonctions des projections: $e_j,\quad j=1,....,d$ définit par:

$$e_j : x=(x_1,....,x_d)\in\Omega\to x_j.$$

Pour toute fonction e_j, on a par définition:

$$\tilde{e}_j(x):=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{\sigma\in S_n}e_j(T_\sigma(x)).$$

Par la linéarité de $j - th$ la fonction de projection e_j et par la proposition 5, comme:

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in S_n} f\left(T_\sigma(x)\right).$$

Pour tous $x \in \Omega$ on a:

$$\tilde{e}_j(x) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in S_n} e_j\left(T_\sigma(x)\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} e_j(v_i) \tag{3.25}$$

$$= e_j\left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} v_i\right). \tag{3.26}$$

■

Remarque 6 *On note le produit scalaire dans* $\mathbb{R}^d$ *par:* $\langle .,. \rangle$, *et comme* f *est une fonction affine alors, on peut la présenter par la forme:*

$$f(x) = \langle a, x \rangle + b.$$

Pour $x \in \Omega$ et $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, donc:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x) &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in S_n} f\left(T_\sigma(x)\right) \\
&= \left\langle a, \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in S_n} T_\sigma(x) \right\rangle + b \\
&= \left\langle a, \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} v_i \right\rangle + b = f\left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} v_i\right) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \langle a, v_i \rangle + b = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f(v_i).
\end{aligned}$$

Théorème 8 *La fonction symétrisée* $\tilde{f}$ *de toute fonction convexe* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *satisfait pour tout* $x \in \Omega$ *les doubles inégalités suivantes:*

$$f\left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} v_i\right) \leq \tilde{f}(x) \leq \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f(v_i). \tag{3.27}$$

L'égalité est atteinte pour toutes les fonctions affines.

Preuve. En rappelant 3.18:

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} v_i = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in S_n} T_\sigma(x).$$

En appliquant l'inégalité de Jensen:

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i\right) &\leq f\left(\frac{1}{(n+1)!}\sum_{\sigma\in S_n} T_\sigma(x)\right) \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!}\sum_{\sigma\in S_n} f\left(T_\sigma(x)\right) \\
&\leq \tilde{f}(x).
\end{aligned}
$$

On obtient donc le coté gauche de 3.27

En utilisant aussi l'inégalité de Jensen de f pour prouver l'autre coté, en inversant l'ordre de sommation:

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(x) &:= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{\sigma\in S_n} f\left(T_\sigma(x)\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{\sigma\in S_n} f\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) v_{\sigma(i)}\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{\sigma\in S_n} f\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_{\sigma^{-1}(i)}(x) v_i\right) \\
&\leq \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{(n+1)!}\sum_{\sigma\in S_n} \lambda_{\sigma^{-1}(i)}(x)\right) f(v_i) \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(v_i).
\end{aligned}
$$

On obtient donc le coté droit de 3.27. Ce qui donne:

$$
f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i\right) \leq \tilde{f}(x) \leq \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(v_i).
$$

■

Remarque 7 *En utilisant la proposition 5, l'égalité 3.17 on va vérifié que:*

$$
\tilde{f}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i\right) := \frac{1}{(n+1)!}\sum_{\sigma\in S_n} f\left(T_\sigma\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i\right)\right) \tag{3.28}
$$

$$
= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{\sigma\in S_n} f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i\right) \tag{3.29}
$$

$$= f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i\right). \tag{3.30}$$

C'est-à-dire: la fonction f et sa fonction symétrisée $\tilde{f}$ prend la même valeur dans le centre de gravité.

On a le calcul suivant qui vérifie ces idéntitiés:

$$\tilde{f}(v_j) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{\sigma\in S_n} f\left(T_\sigma\left(v_j\right)\right).$$

On remplace v_j par x on obtient alors:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(v_j) &= \tilde{f}(x)\\ &= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{\sigma\in S_n} f\left(T_\sigma\left(x\right)\right)\\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(v_i).\end{aligned}$$

Donc:

$$\tilde{f}(v_j) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(v_i), \qquad j = 0, ..., n. \tag{3.31}$$

Le théorème révèle que la valeur minimale globale de $\tilde{f}$ dans Ω est atteinte dans le centre de gravité de Ω, alors que son maximum globale est atteint à chaque sommet de Ω.

Rappelant la loi: une fonction convexe atteint son maximum à un sommet de Ω. Cependant, la valeur minimale n'est pas nécessairement obtenue dans le centre de gravité.

Théorème 9 *Soit μ une mesure de probabilité sur Ω, alors la fonction symétrisée $\tilde{f}$ de toute fonction convexe f, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ satisfait les doubles inégalités suivantes:*

$$f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i\right) \leq \int_\Omega \tilde{f}(x)d\mu\left(x\right) \leq \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(v_i). \tag{3.32}$$

Preuve. On a:

$$f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i\right) \leq \tilde{f}(x) \leq \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(v_i).$$

on multiplie cette inégalité double par $d\mu(x)$ et on intègre les inégalités résultantes par rapport à x :

$$\int_{\Omega} f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i\right) d\mu\left(x\right) \leq \int_{\Omega} \tilde{f}(x) d\mu\left(x\right) \leq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(v_i)\right) d\mu\left(x\right)$$

$$\int_{\Omega} d\mu\left(x\right).f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i\right) \leq \int_{\Omega} \tilde{f}(x) d\mu\left(x\right) \leq \int_{\Omega} d\mu\left(x\right).\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(v_i)$$

$$f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i\right) \leq \int_{\Omega} \tilde{f}(x) d\mu\left(x\right) \leq \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(v_i).$$

■

Remarque 8 *Le coté droit et gauche de l'inégalité double 3.32 peuvent être écrit comme suit:*

$$f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i\right) = \tilde{f}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i\right),$$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(v_i) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} \tilde{f}(v_i).$$

Théorème 10 *Soit μ une mesure de probabilité sur Ω, la fonction symétrisée $\tilde{f}$ de toute fonction convexe $f : \Omega \to \mathbb{R}$ satisfait l'inégalité double suivante:*

$$\tilde{f}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i\right) \leq \int_{\Omega} \tilde{f}(x) d\mu(x) \leq \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} \tilde{f}(v_i). \tag{3.33}$$

L'égalité est atteinte pour toutes les fonctions affines.

3.5 Une version améliorée du résultat principal

Dans cette section, on commene par un exemple qui nous montre qu'une fonction non-convexe peut avoir une fonction symétrisée.Telle que la figure 1 illustre les coordonnées cartésiennes et barycentriques pour le triangle T (2-simplex dimensionnelle) des sommets: $v_1 = (0,0), v_2 = (2,0)$ et $v_3\,(1,3)$.

Les coordonnées barycentriques d'un point (x,y) de T respectivement a v_1, v_2, v_3 sont données comme suit:

$$\lambda_1\left(x,y\right) = \frac{6-3x-y}{6}.$$

$$\lambda_2\left(x,y\right) = \frac{3x-y}{6}.$$

$$\lambda_3\left(x,y\right) = \frac{y}{3}.$$

Ce calcul montre que:

$$\tilde{f}(x,y) = 0,$$

est la fonction symétrisée liée à la fonction

$$f(x,y) = (x-1)^3.$$

On a: $v_1 = (0,0)$ on calcule $\lambda_1(x,y)$ tq:$x = 0$ et $y = 0$

$$\lambda_1(0,0) = \frac{6 - 3\times 0 - 0}{6} = 1,$$

on calcule $\lambda_2(x,y)$:

$$\lambda_2(0,0) = \frac{3\times 0 - 0}{6} = 0,$$

on calcule $\lambda_3(x,y)$:

$$\lambda_3(0,0) = \frac{0}{3} = 0,$$

Donc $v_1 = (1,0,0)$.

On a: $v_2 = (2,0)$ on calcule $\lambda_1(x,y)$ tq:$x = 2$ et $y = 0$

$$\lambda_1(2,0) = \frac{6 - 3\times 2 - 0}{6} = 0,$$

on calcule $\lambda_2(x,y)$:

$$\lambda_2(2,0) = \frac{3\times 2 - 0}{6} = 1,$$

on calcule $\lambda_3(x,y)$:

$$\lambda_3(2,0) = \frac{0}{3} = 0.$$

Donc $v_2 = (0,1,0)$.

On a: $v_3 = (1,3)$ on calcule $\lambda_1(x,y)$ tq:$x = 1$ et $y = 3$

$$\lambda_1(1,3) = \frac{6 - 3\times 1 - 3}{6} = 0,$$

on calcule $\lambda_2(x,y)$:

$$\lambda_2(1,3) = \frac{3\times 1 - 3}{6} = 0,$$

on calcule $\lambda_3(x,y)$:

$$\lambda_3(1,3) = \frac{3}{3} = 1.$$

Donc: $v_3 = (0,0,1)$.

Alors, on remarque que f n'est pas convexe sur T, tant qu'elle est symétrisée.

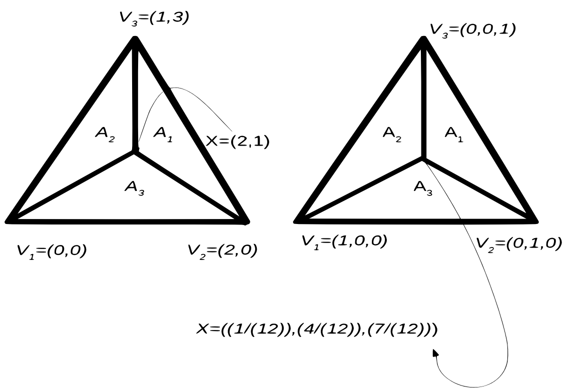


Figure 3.1: Les coordonnées cartésiennes (gauche) et les coordonnées barycentriques (droite).

Théorème 11 *Soit μ une mesure de probabilité sur Ω. Si la fonction symétrisée $\tilde{f}$ de f est convexe alors, on a les doubles inégalités suivantes:*

$$\tilde{f}\left(\int_{\Omega} x d\mu(x)\right) \leq \int_{\Omega} \tilde{f}(x) d\mu(x) \leq \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f(v_i). \tag{3.34}$$

Preuve. Pour l'inégalité à droite on a:

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) v_i,$$

donc:

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) v_i\right),$$

et d'aprés l'inégalité de Jensen on a:

$$\tilde{f}\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) v_i\right) \leq \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) \tilde{f}(v_i),$$

c'est-à-dire:

$$\tilde{f}(x) \leq \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) \tilde{f}(v_i).$$

Multipliant l'inégalité ci-dessus par μ et en intégrant sur Ω on obtient alors:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \tilde{f}(x)d\mu(x) &\leq \int_\Omega \sum_{i=0}^{n} \left(\lambda_i(x)\tilde{f}(v_i)\right) d\mu(x)\\ &\leq \sum_{i=0}^{n} \left(\int_\Omega \lambda_i(x)d\mu(x)\right)\tilde{f}(v_i),\end{aligned}$$

c'est-à-dire:

$$\int_\Omega \tilde{f}(x)d\mu(x) \leq \sum_{i=0}^{n} \left(\int_\Omega \lambda_i(x)d\mu(x)\right)\tilde{f}(v_i), \tag{3.35}$$

et comme:

$$\tilde{f}(v_i) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f\left(v_j\right),$$

alors:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \tilde{f}(x)d\mu(x) &\leq \sum_{i=0}^{n} \left(\int_\Omega \lambda_i(x)d\mu(x)\right)\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f\left(v_j\right)\\ &\leq \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f\left(v_j\right)\int_\Omega \sum_{i=0}^{n}\lambda_i(x)d\mu(x)\\ &\leq \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f\left(v_j\right)\int_\Omega d\mu(x)\\ &\leq \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f\left(v_j\right),\end{aligned}$$

car:

$$\sum_{i=0}^{n}\lambda_i(x) = 1.$$

Pour le coté gauche on a: μ une mesure de probabilité et x une fonction intégrable, aussi on a $\tilde{f}$ une fonction convexe donc, d'aprés l'inégalité de Jensen et pour tout $x \in \Omega$ on aura:

$$\begin{aligned}\tilde{f}\left(\int_\Omega x d\mu(x)\right) &\leq \int_\Omega \left(\tilde{f}\circ x\right)d\mu(x)\\ &\leq \int_\Omega \tilde{f}(x)d\mu(x).\end{aligned}$$

D'où:

$$\tilde{f}\left(\int_\Omega x d\mu(x)\right) \leq \int_\Omega \tilde{f}(x)d\mu(x) \leq \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f\left(v_i\right).$$

■

Corollaire 3 *Toute fonction symétrisée convexe satisfait l'inégalité sur un simplexe.*

Théorème 12 *Soit S un simplexe non dégénéré dans $\mathbb{R}^d$ avec les sommets $\{v_i\}_{i=0}^{d}$. Si la fonction symétrisée $\tilde{f}$ de f est convexe alors, on a le double inégalité:*

$$f\left(\frac{1}{d+1}\sum_{i=0}^{d} v_i\right) \leq \frac{1}{|S|}\int_S f(x)dx \leq \frac{1}{d+1}\sum_{i=0}^{d} f(v_i). \tag{3.36}$$

L'égalité est atteinte pour toutes les fonctions affines.

Preuve. On remarque que si S est un simplexe, alors le centre de gravité:

$$\frac{1}{|S|}\int_S x dx,$$

coincide avec les sommets de centre de gravité:

$$\frac{1}{d+1}\sum_{i=0}^{d} v_i,$$

donc:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{d+1}\sum_{i=0}^{d} v_i &= \frac{1}{|S|}\int_S x dx \\
f\left(\frac{1}{d+1}\sum_{i=0}^{d} v_i\right) &= f\left(\frac{1}{|S|}\int_S x dx\right) \\
&= \frac{1}{|S|} f\left(\int_S x dx\right) \\
&\leq \frac{1}{|S|}\int_S f(x)\, dx,
\end{aligned}$$

pour l'autre coté on a:

$$\begin{aligned}
\int_S f(x)dx &= \int_S f(T_\sigma(x))dx \\
\frac{1}{|S|}\int_S f(x)dx &= \frac{1}{|S|}\int_S f(T_\sigma(x))dx \\
&= \frac{1}{|S|}\int_S f\left(\sum_{i=0}^{d} \lambda_i(x) v_{\sigma(i)}\right) dx \\
&\leq \frac{1}{|S|}\int_S \sum_{i=0}^{d} \lambda_i(x) f\left(v_{\sigma(i)}\right) dx \\
&\leq \frac{1}{|S|}\sum_{i=0}^{d} \int_S \lambda_i(x) dx f\left(v_{\sigma(i)}\right) \\
&\leq \frac{1}{|S|}\sum_{i=0}^{d} f\left(v_{\sigma(i)}\right) \int_S \lambda_i(x) dx \\
&\leq \frac{1}{d+1}\sum_{i=0}^{d} f(v_i).
\end{aligned}$$

■

3.6 Les procédures générales de symétrisation

Les procédures de symétrisation devaient avoir une combinaison convexe avec des coefficients constants de toutes les fonctions $f(t_\sigma)$ où σ appartient à l'ensemble S_n.

Soit Ω un arbitraire polytope qui satisfait les conditions:

$$\int_\Omega \lambda_i(x)dx = \frac{|\Omega|}{n+1}, \qquad \forall i \in \{0, ..., n\} \tag{3.37}$$

Le théorème prouver ici concerne la version pondérée de la méthode de symétrisation des fonctions qui a la forme générale suivante:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{\sigma \in S_n} c_\sigma f(T_\sigma(x)). \tag{3.38}$$

où tous les coefficients $c_\sigma, \sigma \in S_n$ sont non négatifs et leur somme est égale à 1.

Pour faire la différence entre les deux techniques proposées de symétrisation 3.21 et 3.38 on appelle cette dernière fonction symétrisée pondérée.

On remarque que si les valeurs des coefficients c_σ sont tous égaux à $\frac{1}{(n+1)!}$ alors, la fonction de symétrisation donnée par la formule 3.38 coinside avec 3.21.

On dit qu'une formule d'intégration:

$$I[f] \approx \int_\Omega f(x)dx. \tag{3.39}$$

pour toute fonction affine on a toujours l'égalité dans 3.39.

Théorème 13 *Soit Ω un polytope qui satisfait les conditions:*

$$\int_\Omega \lambda_i(x)dx = \frac{|\Omega|}{n+1}, \qquad \forall i \in \{0, ..., n\},$$

alors, on a les instructions suivantes:

1. Le centre de gravité $\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega xdx$ coincide avec le centre de gravité $\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n v_i$.
2. La double inégalité de Hermite-Hadamard est satisfaite pour toutes les fonctions convexes:

$$f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n v_i\right) \le \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)dx \le \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n f(v_i).$$

3. Les deux numériques formules d'intégration:

$$\int_\Omega f(x)dx \approx |\Omega| f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i\right)$$
$$\int_\Omega f(x)dx \approx \frac{|\Omega|}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(v_i).$$

Théorème 14 *Soit Ω un polytope qui satisfait les conditions:*

$$\int_\Omega \lambda_i(x)dx = \frac{|\Omega|}{n+1}, \qquad \forall i \in \{0, ..., n\}.$$

Si la fonction symétrisée pondérée $\tilde{f}$ est convexe alors, on a le double inégalité est vrai:

$$\tilde{f}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i\right) \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \tilde{f}(x)dx \leq \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(v_i). \tag{3.40}$$

Preuve. D'aprés le théorème 11, on a le centre de gravité $\int_\Omega f(x)dx$ coincide avec les sommets de centroid $\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i$.

On commence par le coté gauche de l'inégalité, d'aprés l'inégalité de Jensen on a:

$$\tilde{f}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} (v_i)\right) \leq \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} \tilde{f}(v_i),$$

et comme:

$$\int_\Omega \lambda_i(x)dx = \frac{|\Omega|}{n+1},$$

alors:

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \lambda_i(x)dx,$$

donc:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} (v_i)\right) &\leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \lambda_i(x)dx \sum_{i=0}^{n} \tilde{f}(v_i) \\
&\leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x)\tilde{f}(v_i)dx \\
&\leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \tilde{f}\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x)v_i\right)dx \\
&\leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \tilde{f}(x)dx.
\end{aligned}$$

Car:

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x)v_i.$$

Pour le coté droit, on a pour tout $x \in \Omega$ en appliquant l'inégalité de Jensen:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= \tilde{f}\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) v_i\right) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) \tilde{f}(v_i),\end{aligned}$$

d'autre part on a:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{\sigma \in S_n} c_\sigma f(T_\sigma(x)),$$

remplaçant x par v_i on abtient alors:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(v_i) &= \sum_{\sigma \in S_n} c_\sigma f(T_\sigma(v_i)) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} c_\sigma f\left(v_{\sigma(i)}\right),\end{aligned}$$

donc:

$$\tilde{f}(x) \leq \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) \left(\sum_{\sigma \in S_n} c_\sigma f\left(v_{\sigma(i)}\right)\right).$$

On intègre l'inégalité ci-dessus sur Ω, on obtient:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \tilde{f}(x)\, dx &\leq \int_\Omega \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) \left(\sum_{\sigma \in S_n} c_\sigma f\left(v_{\sigma(i)}\right)\right) dx \\ &\leq \sum_{i=0}^{n} \int_\Omega \lambda_i(x) dx \left(\sum_{\sigma \in S_n} c_\sigma f\left(v_{\sigma(i)}\right)\right),\end{aligned}$$

comme:

$$\int_\Omega \lambda_i(x) dx = \frac{|\Omega|}{n+1},$$

alors:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \tilde{f}(x)\, dx &\leq \sum_{i=0}^{n} \frac{|\Omega|}{n+1} \left(\sum_{\sigma \in S_n} c_\sigma f\left(v_{\sigma(i)}\right)\right) \\ &\leq \frac{|\Omega|}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{\sigma \in S_n} c_\sigma f\left(v_{\sigma(i)}\right)\right) \\ &= \frac{|\Omega|}{n+1} \sum_{\sigma \in S_n} c_\sigma \left(\sum_{i=0}^{n} f\left(v_{\sigma(i)}\right)\right) \\ &= \frac{|\Omega|}{n+1} \left(\sum_{i=0}^{n} f(v_i)\right) \sum_{\sigma \in S_n} c_\sigma \\ &= \frac{|\Omega|}{n+1} \left(\sum_{i=0}^{n} f(v_i)\right).\end{aligned}$$

dévisons les deux inégalités sur $|\Omega|$:

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}\tilde{f}\,(x)\,dx \leq \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f\,(v_i)\,,$$

d'où:

$$\tilde{f}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i\right) \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}\tilde{f}(x)dx \leq \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(v_i).$$

■

Lemme 3 *Soit $c_\sigma, \sigma \in S_n$ des coefficients non négatifs dont la somme égale 1. Alors le centre de gravité de Ω peut être représenté comme suit:*

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i = \sum_{\sigma\in S_n} c_\sigma T_\sigma(x) \qquad (\forall x \in \Omega)\,. \tag{3.41}$$

Preuve. On a:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i &= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{\sigma\in S_n} T_\sigma\,(x)\\ &= \sum_{\sigma\in S_n}\frac{1}{(n+1)!}T_\sigma\,(x)\,,\end{aligned}$$

et comme:

$$c_\sigma = \frac{1}{(n+1)!},$$

alors:

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i = \sum_{\sigma\in S_n} c_\sigma T_\sigma(x).$$

■

Lemme 4 *La fonction symétrisée pondérée $\tilde{f}$ pour toute fonction affine $f : \Omega \to \mathbb{R}$ satisfait pour tout $x \in \Omega$:*

$$\tilde{f}(x) = f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i\right) \tag{3.42}$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(v_i). \tag{3.43}$$

Théorème 15 *Soit Ω un polytope qui satisfait les conditions de 3.37 si la fonction symétrisée pondérée $\tilde{f}$ est convexe alors, le double inégalité suivant est vrai:*

$$f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i\right) \leq \frac{\int_\Omega \tilde{f}(x)dx}{|\Omega|} \leq \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(v_i).$$

L' égalité est atteinte pour toutes les fonctions affines.

Remarque 9 *Le problème qui se pose maintenant concerne les conditions restrectives 3.37 pour les domaines, il doit être également possible de généraliser la fonction de symétrisation 3.38 pour les domaines, qui ne satisferont pas les conditions 3.37.*

3.7 Applications aux fonctions Wright-convex

Il ya plusieurs notions de convexité dans les domaines théoriques parmi elles la fonction Wright convexe.

Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est appelée Wright-convexe (W-convexe), si:

$$f\left(tx + (1-t)y\right) + f\left(ty + (1-t)x\right) \leq f(x) + f(y),$$

pour tout $x, y \in \Omega$ et $t \in [0, 1]$.

Toute fonction convexe est une fonction W-convexe mais l'inverse n'est pas vrai.

Cette fonction prouve que les résultats principaux de la section précédente restent vrais pour les fonctions W-convexes.

En effet, une fonction f est W-convexe si et seulement si elle peut être représentée dans le formulaire $f = g + a$ où g une fonction convexe et a une fonction additive tq: $a : \Omega \to \mathbb{R}$ satisfait l'égalité:

$$a(x + y) = a(x) + a(y),$$

pour tout $x, y, x + y \in \Omega$.

Lemme 5 *Soit $a : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction additive alors, pour tout $x \in \Omega$, la fonction symétrisée $\tilde{a}$ de a satisfait:*

$$a\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i\right) = \tilde{a}(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} a(v_i). \tag{3.44}$$

Preuve. Comme a est une fonction additive on a:

$$\begin{aligned} a\left(\sum_{j=0}^{n} v_j\right) &= a\left(\frac{n+1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} v_j\right) \\ &= (n+1)a\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} v_j\right), \end{aligned}$$

dévisons les deux égalités sur $(n+1)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1}a\left(\sum_{j=0}^{n} v_j\right) &= a\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} v_j\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} a(v_j), \end{aligned}$$

pour tout $x \in \Omega$ on a:

$$\begin{aligned} \tilde{a}(x) &:= \frac{1}{n+1}\sum_{\sigma\in S_n} a\left(T_\sigma(x)\right) \\ &:= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{\sigma\in S_n} a\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) v_{\sigma(i)}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!}a\left(\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) v_{\sigma(i)}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!}a\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x)\left(\sum_{\sigma\in S_n} v_{\sigma(i)}\right)\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!}a\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x)\left(n!\sum_{j=0}^{n} v_j\right)\right), \end{aligned}$$

et comme:

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) = 1,$$

alors:

$$\begin{aligned} \tilde{a}(x) &= \frac{1}{(n+1)!}a\left(n!\sum_{j=0}^{n} v_j\right) \\ &= \frac{n!}{(n+1)!}a\left(\sum_{j=0}^{n} v_j\right) \\ &= \frac{1}{n+1}a\left(\sum_{j=0}^{n} v_j\right) \\ &= a\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} v_j\right). \end{aligned}$$

D'où:

$$\tilde{a}(x) = a\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} v_j\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} a(v_j).$$

■

Théorème 16 *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction W-convexe, alors pour tout $x \in \Omega$ la fonction symétrisée $\tilde{f}$ associée satisfait:*

$$f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i\right) \leq \tilde{f}(x) \leq \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(v_i).$$

L'égalité est atteinte pour toutes les fonctions affines.

Théorème 17 *Soit μ une mesure de probabilité sur Ω alors, pour toute fonction W-convexe $f : \Omega \to \mathbb{R}$ la fonction symétrisée $\tilde{f}$ de f satisfait le double inégalité suivant:*

$$f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i\right) \leq \int_{\Omega} \tilde{f}(x)d\mu(x) \leq \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(v_i).$$

L'égalité est atteinte pour toutes les fonctions affines.

Bibliographie

[1] ***S. Dragomir***, Symmetrized convexity and Hermite-Hadamard type inequalities, RGMIA Reearch Report Collection, 17 (2014), Article1, 1-16.

[2] ***A. El Farissi, M. Benbachir, and M.Dahmane***, An extension of the Hermite-Hadamard inequality for convex symmetrized functions, Real Analysis Exchange Vol.38 (2012/2013), o2,469-476.

[3] ***A.Guessab and G. Schmeisser***,Convexity results and sharp error estimates in approximate ultivariate integration, Math.Comp.73 (2004), no.247, 1365-1384.

[4] ***S. Dragomir***, A refinement of Hadamard's inequality for isotonic linear functionals, Tamkang J.Math. (1) 34 (1993),101-106.

[5] ***A. El Farissi,*** Simple proof and refinement of Hermite-Hadamard inequality, J Math. Inequal 4(3) (2010), 365-369.

[6] ***J. Hadamard,*** Etude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann, J.Math.Pures Appl.58 (1893), 171-215.

[7] ***A.Guessab and G. Schmeisser***, Sharp integral inequalities of the Hermite- Hadamard type, J.Approx. Thepry, 115 (2002), 260-288.

[8] ***J.A.Kalman***, Continuity and convexity of projections and barycentric coordinates in convex polyhedra, Pacific J.Math. 11 (1961), 1017-1022.

[9] ***E.M.Wright***, An inequality for convex functions, Amer. Math. Monthly 61 (1954), 620-622.

[10] ***A.Guessab***, Generalized barycentric coordinates and approximations of convex functions on arbitary convex polytopes, Comput. Math. Appl. 66 (2013), no. 6, 1120-1136.